



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

Bruno Fernando Inchausp Teixeira

**Equações de difusão para objetos unidimensionais no  
contexto das teorias de Yang-Mills**

Niterói  
2014

Bruno Fernando Inchausp Teixeira

**Equações de difusão para objetos unidimensionais no contexto  
das teorias de Yang-Mills**

Tese apresentada, como requisito parcial  
para obtenção do título de Doutor, ao Pro-  
grama de Pós-Graduação em Física da Uni-  
versidade Federal Fluminense.

Orientador: Prof. Dr. Luis Esteban Oxman

Niterói  
2014

T266 Teixeira, Bruno Fernando Inchausp.

Equações de difusão para objetos unidimensionais no contexto das teorias de Yang-Mills/ Bruno Fernando Inchausp Teixeira ; orientador: Luis Esteban Oxman. –Niterói, 2014.

110f. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, 2014.

Bibliografia: p. 105-110.

1.TEORIA DE YANG-MILLS. 2.EQUAÇÃO DA DIFUSÃO.  
3.CONFINAMENTO (FÍSICA). 4.TEORIAS DE CAMPO EFETIVAS.  
I.Oxman, Luis Esteban, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável.  
III.Título.

CDD539.72

Bruno Fernando Inchausp Teixeira

**Equações de difusão para objetos unidimensionais no contexto  
das teorias de Yang-Mills**

Tese apresentada, como requisito parcial  
para obtenção do título de Doutor, ao Pro-  
grama de Pós-Graduação em Física da Uni-  
versidade Federal Fluminense.

Aprovada em

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman (Orientador)  
Instituto de Física-UFF

---

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro  
Instituto de Física-UFF

---

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci  
Instituto de Física Armando Dias Tavares-UERJ

---

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães  
Instituto de Física Armando Dias Tavares-UERJ

---

Prof. Dr. Stefan Zohren  
Pontifícia Universidade Católica-PUC/RJ

Niterói  
2014

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela saúde e determinação que me deu para concluir esta tese.

Em segundo lugar, agradeço à minha família principal, que agora consiste na minha querida esposa e meu filho(a) que está a caminho. A eles dedicarei um espaço maior para os agradecimentos, mas que serão resumidos porque senão seria obrigado a escrever uma outra tese apenas para agradecer a eles. À minha esposa, amante e melhor amiga Cleice quero dedicar esta tese de doutorado assim como todos os momentos que passamos neste tempo que estamos juntos. À sua ajuda, compreensão, paciência, carinho, cuidados, companheirismo e amor, que foram simplesmente essenciais para que esta tese fosse construída. Incontáveis são as lembranças que tenho da demonstração destes sentimentos dela para comigo. Fora todas essas coisas maravilhosas que já comentei, ela ainda foi capaz de me presentear com um lindo bebê que encontra-se em pleno desenvolvimento dentro de seu ventre. Com certeza, é o fruto de um amor inabalável que sentimos um pelo outro, amor esse mais que incompreensível. Ele ainda tem poucos meses, mas é impressionante como é natural o surgimento de um amor pelo nosso filho sem ao menos vermos ele alguma vez. Amor incondicional e sem limites, que só um pai e uma mãe podem sentir. Obrigado por todos os momentos que você me fez sentir o homem mais feliz do mundo. Te amo mais que tudo!

Me faltam palavras para agradecer meu amigo, professor, orientador e conselheiro, Luis Esteban Oxman, desde que, ao longo deste quatro anos, tem me orientado com afincamento, seriedade e destreza. Sinto muito carinho pelas longas conversas que tivemos, onde me mostrou como devemos nos tornar bons pesquisadores. Obrigado por tudo que tem feito por mim desde que me conheceu.

Também dedico esta tese aos meus pais e minha família, desde que forneceram a base da qual sou feito hoje. Obrigado por tudo.

Aos amigos (irmãos), Gabriel da Costa Santos Rosa e Gustavo Moreira Simões agradeço a amizade, profissionalismo e discussões sobre os assuntos que norteiam esta tese. Foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho e com certeza serão futuros grandes nomes de nossa física nacional. Desejo sucesso!

Aos meus grandes amigos da UERJ, Marcos Vinicius (Sal) e Daniele, Anderson (Paracambi) e Denise, Yves (Ybas), Valdir (Bulmer) e Rafael (Mexicano) agradeço as bebedeiras, os abraços e os conselhos nos momentos mais difíceis. Vocês nunca serão esquecidos!

Aos amigos da UFF que, seja na cantareira bebendo todas, seja no próprio instituto (sóbrios, que fique claro isso hehe), sempre trouxeram boas gargalhadas, amizade, companheirismo e, de vez em quando, boas discussões de física. Alguns nomes são: Anderson Tomaz, Antônio, Leonardo, Thiago Caramês, Ingrid e Daiara.

Aos amigos latinos da UFF, Richard, Cynthia, Jonny e Ronald agradeço a amizade e as conversas que tivemos durante esses quatro longos anos.

Ao instituto de física da UFF agradeço o suporte para a realização de minhas atividades de doutorado.

Ao programa de pós-graduação em física agradeço por tudo o que fizeram por mim ao longo de minha estadia na UFF. Também agradeço muito às secretárias Valéria e Fernanda pela paciência comigo quando estou resolvendo problemas burocráticos.

À CAPES, ao CNPq e à FAPERJ agradeço pelo apoio financeiro fornecido durante o meu doutorado.

Finalmente, agradeço a todos que não estão nestes agradecimentos, mas que de alguma forma puderam contribuir para que esta tese pudesse ser realizada.

## RESUMO

TEIXEIRA, Bruno Fernando Inchausp. *Equações de difusão para objetos unidimensionais no contexto das teorias de Yang-Mills*. 2014. 111f. Tese (Doutorado em Física)-Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

O confinamento de quarks e glúons continua sendo um dos maiores problemas da Física atual, mesmo depois de passados 50 anos da criação da cromodinâmica quântica. Existem diversas abordagens que procuram uma explicação para este comportamento. Um destes cenários consiste na supercondutividade dual, proposta por G. t'Hooft em 1978. Aqui, ele discute como a condensação de objetos cromomagnéticos poderia originar um potencial linear entre cargas cromoeletricas. Este mecanismo é um dos mais aceitos atualmente e nos dirige à algumas perguntas cruciais: como estes objetos poderiam se tornar relevantes em teorias de Yang-Mills puras? quais os tipos de objetos que devemos levar em consideração para gerar as propriedades do potencial confinante? Embora a primeira pergunta seja difícil de responder, a segunda pode ser atacada por técnicas diferentes, suportadas pelas descrições na rede e por descrições efetivas de ensembles<sup>1</sup>. Nesta tese, me dedico a estudar uma classe de objetos que são bons candidatos a resolverem a segunda questão: monopólos e vórtices de centro. Quando estamos lidando com as teorias de Yang-Mills puras  $SU(N)$ , o problema consiste que, em nível clássico, estes defeitos são singulares. Porém, recebendo suporte da rede (nosso laboratório em teoria quântica de campos), podemos imaginar que, devido a flutuações quânticas do vácuo, estes objetos poderiam adquirir algumas propriedades dimensionais, como tensão, rigidez e interações que ajudariam a caracterizar o ensemble magnético nos levando a descrições de campos efetivas, que podem ser utilizadas para extrair a corda elétrica confinante. Utilizando técnicas oriundas da física de polímeros obtivemos equações de difusão que representam objetos unidimensionais, como vórtices de centro em 3D ou monopólos em 4D. O surgimento de uma derivada covariante abeliana, no caso do ensemble de vórtices de centro e instantons correlacionados em 3D, e de uma derivada covariante não abeliana, no caso do ensemble de monopólos coloridos em 4D, foi fundamental para gerar os modelos efetivos correspondentes. Acreditamos que estas equações de difusão poderão ser úteis, no futuro, para relacionar as propriedades do potencial entre quarks e aquelas de seus possíveis ensembles correspondentes.

Palavras-chave: Teorias de Yang-Mills, Equações de difusão, Confinamento, Teorias de campo efetivas.

---

<sup>1</sup>Resolvemos manter a palavra inglesa “ensemble”(que significa *coleção*) já que ela é bastante empregada em nosso meio acadêmico.

## ABSTRACT

Nowadays, quark and gluon confinement continues to be one of the most important problems in Physics. It remains unsolved, although 50 years have passed since the foundations of quantum chromodynamics. There are various approaches aimed at explaining this behaviour. One of them is the dual superconductor scenario proposed by G. t'Hooft in 1978. The general idea is that the condensation of chromomagnetic objects could originate a linear potential between chromoelectric charges. This is a promising mechanism that poses some crucial questions: how could these objects be relevant in pure Yang-Mills? what type of object would be needed in order to generate the properties of the confining potential? While the first question is very difficult, the second one can be approached by different techniques, guided by the lattice and effective ensemble descriptions. In this thesis, I've been working on some good candidates to solve the second question: monopoles and center vortices. When dealing with pure  $SU(N)$  Yang-Mills theory, the problem is that at the classical level these magnetic defects are singular. Nevertheless, supported by the lattice (our laboratory in quantum field theory), we can imagine that, due to quantum vacuum fluctuations, they could acquire dimensionful properties. The tension, stiffness, as well as possible interactions that characterize the magnetic ensemble lead to effective field descriptions, that could be used to extract the corresponding confining electric string. Based on techniques borrowed from the physics of polymers, we obtained diffusion equations that describe magnetic one-dimensional objects, such as center vortices in 3D and monopoles in 4D. The appearance of an Abelian covariant derivative, for an ensemble of chains in 3D, and a non Abelian one, in the case of coloured loops in 4D, was essential to generate the corresponding effective descriptions. We believe that these diffusion equations could be helpful in the future, to relate the properties of the interquark potential and those of the possible underlying ensembles.

Key-Words: Yang-Mills theories, Diffusion equations, Confinement, Effective field theories.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Divisão do espaço-tempo em uma rede tridimensional [57]. . . . .	26
Figura 2 -	Definições de coordenadas em uma plaqueta na ação de Wilson. . . . .	28
Figura 3 -	Razão de Creutz $\chi(R, R)$ versus $R$ para $\beta = 2.4$ para configurações de rede nas teorias completa, com projeção de centro $Z_2$ e para links $U(1)/Z_2$ [31]. . . . .	30
Figura 4 -	Visualização do cubo que contem um monopólo situado em seu centro e da corda de Dirac que corta diferentes plaquetas em uma determinada direção com fluxo $2\pi$ [63]. . . . .	38
Figura 5 -	Cadeia gaussiana contínua descrita pela curva $r(s)$ . Os pontos extremos da cadeia são representados por $r(0)$ e $r(N)$ [85]. . . . .	59
Figura 6 -	Par monopólo/anti-monopólo correlacionado com um par de vórtices de centro. . . . .	67
Figura 7 -	Vórtices de centro interagentes com comprimento fixo e orientações fixas que definem a probabilidade ponta-a-ponta $q(x, u, x_0, u_0, L)$ . . . . .	73

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	10
1	<b>O CONFINAMENTO E A IMPORTÂNCIA DOS DEFEITOS TO- POLÓGICOS</b> . . . . .	16
1.1	<b>As teorias de Yang-Mills <math>SU(N)</math></b> . . . . .	17
1.2	<b>Vórtices de Centro no contínuo e na rede</b> . . . . .	23
1.2.1	A linha de Wilson . . . . .	23
1.2.2	A simetria de centro e a rede . . . . .	26
1.2.3	Vórtices de centro no contínuo . . . . .	31
1.3	<b>Monopólos no contínuo e na rede</b> . . . . .	32
1.3.1	Monopólo de Dirac . . . . .	33
1.3.2	Monopólo de t'Hooft-Polyakov . . . . .	35
1.3.3	Monopólos sobre a rede . . . . .	37
1.4	<b>Teorias efetivas e confinamento</b> . . . . .	40
1.4.1	Operadores topológicos e suas propriedades . . . . .	41
1.4.2	O modelo de t'Hooft de vórtices de centro em $(2+1)D$ . . . . .	43
1.4.3	O modelo de Yang-Mills-Higgs . . . . .	44
1.5	<b>Decomposição de Cho: a introdução de defeitos</b> . . . . .	50
2	<b>EQUAÇÃO DA DIFUSÃO PARA VÓRTICES DE CENTRO EM 3D</b> . . . . .	55
2.1	<b>Teoria de campos de polímeros</b> . . . . .	56
2.1.1	O modelo da cadeia aleatória . . . . .	56
2.1.2	A cadeia gaussiana discreta e contínua . . . . .	58
2.1.3	Introduzindo efeitos de rigidez . . . . .	61
2.1.4	O modelo WLC . . . . .	63
2.2	<b>Instantons e vórtices de centro correlacionados</b> . . . . .	65
2.3	<b>Descrição de ensembles de vórtices e instantons correlacionados</b> . . . . .	68
2.4	<b>Probabilidade ponta-a-ponta para um único vórtice de centro em 3D</b> . . . . .	71
3	<b>EQUAÇÃO DA DIFUSÃO PARA LOOPS COLORIDOS EM 4D</b> . . . . .	82
3.1	<b>Ensemble de monopólos</b> . . . . .	83
3.2	<b>Estados coerentes</b> . . . . .	85
3.3	<b>A equação de Chapman-Kolmogorov com cor</b> . . . . .	88
3.4	<b>Equação da difusão com cor</b> . . . . .	90
3.5	<b>Descrição de campos efetiva em grandes distâncias</b> . . . . .	95
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	101
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	105

## INTRODUÇÃO

Na virada do século XIX, Lord Kelvin identificou duas nuvens que pairavam sobre a Física; a incapacidade de detecção do éter, pela aparente “falha” do experimento de Michelson-Morley; e o efeito da radiação de corpo negro, conhecida como catástrofe do ultravioleta. No século XX estas duas nuvens se dissiparam e deram origem a dois novos ramos da física; a relatividade especial (ou restrita), que indica como devemos reescrever nossas equações físicas para corpos em velocidades comparáveis com a da luz; e a mecânica quântica, uma teoria muito bem estabelecida que estuda como o mundo microscópico se comporta (perante perturbações e interações).

Exuberância e simplicidade são duas palavras um pouco distantes, mas no contexto da relatividade restrita se complementam de uma maneira incrível. Exuberância porque a riqueza de novas interpretações sobre o espaço e o tempo e a reformulação do conceito de simultaneidade foram ganhos enormes para a Ciência. Simplicidade porque seu formalismo é muito acessível e permite que trabalhem com ele de forma leve e compacta. Albert Einstein foi capaz de utilizar a constância da velocidade da luz, confirmada pelo experimento de Michelson-Morley, para nos explicar como corpos em grandes velocidades comportam-se no espaço-tempo [1]. A relatividade é fundamentada no princípio de que as equações físicas devem ser as mesmas para qualquer referencial inercial. Isto nos fornece um formalismo covariante de Lorentz para a escrita das equações relativísticas que é extremamente belo e elegante.

A mecânica quântica revolucionou a forma como estudamos o mundo microscópico. Do determinismo da mecânica ao probabilístico da quântica existe uma grande mudança de interpretação e pensamento. As grandezas posição e momento linear de uma partícula, que antes eram determinadas de forma exata em qualquer instante do movimento, agora passam a possuir uma certa incerteza na sua previsão (devido a Heisenberg). A quantização da energia por Max Planck, a dualidade onda-partícula de De Broglie, o experimento de Stern-Gerlach, o princípio da incerteza de Heisenberg, entre outras evidências, clamavam por uma nova interpretação do mundo microscópico e portanto foram a base para o entendimento e desenvolvimento da mecânica quântica. A partir de então, partículas passaram a ser descritas por campos e grandezas físicas foram promovidas a operadores, levando à interpretação das mesmas em uma forma probabilística. O formalismo fornecido pela mecânica quântica se mostrou muito eficiente e também explicava de forma clara os resultados obtidos experimentalmente. Sem sombra de dúvida, a mecânica quântica é uma das teorias mais revolucionárias da história da ciência, sendo hoje a base de qualquer equipamento moderno utilizado no cotidiano da população mundial.

Após passados alguns anos e algumas tentativas de se escrever uma equação de onda relativística, em 1927, Paul Dirac conseguiu realizar a quantização do campo eletromagnético promovendo os campos a operadores e escrevendo-os como combinações de operadores de criação e aniquilação [2]. Este procedimento ficou conhecido como segunda quantização, onde campos (que representavam partículas) ganhavam caráter de operadores e mostravam álgebras de comutadores assim como a posição e o momento linear em teorias de mecânica quântica não relativísticas. A partir de então a segunda quantização foi utilizada para a formulação da eletrodinâmica quântica (QED), uma teoria que descreve partículas fermiônicas carregadas eletricamente que interagem através da troca de partículas bosônicas (fótons). Porém, em 1950, R. Feynman conseguiu demonstrar que a quantização de uma teoria pode ser descrita por uma quantidade, que havia sido idealizada primordialmente por Dirac [3], cujo nome é *integral de caminho*, análogo a uma função de partição em mecânica estatística <sup>1</sup>. Através do formalismo da integral de caminho ele foi capaz de mostrar que toda a teoria da eletrodinâmica quântica podia ser derivada sem cálculos excessivos, ao contrário do que acontecia quando utilizava-se o formalismo da segunda quantização [4–7]. O sucesso da QED (do inglês “Quantum Electrodynamics”) é sem precedentes na história da física e fornece o suporte para que a teoria quântica de campos continue sendo uma área bastante ativa atualmente. A concordância experimental com os resultados teóricos da QED são realmente impressionantes chegando a mais de dez casas decimais.

Podemos entender a teoria quântica de campos como a teoria que explica a interação entre partículas através de mediadores, como fótons, bósons vetoriais, gluons ou gravitons. O grande resultado que conseguimos obter com a teoria quântica de campos advém da junção entre relatividade restrita e mecânica quântica, onde podemos variar o número de partículas do sistema devido à célebre equação relativística de energia de Einstein:  $E = mc^2$ . Esta equação nos mostra que podemos criar partículas a partir de energia, um fato que revolucionou o mundo microscópico.

Até a década de 60, os físicos sempre se deparavam com teorias que respeitavam nosso senso comum de que quanto mais nos afastamos de uma fonte de campo, menor a interação com ela. Isto era uma característica geral de todas as interações fundamentais até então, como o eletromagnetismo, a gravitação e a interação fraca. Contudo, na década de 60 a tecnologia dos aceleradores permitiu que fossem feitas experiências (espalhamentos inelásticos profundos) cada vez mais energéticas e pôde-se inferir a respeito da estrutura interna dos hádrons. Notou-se a presença de novas partículas e a elas deu-se o nome de *quarks* (nome cunhado por Murray Gell-Man em 1963, utilizando uma passagem do livro “Alice no país das maravilhas”: *Three quarks for Muster Mark!*). Só havia um “pequeno” grande problema: não conseguimos observar os quarks isoladamente

---

<sup>1</sup>Inclusive, este trabalho foi a tese de doutorado de Feynman no ano de 1942, apresentado na universidade de Princeton. Porém, ele só conseguiu publicar o trabalho completo no ano de 1948 (ver [4]).

na Natureza. Esta propriedade peculiar que estas estruturas possuem dão origem a dois fenômenos atuais extremamente importantes: a liberdade assintótica, apresentada por David Gross, Frank Wilczek e David Politzer em 1973 [8,9] e ao confinamento de quarks e gluons no interior dos hádrons, um assunto ainda em aberto na teoria quântica de campos. Aqui nasce um novo ramo da Física; a cromodinâmica quântica (ou QCD, do inglês “Quantum Chromodynamics”). O confinamento também pode ser definido como o fato de apenas observarmos estados de cor branca na natureza (a cor branca é o resultado da superposição de três cores dos quarks individuais, no caso dos bárions, ou uma cor e uma anti-cor no caso dos mésons).

A vantagem do método da integral de caminho, apresentada por Feynman, é mais expressiva quando tratamos com campos não abelianos. Afinal de contas, derivar uma teoria que já se conhecia muito bem (como a QED) não era um grande resultado, mas conseguir descrever de uma forma simples o processo de quantização de uma teoria clássica de campos era muito útil. Para teorias de calibre não abelianas as coisas ficam mais difíceis e grandes problemas surgem, como a multiplicidade das configurações de campos que são equivalentes. Este problema também aparecia em teorias de calibre abelianas, como o modelo de Higgs abeliano ou na teoria de Maxwell, mas uma fixação de calibre era, de certa maneira, fácil de ser implementada. Nas teorias de calibre não-abelianas os problemas eram mais graves e só puderam ser resolvidos com a proposta de quantização de Faddeev-Popov em 1967 [10]. Em 1978, Gribov mostrou que existem problemas quando fixamos o calibre de Landau, as chamadas *cópias de Gribov* [11]. Um pouco mais tarde foi mostrado que o processo de quantização de Faddeev-Popov poderia ser mantido para regiões ultravioletas do espectro, ou seja, no limite perturbativo da teoria de Yang-Mills. Além disso, no mesmo ano, Singer encontrou que o problema das cópias de Gribov se estendia para quaisquer outros calibres covariantes, e não exclusivamente o de Landau [12].

O problema do confinamento de quarks e gluons é atualmente um dos maiores da física básica e concorre a um prêmio de um milhão de dólares oferecido pelo Clay Mathematics Institute para quem consiga resolvê-lo (isto nos dá bons motivos para procurar alguma solução para ele). Podemos citar alguns métodos não perturbativos que estudam o confinamento, como a implementação do horizonte de Gribov [11,13], o comportamento infravermelho do propagador do gluon [14,15] e a condensação de defeitos magnéticos com o intuito de gerar o supercondutor dual proposto por G. t’Hooft em 1978 [16]. Trabalhos anteriores, dos físicos Y. Nambu e S. Mandelstam, já apresentavam indícios de que a idéia do supercondutor dual era bastante plausível [17,18]. Esse modelo propõe que objetos magnéticos poderiam condensar no vácuo das teorias de Yang-Mills, gerando o tubo de fluxo cromoeletrico capaz de confinar as cargas cromoeletricas (quarks). O maior problema é identificar quais seriam estes objetos e como tratá-los, o que não é uma tarefa

trivial.

Nesta tese, estamos interessados na exploração de modelos que são bons candidatos para explicar o surgimento de cordas confinantes no vácuo das teorias de Yang-Mills. A dificuldade em lidar com teorias de Yang-Mills puras  $SU(N)$  consiste no surgimento de defeitos magnéticos singulares, o que não nos permite obter diretamente objetos suaves que representem bem as características presentes em cordas confinantes. Uma maneira heurística de estudarmos como podemos gerar estas propriedades é através de formulações efetivas em teoria quântica de campos. Esta prática é muito comum e citamos, como modelo inspirador, o modelo de vórtices proposto por G. t’Hooft, onde se discute como podemos obter cordas confinantes em  $(2+1)D$  através da quebra espontânea da simetria de centro  $Z_N$  [16]. Dentro deste cenário, um modelo efetivo de Yang-Mills-Higgs proposto por L. Oxman procura discutir os diferentes estados da corda confinante entre quarks [19]. Neste modelo, na fase onde a simetria de calibre é quebrada espontaneamente, podemos descrever não somente a corda confinante entre pares de quark/anti-quark (vermelho/anti-vermelho, verde/anti-verde,...), mas também outros possíveis estados excitados. Em particular, mésons híbridos formados pela união de pares quark/anti-quark com cores distintas (por exemplo, vermelho/anti-verde) ligados a um gluon de valência (anti-vermelho/verde), que são escritos como configurações não abelianas. Enquanto o estado normal da corda confinante é um vórtice do modelo efetivo, o estado excitado é formado por um par de vórtices interpolados por um objeto topológico tipo monopólo, que é identificado com um gluon de valência [19]. Outro trabalho bastante interessante na literatura atual, foi a obtenção de uma tensão na corda confinante (que resulta em uma lei de área para o loop de Wilson) através de uma teoria de calibre abeliana efetiva e dual às teorias de Yang-Mills puras. A utilização de parâmetros dimensionais para escrever a lagrangiana efetiva assume o mesmo espírito que discutimos aqui, e a tensão na corda adquire uma dependência explícita destes parâmetros fenomenológicos [20].

Os modelos descritos acima constituem um dos eixos que norteiam esta tese, já que estaremos interessados em representá-los através de ensembles de objetos magnéticos apropriados. Isto nos dirige a um outro eixo da tese, que consiste justamente na análise da relevância dos objetos magnéticos através de cálculos feitos nas teorias de Yang-Mills puras descritas sobre a rede. A rede é fundamental para fornecer o suporte necessário para supormos ensembles de cadeias de vórtices de centro e monopólos correlacionados como descreveremos em nosso capítulo 2. Existem muitos trabalhos que indicam que monopólos são fundamentais para a descrição do vácuo das teorias de Yang-Mills [21–23]. Contudo, um cenário que contenha somente monopólos, não consegue explicar de forma convincente o porquê dos resultados de teorias de calibre na rede apresentarem o fenômeno da  $N$ -ality (que se refere a como o centro  $Z_N$  da representação fundamental de  $SU(N)$  é mapeado sobre as outras representações) e do “Casimir scaling” (a tensão na corda é

proporcional ao operador quadrático de Casimir, em distâncias intermediárias). Alguns trabalhos mostram que vórtices de centro são capazes de explicar sozinho tais fenômenos [24–28], mas quando tratados de forma unificada com monopólos na rede, produzem resultados muito mais satisfatórios [29–36]. Isto cria uma grande necessidade de um formalismo que consiga acomodar tanto monopólos quanto vórtices de centro.

Outro ponto relevante consiste em um tratamento das teorias de Yang-Mills puras  $SU(N)$  através da decomposição de Cho-Faddeev-Niemi [37,38]. Este procedimento auxilia na dualização da teoria e com isso é capaz de explicitar na ação de Yang-Mills, o setor correspondente aos defeitos. O problema do formalismo de Cho-Faddeev-Niemi é que ele só consegue implementar defeitos tipo monopólos e, segundo a rede, os resultados seriam melhores se tivéssemos um formalismo que pudesse acomodar também os vórtices de centro magnéticos. Com esta motivação, foi proposto, recentemente, um formalismo que consegue unificar tanto monopólos quanto vórtices de centro como defeitos magnéticos em uma base local no espaço de cor dos campos de calibre [39]. Neste formalismo monopólos e vórtices de centro são capazes de formar configurações tipo cadeias como proposto por J. Greensite em 2003 [40]. Realizando o tratamento dos campos de calibre em bases locais de cor o autor foi capaz de explicitar, através de um procedimento de dualização da teoria de Yang-Mills (assim como acontece em matéria condensada com o modelo de Villain), os defeitos magnéticos da teoria.

Uma das propostas deste trabalho de doutoramento é desenvolver técnicas capazes de representar o peso estatístico dos diferentes objetos unidimensionais que podem fazer parte dos diferentes ensembles mencionados. Este se mostrará como o elemento fundamental para obter modelos efetivos de vórtices e de Yang-Mills-Higgs discutidos anteriormente. Por exemplo, foi proposto em nosso primeiro trabalho um modelo efetivo (Yang-Mills  $SU(2)$  pura em 3D) consistindo de um ensemble de pares de instantons e anti-instantons conectados por pares de vórtices de centro [41]. A integração sobre o ensemble se torna possível somente quando lembramos que vórtices de centro são objetos tipo corda (em 3D) e atribuímos algumas características fenomenológicas como efeitos de rigidez, tensão e volume excludente. Esta escolha de parametrização para vórtices (ou objetos unidimensionais em geral) não é arbitrária no nível da literatura corrente, onde percebemos que existem trabalhos importantes que levam em consideração estes efeitos para o tratamento de objetos tipo corda [42,43]. Nesta tese, utilizamos algumas técnicas modernas de polímeros, baseados no modelo da “Wormlike Chain”, e fomos capazes de derivar uma equação de difusão para a probabilidade ponta-a-ponta de um vórtice de centro interagente. Os resultados mais importantes que obtivemos nesta primeira parte foi mostrar que os efeitos de rigidez são essenciais para controlar a obtenção da equação de difusão e o surgimento de uma derivada covariante abeliana dependente do campo vetorial externo. É importante notar que o tratamento de cadeias com rigidez não é fácil nem

mesmo no caso não interagente, onde a análise é feita através de cálculos de momentos da distribuição de probabilidade, onde a inclusão dos efeitos de campos externos sobre o sistema torna-se impraticável [44]. O surgimento natural desta derivada covariante, como veremos, nos permitiu generalizar o modelo de G. t'Hooft para vórtices. Este conjunto de avanços nos rendeu nosso primeiro artigo que será exposto no capítulo 2 desta tese de doutorado [41].

Na segunda parte desta tese, nosso interesse se voltou para uma discussão dos modelos de Yang-Mills-Higgs em 4D [19], mencionados acima, seguindo um procedimento similar desenvolvido em nosso primeiro trabalho. Como as características não abelianas deste modelo são fundamentais para descrever todos os estados da corda confinante (inclusive estados excitados), fomos levados a investigar como incluir informação não abeliana em um ensemble de monopólos em 4D. A inclusão de vórtices de centro em ensembles se torna impraticável em 4D, pois são objetos localizados sobre superfícies. O resultado mais importante aqui foi a obtenção de uma equação de difusão não abeliana, onde ocorre a grande afirmação do método desenvolvido no artigo anterior, que descreve o peso estatístico dos loops que carregam graus de liberdade de cor. Isto nos permitiu obter todos os termos do modelo de Yang-Mills-Higgs que envolvem dois sabores. Este novo trabalho está submetido na revista *Journal of Physics A* aguardando aprovação [45].



## 1 O CONFINAMENTO E A IMPORTÂNCIA DOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Nosso senso comum nos diz que quanto mais afastados estamos de uma fonte de campo interagente, menor será essa interação. Isto era verdade para as interações eletromagnética, fraca e gravitacional. Porém, a física de partículas alcançava energias cada vez mais altas e com isso os constituintes internos dos hádrons puderam ser descobertos: os *quarks*.

Hoje sabemos um pouco mais sobre eles do que sabíamos na década de 60, mas ainda assim existem problemas a serem resolvidos, como o confinamento destes objetos no interior dos hádrons. Quando tentamos separar dois quarks o potencial de interação entre eles aumenta de forma linear, e quando eles estão próximos uns dos outros se comportam como partículas livres. Ao primeiro fenômeno damos o nome de confinamento, desde que não permite que dois quarks sejam separados (limite de baixas energias). Ao segundo é dado o nome de liberdade assintótica, desde que esta “liberdade” é alcançada quando estamos no limite da distância tendendo a zero (limite de altas energias).

Apesar do problema do confinamento ser antigo (quase 50 anos), sua solução parece ainda longe de nosso horizonte. A liberdade assintótica foi descoberta em 1973 [8,9] e já está muito bem fundamentada utilizando-se métodos de teoria quântica de campos perturbativa. O problema do confinamento consiste na sua natureza não perturbativa, desde que lidamos com energias baixas e altos valores da constante de acoplamento (o problema da “running coupling constant”, que mostra a dependência da constante de acoplamento da QCD com a energia). Neste regime de energias fica impossível realizarmos algum tratamento perturbativo sobre a teoria e necessitamos entender melhor outros procedimentos. Neste sentido, buscamos nesta tese apresentar o modelo da supercondutividade dual, idealizado anteriormente por Y. Nambu e S. Mandelstam [17,18], e proposto por G. t’Hooft em 1978 [16].

Existem diversas abordagens para atacar o problema do confinamento, como a dominância abeliana e a de centro, a implementação do horizonte de Gribov e o comportamento infravermelho do propagador do glúon. Na projeção abeliana, a fixação de calibre do setor não abeliano da teoria de Yang-Mills reduz a simetria de calibre para aquela do subgrupo maximal abeliano (MAG), enquanto que a dominância abeliana é uma hipótese que o setor abeliano da teoria deveria reproduzir as características físicas do sistema não abeliano [46]. Para Yang-Mills  $SU(N)$ , temos que o subgrupo maximal abeliano é o  $U(1)^{N-1}$ . O principal problema nos cenários que envolvem defeitos magnéticos consiste em determinar quais seriam os objetos que poderiam condensar para gerar o tubo de fluxo elétrico confinante. Este é um grande problema atual e ainda em aberto, mas que mostra importantes avanços quando estudados do ponto de vista da rede, nosso labo-

ratório de teoria quântica de campos para sistemas fortemente acoplados. A dominância de centro parte do mesmo princípio anterior, mas supõe que ao invés de uma dominância dada pelo subgrupo maximal abeliano  $U(1)^{N-1}$ , o subgrupo de centro  $Z_N$  de  $SU(N)$  é que seria o responsável por derivar o potencial tipo lei de área dado pelo laço de Wilson (a partir de agora chamado de loop de Wilson, nome muito mais usado por nossa comunidade científica) [31]. Embora não discutimos como poderíamos implementar em nossos cálculos os efeitos do horizonte de Gribov, podemos indicar os trabalhos originais sobre o assunto [11–13]. Quanto ao comportamento do propagador do glúon na região infravermelha do espectro sob a influência dos efeitos do horizonte de Gribov, podemos citar alguns trabalhos muito interessantes [14, 15].

Um formalismo alternativo e importante, que tornam explícitas as contribuições dos defeitos topológicos, é utilizado neste capítulo. A decomposição de Cho-Faddeev-Niemi permite que escrevamos os campos de calibre não abelianos em bases locais no espaço de cor. Através disso somos capazes de identificar o setor topológico da teoria (através de um processo de dualização) e identificar quais tipos de configurações topológicas poderiam ser úteis no contexto da supercondutividade dual de t’Hooft.

Podemos notar que dentro das perspectivas anteriores, o quadro do supercondutor dual leva em conta a presença e a condensação de objetos magnéticos topológicos para derivar um comportamento confinante em teorias de Yang-Mills. Neste capítulo iremos relatar todos os conceitos importantes necessários para entendermos a problemática do confinamento sob este ponto de vista. Apresentaremos as teorias de Yang-Mills ao leitor da maneira tradicional encontrada em diversos livros-texto e em seguida estudaremos como representar vórtices de centro e monopólos na rede, desde que é da rede que recebemos suporte para realizarmos nossas abordagens fenomenológicas. Discutiremos em detalhes os modelos sobre a condensação de vórtices de centro e falaremos sobre teorias efetivas de monopólos. Estes dois modelos serão as principais motivações (aliadas à rede) para introduzirmos nossas considerações nos próximos capítulos. A decomposição de Cho-Faddeev-Niemi, responsável por tornar o setor de defeitos topológicos acessível em teorias de Yang-Mills, será apresentada também em detalhes porque nos fornece ferramentas úteis para entendermos como podemos acoplar campos duais com o setor de defeitos topológicos nas teorias de Yang-Mills. Todas as discussões neste capítulo servirão para motivar nossas premissas nos capítulos seguintes.

## 1.1 As teorias de Yang-Mills $SU(N)$

No ano de 1954, C. N. Yang e R. L. Mills publicaram um trabalho intitulado “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance” onde desenvolveram uma teoria baseada no grupo não abeliano  $SU(2)$  capaz de explicar a conservação da corrente de spin isotópica devido à presença da simetria de rotação de spin isotópica [47]. O

desenvolvimento principal do artigo consistia na nova álgebra apresentada pelos campos de calibre que adquiriam um caráter não abeliano e por isso a construção do tensor de intensidades e o surgimento da simetria de calibre eram alterados de acordo com esta nova álgebra.

Hoje sabemos muito bem que o artigo de Yang-Mills proporcionou o aprofundamento dos estudos dos grupos  $SU(N)$  não abelianos. As teorias baseadas nesses grupos são denominadas de *teorias de Yang-Mills*. Os grupos  $SU(N)$  são constituídos por matrizes  $N \times N$ , unitárias ( $UU^\dagger = 1$ ) e de determinante  $\det U = 1$  (por isso chamado, em inglês, de “Special Unitary Group”).

Apresentaremos aqui apenas as teorias de Yang-Mills  $SU(N)$ , sem nos atentar à sua construção. A semelhança com teorias de calibre abelianas é bem grande e ajuda na fácil assimilação dos conceitos. Começamos com a lembrança de uma teoria de calibre abeliana: a teoria eletromagnética de Maxwell. Após isso generalizamos as definições para campos de calibre não abelianos. Considere então a densidade lagrangiana de Maxwell,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu, \quad (1.1)$$

com,  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , sendo o tensor intensidade de campo de Maxwell, que é anti-simétrico ( $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ). O campo de calibre  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  é abeliano, indicando que  $[A_\mu, A_\nu] = 0$ . Das equações de Euler-Lagrange, extraímos duas equações de Maxwell não homogêneas,

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \quad (1.2)$$

onde  $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$  é a corrente de interação responsável por acoplar com o campo de calibre  $A^\mu$ . As outras duas equações homogêneas podem ser derivadas considerando a definição do tensor dual  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$  juntamente com a identidade  $\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$ . A lagrangiana de Maxwell é invariante perante a transformação de calibre (local)

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x). \quad (1.3)$$

Aqui podemos comentar brevemente sobre o conceito de fixação de calibre. A equação (1.3) mostra que o campo de calibre  $A_\mu$  possui uma multiplicidade que a densidade lagrangiana não percebe (no caso  $j_\mu = 0$ ). Precisamos realizar um procedimento que consiste em escolher apenas um campo de calibre dentre os infinitos possíveis e escrever a integral de caminho unicamente com este campo, sem sobrecontar infinitos graus de liberdade desnecessários. Este procedimento é conhecido como fixação de calibre e é imprescindível

para que consigamos integrar corretamente o funcional para a teoria de Maxwell.

Para realizar a fixação de calibre na teoria de Maxwell iremos utilizar o calibre de Landau (ou de Lorentz),

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad (1.4)$$

que pode ser introduzido na lagrangiana (1.1) da seguinte maneira,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 + j_\mu A_\mu. \quad (1.5)$$

Pode-se mostrar que o operador presente na lagrangiana, e conseqüentemente na equação de campo, pode ser invertido (o que não era possível quando não tínhamos fixado o calibre de Landau). A importância deste aspecto vem do fato que o inverso do operador que está presente na teoria original dá origem à função de Green, elemento responsável por descrever propagadores e gráficos de Feynman.

Quando estamos tratando de algum tipo de matéria que sofra interação com o campo eletromagnético existe a necessidade de introduzir o conceito de acoplamento mínimo e, conseqüentemente, de derivada covariante. Por exemplo, quando estamos lidando com bósons carregados eletricamente (representados por um campo escalar complexo) escrevemos uma densidade lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + V(\phi, \phi^*), \quad (1.6)$$

onde escolhemos  $V(\phi, \phi^*) = \frac{m^2}{2}|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4$  sendo o célebre potencial de P. Higgs que dá origem às massas dos bósons de calibre através de uma quebra espontânea de simetria [48]. O fato do campo ser complexo permite que as partículas bosônicas deste modelo adquiram cargas elétricas [49]. A derivada que aparece na expressão (1.6) é conhecida como *derivada covariante* e é definida por  $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$ . Ela é criada para manter a invariância da lagrangiana perante as transformações de calibre

$$\phi(x) \longrightarrow e^{ie\Lambda(x)}\phi(x), \quad \phi^*(x) \longrightarrow \phi^*(x)e^{-ie\Lambda(x)}, \quad (1.7)$$

juntamente com a transformação (1.3). Toda a álgebra vista até agora pertence ao grupo  $U(1)$  abeliano (teoria eletromagnética).

Considere agora a densidade lagrangiana da teoria de Yang-Mills pura pertencente ao grupo  $SU(N)$

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (1.8)$$

onde  $\text{Tr}$  denota o traço sobre os índices do grupo  $SU(N)$  e  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$  é o tensor de intensidades escrito na base dos geradores  $T^a$ , que para  $SU(2)$  são as três matrizes de Pauli e para  $SU(3)$  são identificados como as oito matrizes de Gell-Mann. A semelhança com a teoria de Maxwell é evidente, nos indicando que existem muitas similaridades com os campos abelianos. O tensor  $F_{\mu\nu}^a$  é definido por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.9)$$

com  $f_{abc}$  sendo as constantes de estrutura definidas pela álgebra de Lie do grupo  $SU(N)$ , dada por

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (1.10)$$

Em (1.8) utilizamos a seguinte propriedade dos geradores

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (1.11)$$

Uma outra propriedade importante do tensor  $F_{\mu\nu}$  é

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu], \quad (1.12)$$

com  $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$ ,  $A_\mu = A_\mu^a T^a$ , sendo a derivada covariante não abeliana. Aqui, utilizamos a álgebra do grupo  $SU(N)$  apresentada na relação (1.10). A lagrangiana de Yang-Mills apresenta uma invariância sob a seguinte transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}, \quad (1.13)$$

que produz uma transformação também no tensor  $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (1.14)$$

É fácil ver que a lagrangiana (1.8) é invariante perante a transformação do tensor  $F_{\mu\nu}$

devido à propriedade cíclica do traço e sabendo que  $U$  representa uma matriz unitária pertencente ao grupo  $SU(N)$  (logo  $UU^\dagger = 1$ ). Sabemos que os elementos do grupo  $SU(2)$ , por exemplo, podem ser escritos como  $U(x) = e^{i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}}$ , onde  $\vec{\sigma}$  são os geradores do grupo (matrizes de Pauli),  $\vec{\eta}(x)$  são os parâmetros do grupo que possuem o vínculo  $|\vec{\eta}| = 1$  e  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Agora que mostramos as teorias de Yang-Mills do ponto de vista clássico, devemos ainda realizar a sua quantização através do método da integração funcional. Nesta tese, estaremos sempre lidando com o formalismo da integral de caminho para realizar tal quantização, embora existam outros formalismos (como, por exemplo, o formalismo *canônico*). O formalismo da integral de caminho surgiu de forma concreta no ano de 1950 com o trabalho de R. Feynman sobre a teoria quântica da interação eletromagnética ou também conhecida como QED [4]. A idéia básica é realizar uma soma sobre todas as configurações de campos possíveis. Obviamente, a sua representação dependerá do modelo que está sendo analisado assim como das classes de campos que estão sendo consideradas. A função de partição é dada por

$$Z(J) \propto \int \prod_i [\mathcal{D}\Phi_i] e^{i[S[\Phi_i] + \int d^D x J_{\Phi_i} \Phi_i]}, \quad (1.15)$$

onde a medida de integração  $\prod_i [\mathcal{D}\Phi_i]$  representa a integração sobre todos os tipos de campos  $\Phi_i$  presentes na teoria. A ação funcional  $S[\Phi_i]$  traz consigo todas as informações sobre o sistema e o termo  $J_{\Phi_i}$  é designado para a corrente de interação externa para cada campo  $\Phi_i$  responsável pelas perturbações externas sobre o sistema. O objetivo é determinar para quais valores dos campos ela é máxima (ou seja, extremizando a ação  $S[\Phi_i] + \int d^D x J_{\Phi_i} \Phi_i$ , processo conhecido como “saddle-point approximation”), e após isso realizar algumas perturbações nos termos de interação. A partir da integral obtemos os diagramas de Feynman que levam à representação das seções de choque para o espalhamento de partículas. Na “saddle-point approximation” deixamos a maior contribuição no caminho clássico (idéia primordial de Landau), enquanto os desvios desta aproximação são denominados de *flutuações quânticas* (correções de Ginzburg) [50].

Assim, em teorias de Yang-Mills, levando em conta que temos apenas a presença de um campo de calibre não abeliano  $A_\mu$ , podemos escrever a integral de caminho como (no espaço euclidiano, após realizar uma rotação de Wick [51])

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}} = \int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int d^D x Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})}. \quad (1.16)$$

Devemos escolher um calibre para fixar a multiplicidade dos campos de calibre. A escolha que fazemos novamente é o de Landau,

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad \partial_\mu A_\mu^a T^a = \partial_\mu \left( U A_\mu^a T^a U^{-1} + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} \right) = 0. \quad (1.17)$$

É bastante útil agora definirmos o que é uma órbita de calibre de uma configuração de campo  $A_\mu$ : é o conjunto de todas as configurações fisicamente equivalentes, que podem ser obtidas de uma configuração  $A_\mu$ , através de uma transformação de calibre como (1.13). O ideal então é que possamos selecionar apenas configurações não equivalentes. Para que isto aconteça, dado um  $A_\mu$ , a equação (1.17) deveria possuir somente uma solução para  $U$ . Em 1978, Gribov mostrou que a equação (1.17) possuiria soluções para  $U$ , ao considerar certas configurações de campo  $A_\mu$ , que são conhecidas como cópias de Gribov [11]. Acredita-se que no regime não perturbativo da teoria de Yang-Mills estas cópias explicariam, se tratadas com muito cuidado, o confinamento de gluons. Pode-se citar alguns trabalhos relevantes que buscam explicar a dinâmica de gluons na região de Gribov (ver [52] e suas referências). Não vamos mostrar o procedimento de quantização fornecido por Faddeev e Popov em 1967, mas indicamos ao leitor algumas referências bem tradicionais que demonstram como realizar este tratamento de fixação do calibre [10, 53–55]. A ação de Faddeev-Popov, ou seja, a quantização do setor perturbativo da teoria de Yang-Mills, é dada por

$$S_{FP} = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right]. \quad (1.18)$$

Reescrevendo a função de partição de Yang-Mills como

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}b \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S_{FP}}. \quad (1.19)$$

Os campos  $b^a$ ,  $\bar{c}^a$  e  $c^a$  são conhecidos como campos fantasmas, ou *ghosts de Faddeev-Popov*. Eles são campos fermiônicos auxiliares introduzidos na teoria através da reescrita de um determinante, o *determinante de Faddeev-Popov*. A ação de Faddeev-Popov possui uma simetria adicional conhecida como BRST, nome em homenagem aos pesquisadores que a descobriram [56, 57]. É possível utilizar esta simetria para derivar todo o espectro da teoria de Yang-Mills na região perturbativa.

Agora que apresentamos as teorias de Yang-Mills, estamos aptos a introduzir algumas idéias de como representar vórtices de centro e monopólos sobre a rede. Este é um dos pilares que sustentam o ponto de vista apresentado nesta tese. Então, nas próximas seções iremos focar nossa atenção sobre estes dois objetos magnéticos, que são muito cotados para resolver o problema do confinamento. Daremos suas definições sobre a rede e no limite do contínuo, com o intuito de entendermos procedimentos posteriores, prin-

principalmente quando formos discutir sobre a supercondutividade dual de t'Hooft e sobre o modelo de Yang-Mills-Higgs.

## 1.2 Vórtices de Centro no contínuo e na rede

Trabalhos importantes identificam os vórtices de centro como objetos cruciais para condensar no vácuo de Yang-Mills sob a luz do mecanismo de t'Hooft [16,24–28]. Portanto, um tratamento destes objetos será de grande valia para o entendimento da sua importância como defeitos que podem gerar confinamento em Yang-Mills. Começaremos definindo o que é a linha de Wilson. Em seguida apresentaremos um pouco sobre vórtices de centro na rede e alguns aspectos relevantes como *N*-ality e *Casimir scaling*. Finalmente, discutiremos sobre os vórtices de centro da maneira tradicional encontrada em diversos artigos importantes [28, 39, 40].

### 1.2.1 A linha de Wilson

Mandelstam e Yang enfatizaram que a interação de uma partícula com um campo de calibre envolve um fator de fase associado com qualquer linha de mundo possível que a partícula pode traçar [58, 59]. Porém, foi Kenneth Wilson que introduziu este conceito em teorias de Yang-Mills criando o famoso *critério de confinamento* [60]. Em teorias não abelianas, estes fatores de fase dependentes do caminho tornam-se matrizes no grupo de calibre. Se uma partícula de prova traça algum contorno no espaço-tempo, sua função de onda adquire um fator devido às interações eletromagnéticas (campos abelianos)

$$\psi \rightarrow \psi \exp \left[ ig \int_P A_\mu dx_\mu \right] = U(y, z; P)\psi, \quad (1.20)$$

onde  $y$  e  $z$  são os pontos extremos de um caminho  $P$  traçado pela partícula. Sob transformações de calibre, este objeto muda segundo a lei

$$U(y, z; P) \rightarrow e^{i\alpha(y)}U(y, z; P)e^{-i\alpha(z)}. \quad (1.21)$$

A linha de Wilson é bem simples para uma partícula em repouso

$$U(x, t; P) = \exp \left( igA_0(x)t \right), \quad (1.22)$$

com  $t$  sendo o tempo total do caminho. Aqui, vemos que a partícula ganha uma fase proporcional à sua carga,  $g$ , e o potencial escalar. Logo, sua energia é aumentada pelo



potencial escalar  $A_0$ . A definição (1.20) generaliza este conceito para qualquer referencial de Lorentz. Como o contorno  $P$  é unidimensional no espaço-tempo, damos o nome da quantidade  $U(y, z; P)$  de *linha de Wilson*. A linha de Wilson possui uma propriedade importante: ela depende do caminho  $P$  [61].

Podemos generalizar a linha de Wilson para teorias não abelianas. Contudo, o problema aqui surge quando consideramos exponenciais de matrizes não comutantes. Seja  $s$  um parâmetro que representa o caminho  $P$ , que vai de 0 em  $x = y$  à 1 em  $x = z$ . Então definimos a linha de Wilson como a expansão em série de potências da exponencial, com as matrizes em cada termo ordenadas “temporalmente” com o parâmetro  $s$  (este procedimento é conhecido como ordenamento de caminho). Assim, escrevemos a linha de Wilson como

$$U(y, z; P) = P \left\{ \exp \left[ ig \int_0^1 ds \frac{dx_\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) T^a \right] \right\}, \quad (1.23)$$

com  $x_\mu \equiv x_\mu(s)$ . Estamos prontos agora para definir o *loop* de Wilson. Se considerarmos um caminho que seja um contorno fechado  $C$ , podemos escrever (para campos abelianos)

$$U(y, y; C) = \exp \left[ - ig \oint_C dx_\mu A_\mu(x) \right] \equiv W(C), \quad (1.24)$$

onde  $W(C)$  representa o loop de Wilson para uma curva fechada  $C$ . Podemos ver facilmente que esta quantidade é invariante de calibre sob a transformação do campo  $A_\mu$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.25)$$

isto para o caso abeliano. Se consideramos a definição da linha de Wilson não abeliana e buscarmos um mesmo caminho para encontrarmos o loop de Wilson, vemos que precisamos de um pouco mais de cuidado.

Para a linha de Wilson não abeliana, escrevemos

$$U(y, z; P) \rightarrow V(y) U(y, z; P) V^\dagger(z), \quad (1.26)$$

porém esta transformação sozinha (propriedade de holonomia) não é capaz de tornar  $W(C)$  invariante de calibre. Para resolver este problema K. Wilson sugeriu uma definição para um loop (hoje chamado de loop de Wilson) como

$$W_C[A] = \frac{1}{d} \text{Tr} \left[ P \left( e^{ig \oint_C dx^\mu A_\mu} \right) \right]. \quad (1.27)$$

onde  $d$  é a dimensão da representação dos quarks. Notamos que

$$W_C[A^V] = \frac{1}{d} \text{Tr} \left[ V(a) W_C[A] V^{-1}(b) \right], \quad (1.28)$$

mas se lembrarmos da propriedade cíclica do traço e identificarmos os pontos  $a$  e  $b$  que são os extremos da curva, teremos imediatamente que

$$W_C[A^V] = W_C[A], \quad (1.29)$$

o que mostra a invariância de calibre do loop de Wilson (com o grupo de calibre  $SU(2)$ ). Este resultado é fundamental para nós desde que uma quantidade que seja invariante de calibre passa a ser um observável físico. O loop de Wilson é crucial para que possamos definir o que é um vórtice de centro e este será o nosso próximo tópico. Antes, precisamos dizer o porquê da importância deste invariante de calibre como critério de confinamento. A questão óbvia que podemos fazer sobre confinamento é: qual a energia de um estado com um quark em  $x = 0$  e um anti-quark em  $x = R$ ? Para isso, considere um sistema formado por um par quark/anti-quark separados por uma distância  $R$ . Este par é criado no instante  $t = 0$  e aniquilado no instante  $t = T$ . Pode-se mostrar, para  $T$  muito grande, que o loop de Wilson, adquire a forma [62]

$$W[C] \sim \exp \left[ -T(E(R) + 2m_0) \right], \quad (1.30)$$

com  $m_0$  sendo a massa do quark. Se o potencial satisfaz  $E(R) \rightarrow \sigma R$  quando  $R \rightarrow \infty$ , onde definimos a quantidade  $\sigma$  como sendo a tensão na corda, chegamos à uma dependência do tipo lei da área para o loop de Wilson

$$W[C] \sim e^{-\sigma A[C]}, \quad (1.31)$$

onde  $A[C] = RT$  é a área mínima das superfícies limitadas por  $C$ . Se a teoria não apresenta comportamento confinante, então a lei para o loop de Wilson passa a ser tipo perímetro

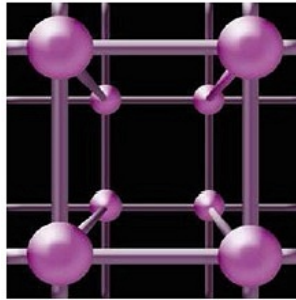


Figura 1: Divisão do espaço-tempo em uma rede tridimensional [57].

$$W[C] \sim e^{-\mu P[C]}, \quad (1.32)$$

com  $P[C]$  sendo o perímetro da curva  $C$  e  $\mu$  é uma tensão linear. A condição (1.31) é chamada de *critério de confinamento de Wilson* e é muito importante para modelos que buscam encontrar algum caráter confinante em teorias de Yang-Mills [60].

### 1.2.2 A simetria de centro e a rede

Quando trabalhamos no limite do contínuo, as divergências em uma teoria são praticamente inevitáveis. Geralmente, precisamos fixar calibres, regularizar e renormalizar a teoria. Uma forma possível de regularizar consiste em discretizar o nosso espaço-tempo e trabalharmos no que chamamos de *rede*. Este nome se deve ao fato de dividirmos o espaço-tempo em quadrados de iguais tamanhos  $a$  (parâmetro de rede) e ele fica com o aspecto reticulado como mostra a figura 1. Neste momento, indicamos a referência [63] para uma excelente introdução ao confinamento sob a visão dos vórtices de centro.

Os pontos da rede são chamados de sítios, enquanto as linhas unindo estes pontos são conhecidas como *junções* (em inglês, “links”). Damos o nome de plaquetas ao quadrado formado pela união de quatro junções (ver Figura 2). Com isto, podemos denotar uma junção (ou, a partir de agora, link) por um sítio de rede na posição  $x$  e uma direção  $\hat{\mu}$ . Logo, o link deve ser contruído entre as posições  $x$  e  $x + \hat{\mu}$ . Nesta tese, estamos interessados em teorias de Yang-Mills, então assumimos que as variáveis de link são elementos do grupo  $SU(2)$  (por exemplo) e portanto escrevemos

$$U_{\mu}(x) = e^{iagA_{\mu}(x)}, \quad (1.33)$$

onde  $A_{\mu}(x) = A_{\mu}^a(x) \frac{\sigma^a}{2}$ . A ação euclideana que podemos montar com estas variáveis de link, deve ser da forma

$$S = -\frac{\beta}{2} \sum_{x, \mu < \nu} \text{Tr} \left[ U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right], \quad (1.34)$$

desde que ela é invariante perante a transformação de calibre de  $SU(2)$

$$U_\mu(x) \rightarrow V(x) U_\mu(x) V^\dagger(x + \hat{\mu}), \quad V \in SU(2). \quad (1.35)$$

O fator  $\beta$  deve ser escolhido de forma apropriada. Quando temos  $U_\mu(x)$  queremos dizer que o link está no sentido da esquerda para a direita, enquanto  $U_\mu^\dagger(x)$  refere-se ao link com sentido da direita para a esquerda. Perceba que na expressão (1.34) estamos representando diferentes plaquetas. O fato de exigirmos que  $\mu$  seja sempre menor que  $\nu$  na ação acima, pode ser explicado lembrando que um deslocamento na direção  $\hat{\mu}$  sempre precede um deslocamento na direção  $\hat{\nu}$  (até mesmo para formarmos loops sobre as diferentes plaquetas). A generalização para teorias de Yang-Mills  $SU(N)$  não é complicada no sentido que retemos apenas a parte real do traço adicionando o complexo conjugado na ação acima

$$S = -\frac{\beta}{2N} \sum_{x, \mu < \nu} \left\{ \text{Tr} [U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x)] + c.c. \right\}. \quad (1.36)$$

Esta ação é conhecida como *ação de Wilson* (ver figura 2). Pode-se mostrar que expandindo  $U_\mu(x)$  em potências de  $A_\mu(x)$ , ajustando  $\beta = 2N/g^2$  e tomando o espaçamento de rede  $a$  indo a zero, obtemos

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \text{Tr} \left[ F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right], \quad (1.37)$$

ou seja, a ação de Yang-Mills no limite do contínuo. Aqui, o tensor  $F_{\mu\nu}$  é definido como em (1.9) e a transformação de calibre volta para o caso contínuo (1.13).

Agora que introduzimos um pouco de conceitos de teoria de campos na rede precisamos falar sobre a simetria de centro. Antes, é válido e útil comentar sobre o que é o *centro de um grupo*  $G$ . Este é dado pelo conjunto de elementos que comutam com todos os elementos do próprio grupo  $G$ . De forma matematicamente formal, temos que

$$Z(G) = \{z \in G | \forall g \in G, zg = gz\}. \quad (1.38)$$

Da própria definição de centro de um grupo tiramos a conclusão que um grupo só é

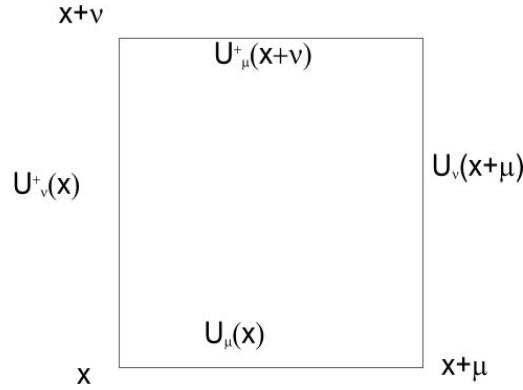


Figura 2: Definições de coordenadas em uma plaqueta na ação de Wilson.

abeliano se ele é o próprio centro.

Uma propriedade imediata da definição de centro do grupo é que ele *sempre* é um subgrupo do grupo  $G$ , pois respeita as propriedades:

- $Z(G)$  contém o elemento identidade, desde que  $ez = ze = z$  e desde que  $z \in G$  (identidade);
- Se dois elementos  $v, z \in Z(G)$ , então  $(vz)g = v(zg) = v(gz) = (vg)z = (gv)z = g(vz)$  para cada  $g \in G$  e com isso  $vz \in Z(G)$  (“fechamento”);
- Se  $z \in Z(G)$ , então  $gz = zg$  ou ainda  $z^{-1}g = gz^{-1}$ , logo  $z^{-1} \in Z(G)$  (inversa).

Visando a álgebra de comutadores do grupo  $G$ , um elemento de centro do grupo  $z$  tem o seguinte comutador com um elemento  $g$  do grupo  $G$ :  $[z, g] = 0$ . Aqui, estamos interessados em falar sobre o centro do grupo  $SU(N)$ , que é formado pelo conjunto de elementos

$$z_n 1_N = e^{\frac{2\pi i n}{N}} 1_N, \quad (1.39)$$

onde  $1_N$  é a matriz identidade  $N \times N$ . Os elementos  $z_n$  são elementos pertencentes ao subgrupo abeliano  $Z_N$ .  $N$ -ality se refere a como este centro  $Z_N$  da representação fundamental de  $SU(N)$  é mapeado sobre as outras representações de  $SU(N)$ . Suponha a ação de Wilson (1.36) e note que ela é invariante perante a seguinte transformação: escolha um tempo fixo  $t = t_0$  e multiplique os links tipo-tempo por um elemento de centro de  $SU(N)$ , ou seja,

$$U_0(x, t_0) \rightarrow z U_0(x, t_0), \quad (1.40)$$

e todas as outras variáveis de link são inalteradas sob esta transformação. Os únicos elementos da ação de rede de Wilson que podem ser afetados por esta transformação são as plaquetas tipo-tempo contendo os links  $U_0(x, t_0)$ , logo

$$\begin{aligned} U_i(x, t_0)zU_0(x + \hat{i}, t_0)U_i^\dagger(x, t_0 + 1)U_0^\dagger(x, t_0)z^{-1} = \\ U_i(x, t_0)U_0(x + \hat{i}, t_0)U_i^\dagger(x, t_0 + 1)U_0^\dagger(x, t_0), \end{aligned} \quad (1.41)$$

desde que os elementos de centro de um grupo comutam com todos os outros elementos do grupo. Esta é a simetria de centro sob o ponto de vista da rede. Esta simetria é importante, como veremos um pouco mais adiante quando falarmos sobre o modelo de t'Hooft, já que nos indica quando estamos na fase confinante, onde os vórtices condensam, e quando não estamos (modo de Higgs dinâmico).

Outro aspecto importante em teorias de Yang-Mills consiste no que chamamos de escalonamento de Casimir (ou em inglês, “Casimir scaling”). Casimir scaling refere-se ao fato que existe um alcance intermediário de distâncias onde a tensão da corda (para fontes estáticas) é proporcional ao operador quadrático de Casimir da representação.

Já falamos anteriormente que t'Hooft mostrou que o setor abeliano das teorias de Yang-Mills poderia ser utilizado para explicar a origem do potencial confinante entre os quarks no vácuo da teoria: a isso, damos o nome de dominância abeliana [46]. Também havíamos dito que, existem autores que consideram a dominância de centro do grupo como sendo o principal protagonista deste caráter confinante [64–66]. Resultados em modelos de rede mostram que, para quarks em uma dada representação em baixas energias, existe uma dependência da tensão com a representação correspondente ao subgrupo de centro  $Z_N$  de  $SU(N)$  ( $N$ -ality). Obviamente, isto indica que a presença de vórtices de centro é extremamente relevante para extrair resultados teóricos que dêem origem ao potencial confinante. Porém, supondo a dominância abeliana no regime intermediário de energias, deveria existir algum momento da transição de fase onde estes objetos seriam relevantes ao mesmo tempo. Também é neste regime que conseguimos ver o efeito do Casimir scaling ganhando força na teoria.

Como um exemplo da importância dos vórtices de centro para o confinamento, podemos analisar o gráfico 3 ( ver referência [31]). Nesta figura, o parâmetro  $\beta$  representa o valor da constante de acoplamento, escolhida de forma a fazer com que o modelo alcance resultados convergentes e  $R$  é a distância de separação entre os quarks. A razão de Creutz  $\chi(R, R)$  (que está intimamente relacionado com a tensão na corda confinante em teorias de calibre na rede) pode ser descrito da seguinte maneira [67]

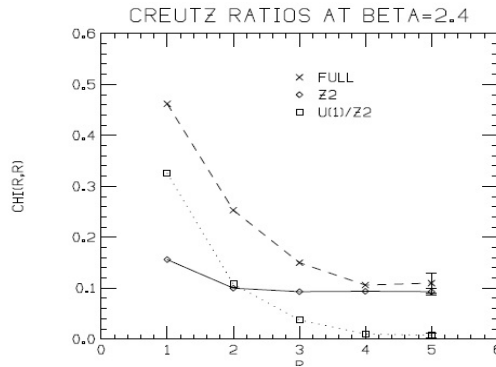


Figura 3: Razão de Creutz  $\chi(R, R)$  versus  $R$  para  $\beta = 2.4$  para configurações de rede nas teorias completa, com projeção de centro  $Z_2$  e para links  $U(1)/Z_2$  [31].

$$\chi(I, J) = -\ln \left( \frac{W(I, J)W(I-1, J-1)}{W(I, J-1)W(I-1, J)} \right), \quad (1.42)$$

onde  $W(I, J)$  denota o valor esperado do loop de Wilson retangular de uma rede com dimensões  $I$  e  $J$ . Podemos notar que qualquer dependência de perímetro para o loop de Wilson resultam em *zero* para  $\chi(I, J)$ . Por outro lado, se os loops são dominados por uma lei de área,  $\chi(I, J)$  mede diretamente a tensão na corda [67]. Na figura 3, temos  $\chi(R, R)$  indicando que a rede é quadrada de lado  $R$ . A teoria completa é mostrada por cruzeiros no gráfico. Após a eliminação do setor de centro notamos claramente que a tensão proveniente do setor  $U(1)/Z_2$  perturbativo cai a zero rapidamente, indicando a ausência de confinamento. Porém, quando analisamos a teoria através da projeção de centro na rede, vemos que a tensão da corda reproduz a teoria completa em grandes distâncias, indicando confinamento. A conclusão que tiramos daqui é que os vórtices de centro parecem ser cruciais para obtermos a corda confinante. Outro resultado recente na rede, argumentando a favor de uma descrição unificada entre vórtices de centro e monopólos, vem da referência [68]. Este outro artigo também nos dá embasamento para considerar ensembles de cadeias formadas por estes defeitos como sendo fontes possíveis para o confinamento.

Seguindo esta premissa, foi proposto um modelo em nosso trabalho que levasse em conta cadeias de monopólos/anti-monopólos acoplados com pares de vórtices de centro (ao contrário de trabalharmos com cordas de Dirac, objetos não observáveis). Motivados por estas discussões, definiremos agora o que é um vórtice de centro no contexto das teorias de Yang-Mills.

### 1.2.3 Vórtices de centro no contínuo

Vórtices de centro em teorias de Yang-Mills  $SU(N)$  são defeitos tal que o loop de Wilson ganha um elemento de centro  $Z_N$  quando estes são enlaçados pelo loop. Caso contrário, quando o loop de Wilson não enlaça o vórtice, ele permanece inalterado. Em 3D vórtices de centro comportam-se como objetos unidimensionais fechados, de forma tal que podemos enlaçar este vórtice com o loop de Wilson. Diremos que a configuração  $\mathcal{A}^S$  corresponde à inclusão de um vórtice de centro sobre uma configuração  $\mathcal{A}$ , se verificamos que

$$W_C[\mathcal{A}^S] = e^{\frac{i2\pi n}{N}} W_C[\mathcal{A}]. \quad (1.43)$$

Já que o vórtice de centro produz um efeito não trivial para o loop de Wilson, significa que ele é um objeto magnético observável e portanto a sua contribuição para o vácuo da teoria deve ser levada em consideração. Podemos representar o potencial de calibre de um vórtice de centro,  $\mathcal{A}^S$ , pela expressão

$$\mathcal{A}_\mu^S = S\mathcal{A}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} S\partial_\mu S^{-1} - I_\mu, \quad (1.44)$$

onde a transformação  $S$  é descontínua sobre uma superfície que tem como borda o vórtice de centro. O segundo termo contém uma parte singular concentrada sobre essa superfície e  $I_\mu$  é chamado de vórtice ideal, desde que ele procura eliminar este termo singular fazendo com que o efeito do mapa  $S$  seja produzido somente na fronteira da superfície. Vejamos alguns exemplos para ilustrar estes defeitos magnéticos. Suponha uma transformação  $S = e^{i\varphi T^3}$ , onde  $T^3 = \frac{\sigma^3}{2}$  no  $SU(2)$ . Nesse caso temos que,

$$\frac{i}{g} S\partial_\mu S^{-1} = \frac{i}{g} S \left[ -i\partial_\mu \varphi \delta^{a3} T^a \right] S^{-1} + I_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \varphi \delta^{a3} T^a + I_\mu, \quad (1.45)$$

que substituindo em (1.44), para  $\mathcal{A}_\mu = 0$ , nos leva ao vórtice de centro fino,  $\mathcal{A}^S = \frac{1}{g} \partial_\mu \varphi T^3$ . O cálculo do loop de Wilson nos dá

$$\begin{aligned} W_C[\mathcal{A}^S] &= \frac{1}{2} Tr[e^{ig \oint_C \mathcal{A}_\mu^S dx^\mu}] = \frac{1}{2} Tr[e^{iT^3 \oint_0^{2\pi} \partial_\mu \varphi dx^\mu}] \\ &= \frac{1}{2} Tr[e^{\pi \sigma^3 i}] = \frac{1}{2} Tr[\cos \pi I + \sigma^3 \sin \pi] = -1 \equiv e^{i\pi}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

onde vemos que ele ganha um elemento de centro de  $SU(2)$ ,  $z_1 = e^{i\pi}$ . Um segundo exemplo pode ser dado pela transformação  $S = e^{2i\varphi T^3}$ . Obviamente, o novo resultado



para o loop de Wilson será

$$W_C[\mathcal{A}^S] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\cos 2\pi I + \sigma^3 \sin 2\pi] = 1. \quad (1.47)$$

O objeto gerado pela transformação  $S = e^{2i\varphi T^3}$  representa uma corda de Dirac em teorias de Yang-Mills  $SU(2)$ . No grupo  $SU(2)$ , sabemos que temos apenas um tipo de vórtice de centro não trivial, desde que  $n = 0$  é o elemento identidade ou  $n = 1$  é o elemento de centro não trivial  $z_2 = e^{i\pi}$ . Se consideramos grupos mais complexos ganhamos diferentes tipos de vórtices de centro, como o caso do  $SU(3)$  que possui dois tipos de vórtices de centro não triviais ( $n = 1, 2$ ). Não discutiremos aqui como representá-los, mas recomendamos o leitor a seguinte referência [28].

Agora, estamos prontos para discutir sobre a representação de monopólos na rede, assim como a sua definição no contínuo. Com isso, estaremos prontos para analisar a sua importância para teorias que envolvam confinamento.

### 1.3 Monopólos no contínuo e na rede

Este tópico tem como objetivo discutir monopólos sobre o ponto de vista teórico e como podemos implementá-los em teorias de calibre na rede. Podemos citar inúmeros trabalhos que identificam estes defeitos como sendo apropriados para gerar o tubo de fluxo elétrico que confina partículas cromoeletricas [21–23].

Começamos esta apresentação introduzindo os conceitos do monopólo de Dirac, idealizado por P. Dirac em 1931. Ele sugeriu a existência de uma carga magnética com o intuito de tornar as equações de Maxwell mais simétricas [69]. Embora tenha sido uma idéia puramente matemática inicialmente, os resultados que ele obteve foram bastante satisfatórios, como uma possível explicação da quantização da carga elétrica. Em 1975, T. T. Wu e C. N. Yang descobriram uma nova forma de construir uma teoria não-singular do monopólo abeliano [70]. Esta formulação permitiu realizar uma elegante correspondência entre topologia e teoria quântica de campos. Em 1974, G. t'Hooft e A. Polyakov mostraram que o modelo de Georgi-Glashow continha soluções tipo monopólo e que este defeito possuía simetrias internas, indicando que existia também uma estrutura interna [71, 72].

Nas próximas subseções apresentaremos o monopólo de Dirac e a condição de quantização da carga elétrica, porém não mostraremos como T. Wu e C. Yang aprimoraram sua interpretação; em seguida discutiremos o monopólo de t'Hooft-Polyakov.

### 1.3.1 Monopólo de Dirac

Se supormos a existência de um monopólo, o campo produzido por ele deveria ter o comportamento igual ao campo produzido por uma carga elétrica. Foi esta idéia que Dirac procurou implementar e que mostraremos, neste tópico, de uma maneira breve. Recomendo aqui uma referência que trata somente sobre defeitos magnéticos tipo monopólo [73]. Baseados nesta suposição do comportamento do campo magnético, gostaríamos de escrever

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.48)$$

Como consequência, este campo magnético respeita

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (1.49)$$

indicando a presença de um fluxo magnético diferente de zero, gerado pelo monopólo. Devido à equação (1.48), o campo  $\mathbf{B}$  não pode ser escrito como o rotacional de um potencial vetor. Considere, por exemplo, o campo proposto por Dirac em 1931 [69],

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\theta) \nabla \varphi, \quad (1.50)$$

onde  $\varphi$  é o ângulo azimutal em coordenadas esféricas e  $A(\theta)$  uma função que depende exclusivamente do ângulo polar  $\theta$ . Como em coordenadas esféricas  $\hat{e}_\varphi = -\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi$  e realizando a escolha  $A(\theta) = -g(1 + \cos \theta)$ , obtemos diretamente que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left( g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \sin \varphi, -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \cos \varphi, 0 \right), \quad (1.51)$$

ou ainda, escrevendo de uma forma compacta, temos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}, \quad (1.52)$$

com  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  direcionado ao longo da direção  $z$ . Como este campo é singular ao longo da linha  $\theta = 0$ , o cálculo do seu rotacional resulta em uma parte regular, que coincide com  $\mathbf{B}$ , mais uma parte concentrada em  $\theta = 0$  (chamada de *corda de Dirac*)

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A})_{reg} + \mathbf{J}_{corda} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4\pi g \mathbf{n} \theta(z) \delta(x) \delta(y), \quad (1.53)$$

ou também,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{J}_{corda} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.54)$$

De (1.54) vemos que

$$\int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_{corda} = 4\pi g, \quad (1.55)$$

como deve ser. Portanto, a energia magnética associada à esta configuração de campo será

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{2} \int dV [\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{J}_{corda}]^2. \quad (1.56)$$

Perceba que sempre podemos escolher de forma conveniente as coordenadas da corda ao longo de uma dada direção, indicando que a corda de Dirac pode ter qualquer forma, desde que seja contínua. Em consequência, este objeto não deve ser físico (ou seja, a corda não é observável). Ao implementar a não observabilidade da corda, Dirac chegou à uma condição de quantização da carga elétrica. Considere a lagrangiana de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{r}})^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}, \quad (1.57)$$

e cuja ação do termo de interação,  $S_{int}$ , pode ser escrita como

$$S_{int} = e \int dt \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{A} = e \oint_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}, \quad (1.58)$$

onde  $d\mathbf{x}$  reside ao longo de um contorno de comprimento  $l$ . Utilizando a expressão (1.53), podemos mostrar que

$$e \oint_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = e \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_{corda} = 4\pi e g, \quad (1.59)$$

onde aplicamos o teorema de Stokes e  $S$  é uma superfície aberta cuja borda contém a linha de singularidades de Dirac. Notamos que este termo na ação, para não produzir efeitos observáveis, deve dar uma contribuição que seja múltipla de  $2\pi$ , desde que a amplitude de transição é algo do tipo  $e^{iS}$ , implicando

$$4\pi eg = 2\pi n \longrightarrow eg = \frac{n}{2}, \quad (1.60)$$

que é a famosa condição de quantização da carga de Dirac [69].

### 1.3.2 Monopólo de t'Hooft-Polyakov

Para encontrarmos as soluções de t'Hooft-Polyakov [71, 72], partimos da lagrangiana de Georgi-Glashow definida por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D_\mu\phi^a - \frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a - \lambda(\phi^a\phi^a)^2, \quad (1.61)$$

com os campos  $\phi^a$  sendo tripletos e  $\lambda > 0$ . Aqui, temos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \\ D_\mu\phi^a &= \partial_\mu\phi^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Estamos interessados nas soluções estáticas nas quais os campos de calibre tem a seguinte forma não trivial

$$\begin{aligned} A_i^a &= -\epsilon_{iab}\frac{r^b}{gr^2}, \quad (r \rightarrow \infty) \\ A_0^a &= 0, \end{aligned} \quad (1.63)$$

com o campo escalar  $\phi^a = F\frac{r^a}{r}$ , quando  $r \rightarrow \infty$  ( $F^2 = -m^2/4\lambda$ ). Este limite assintótico é conhecido como “hedgehog” (ou em português, porco-espinho), nome cunhado por Polyakov em 1974. As equações de Euler-Lagrange obtidas da lagrangiana (1.61) são dadas por

$$D_\nu F_{\mu\nu}^a = -g\epsilon_{abc}\phi^b D_\mu\phi^c, \quad D_\mu D_\mu\phi^a = -\lambda\phi^a(\phi^b\phi^b - F^2), \quad (1.64)$$

além das identidades de Bianchi  $D_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}^a \equiv 0$ . Podemos obter a Hamiltoniana estática para

este modelo como sendo

$$H = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (D_\mu \phi^a)(D_\mu \phi^a) + \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - F^2)^2 \right], \quad (1.65)$$

onde notamos que o mínimo de energia satisfaz as seguintes condições (com  $F$  sendo o valor esperado de vácuo do campo de Higgs)

$$\phi^a \phi^a = F^2, \quad F_{mn}^a = 0, \quad D_n \phi^a = 0, \quad (1.66)$$

com  $m$  e  $n$  sendo índices espaciais. Na região assintótica, a condição  $D_\mu \phi^a = 0$ , juntamente com o “hedgehog”, produz

$$\partial_n \left( \frac{r^a}{r} \right) - g \epsilon_{abc} A_n^b \frac{r^c}{r} = 0, \quad (1.67)$$

mas

$$\partial_n \left( \frac{r^a}{r} \right) = \frac{r^2 \delta_{an} - r_a r_n}{r^3} = \frac{1}{r} (\delta_{an} \delta_{ck} - \delta_{ak} \delta_{nc}) \frac{r_c r_k}{r^2} = -\epsilon_{abc} \epsilon_{bnk} \frac{r_c r_k}{r^3}, \quad (1.68)$$

então somos capazes de obter o campo de calibre na região assintótica

$$A_k^a(r) \longrightarrow \frac{1}{g} \epsilon_{ank} \frac{r_n}{r^2}, \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.69)$$

assim como o campo magnético não abeliano nesta região

$$B_n^a \longrightarrow \frac{r_a r_n}{gr^4}, \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.70)$$

Tendo os dois comportamentos dos campos de calibre e do tripleto  $\phi^a$ , t’Hooft e Polyakov foram capazes de realizar um “Ansatz” para estes mesmos campos em todas as regiões do espaço, porém sujeitos aos limites assintóticos expostos acima. O *Ansatz* criado por eles foi

$$\phi^a = \frac{r^a}{gr^2} H(\xi), \quad A_n^a = \epsilon_{amn} \frac{r^m}{gr^2} [1 - K(\xi)], \quad A_0^a = 0. \quad (1.71)$$

Poderíamos apresentar aqui todos os cálculos posteriores para tentar obter as funções

$H(\xi)$  e  $K(\xi)$ , com  $\xi = Fgr$ , mas apenas iremos relatar que no final obtemos um sistema de equações diferenciais acopladas e não lineares, o que não pode ser resolvido analiticamente. Porém, se nos limitarmos ao limite de *Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield* (BPS) conseguiríamos obter algumas soluções [74, 75]. Indicamos o leitor aqui ao livro de Shnir para um maior entendimento [73].

Vale a pena neste momento ressaltar o que vem a ser um *instanton*, objetos propostos por Belavin em 1975 [76]. Sabemos que integrais de caminho não são muito bem definidas no espaço de Minkowski, apenas no espaço euclidiano. A integral de caminho euclidiana é dada por

$$Z = \langle 0|0\rangle \propto \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi, \partial_\mu \Phi]}. \quad (1.72)$$

Vemos claramente que as maiores contribuições para a integral de caminho vem dos valores de  $\Phi$  que produzem os mínimos da ação (aproximação de Landau). Em diferentes teorias existe uma certa quantidade de mínimos locais além do mínimo absoluto. Em nosso caso, que estamos lidando com teorias de calibre não abelianas, estes mínimos da ação são conhecidos como *instantons* [77]. Para a teoria de Georgi-Glashow em  $(2+1)D$ , transformada para o espaço euclidiano por uma rotação de Wick, os instantons são justamente dados pelos monopólos de t'Hooft-Polyakov. Esta teoria serve como uma regularização da  $QED_3$  compacta. Conhecendo um pouco melhor agora os objetos magnéticos tipo monopólos no contínuo, podemos deter nossa atenção em sua representação na rede.

### 1.3.3 Monopólos sobre a rede

O estudo de monopólos na rede é de extrema importância desde que teorias, como a QED compacta em três ou quatro dimensões, quando analisadas levando-se em conta a contribuição de monopólos, apresentam características confinantes para as cargas cro-moelétricas, como foi demonstrado por A. Polyakov em [78]. Embora não apresentemos aqui a QED compacta em detalhes, discutiremos alguns de seus aspectos relevantes.

Para entendermos como identificar monopólos na rede, considere uma variável de plaqueta  $U(p) = e^{i\theta(p)}$  (dada pelo produto das variáveis de link que compõem esta plaqueta) em uma teoria de calibre  $U(1)$  em três dimensões ( $QED_3$  compacta). Vemos claramente que a ação de rede é minimizada por duas condições para o fluxo magnético,  $\theta(p) = 0$  e  $\theta(p) = 2\pi$ . Perceba que este mínimo duplo é uma reflexão da compactidade do grupo de calibre na formulação de rede. Suponha que tenhamos uma série de plaquetas paralelas com  $\theta(p) = 2\pi$  dispostas todas sobre o eixo  $x$  positivo (veja a figura 4). Uma linha que corte esta série de plaquetas pode ser associada com um infinito e fino solenóide (a *corda de Dirac*), de fluxo  $2\pi$ . Em outras palavras, o fluxo  $2\pi$  entra em uma plaqueta

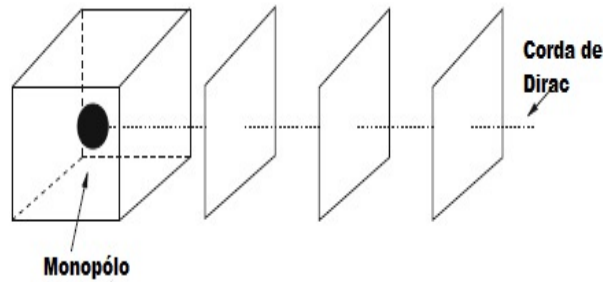


Figura 4: Visualização do cubo que contém um monopólio situado em seu centro e da corda de Dirac que corta diferentes plaquetas em uma determinada direção com fluxo  $2\pi$  [63].

e sai por alguns dos lados restantes do cubo. Este fluxo de  $2\pi$  da corda de Dirac é indetectável, e de fato a posição desta corda pode ser mudada através de transformações de calibre  $U(1)$ , porém seu ponto extremo é invariante de calibre e aparece como uma fonte pontual de campo magnético, isto é, um monopólio magnético. Em  $D = 3$  dimensões monopólios são objetos pontuais, ou seja, instantons. Em  $D = 4$  dimensões eles traçam trajetórias fechadas e são objetos unidimensionais tipo corda.

Dada uma configuração  $U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}$ , como podemos localizar os monopólios e determinar suas cargas? De forma básica, utilizamos a lei de Gauss para responder esta pergunta. Para isso, começamos com uma rede tridimensional e definimos o fluxo através de uma plaqueta como (para pequenos ângulos)

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\theta_\nu(x) - \partial_\nu\theta_\mu(x), \quad (1.73)$$

onde, neste caso, as derivadas parciais devem ser definidas como diferenças finitas

$$\partial_\mu\theta_\nu(x) = \theta_\nu(x + \hat{\mu}) - \theta_\nu(x). \quad (1.74)$$

Se agora, simplesmente adicionássemos o fluxo no cubo (ou sobre qualquer superfície fechada), ele apenas somaria a zero. O truque é eliminar de  $f_{\mu\nu}(x)$  qualquer fluxo que seja devido à corda de Dirac. Se este fluxo é removido, então o fluxo magnético restante não será necessariamente livre de divergências. Voltemos a observar a ação de Wilson (1.36), mas agora utilizamos o fato do grupo de calibre ser o  $U(1)$ , ou seja, as variáveis de link são do tipo  $U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}$ . Observamos que podemos escrever uma nova função de partição de Wilson como

$$Z_{wilson} = \int [d\theta_\mu(x)] \exp \left[ \beta \sum_{x,\mu<\nu} \cos f_{\mu\nu}(x) \right]. \quad (1.75)$$

Porém, em 1980, T. DeGrand e D. Toussaint [79], assumiram uma função de partição na forma de Villain [55],

$$Z_{villain} = \int_{-\pi}^{\pi} [d\theta_\mu(x)] \sum_{x,\mu<\nu} \sum_{n_{\alpha\beta}(x)=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\beta}{4g^2a} (f_{\mu\nu}(x) - 2\pi n_{\mu\nu})^2 \right], \quad (1.76)$$

onde  $n_{\mu\nu}(x)$  é um inteiro positivo ou negativo representando o número de cordas de Dirac atravessando a plaqueta e  $f_{\mu\nu}(x) = \bar{f}_{\mu\nu}(x) + 2\pi n_{\mu\nu}$ , com  $\bar{f}_{\mu\nu} \in [-\pi, \pi]$  ( $g$  é uma constante de acoplamento). Seja  $\hat{e}_\mu^c$  o vetor normal à plaqueta  $p$ , apontando a partir do centro do cubo  $c$ , definimos um fluxo como sendo  $\phi^c(p) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{e}_i^c(p)\bar{f}_{jk}$ . Assim, obtemos a lei de Gauss para campos magnéticos,

$$2\pi m = \sum_{p \in c} \phi^c(p) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_i\bar{f}_{jk}(x). \quad (1.77)$$

Esta equação é equivalente (análoga na rede) à equação de Maxwell modificada para um monopólo  $\partial_i B_i = m(x)$ , com  $m(x)$  sendo a densidade de monopólos. Ela quer dizer que o número de monopólos em um volume é dado pelo número  $m$  total de cordas de Dirac entrando neste volume (o que é muito natural, desde que cada corda de Dirac possui um monopólo em um de seus extremos). Neste ponto, deveria ser claro que adicionando múltiplos de  $2\pi$  nas variáveis de link (como fizemos no modelo de Villain), podemos mover as cordas de Dirac mas não podemos mudar o número total delas que entra em um determinado volume.

Agora, somos capazes de discutir um pouco sobre como interpretar a  $QED_3$  compacta em termos de confinamento. Como falamos antes, apenas indicaremos seus aspectos interessantes sem falar de detalhes. Observando a expressão do modelo de Villain na rede (1.76), notamos que ele é periódico sob a transformação  $f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu} \pm 2\pi$  (assim como no modelo de Wilson na rede). Considerando este modelo, a integração sobre  $\theta_\mu(x)$  pode ser feita analiticamente, e depois de alguns passos matemáticos, chega-se à uma ação de  $N$  monopólos, que envolve somente as cargas dos monopólos e sua localização

$$S_{mon} = \frac{2\pi^2}{g^2a} \sum_{i \neq j} m_i m_j G(x_i - x_j) + \frac{2\pi^2}{g^2a} G(0) \sum_i m_i^2, \quad (1.78)$$



onde os índices  $i, j = 1, \dots, N$  e  $G(x - x')$  é o propagador de Coulomb na rede em três dimensões

$$-\nabla^2 G(x - x') = \delta_{x, x'}, \quad (1.79)$$

que resulta em  $\frac{1}{4\pi|x-x'|}$  em grandes distâncias [55, 63]. Esta expressão foi derivada por A. Polyakov e representa a ação de um gás de monopólos em três dimensões interagindo por forças de Coulomb (um plasma de monopólos). O valor médio do loop de Wilson pode ser calculado e o resultado associado com  $n$  unidades de carga elétrica resulta em [78]

$$\langle W_n(C) \rangle \approx \exp[-n\sigma\Sigma(C)], \quad (1.80)$$

onde a tensão na corda  $\sigma$  é dependente do acoplamento  $\beta$  e  $\Sigma(C)$  é uma área envolta pela loop  $C$ . Esta dependência com a área na  $QED_3$  compacta indica o confinamento de cargas elétricas, um fato muito interessante para nós, desde que leva em conta a presença de monopólos como sendo responsável pela criação de cordas confinantes.

#### 1.4 Teorias efetivas e confinamento

Nestas diferentes seções, apresentaremos a teoria da supercondutividade dual de t'Hooft e as teorias de Yang-Mills-Higgs. Estas duas teorias efetivas tem em comum a consideração de defeitos tipo vórtices de centro e monopólos como sendo responsáveis por criarem propriedades dimensionais para cordas confinantes.

Começamos com um dos modelos mais interessantes obtidos na teoria quântica de campos: o modelo proposto por G. t'Hooft em 1978 para a descrição de vórtices de centro em 3D. Ele mostrou que, de forma análoga (dual) a um supercondutor, a condensação de objetos topológicos no vácuo de Yang-Mills poderia dar origem a um tubo de fluxo elétrico (como vórtices de Nielsen-Olesen duais) capaz de confinar quarks [16]. Com certeza, esta é uma das abordagens mais utilizadas pela teoria quântica de campos em busca de explicações sobre o confinamento de quarks em teorias de Yang-Mills. Nesta seção abordaremos este modelo, desde que, no capítulo 2, veremos como podemos generalizá-lo com a inclusão de campos externos duais sobre o sistema. Este foi o maior resultado de nosso primeiro trabalho [41]. Na próxima seção seguiremos a abordagem original apresentada por t'Hooft.

### 1.4.1 Operadores topológicos e suas propriedades

Começamos a descrição do modelo considerando o grupo de calibre sendo o  $SU(N)$  e um termo de quebra espontânea de simetria devido a campos de Higgs escalares. Todos os campos, vetoriais e escalares, presentes na teoria são invariantes sob elementos do centro do grupo  $SU(N)$  (ou seja, elementos de  $Z_N$ , como definido em (1.39)). Nesta tese, não discutiremos como pode-se introduzir campos fermiônicos (quarks) no modelo, embora t'Hooft tenha discutido isto em seu artigo.

Este modelo, além de glúons e campos de Higgs, contem outra classe de objetos: soluções de sóliton estendidas (ou seja, que possuem dimensão) que são estáveis devido à uma lei de conservação topológica. Estes “sólitons” nada mais são que linhas de vórtice magnéticas, porque estamos lidando com campos escalares em duas dimensões espaciais. Além disso, estamos interessados aqui nos efeitos que a simetria de centro  $Z_N$  pode ocasionar no estudo do sistema, nos indicando que estes vórtices presentes no modelo são os nossos vórtices de centro, descritos em detalhes nas seções anteriores. Considere, portanto, uma região  $R$  no espaço bidimensional imersa em outra região  $B$  onde a densidade de energia é nula (vácuo). Em  $B$ , o campo de Higgs  $\phi(x)$  satisfaz,

$$|\langle \phi(x) \rangle| = F, \quad (1.81)$$

onde  $F$  é uma constante. Existe uma transformação de calibre  $S$  tal que

$$S\phi S^{-1} = \phi_0, \quad (1.82)$$

com  $\phi_0$  fixo. Assume-se que a transformação  $S$  não contenha singularidades e portanto é contínua. Considere um loop  $C(\theta)$  em  $B$  parametrizado por um ângulo  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $C(0) = C(2\pi)$ . Consideremos o caso em que  $C$  gira em torno de  $R$  no sentido horário, e desde que  $B$  contem uma região  $R$  representando excitações topológicas tipo vórtice de centro, temos

$$S(2\pi) = e^{\frac{2\pi in}{N}} S(0), \quad (1.83)$$

com  $0 \leq n < N$ ,  $C(0) = C(2\pi)$  e  $n \in Z$ . Por causa da continuidade da transformação,  $n$  é conservado. Se  $n \neq 0$  e se assumirmos que  $R$  não possui singularidades, então a configuração de campo em  $R$  não pode ser a mesma do vácuo ou uma transformação de calibre dela, nos indicando que deva existir uma quantidade de energia finita em  $R$ . A configuração menos energética deve ser aquela com  $n = 1$ , que descreve um vórtice estável

com massa  $M = E$ . Se temos  $N > 2$  então temos vórtices diferindo de anti-vórtices.

Uma outra maneira de representar campos produzidos por configurações tipo vórtice é estender  $S$  para dentro da região  $R$ , assumindo pelo menos um ponto  $x_0$  em  $R$  que seja singular. Tendo esta idéia em mente, aplicamos então  $S^{-1}$  sobre esta configuração. Isto permite realizar uma *segunda representação* para os vórtices, porém temos agora uma singularidade  $x_0$  em  $R$ .

Definimos agora um conjunto de operadores  $\Phi(x)$  da seguinte forma. Seja  $|A_i(x), \phi(x)\rangle$  um estado no espaço de Hilbert que é um autoestado das componentes espaciais do campo de calibre e dos campos de Higgs, com  $A_i(x)$  e  $\phi(x)$  sendo seus autovalores. Então

$$\Phi(x_0)|A_i(x), \phi(x)\rangle = |A_i^{S[x_0]}(x), \phi^{S[x_0]}(x)\rangle, \quad (1.84)$$

onde  $S[x_0]$  é uma transformação de calibre com a propriedade que para cada loop  $C(\theta)$  englobando o ponto  $x_0$  uma única vez, temos

$$S[x_0](\theta = 2\pi) = e^{\pm \frac{2\pi i n}{N}} S[x_0](\theta = 0), \quad (1.85)$$

onde acrescentamos o sinal negativo para rotações no sentido anti-horário. Claramente, quando  $x_0$  estiver fora de  $C$ , teremos

$$S[x_0](\theta = 2\pi) = S[x_0](\theta = 0). \quad (1.86)$$

Devemos nos perguntar agora em que sentido o operador  $\Phi(x)$  é local. Isto é importante para definirmos relações de comutação para os mesmos e conseqüentemente conseguirmos descrevê-los em um formalismo de segunda quantização. Considerando então o calibre  $A_0(x, t) = 0$ , as transformações de calibre contínuas  $S$  ainda formam um grupo invariante. Para estados físicos  $|\psi\rangle$  contudo,

$$\langle A, \phi | \psi \rangle = \langle A^S, \phi^S | \psi \rangle, \quad (1.87)$$

onde  $S$  é uma transformação de calibre univalorada. Assim,  $\Phi(x)$  teria sido trivial se não fosse pelo fato de  $S[x_0]$  possuir uma singularidade em  $x_0$ . Utilizando as equações (1.85) e (1.86) não é difícil perceber que, para  $x \neq y$ ,

$$\Phi(x)\Phi(y)|\psi\rangle = \Phi(y)\Phi(x)|\psi\rangle, \quad (1.88)$$

$$\Phi^\dagger(x)\Phi(y)|\psi\rangle = \Phi(y)\Phi^\dagger(x)|\psi\rangle, \quad (1.89)$$

desde que  $|\psi\rangle$ , sendo um estado físico, é completamente definido pelas singularidades das transformações de calibre combinadas. Se consideramos um operador de campo invariante de calibre e composto  $R(x)$ , temos que

$$[R(x), \Phi(y)] = 0, \quad \text{para } x \neq y, \quad \text{mas não necessariamente para } x = y. \quad (1.90)$$

Por causa de (1.88), (1.89) e (1.90),  $\Phi(x)$  é considerado um operador de campo local quando atua sobre estados físicos. De sua própria definição, o operador  $\Phi(x)$  absorve então cargas topológicas, assim chamamos  $\Phi(x)$  de operador de aniquilação (criação) de um vórtice (anti-vórtice) em  $x$  e  $\Phi^\dagger(x)$  o operador de criação (aniquilação) para um vórtice (anti-vórtice).

#### 1.4.2 O modelo de t'Hooft de vórtices de centro em (2+1)D

O que t'Hooft propôs neste nível foi que as funções de Green que representam estes operadores topológicos de criação e aniquilação de vórtices de centro, podiam ser obtidas de uma lagrangiana efetiva com acoplamento forte

$$\mathcal{L}(\Phi, \Phi^*) = -\partial_\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - M^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda_1}{N!} (\Phi^N + (\Phi^*)^N) - \frac{\lambda_2}{2} (\Phi^* \Phi)^2. \quad (1.91)$$

Espera-se muitos termos de interação possíveis na lagrangina (1.91), mas ele introduziu apenas alguns que considerou mais importantes; o termo com acoplamento  $\lambda_1$  é responsável pela interação entre os  $N$ -vórtices.

Uma característica imediata da lagrangiana (1.91) é a sua invariância sob a simetria global de centro  $Z_N$  (assim como as funções de Green associadas a estes operadores topológicos). Ou seja, se aplicarmos as transformações

$$\Phi \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{N}} \Phi, \quad \Phi^* \rightarrow e^{-\frac{2\pi i}{N}} \Phi^*, \quad (1.92)$$

a lagrangiana (1.91) permanece exatamente a mesma. Agora, após desligarmos o mecanismo de Higgs, podemos analisar as duas fases possíveis que o sistema pode estar: uma onde não há quebra de simetria de centro magnética  $Z_N$  e conseqüentemente os vórtices de centro são objetos massivos possuindo dimensão, e portanto o sistema não se encontra na fase confinada; e uma outra fase onde ocorre a quebra espontânea de simetria de centro

magnética  $Z_N$ , na qual os vórtices de centro condensam e ocorre a formação de uma parede de domínio. Esta parede possui dimensão e sua largura é proporcional ao inverso da massa da partícula mais leve, e portanto deve ser finita. Ela possui uma certa quantidade de energia por unidade de comprimento, o que resulta na tensão da corda confinante.

Analisando os efeitos de correlação entre os vórtices através do cálculo de funções de Green dos operadores topológicos, t'Hooft discutiu sobre o comportamento dessas quantidades quando estamos nas duas diferentes fases. Em uma fase onde os vórtices de centro adquiram alguma massa finita  $M$ , esperamos que

$$\langle T[\Phi(0, t_1)\Phi^\dagger(0, 0)] \rangle \rightarrow Ae^{-M|\tau|}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (1.93)$$

Notamos que para  $|\tau|$  grande, esta correlação adquire o valor nulo, indicando que o vácuo é invariante pela simetria de centro  $Z_N$ , ou seja, a simetria de centro nesta fase não foi quebrada. Porém, t'Hooft mostrou que, ao desligarmos o campo de Higgs, uma outra fase poderia existir. Ele encontrou (de forma heurística), uma dependência para esta função de correlação da seguinte forma

$$\langle T[\Phi(0, t_1)\Phi^\dagger(0, 0)] \rangle \rightarrow Ae^{\left[\frac{K}{|\tau|} + O(\log(g^2\tau))\right]}, \quad (1.94)$$

onde  $K$  e  $A$  são constantes finitas. Ou seja, considerando esta dependência, quando  $|\tau| \rightarrow \infty$ , temos que a correlação entre os vórtices não será mais nula, mas resultará em um valor finito nos indicando que o vácuo não é invariante pelo centro  $Z_N$  (condensação de vórtices).

Este é um dos alicerces para justificar os métodos utilizados nos capítulos seguintes e mostrará a importância de estudarmos quais seriam os efeitos que os vórtices de centro em 3D poderiam gerar. Na próxima seção iremos apresentar uma outra teoria importante para justificar nossos métodos: a teoria de Yang-Mills-Higgs em 4D.

### 1.4.3 O modelo de Yang-Mills-Higgs

Nas teorias puras de Yang-Mills  $SU(N)$ , os objetos topológicos são inicialmente singulares, mas alguns resultados obtidos na rede consideram a possibilidade destes objetos tornarem-se grossos e relevantes devido à flutuações quânticas [40, 63]. A esperança é que em teorias de Yang-Mills puras a ação efetiva de configurações topológicas magnéticas torna-se pequena ou negativa [80]. Neste caso, estes objetos iriam proliferar e gerariam o modelo de supercondutor dual, onde objetos similares, em uma fase de Higgs, representam os estados diferentes da corda confinante (ver seção anterior) [19].

Iremos expor agora uma teoria possível de Yang-Mills-Higgs da forma como foi apresentada em [19]. É um modelo importante, desde que consegue uma explicação plausível para as interações entre diferentes quarks em termos de tubos de fluxo cromoeletricos e junções contendo monopólos (capazes de explicar a existência de mésons híbridos).

O Modelo de Yang-Mills-Higgs, considerando o grupo  $SU(2)$  e um campo de Higgs na representação adjunta, gera, após uma quebra espontânea da simetria  $SU(2) \rightarrow U(1)$ , monopólos de t'Hooft-Polyakov (ver seção anterior). Quando considera-se um par de campos de Higgs na representação adjunta, a fase de quebra espontânea de simetria preserva somente a simetria  $Z_2$ , e o modelo contém vórtices  $Z_2$  [81–84]. Motivados pela descrição de vórtices de centro  $Z_2$  correlacionados em teorias de Yang-Mills  $SU(2)$  em termos de uma base local de cor  $\hat{n}_1$ ,  $\hat{n}_2$  e  $\hat{n}_3$  [39], esperamos que um modelo de Yang-Mills-Higgs  $SU(2)$  contendo três campos de Higgs na adjunta, não levaria somente a vórtices de centro  $Z_2$  suaves mas também à junções suaves formadas por pares de vórtices unidas com configurações tipo monopólo. Para um grupo geral, o modelo é escrito como

$$S = S_{YM} + S_{Higgs}, \quad (1.95)$$

que contém a ação de Yang-Mills (1.8). Para introduzir a ação de Higgs na representação adjunta, é importante primeiro explicar esta representação. A álgebra de Lie associada a um grupo de Lie, possui geradores hermitianos  $T_A$ , onde  $A = 1, \dots, d$ , é dada por

$$[T^A, T^B] = if_{ABC}T^C, \quad (1.96)$$

com  $f_{ABC}$  sendo as constantes de estrutura. Para o grupo  $SU(2)$ , por exemplo, as constantes de estrutura são os tensores de Levi-Civita  $\epsilon_{ABC}$ .

A representação adjunta de um grupo de Yang-Mills  $SU(N)$  é bastante intuitiva. Existem algumas definições que apenas indicaremos aqui sem demonstração. Para um melhor entendimento, o autor recomenda a leitura da referência [54]. Em primeiro lugar, os elementos matriciais dos geradores, escritos na representação adjunta dos grupos  $SU(N)$ , são dados por  $(M_A)_{BC} = -if_{ABC}$ , com  $d = N^2 - 1$ . Estes geradores satisfazem,

$$[M_A, M_B] = if_{ABC}M_C, \quad Tr(M_A M_B) = \delta_{AB}. \quad (1.97)$$

Assim, vemos que  $(M_A^\dagger)_{BC} = (M_A)_{BC}$ . Em segundo lugar, notamos que

$$\begin{aligned}
[M_A, M_B]_{CQ} &= [(M_A)(M_B) - (M_B)(M_A)]_{CQ} \\
&= (M_A)_{CP}(M_B)_{PQ} - (M_B)_{CP}(M_A)_{PQ} \\
&= (-if_{ACP})(-if_{BPQ}) - (-if_{BCP})(-if_{APQ}) \\
&= -f_{CAP}f_{PBQ} - f_{BCP}f_{PAQ} \\
&= f_{ABP}f_{PCQ} \\
&= if_{ABP}(M_P)_{CQ},
\end{aligned} \tag{1.98}$$

como deveria ser. Uma forma simples de trabalhar na representação adjunta é considerar os campos de Higgs sobre a álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de  $SU(N)$ . Nesta álgebra, uma métrica positiva definida é dada por

$$\langle X, Y \rangle = Tr(Ad(X)Ad(Y)), \tag{1.99}$$

onde  $Ad(X)$  é um mapa linear de  $X \in \mathcal{G}$  na representação adjunta. Logo, o setor correspondente aos campos de Higgs  $\psi_I = \psi_I^A T_A$ , transforma-se na adjunta da seguinte maneira,

$$\psi_I \rightarrow U\psi_I U^{-1}, \quad U \in G, \tag{1.100}$$

e a ação de Yang-Mills-Higgs é invariante de calibre perante as transformações *regulares*

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^U = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1}, \tag{1.101}$$

quando acompanhada pelas transformações locais dos campos de Higgs (1.100). Escrevemos então,

$$S_{Higgs} = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \langle D_\mu \psi_I, D_\mu \psi_I \rangle - V_{Higgs}(\psi_I) \right), \tag{1.102}$$

com  $D_\mu \psi_I = \partial_\mu \psi_I - ig[A_\mu, \psi_I]$ . Para construir o potencial de Higgs, os termos naturais que sejam invariantes por (1.100) envolvem a métrica aplicada a pares de elementos na álgebra de Lie. Pode-se mostrar que, até termos de quarta ordem, os termos que podemos considerar são

$$\langle \psi_I, \psi_J \rangle, \quad \langle \psi_I, \psi_J \wedge \psi_K \rangle, \quad \langle \psi_I \wedge \psi_J, \psi_K \wedge \psi_L \rangle, \quad \langle \psi_I, \psi_J \rangle \langle \psi_K \wedge \psi_L \rangle, \tag{1.103}$$

onde definimos o produto fechado de uma álgebra de Lie como  $\psi_I \wedge \psi_J = -i[\psi_I, \psi_J]$ . Neste ponto, é introduzida uma simetria adicional, atuando sobre os graus internos de sabor, com grupo global  $Ad(G)$ . Em primeiro lugar, lembramos que

$$\psi_I = \psi_I^A T_A \longrightarrow U \psi_I U^{-1} = \psi_I^B U T_B U^{-1}. \quad (1.104)$$

Como a transformação dos geradores  $T_B$ 's é uma combinação linear de geradores, podemos escrever

$$U T_B U^{-1} = T_A R_{AB}, \quad (1.105)$$

e portanto,

$$\psi_I^A \rightarrow R_{AB} \psi_I^B, \quad R = R(U) \in Ad(G), \quad (1.106)$$

onde  $R$  é uma matriz  $d \times d$  correspondente à representação adjunta do grupo. Queremos agora que a ação seja invariante perante transformações globais atuando sobre os índices de sabor,

$$\psi_A \rightarrow \mathcal{R}_{AB} \psi_B, \quad \mathcal{R} \in Ad(G). \quad (1.107)$$

Até quarta ordem, esta condição restringe os termos possíveis para o potencial de Higgs segundo,

$$V_{Higgs} = c + \frac{\mu^2}{2} \langle \psi_A, \psi_A \rangle + \frac{\kappa}{3} f_{ABC} \langle \psi_A \wedge \psi_B, \psi_C \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \psi_A \wedge \psi_B, \psi_A \wedge \psi_B \rangle. \quad (1.108)$$

Agora fica simples determinar o mínimo deste potencial através da equação (obtida pela minimização de  $V_{Higgs}$ ),

$$\mu^2 \psi_A + \kappa f_{ABC} \psi_B \wedge \psi_C + \lambda \psi_B \wedge \langle \psi_A \wedge \psi_B \rangle = 0. \quad (1.109)$$

As soluções desta equação são dadas por

$$\psi_A = v S T_A S^{-1}, \quad S \in G, \quad (1.110)$$



com a seguinte condição

$$\mu^2 v + \kappa v^2 + \lambda v^3 = 0, \quad (1.111)$$

ou seja,  $v = 0$  ou

$$v = v_c = -\frac{\kappa}{2\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2\lambda}\right)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.112)$$

Dependendo da escolha destes parâmetros, diferentes configurações de mínimos locais ou globais podem ser obtidas. O potencial de Higgs pode ser reescrito (em seu ponto de mínimo) como

$$V_{Higgs} = c + \frac{\lambda d}{4} v^2 [(v - v_0)^2 + b^2], \quad (1.113)$$

com

$$v_0 = -\frac{2\kappa}{3\lambda}, \quad b^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} - \left(\frac{2\kappa}{3\lambda}\right)^2. \quad (1.114)$$

Obviamente, o parâmetro  $\lambda$  deve ser positivo se quisermos um potencial limitado por baixo. Na fase com quebra espontânea  $SU(N) \rightarrow Z_N$ , os vácuos não triviais podem ser escritos como

$$\mathcal{M} = \{\psi_A T_A = v_c \hat{n}_A, \hat{n}_A = R(S) \hat{e}_A, R \in Ad(G)\}, \quad (1.115)$$

onde  $\hat{n}_A$  é uma base local no espaço de Lie. Quando o sistema escolhe um dado vácuo, por exemplo  $S = I$ , a simetria contínua  $U$  do potencial é espontaneamente quebrada para uma simetria discreta de centro  $\psi_A \rightarrow U \psi_A U^{-1}$ , com  $U \in Z_G$ . Portanto, todas as componentes dos campos de calibre ganham massa.

Acabamos de estudar os modelos de Yang-Mills-Higgs com campos de Higgs na representação adjunta do grupo de calibre. Falamos que os objetos que surgem nesta teoria são clássicos e suaves, representados por parâmetros dimensionais. Por outro lado, deveria ser possível encontrar alguma conexão entre os modelos de Yang-Mills-Higgs e Yang-Mills puras. Isto poderia nos ajudar a determinar que propriedades poderiam ser relevantes para serem levadas em conta no momento em que parametrizamos objetos topológicos em teorias de Yang-Mills. Porém, infelizmente, este tipo de questão continua

sendo um problema não perturbativo em aberto do confinamento, tal que uma resposta bem construída está distante de ser encontrada.

As dificuldades associadas com a formulação em primeiros princípios de cenários envolvendo defeitos magnéticos no contínuo levam a diferentes modelos para calcular valores médios dos operadores de campo, depois de *postularmos* algumas propriedades fenomenológicas possíveis dos ensembles de defeitos. Por exemplo, um modelo efetivo de superfícies aleatórias, descrevendo ensembles de vórtices de centro grossos fechados foi proposto em [28], cujo procedimento implementa a idéia da projeção de centro desenvolvida na rede. Um ensemble geral deveria incluir a possibilidade de cadeias de vórtices e monopólos correlacionados. Este é o caso de cadeias de vórtices e monopólos que utilizamos em nosso primeiro artigo [41].

Em [19], assume-se então um teoria efetiva de monopólos em 4D, que comportam-se como linhas de mundo unidimensionais. Explicitamente, a integral de caminho sobre este ensemble de monopólos é definida por

$$\prod_{\alpha} Z_{\alpha} = \prod_{\alpha} \sum_N \frac{1}{N!} \prod_{k=1}^N [\mathcal{D}x_k] e^{-m \sum_{k=1}^N L_k} e^{i \frac{2\pi}{g} \int_{C_k} dx_{\mu} \vec{\alpha} \cdot \vec{A}_{\mu}^P}, \quad (1.116)$$

onde não se considera a interação entre os diferentes monopólos.  $Z_{\alpha}$ , é a função de partição para loops de monopólos com carga  $\vec{\alpha}$  (as raízes da álgebra de Lie para  $SU(N)$ ), e é obtida somando sobre o número de loops, e para cada setor, integrando sobre todos os caminhos possíveis que estes loops podem realizar, definido pela medida  $[\mathcal{D}x_k]$ . O parâmetro fenomenológico  $m$  é devido aos efeitos de tensão que este objeto pode ter [42–44, 85]. O produtório em (1.116) procura levar em conta a contribuição de todas as cargas de Lie no modelo efetivo. Foi mostrado nas referências [43, 86] que o lado direito da expressão (1.116) é um determinante funcional. Vale dizer que o modelo derivado de (1.116) leva a graus de liberdade de sabor, rotulados por  $\vec{\alpha}$ , típicos dos modelos de Yang-Mills-Higgs. Porém, graus de liberdade não abelianos nem interações entre os campos são descritos. Estes serão incorporados no capítulo 3.

Tendo discutido sobre defeitos tipo vórtice de centro e monopólos na rede e algumas teorias efetivas, nos cabe agora ressaltar que o mais interessante é encontrar algum formalismo que possa acomodar tanto vórtices de centro como monopólos de uma maneira unificada. Apresentaremos na próxima seção um formalismo muito utilizado para incorporar defeitos em teorias de Yang-Mills, porém, em seu formato original, não era capaz de comportar defeitos tipo vórtice de centro, apenas monopólos. Felizmente, em 2008, uma correção relevante foi realizada nos cálculos de Y. Cho e com isso conseguiu descrever tanto monopólos quanto vórtices de centro em uma base local no espaço local de cor [39].

### 1.5 Decomposição de Cho: a introdução de defeitos

O formalismo da decomposição dos campos de calibre em termos das bases locais no espaço de cor foi apresentado no ano de 1980 em um artigo de Y. M. Cho [37]. Este formalismo foi aperfeiçoado posteriormente pelo próprio Cho e por Faddeev-Niemi [38]. Em 2008, L. E. Oxman mostrou que havia alguns problemas com o desenvolvimento de Cho e apresentou uma nova forma de descrever os campos de calibre com esta decomposição [39]. O importante neste trabalho foi acomodar tanto defeitos tipo vórtice de centro como cadeias de vórtices e monopólos correlacionados (nos trabalhos de Cho-Faddeev-Niemi apenas podia se trabalhar com monopólos). Considere uma base local de cor,  $\hat{n}_a$ ,  $a = 1, 2, 3$  (em  $SU(2)$ ), que é parametrizada por meios de uma transformação ortogonal local  $R \in SO(3)$ ,

$$\hat{n}_a = R\hat{e}_a. \quad (1.117)$$

Este conjunto de vetores de base pode ser utilizado para representar o campo de calibre  $\vec{A}_\mu = A_\mu^a \hat{e}_a$  em termos da decomposição de Cho

$$\vec{A}_\mu = A_\mu^{(n)} \hat{n} - \frac{1}{g} \hat{n} \times \partial_\mu \hat{n} + \vec{X}_\mu^{(n)}, \quad (1.118)$$

onde  $\hat{n} \equiv \hat{n}_3$ ,  $\hat{n}_a \cdot \hat{n}_b = \delta_{ab}$  e  $\hat{n} \cdot \vec{X}_\mu^{(n)} = 0$ . Define-se o potencial restrito como (ver [28])

$$\hat{A}_\mu = A_\mu^{(n)} \hat{n} - \frac{1}{g} \hat{n} \times \partial_\mu \hat{n}. \quad (1.119)$$

Podemos calcular o tensor de intensidade  $\vec{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a \hat{e}_a$  utilizando a decomposição de Cho (1.118)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu, \\ \vec{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + g \hat{A}_\mu \times \hat{A}_\nu + g \vec{X}_\mu^{(n)} \times \vec{X}_\nu^{(n)} + \hat{D}_\mu \vec{X}_\nu^{(n)} - \hat{D}_\nu \vec{X}_\mu^{(n)}, \end{aligned} \quad (1.120)$$

com  $\hat{D}_\mu \vec{X}_\nu^{(n)} = \partial_\mu \vec{X}_\nu^{(n)} + g \hat{A}_\mu \times \vec{X}_\nu^{(n)}$ . Note que usamos a notação  $g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \equiv g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ , desde que, no  $SU(2)$ , as constantes de estrutura tornam-se o símbolo de Levi-Civita ( $\epsilon^{abc}$ ), logo temos um produto vetorial no espaço de cor. Explicitando os termos com o potencial restrito (1.119), vemos que

$$\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + g \hat{A}_\mu \times \hat{A}_\nu = F_{\mu\nu}^{(n)} \hat{n} - \frac{2}{g} \partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n} + \frac{1}{g} \left[ \hat{n} \cdot (\partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}) \right] \hat{n} + \vec{L}_{\mu\nu}, \quad (1.121)$$

onde identificamos  $F_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}$  e  $\vec{L}_{\mu\nu} = -\frac{1}{g} \hat{n} \times [\partial_\mu, \partial_\nu] \hat{n} = L_{\mu\nu}^1 \hat{n}_1 + L_{\mu\nu}^2 \hat{n}_2$ . Na expressão (1.121) notamos que

$$-\frac{2}{g} \partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n} + \frac{1}{g} \left[ \hat{n} \cdot (\partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}) \right] \hat{n} = -\frac{1}{g} \left[ \hat{n} \cdot (\partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}) \right] \hat{n}, \quad (1.122)$$

ou seja, encontra-se necessariamente na direção  $\hat{n}$ , assim como o termo  $\vec{X}_\mu^{(n)} \times \vec{X}_\nu^{(n)}$ . Então, podemos compactar o tensor de intensidade na seguinte forma

$$\vec{F}_{\mu\nu} = (F_{\mu\nu}^{(n)} + H_{\mu\nu}^{(n)} + K_{\mu\nu}^{(n)}) \hat{n} + \vec{G}_{\mu\nu} + \vec{L}_{\mu\nu}, \quad (1.123)$$

onde definimos as quantidades

$$\begin{aligned} \vec{G}_{\mu\nu} &= \hat{D}_\mu \vec{X}_\nu^{(n)} - \hat{D}_\nu \vec{X}_\mu^{(n)}, \\ H_{\mu\nu}^{(n)} &= -\frac{1}{g} \hat{n} \cdot (\partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}), \\ K_{\mu\nu} &= g \hat{n} \cdot (\vec{X}_\mu \times \vec{X}_\nu). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Discutiremos agora como o componente  $H_{\mu\nu}^{(n)}$  ganhou uma nova interpretação e importância no trabalho de L. Oxman [39]. Cho havia calculado esta quantidade e encontrado que  $H_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu C_\nu^{(n)} - \partial_\nu C_\mu^{(n)}$ , com  $C_\mu^{(n)} = -\frac{1}{g} \hat{n}_1 \cdot \partial_\mu \hat{n}_2$ . Contudo, esta quantidade adquire um termo diferente dado por

$$H_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu C_\nu^{(n)} - \partial_\nu C_\mu^{(n)} + D_{\mu\nu}^{(n)}, \quad D_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{g} \hat{n}_1 \cdot [\partial_\mu, \partial_\nu] \hat{n}_2, \quad (1.125)$$

o que mostra que quando lidando com defeitos topológicos nas direções  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  este termo não pode ser desprezado, e então o resultado de Cho deve ser revisado. Se tomamos campos de calibre que sejam regulares nestas direções, percebemos que  $\vec{L}_{\mu\nu} = \vec{0}$  e  $\vec{D}_{\mu\nu} = \vec{0}$  e voltaríamos à derivação de Cho [37]

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \left( \partial_\mu (A_\nu^{(n)} + C_\nu^{(n)}) - \partial_\nu (A_\mu^{(n)} + C_\mu^{(n)}) + K_{\mu\nu} \right) \hat{n} + \hat{D}_\mu \vec{X}_\nu^{(n)} - \hat{D}_\nu \vec{X}_\mu^{(n)}. \quad (1.126)$$

Esta diferença aparentemente “pequena” nos trás uma nova interpretação da decomposição de Cho e permite que este formalismo acomode tanto monopólos como vórtices de centro nas bases locais de cor. Podemos escrever as quantidades em (1.125) na forma dual

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(n)} &= \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)} + d_{\mu\nu}^{(n)}, & h_{\mu\nu}^{(n)} &= \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{2} H_{\rho\sigma}^{(n)}, \\ \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)} &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho C_\sigma^{(n)}, & d_{\mu\nu}^{(n)} &= \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{2} D_{\rho\sigma}^{(n)}. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Utilizando então o formalismo dual de Yang-Mills, reescrevemos o tensor de intensidades (1.123) como

$$\vec{f}_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{2} \vec{F}_{\rho\sigma} = (f_{\mu\nu}^{(n)} + h_{\mu\nu}^{(n)} + k_{\mu\nu}^{(n)}) \hat{n} + (g_1^{\mu\nu} + l_1^{\mu\nu}) \hat{n}_1 + (g_2^{\mu\nu} + l_2^{\mu\nu}) \hat{n}_2. \quad (1.128)$$

A ação de Yang-Mills é dada por

$$\begin{aligned} S_{YM} &= S_{\bar{M}} + \frac{1}{4} \int d^4x \vec{f}_{\mu\nu} \cdot \vec{f}_{\mu\nu} = \\ &S_{\bar{M}} + \frac{1}{4} \int d^4x \left[ (f_{\mu\nu}^{(n)} + h_{\mu\nu}^{(n)} + k_{\mu\nu}^{(n)})^2 + (g_1^{\mu\nu} + l_1^{\mu\nu})^2 + (g_2^{\mu\nu} + l_2^{\mu\nu})^2 \right], \end{aligned} \quad (1.129)$$

onde o termo  $S_{\bar{M}}$  é devido aos núcleos dos vórtices (ver [39]). No caso de vórtices de centro sem espessura, este termo está ausente (este é o nosso caso). Também devemos ressaltar que os termos  $l_1^{\mu\nu}$  e  $l_2^{\mu\nu}$  tornam-se nulos, porque associamos à direção  $\hat{n}$  defeitos sobre cordas fechadas (monopólos), enquanto os defeitos em  $\hat{n}_a$  ( $a = 1, 2$ ) são associados com superfícies de Dirac ou com vórtices de centro. Neste caso, o setor  $\hat{n}$  não contém defeitos localizados sobre superfícies. Assim, podemos escrever a ação de Yang-Mills como

$$\begin{aligned} S_{YM} &= \frac{1}{4} \int d^4x \left[ (f_{\mu\nu}^{(n)} + h_{\mu\nu}^{(n)} + k_{\mu\nu}^{(n)})^2 + g_1^{\mu\nu} g_1^{\mu\nu} + g_2^{\mu\nu} g_2^{\mu\nu} \right] = \\ &\int d^4x \left[ \frac{1}{4} (f_{\mu\nu}^{(n)} + h_{\mu\nu}^{(n)} + k_{\mu\nu}^{(n)})^2 + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (1.130)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (g_1^{\mu\nu} + i g_2^{\mu\nu}) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\rho + i g (A_\rho^{(n)} + C_\rho^{(n)})] \Phi_\sigma, \\ k_{\mu\nu} &= \frac{g}{2i} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\bar{\Phi}_\rho \Phi_\sigma - \Phi_\rho \bar{\Phi}_\sigma), \\ \Phi_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X_\mu^1 + i X_\mu^2). \end{aligned} \quad (1.131)$$

Neste ponto fazemos uso de uma transformação de Hubbard-Stratonovich e introduzimos campos auxiliares,  $\lambda_{\mu\nu}$  e  $\Lambda_{\mu\nu}$ , na ação de Yang-Mills,

$$S_{YM} = S_c + \int d^4x \left[ \frac{1}{4} \lambda_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \lambda_{\mu\nu} (f_{\mu\nu}^{(n)} + h_{\mu\nu}^{(n)} + k_{\mu\nu}) + iJ^\mu (A_\mu^{(n)} + C_\mu^{(n)}) \right], \quad (1.132)$$

onde a ação dos campos carregados é definida por

$$S_c = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \bar{\Lambda}^{\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu} - \frac{i}{2} (\bar{\Lambda}^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \Phi_\sigma + \Lambda^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\Phi}_\sigma) \right], \quad (1.133)$$

e a corrente  $J^\mu$  por,

$$J^\mu = -\frac{i}{2} g \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Lambda}_{\nu\rho} \Phi_\sigma + \frac{i}{2} g \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_{\nu\rho} \bar{\Phi}_\sigma. \quad (1.134)$$

O procedimento de dualização apresentado aqui é encontrado até mesmo em matéria condensada (no modelo de Villain, por exemplo). Ainda seguindo a leitura da referência [39], vemos que um modelo efetivo que contenha cadeias de monopólos/anti-monopólos acoplados com um par de vórtices de centro pode ser sugerido

$$Z_{YM} = \int [\mathcal{D}\lambda][\mathcal{D}v][\mathcal{D}m][\mathcal{D}A^{(n)}][\mathcal{D}\Phi][\mathcal{D}\Lambda] F_{gf}^c e^{-S_c - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \frac{1}{4} \lambda_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu}} \times \\ \times e^{i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \{ \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \lambda_{\rho\sigma} - J_\mu^c A_\mu^{(n)} + \frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} (d_{\mu\nu}^{(n)} + k_{\mu\nu}) + \partial_\mu [ \frac{1}{2} (A_\sigma^{(n)} + C_\sigma^{(n)}) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{\nu\rho} ] \}}. \quad (1.135)$$

Devemos explicar o que significam as medidas de integração na expressão acima. A primeira,  $[\mathcal{D}\lambda]$  representa a integral sobre o campo auxiliar dual  $\lambda_{\mu\nu}$ , assim como  $[\mathcal{D}\Lambda]$ . A integral sobre todas as configurações do setor carregado é representada por  $[\mathcal{D}\Phi]$  e a integral sobre os campos de calibre restritos (potencial restrito de Cho) por  $[\mathcal{D}A^{(n)}]$ . Nesta integral de caminho, podemos ver a contribuição efetiva que virá do setor de defeitos topológicos através de uma parametrização apropriada de  $[\mathcal{D}m]$  e  $[\mathcal{D}v]$ . Devemos notar a presença de um acoplamento de um campo auxiliar dual  $\lambda_{\mu\nu}$  com o setor responsável por acomodar os defeitos tipo monopólos e vórtices de centro  $d_{\mu\nu}$ .

Para um par monopólo/anti-monopólo unidos por uma corda de Dirac (ver Nambu [17]), podemos escrever a seguinte parametrização

$$d_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{4\pi}{g} \int d\sigma_1 d\sigma_2 \left( \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma_1} \frac{\partial x_\nu}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma_2} \frac{\partial x_\nu}{\partial \sigma_1} \right) \delta^{(4)}(x - x(\sigma_1, \sigma_2)) \\ = \frac{4\pi}{g} \int d^2\sigma_{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x(\sigma_1, \sigma_2)), \quad (1.136)$$

com  $x(\sigma_1, \sigma_2)$  sendo uma superfície aberta de Dirac. Enquanto que para um vórtice de centro,

$$d_{\mu\nu}^{(v)} = \frac{2\pi}{g} \oint d^2\sigma_{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x(\sigma_1, \sigma_2)), \quad (1.137)$$

onde  $x(\sigma_1, \sigma_2)$  é uma superfície fechada.

O que temos de mais importante aqui é o fato do vórtice de centro possuir um fluxo magnético que é metade do de uma corda de Dirac. Utilizaremos este resultado para derivarmos um modelo efetivo que representa a integração sobre cadeias de vórtices de centro e monopólos correlacionados.

Vimos nesta seção que o procedimento de dualização da teoria de Yang-Mills consegue explicitar as contribuições de defeitos topológicos, e portanto fica possível integrar sobre eles, se inserirmos algumas informações fenomenológicas sobre o ensemble. Mesmo depois de parametrizar estas informações, a integração sobre o ensemble de objetos interagentes é altamente não trivial. Tudo o que falamos e discutimos neste capítulo será de extrema utilidade para a compreensão dos capítulos subsequentes. No próximo capítulo, veremos uma nova proposta de ensemble de objetos topológicos e como devemos tratá-los de uma maneira rigorosa para realizar a integração.

## 2 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO PARA VÓRTICES DE CENTRO EM 3D

Discutimos no capítulo anterior o problema do confinamento do ponto de vista do modelo da supercondutividade dual de t’Hooft, onde o vácuo seria composto por objetos magnéticos que condensariam dando origem a um tubo de fluxo cromoeletrico capaz de confinar cargas cromoeletricas (quarks). Também apontamos para o problema de saber quais objetos seriam realmente relevantes no vácuo da teoria. O que será feito neste capítulo será justamente supor que cadeias de monopólos (ou instantons, em 3D euclidiana) e vórtices de centro sejam candidatos para a descrição de uma tensão confinante em teorias de Yang-Mills.

Monopólos em três dimensões euclidianas comportam-se como instantons (defeitos topológicos pontuais) e vórtices de centro são descritos como objetos unidimensionais tipo corda. Foi mostrado em [39] que o formalismo da decomposição de Cho, tratando com cuidado as direções  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$ , é capaz de acomodar vórtices de centro nestas direções, enquanto a direção  $\hat{n} \equiv \hat{n}_3$  comporta objetos tipo monopólos. Baseado nesta prerrogativa e em resultados mais recentes na rede, somos levados a acreditar que configurações de defeitos topológicos no vácuo devem ser compostas por cadeias de instantons acoplados com vórtices de centro. Neste sentido, propomos um funcional gerador que consiga representar estas configurações e parametrizamos o setor que envolve os defeitos de uma maneira conveniente: associamos a natureza unidimensional dos vórtices de centro aos polímeros e conseguimos incorporar efeitos como tensão, curvatura e volume excludente ao setor de vórtices.

A associação de física de polímeros com efeitos da geometria aleatória já é bem conhecida e fundamentada [87]. O que faremos aqui é selecionar quais efeitos poderiam ser relevantes na descrição dos vórtices de centro. A derivação de uma probabilidade ponta-a-ponta para este objeto é fundamental para que possamos integrar no setor não perturbativo e com isso obter um modelo efetivo para cadeias de instantons e vórtices de centro correlacionados.

Começaremos o capítulo discutindo como a inclusão da rigidez de uma cadeia unidimensional pode complicar os cálculos de quantidades físicas sob o ponto de vista da física de polímeros. Apresentaremos o modelo da *cadeia de minhoca* (a partir de agora abreviado pela sigla WLC, que em inglês significa “Wormlike Chain Model”) onde a introdução das interações é feita sob uma forma muito natural [85]. Em seguida falaremos sobre como escrever um ensemble que represente estas configurações de defeitos, onde definiremos o bloco fundamental necessário para extrairmos o modelo efetivo. A partir daí iremos expor o método que desenvolvemos em nosso primeiro artigo. O resultado que obtivemos para a probabilidade ponta-a-ponta do vórtice de centro passa a possuir um



termo com a derivada covariante abeliana e esta probabilidade é o ingrediente fundamental para a derivação do modelo efetivo.

## 2.1 Teoria de campos de polímeros

Nesta seção abordaremos alguns modelos de física de polímeros que ajudarão a perceber a importância que o método adotado em nosso artigo possui. Em física de polímeros, o modelo mais básico que podemos pensar consiste no modelo da cadeia aleatória. As idéias utilizadas na descrição deste modelo nos guiarão para modelos mais sofisticados, como o modelo gaussiano, e o modelo WLC que permite a introdução de interações no polímero.

### 2.1.1 O modelo da cadeia aleatória

Um polímero é uma longa cadeia formada por moléculas idênticas conectadas uma a outra em ligações que permitem rotações espaciais. O modelo da cadeia aleatória é definido como uma cadeia de  $N$  uniões (ou links) de comprimento  $a$  (chamados de monômeros) cujos ângulos de rotação ocorrem com iguais probabilidades. A probabilidade de que um objeto destes comece no ponto de coordenadas  $x_0$  e termine no ponto de coordenadas  $x$  é definida como [44]

$$q_N(x, x_0) = \prod_{n=1}^N \left[ \int d^3 \Delta x_n \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\Delta x_n - a|) \right] \delta^{(3)}(x - x_0 - \sum_{n=1}^N \Delta x_n). \quad (2.1)$$

Nesta expressão notamos que a primeira delta de Dirac se encarrega de fixar os comprimentos de todos os monômeros no mesmo valor  $a$ , enquanto a segunda fixa que a soma de todos os vetores na cadeia deve ser igual ao vetor distância entre os pontos extremos,  $R = x - x_0$ . Os fatores  $\frac{1}{4\pi a^2}$  são devidos à normalização da probabilidade para links individuais

$$q_1(x, x_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\Delta x| - a), \quad (2.2)$$

na integral

$$\int d^3 x q_1(x, x_0) = 1. \quad (2.3)$$

Este fator é desta forma porque as probabilidades são todas esfericamente simétricas e esta mesma normalização ocorre para qualquer  $N$ . Podemos escrever a segunda função

delta em (2.1) no espaço de Fourier como

$$\delta^{(3)}(x - x_0 - \sum_{n=1}^N \Delta x_n) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-x_0) - ik \sum_{n=1}^N \Delta x_n}, \quad (2.4)$$

e portanto

$$q_N(x, x_0) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-x_0)} \tilde{q}_N(k), \quad (2.5)$$

onde definimos

$$\tilde{q}_N(k) = \prod_{n=1}^N \left[ \int d^3 \Delta x_n \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\Delta x_n| - a) e^{-ik \Delta x_n} \right]. \quad (2.6)$$

Logo  $\tilde{q}_N(k) = [\tilde{q}_1(k)]^N$ . Podemos calcular  $\tilde{q}_1(k)$  para qualquer dimensão  $D$  introduzindo o ângulo sólido,  $\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$ , e a expressão (2.6) torna-se

$$\tilde{q}_1(k) = \int d^D \Delta x \frac{1}{\Omega_D a^{D-1}} \delta(|\Delta x| - a) e^{-ik \Delta x}, \quad (2.7)$$

e cujo resultado é dado em funções de Bessel  $J_\mu(z)$

$$\tilde{q}_1(k) = \frac{\Gamma(D/2)}{(ka/2)^{D/2-1}} J_{D/2-1}(ka). \quad (2.8)$$

Ou seja, a cadeia aleatória não possui muita dificuldade de ser tratada e podemos obter agora todos os momentos da distribuição relativo a esse modelo. Porém, nos deteremos agora ao limite em que o número de links,  $N$ , é muito grande. O resultado é (voltando ao espaço das configurações) [44]

$$q_N(x, x_0) \approx \left( \frac{3}{2\pi N a^2} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{3(x - x_0)^2}{2N a^2} \right]. \quad (2.9)$$

Fica claro que este comportamento é gaussiano, indicando que para grandes valores de monômeros na cadeia, a probabilidade vai a zero. Antes de apresentarmos o modelo WLC, é válido comentar os procedimentos que serão realizados nele utilizando modelos mais simples, como o modelo gaussiano discreto e contínuo. Aqui, os métodos levam em conta apenas os efeitos das posições das partículas na cadeia, sem se preocupar com a

sua orientação, ao contrário do modelo WLC que leva em consideração as orientações dos monômeros na cadeia polimérica.

### 2.1.2 A cadeia gaussiana discreta e contínua

Antes de nos enveredarmos no modelo WLC, que é o mais completo, uma boa didática consiste em apresentar o modelo discreto gaussiano e após isso tomar o limite contínuo para obtermos a cadeia gaussiana. Não apresentaremos todos os detalhes aqui, mas indicamos o leitor ao livro de G. Fredrickson para um maior aprofundamento no assunto [85]. Esta idéia de discretizar e depois tomar o limite contínuo nos ajudará muito quando formos relatar nossos métodos em teoria de campos.

Em primeiro lugar, o modelo da cadeia gaussiana discreta, assume que partículas adjacentes ao longo de uma cadeia unidimensional são acorrentadas por potenciais tipo-mola, que podem ter uma variedade de formas. Se considerarmos que as  $N$  ligações presentes na cadeia são equivalentes e desprezarmos os efeitos externos, a energia potencial pode ser expressa por

$$U_0(b^N) = \sum_{i=1}^N h(|b_i|), \quad (2.10)$$

onde  $h(x)$  é o potencial entre as partículas vizinhas ao longo do polímero e  $b_i$  é o  $i$ -ésimo vetor de ligação entre duas partículas. Logo, a função de partição deste modelo será

$$Z_0 = V \left\{ \int db_i \exp[-\beta h(|b|)] \right\}^N, \quad (2.11)$$

onde  $V$  é um fator de normalização. Quando tomamos o potencial como sendo

$$h(x) = \frac{3k_B T}{2b^2} x^2, \quad (2.12)$$

estamos trabalhando com o modelo da *cadeia gaussiana discreta*. Neste ponto, é útil realizarmos a conexão da descrição de polímeros com processos estocásticos. Assumimos uma densidade de probabilidade  $p_0(r, j)$ , para a evolução de uma partícula no extremo da cadeia  $j$  até que a mesma partícula chegue na posição seguinte  $j + 1$ , dada por uma posição  $r$ . Consideramos também o conhecimento da densidade de probabilidade para uma cadeia que possui uma partícula a menos,  $p_0(r, j - 1)$ , e com isso somos capazes de montar uma equação recursiva na qual o polímero pode ser gerado completamente,

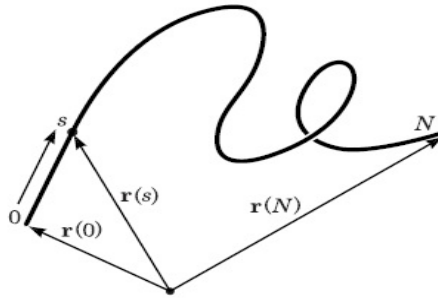


Figura 5: Cadeia gaussiana contínua descrita pela curva  $r(s)$ . Os pontos extremos da cadeia são representados por  $r(0)$  e  $r(N)$  [85].

$$p_0(r, j) = \int db_j \Phi(b_j; r - b_j) p_0(r - b_j, j - 1). \quad (2.13)$$

Damos o nome desta equação como *equação de Chapman-Kolmogorov*. Nesta expressão,  $\Phi(b_j; r - b_j)$  é uma densidade de probabilidade normalizada a 1. Ela é *condicional* no sentido que podemos escolhê-la de acordo com as necessidades que estamos precisando em nosso modelo. Estes são os ingredientes básicos para entendermos a cadeia gaussiana contínua.

O modelo da cadeia gaussiana contínua, pode ser visto como um limite contínuo da cadeia gaussiana discreta na qual o polímero passa a ser um filamento linear e elástico. Como mostrado na figura 5, a configuração da cadeia gaussiana contínua é especificada por uma curva no espaço  $r(s)$ , em que  $s \in [0, N]$  é um parâmetro que descreve a localização do segmento ao longo da cadeia (ele não representa ainda o parâmetro comprimento de arco na cadeia, desde que apenas rotula a posição de cada partícula na cadeia). A posição  $s$  no espaço dos segmentos é dada por  $r(s)$ .

A energia potencial da cadeia gaussiana contínua (seguindo o mesmo espírito da cadeia discreta) pode ser escrita como

$$U_0[r(s)] = \frac{3k_B T}{2b^2} \int_0^N ds \left| \frac{dr}{ds} \right|^2, \quad (2.14)$$

onde percebemos o caráter funcional de  $U_0$ . Se notarmos que  $dr/ds$  é um “esticamento” local em um segmento de comprimento  $ds$  localizado na posição  $s$ , então (2.14) soma sobre todas as contribuições harmônicas sobre o contorno inteiro que representa a cadeia. Assim, a função de partição é

$$Z_0 = \int \mathcal{D}r e^{-\beta U_0[r]}, \quad (2.15)$$

onde temos agora a integral de caminho sobre todas as curvas possíveis que o polímero pode ser parametrizado. Um aspecto interessante desta integral de caminho é quando fazemos seu limite discreto e obtemos,

$$Z_0 \approx \prod_{j=0}^{N_s} \int dr_j \exp \left( - \frac{3}{2b^2 \Delta s} \sum_{i=1}^{N_s} |r_{i-1} - r_i|^2 \right), \quad (2.16)$$

onde  $\Delta s = N/N_s$  é o espaçamento entre dois pontos do contorno  $r(s)$ . Podemos seguir agora a mesma idéia da cadeia gaussiana discreta e escrevemos a equação de Chapman-Kolmogorov para o modelo contínuo como

$$p_0(r, s + \Delta s) = \int d(\Delta r) \Phi(\Delta r; r - \Delta r) p_0(r - \Delta r, s). \quad (2.17)$$

Uma característica extremamente útil nos desenvolvimentos subsequentes é que as equações integrais de Chapman-Kolmogorov podem ser reduzidas a equações diferenciais, que recebem o nome de *equações de Fokker-Planck*, em física estatística, ou *Feynman-Kac*, em teoria quântica. Para derivar estas equações expandimos ambos os lados de (2.17) em série de Taylor em potências de  $\Delta s$  e  $\Delta r$ . Notando que  $\Phi(\Delta r; r - \Delta r)$  é independente da posição inicial,  $r - \Delta r$  neste caso, não expandimos este peso estatístico. Assim,

$$p_0(r, s) + \Delta s \frac{\partial}{\partial s} p_0(r, s) + O(\Delta s^2) = p_0(r, s) - \langle \Delta r \rangle_{\Phi} \cdot \nabla p_0(r, s) + \frac{1}{2!} \langle \Delta r \Delta r \rangle_{\Phi}^{ij} \nabla_i \nabla_j p_0(r, s) + O(\Delta r^3), \quad (2.18)$$

onde define-se as médias como

$$\langle f(\Delta r) \rangle_{\Phi} = \int d(\Delta r) \Phi(\Delta r) f(\Delta r). \quad (2.19)$$

As médias acima foram calculadas em [85] e valem  $\langle \Delta r \rangle_{\Phi} = 0$  e  $\langle \Delta r_i \Delta r_j \rangle_{\Phi} = \frac{b^2 \Delta s}{3} \delta_{ij}$ . Substituindo isto em (2.18), obtemos finalmente a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial s} p_0(r, s) = \frac{b^2}{6} \nabla^2 p_0(r, s). \quad (2.20)$$

Note que esta equação é uma *equação diferencial de difusão* com coeficiente de difusão  $b^2/6$ . A solução desta equação fornece para nós a informação completa sobre a distribuição dos segmentos extremos,  $p_0(r, s)$ . Outro ponto importante que podemos sublinhar é que,

quando utilizamos a condição inicial  $p_0(r, 0) = \delta(r)$ , a solução desta equação de Fokker-Planck resulta na aproximação gaussiana da cadeia aleatória (2.9)

$$p_0(r, s) = \left[ \frac{3}{(2\pi sb^2)} \right]^{3/2} e^{-\frac{3|r|^2}{(2sb^2)}}. \quad (2.21)$$

Agora que entendemos o modelo discreto e contínuo de uma cadeia gaussiana polimérica, podemos complicar um pouco mais através da introdução de um termo responsável por dar uma certa orientação aos monômeros: a rigidez (ou em inglês, “stiffness”).

### 2.1.3 Introduzindo efeitos de rigidez

Na natureza, a maioria dos polímeros não respeita a aproximação da cadeia aleatória: em geral, eles adquirem uma certa orientação devido aos efeitos de *rigidez* presentes nas ligações químicas dos monômeros. Neste caso, as junções não permitem uma igual probabilidade para todos os ângulos esféricos. Em curtas distâncias, este efeito produz uma tendência de orientação de forma a criar uma correlação com os monômeros vizinhos. Podemos pensar que o tamanho de cada monômero  $a$  é trocado por um tamanho efetivo  $a_{ef}$  que representa o efeito da rigidez. No limite em que a rigidez é muito grande, podemos concluir que o polímero será uma corda orientada em linha reta (em inglês, chamamos este limite de “Rod Limit”).

Começaremos apresentando os efeitos da rigidez no formato contínuo e depois o discretizaremos. Os efeitos de rigidez em uma cadeia polimérica pode ser implementado por uma energia de curvatura dada por

$$E_{curv} = \frac{1}{2\kappa} \int_0^L ds \left( \frac{du}{ds} \right)^2, \quad (2.22)$$

onde  $u(s) = \frac{dx}{ds}$  é o vetor tangente unitário da curva do espaço ao longo da qual o polímero se encontra. O parâmetro  $s$  é chamado de comprimento de arco e é dado por  $ds = \sqrt{dx^2}$ . Quando temos um  $\kappa$  muito grande significa que nossa cadeia é quase aleatória, desde que temos grandes variações de orientação e todos os ângulos esféricos passam a ter iguais probabilidades de ocorrerem; do contrário, temos o *rod limit*. Partindo desta descrição contínua dos efeitos de rigidez, somos levados a discretizar a curva em que estamos trabalhando em  $N$  pedaços de comprimento igual,  $a$ . Isto nos gera a seguinte definição

$$E_{curv}^N = \frac{1}{2a\kappa} \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n-1})^2. \quad (2.23)$$

Com isso, podemos escrever a distribuição de probabilidades  $q_N(x, u, x_0, u_0)$  como

$$q_N(x, u, x_0, u_0) = \mathcal{N} \prod_{n=1}^{N-1} \left[ \mathcal{N} \int d^{D-1}u_n \right] \delta^{(D)}(x - x_0 - a \sum_{n=1}^N u_n) \times \\ \times \exp \left[ -\frac{\beta}{2a\kappa} \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n-1})^2 \right], \quad (2.24)$$

onde  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização da distribuição angular obtido pela integração sobre uma esfera de raio unitário no espaço dos vetores tangentes  $u_n$  e  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  é o fator de Boltzmann. Uma descrição alternativa desta probabilidade ponta-a-ponta pode ser encontrada no livro de Ambjörn [87,88]. Nesta referência vemos uma derivação da equação de difusão associada a um objeto que está sujeito ao efeito da rigidez<sup>1</sup>. Porém, a forma que chamamos a função  $q_N(x, u, x_0, u_0)$  ainda carece de uma melhor definição. Para ser uma probabilidade de ponta-a-ponta da cadeia com rigidez, devemos tomar as integrais nas orientações final e inicial da seguinte maneira

$$q_N(x, x_0) = \int d^{D-1}u \int \frac{d^{D-1}u_0}{\Omega_D} q_N(x, u, x_0, u_0). \quad (2.25)$$

H. Kleinert, em seu livro [44], define os momentos da distribuição  $q_N(x, u, x_0, u_0)$  como

$$\langle \Delta x^{2l} \rangle = \mathcal{N} \int d^D(\Delta x) \int d^{D-1}u_b \prod_{n=1}^{N-1} \left[ \mathcal{N} \int d^{D-1}u_n \right] \left[ \int \frac{d^{D-1}u_a}{\Omega_D} \right] \times \\ \times \delta^{(D)}(x_b - x_a - \sum_{n=1}^N a u_n) \times (\Delta x)^{2l} \exp \left[ -\frac{\beta}{2a\kappa} \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n-1})^2 \right], \quad (2.26)$$

onde o ponto e a orientação iniciais são denotados por  $x_a, u_a$  e os finais por  $x_b, u_b$ . Notamos que os cálculos se tornaram exaustivos quando temos momentos de ordem mais alta. Tudo o que comentamos aqui é a teoria sob ausência de interações, o que mostra que, neste formalismo, é muito difícil incluímos efeitos externos ao sistema. Surge então a necessidade de procurarmos alguma forma de introduzir estes efeitos utilizando algum formalismo alternativo na descrição de polímeros interagentes sob campos externos: o

<sup>1</sup>Este livro utiliza uma abordagem geométrica para lidar com objetos curvos de onde é muito natural o efeito de uma rigidez (que é um efeito de curvatura sob o ponto de vista da geometria).

modelo WLC, que será apresentado a seguir, consegue descrever de uma maneira simples o comportamento de um polímero sob a influência de interações.

Antes de seguirmos vale a pena mostrar como podemos utilizar os modelos de polímeros para uma descrição de teorias de campos. Observando a equação (2.9) do modelo de cadeia aleatória, notamos que não podemos tomar o limite contínuo com  $Na = L$ , desde que restaria um fator  $a$ , e este estaria mal definido. Todavia, se considerarmos um tamanho efetivo dos monômeros no polímero, devido aos efeitos de rigidez, e realizando as substituições  $Na^2/3 \rightarrow L/\alpha$ , com  $\alpha \equiv 3/a_{ef}$ , obtemos

$$q_N(x, x_0, L) = \left(\frac{\alpha}{2\pi L}\right)^{3/2} e^{-\alpha/2L(x-x_0)^2} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-(L/2\alpha)k^2} e^{ik \cdot (x-x_0)}. \quad (2.27)$$

Integrando-se então sobre os diferentes comprimentos, pesados por  $e^{-\mu L}$ , obtemos uma função de Green para uma teoria de campos livre de interações

$$Q(x, x_0) = 2\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot (x-x_0)}}{k^2 + m^2}, \quad m^2 = 2\alpha\mu, \quad (2.28)$$

ou ainda

$$(-\nabla^2 + m^2)Q(x, x_0) = 2\alpha\delta(x - x_0). \quad (2.29)$$

É possível criar algum formalismo em que esse comportamento efetivo, que a rigidez traz para a cadeia, é incluído de uma maneira mais controlada. É isso que buscaremos realizar no próximo tópico. Devemos enfatizar que introduzir efeitos de rigidez na cadeia é visivelmente complicado e uma ferramenta que consiga implementar isso será de grande valia.

#### 2.1.4 O modelo WLC

Vimos até agora que o modelo da cadeia aleatória procura descrever polímeros flexíveis. Agora mostraremos como podemos descrever o que chamamos de polímeros semi-flexíveis utilizando o modelo de Kratky-Porod, ou simplesmente *modelo WLC* [89]. Considere então uma cadeia inextensível e portanto com comprimento fixo  $L$ . A configuração da cadeia, novamente é descrita por uma curva no espaço  $x(s)$ , em que  $s \in [0, L]$  é o parâmetro de arco. Definimos um vetor tangente  $u(s) = dx(s)/ds$  e unitário à cadeia em todos os pontos da curva, análogo ao que vimos na seção anterior. A magnitude do vetor  $du(s)/ds = d^2x(s)/ds^2$  é interpretada como sendo a curvatura local do polímero no contorno de posição  $s$  (observe novamente a equação (2.22)). A idéia a partir de agora é



muito simples e eficiente: devemos discretizar o polímero assim como na cadeia aleatória, porém a cada passo que realizamos devemos levar em consideração o passo anterior (semelhante à uma cadeia Markoviana, onde temos efeitos de memória). A probabilidade ponta-a-ponta da cadeia agora pode ser escrita em termos de uma relação de recorrência que explicita como esse polímero evolui com o passar do parâmetro  $s$  (geração da curva). Em termos matemáticos, podemos definir uma equação de Chapman-Kolmogorov da seguinte maneira [85]

$$q(x, u, s + \Delta s) = \int dx' \int d^{D-1}u' \psi(\Delta u) q(x - \Delta x, u - \Delta u, s), \quad (2.30)$$

onde os deslocamentos  $\Delta x = x - x'$  e  $\Delta u = u - u'$  representam variações da posição e da orientação dos vetores tangentes, respectivamente. A função  $\psi(\Delta u)$  é um peso estatístico semelhante à uma distribuição de velocidades na teoria estatística Maxwelliana. Obviamente, esta probabilidade deve respeitar uma condição de normalização

$$\int dx \int d^{D-1}u \psi(\Delta u) = 1. \quad (2.31)$$

Além disso, temos que  $\Delta x = u\Delta s$ , que adicionaremos na relação (2.30) como um vínculo através de uma delta de Dirac,  $\delta(x - x' - u\Delta s)$ . Quando substituimos este conjunto de definições e discussões em (2.30), conseguimos simplificá-la para

$$q(x + u\Delta s, u, s + \Delta s) = \int d^{D-1}u' \psi(\Delta u) q(x, u - \Delta u, s), \quad (2.32)$$

onde integramos na delta de Dirac que representava o vínculo. Perceba que a probabilidade  $q$  depende de duas variáveis,  $x$  e  $s$ . Este fato é importante para os desenvolvimentos adicionais, onde vamos derivar uma equação de difusão tipo Fokker-Planck expandindo ambos os lados da equação acima em série de Taylor para pequenos valores de  $\Delta s$  e reteremos apenas os termos de ordem linear. Estes são os ingredientes necessários para se entender o formalismo que será desenvolvido mais a frente.

Até agora, contudo, não falamos como poderíamos introduzir efeitos de interação externos no sistema, o que é muito importante para nós. A boa notícia é que essa introdução é realizada de uma maneira muito natural no modelo WLC. Lembrando que um monômero é definido como a diferença entre dois pontos do polímero, somos capazes de incluir os efeitos de interação externa adicionando um termo  $\omega(x, u)$  na equação (2.30),

$$q(x, u, s + \Delta s) = e^{-(\Delta s)\omega(x, u)} \int dx' \int d^{D-1}u' \psi(\Delta u) q(x - \Delta x, u - \Delta u, s), \quad (2.33)$$

onde devemos sublinhar que a interação está “desligada” no começo da iteração. Perceba que com essa relação de recorrência mais alguma condição inicial apropriada somos capazes de obter a cadeia da forma geral, sem aproximações. Esta idéia também é fundamental para o entendimento da seguinte questão: como podemos utilizar este formalismo para estudarmos sistemas em teoria quântica de campos? As próximas seções deste capítulo se propõem a discutir esta questão e respondê-la para objetos magnéticos unidimensionais em teorias de Yang-Mills em 3D.

## 2.2 Instantons e vórtices de centro correlacionados

Vimos na seção anterior como podemos incluir efeitos de rigidez em objetos unidimensionais, como polímeros. A partir de agora voltaremos a discutir sobre como podemos tratar os defeitos topológicos que podem surgir em teorias de Yang-Mills quando dualiza-se sua lagrangiana e explicitamos a contribuição dos defeitos. Para isso, lembramos primeiramente a decomposição de Cho (em 3D),

$$\vec{A}_\mu = A_\mu \hat{n} - \frac{1}{g} \hat{n} \times \partial_\mu \hat{n} + X_\mu^1 \hat{n}_1 + X_\mu^2 \hat{n}_2, \quad (2.34)$$

que agora parametriza não somente monopólos, mas também objetos tipo corda, como vórtices de centro ou cordas de Dirac (ver discussão do capítulo 1). Também retomamos que a base de cor pode ser dada em termos de um mapeamento  $S \in SU(2)$ ,

$$ST_a S^{-1} = \hat{n}_a \cdot \vec{T}, \quad (2.35)$$

onde  $T_a$  são os geradores do grupo  $SU(2)$ . Vimos também que  $C_\mu^a = -\frac{1}{2g} \epsilon^{abc} \hat{n}_b \cdot \partial_\mu \hat{n}_c$ , e se renomearmos as variáveis de campo como

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu^3 - C_\mu^3, \quad X_\mu^1 = \mathcal{A}_\mu^1, \quad X_\mu^2 = \mathcal{A}_\mu^2, \quad (2.36)$$

obtemos uma versão mais simétrica da decomposição (2.34) como

$$\vec{A}_\mu = \vec{A}_\mu(\vec{\mathcal{A}}, S) = (\mathcal{A}_\mu^a - C_\mu^a) \hat{n}_a, \quad (2.37)$$

com  $\vec{\mathcal{A}}_\mu$  representando o setor perturbativo e  $C_\mu^a$  carregando a informação sobre os defeitos. A vantagem do *Ansatz* (2.37) é que os defeitos parametrizados nas bases de cor podem também representar monopólos unidos por pares de vórtices de centro, formando cadeias [39].

Como vimos no capítulo 1, podemos considerar uma função de partição efetiva que acomode o setor correspondente às cadeias de instantons e vórtices de centro dada por (em 3D)

$$Z_{YM} = \int [\mathcal{D}\lambda][\mathcal{D}\Psi]\Delta_{FP}[\vec{\mathcal{A}}]\delta[f(\vec{\mathcal{A}})] \times e^{-S_c - \int d^3x(1/2)\lambda_\mu\lambda_\mu} \\ \times e^{i \int d^3x[\lambda_\mu k_\mu + \mathcal{A}_\mu(\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\lambda_\rho - J_\mu)]} Z_{v,m}[\lambda], \quad (2.38)$$

onde o setor de defeitos magnéticos é representado por  $Z_{v,m}[\lambda]$ , enquanto a parte restante é perturbativa. A ação  $S_c$  já foi definida em (1.133), assim como a corrente  $J_\mu$  em (1.134). O determinante de Faddeev-Popov implementa a fixação de calibre maximal abeliana. Note que na equação (2.38) temos um vínculo implícito  $J_\mu^c = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\lambda_\rho$ , que é uma corrente topológica conservada associada ao campo externo  $\lambda_\mu$  descrevendo o setor de gluons fora da diagonal.

Se o setor topológico  $Z_{v,m}[\lambda]$  estiver ausente na equação (2.38), então a integral de caminho torna-se apenas perturbativa, com o procedimento de Faddeev-Popov bem conhecido. A base local de cor pode ser deformada de forma tal que na direção  $\hat{n}_3$  encontramos monopólos e nas direções  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  singularidades tipo corda, como superfícies de Dirac ou vórtices de centro. Utilizando a forma simétrica da decomposição de Cho, vemos que o tensor de intensidades pode ser decomposto na seguinte forma

$$\vec{\mathcal{F}}_\mu(A) = [\mathcal{F}_\mu^a(\mathcal{A}) - \mathcal{F}_\mu^a(C)]\hat{n}_a, \quad (2.39)$$

onde

$$\mathcal{F}_\mu^a(C) = -d_\mu\delta^{a3}, \quad (2.40)$$

é o setor topológico somente na subálgebra de Cartan e minimamente acoplado com  $\lambda_\mu$ . A quantidade  $d_\mu$  é singular e reside ao longo de uma curva, ou seja, comporta defeitos tipo corda. Y. Nambu introduziu a idéia de que cordas de Dirac seriam objetos singulares que uniam um par de monopólo/anti-monopólo [17], porém como mostrado em [39], o par monopólo/anti-monopólo pode ser unido por um par de vórtices de centro que carregam um fluxo com metade do valor do fluxo magnético de uma corda de Dirac. A inclusão de

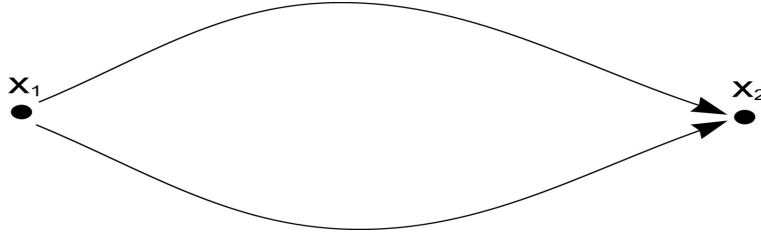


Figura 6: Par monopólo/anti-monopólo correlacionado com um par de vórtices de centro.

objetos que podem estar no vácuo de Yang-Mills de uma forma observável pode ter um efeito considerável sobre aspectos de confinamento sob a luz do mecanismo da supercondutividade dual. Vimos que vórtices de centro possuem este caráter observável devido a uma contribuição não trivial para o loop de Wilson quando enlaçados por eles. Logo, nada mais natural do que imaginar que, um modelo que descreva bem o comportamento do vácuo de Yang-Mills, deva conter ambos os tipos de defeitos: monopólos e vórtices de centro correlacionados em forma de cadeias (isto recebe suporte de estudos feitos na rede apresentado no capítulo anterior). Sendo assim, podemos parametrizar  $d_\mu$  como

$$d_\mu = d_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2)}, \quad d_\mu^{(k)} = \frac{2\pi}{g} \int ds \frac{dx_\mu^{(k)}}{ds} \delta^{(3)}(x - x^\alpha(s)). \quad (2.41)$$

Aqui,  $x^{(k)}(s)$ ,  $k = 1, 2$ , é um par de vórtices de centro abertos com os mesmos pontos extremos em  $x^+$  e  $x^-$ , onde situam-se o monopólo e anti-monopólo (ver figura 6). Vemos que  $d_\mu$  respeita a seguinte relação

$$\partial_\mu d_\mu^{(k)} = \frac{2\pi}{g} [\delta^{(3)}(x - x^+) - \delta^{(3)}(x - x^-)]. \quad (2.42)$$

A possibilidade de que os defeitos magnéticos possam se tornar objetos relevantes é representada quando assumimos que estes objetos possuem propriedades fenomenológicas, levando a um resultado não trivial em  $Z_{v,m}[\lambda]$ . Baseando-nos nestes aspectos, sugerimos então uma integral de caminho sobre estas cadeias de instantos como

$$Z_{v,m}[\lambda] = \int [\mathcal{D}m][\mathcal{D}v] e^{-S_d} e^{i \int d^3x \lambda_\mu d_\mu}, \quad (2.43)$$

onde a ação  $S_d$  é puramente fenomenológica. Ela pode ser parametrizada considerando as propriedades mais simples que um vórtice de centro possa possuir. Podemos dividir isto nas partes interagentes e não interagentes

$$S_d = S_d^0 + S_d^{int}. \quad (2.44)$$

Em grandes distâncias, para cada um dos vórtices localizados sobre a curva  $x(s)$  nós iremos considerar um termo em  $S_d^0$  proporcional ao comprimento do vórtice (efeito de tensão) e as primeiras correções devido à curvatura (efeito de rigidez)

$$\int_0^L ds \left[ \mu + \frac{1}{2\kappa} \dot{u} \cdot \dot{u} \right], \quad (2.45)$$

onde  $u = dx/ds$  e  $u \cdot u = 1$  (seção anterior). Perceba que atribuímos algumas características típicas que um objeto unidimensional pode apresentar. Veremos que diferentes fases podem ser obtidas com diferentes escolhas dos parâmetros. Na parte interagente, nós incluiremos as interações vórtice-vórtice (efeito de volume excludente) da maneira tradicional, como na referência [44]. Na integral de caminho já existe uma interação com o campo dual  $\lambda_\mu$ , um efeito que está presente quando os vórtices de centro são finos. Cada vórtice de centro contribuirá com um termo do tipo

$$\int d^3x \lambda_\mu d_\mu = \frac{2\pi}{g} \int_0^L ds \frac{dx}{ds} \cdot \lambda. \quad (2.46)$$

Ainda não discutimos como podemos definir as medidas de integração  $[Dm]$  e  $[Dv]$  e nem escrevemos a ação  $S_d$  geral. Isto será apresentado na próxima seção, onde entenderemos como integrar sobre estas cadeias de vórtices e monopólos correlacionados.

### 2.3 Descrição de ensembles de vórtices e instantons correlacionados

A função de partição de um sistema é definida por

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}, \quad (2.47)$$

onde a soma é realizada sobre todos os estados possíveis do sistema. Se conhecemos as partículas que constituem o sistema e suas interações, é possível então encontrar os estados quânticos e calcular a soma em (2.47) [90]. Tendo esta idéia básica em mente, somos capazes agora de imaginar o que poderia ser um ensemble de cadeias em teoria quântica de campos, por exemplo. Consistiria em uma integração (soma) sobre todas as configurações possíveis de vórtices de centro e monopólos correlacionados. Logo, podemos escrever a função de partição de configurações tipo cadeias como sendo

$$Z_{v,m} = \sum_n \int [\mathcal{D}m]_n [\mathcal{D}v]_n e^{-S_d^0 + S_d^{int}} \times e^{i(2\pi/g) \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{L_k} ds \dot{x}_\alpha^{(k)} \lambda_\alpha(x^{(k)})}, \quad (2.48)$$

onde definimos as quantidades

$$S_d^0 = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{L_k} ds \left[ \mu + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\alpha^{(k)} \dot{u}_\alpha^{(k)} \right], \quad (2.49)$$

$$S_d^{int} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \int_0^{L_k} \int_0^{L_{k'}} ds ds' V(x^{(k)}(s), x^{(k')}(s')). \quad (2.50)$$

O inteiro  $n$  denota o número de pares monopólos/anti-monopólos. Vórtices de centro são unidos em pares aos objetos anteriores, tal que uma dada configuração de defeitos, com um dado  $n$ , o número de vórtices de centro será  $2n$ . Neste ponto, podemos comentar que na expressão (2.48) vemos que o número  $n$  faz o papel do  $r$  na definição (2.47), ou seja, ele conta o número de configurações distintas do ensemble de cadeias de monopólos, assim como o índice  $r$  representa o conjunto de todas as configurações energéticas possíveis que o sistema pode se encontrar. Estamos representando os vórtices de centro como uma curva parametrizada  $x^{(k)}(s)$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ . Para cada vórtice de centro,  $s$  denota o parâmetro comprimento de arco que se encontra no intervalo  $[0, L_k]$ , com  $L_k$  sendo o comprimento total da curva. Nas ações (2.49) e (2.50) temos parâmetros dimensionais fenomenológicos, no sentido que os introduzimos visando obter algum efeito não trivial sobre a integração (2.48). O primeiro termo em  $S_d^0$  descreve efeitos de tensão dos vórtices, o segundo diz respeito aos efeitos da rigidez sobre esses objetos, enquanto  $S_d^{int}$  representa interações escalares de volume excludente (através de um potencial de interação entre os vórtices), também presentes em polímeros [44]. Para ver isto, considere a densidade localizada sobre a curva

$$\rho(x) = \sum_k \int_0^{L_k} ds \delta(x - x^{(k)}(s)). \quad (2.51)$$

Notamos que a ação  $S_d^{int}$  pode ser escrita na forma

$$e^{-(1/2) \int d^3x d^3x' \rho(x) V(x, x') \rho(x')} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} e^{-\int d^3x \rho(x) \phi(x)}, \quad (2.52)$$

onde fizemos uso da transformação de Hubbard-Stratonovich para linearizar a interação introduzindo um campo auxiliar  $\phi(x)$ . A nova ação  $S_\phi$  é dada por

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \phi(x) V^{-1}(x, x') \phi(x'), \quad (2.53)$$

onde

$$\int d^3y V^{-1}(x, y) V(y, z) = \delta(x - z). \quad (2.54)$$

Um caso em particular seria considerarmos uma interação de contato parametrizada por  $V(x - y) = (1/\xi)\delta(x - y)$ . Assim, a função de partição (2.48) pode ser reescrita como

$$Z_{v,m} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} \sum_n Z_n, \quad (2.55)$$

com

$$Z_n = \int [\mathcal{D}m]_n [\mathcal{D}v]_n \exp \left[ \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{L_k} ds \left( i \frac{2\pi}{g} \dot{x}_\alpha^{(k)} \lambda_\alpha(x^{(k)}) - \phi(x^{(k)}) \right) - S_d^0 \right]. \quad (2.56)$$

Para um dado  $n$ , a medida  $[\mathcal{D}m]_n = \xi^{2n} d^3x_1 \cdots d^3x_{2n}$  representa a integral sobre as posições dos  $2n$  monopólos e anti-monopólos. O parâmetro  $\xi$  tem dimensão de massa, a fim de dimensionalizar corretamente a medida de integração. Para uma dada configuração das posições de instantons (monopólos no espaço tridimensional euclidiano), a medida de integração  $[\mathcal{D}v]_n$  inclui a soma sobre todas as maneiras diferentes de uni-los com vórtices de centro. Além disso, para cada um dos  $2n$  vórtices de centro, esta medida contém a integral de caminho sobre todas as linhas de mundo dos vórtices  $[\mathcal{D}x^{(k)}(s)]$  com extremos fixos, e comprimento total  $L_k$ , seguido pela integral sobre todos os comprimentos  $\int_0^{L_k} dL_k$ .

Assim, da equação (2.56), torna-se claro que todos os termos possíveis na função partição dependem do que chamamos de *bloco fundamental*, ou ainda, da seguinte integral de caminho para um único vórtice de centro com extremos fixos,

$$Q(x, x_0) = \int_0^\infty dL e^{-\mu L} q(x, x_0, L), \quad (2.57)$$

com

$$q(x, x_0, L) = \int [\mathcal{D}x(s)] \times e^{-\int_0^L ds [(1/2\kappa)\dot{u}_\alpha\dot{u}_\alpha + \phi(x(s)) - i(2\pi/g)u_\alpha(s)\lambda_\alpha(x(s))]}, \quad (2.58)$$

onde  $[\mathcal{D}x(s)]$  representa a integral sobre todos os caminhos possíveis  $x(s)$  com comprimento fixo  $L$ , e extremos em  $x_0$  e  $x$ . Mostraremos na seção seguinte como calcular esta integral de caminho e determinar o bloco fundamental para o modelo efetivo completo. Para isso, encontraremos a probabilidade ponta-a-ponta para um vórtice de centro sob estas condições e através dela derivaremos o modelo efetivo de uma cadeia de instantons e vórtices correlacionados em Yang-Mills 3D. Este método representa uma maneira controlada de encontrar probabilidades ponta-a-ponta para objetos unidimensionais e no final interpretaremos o modelo efetivo resultante como uma generalização do modelo de t'Hooft para vórtices de centro em 3D, um resultado altamente não trivial.

Nesta tese, não iremos discutir como chegamos no funcional gerador das configurações topológicas tipo cadeias de monopólo/anti-monopólo associados com pares de vórtices de centro. Porém, a sua expressão final torna-se

$$Z_{v,m} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} e^{\int d^3x I(\delta/\delta C(x))} \times e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x)Q(x,y)K(y)}|_{C=0}, \quad (2.59)$$

onde

$$I\left(\frac{\delta}{\delta C(x)}\right) = \xi \left( \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{K}(x)} \right]^2 + \left[ \frac{\delta}{\delta K(x)} \right]^2 \right), \quad (2.60)$$

e  $C(x)$  representando um conjunto de fontes,  $K(x)$  e  $\bar{K}(x)$ .

Observando este funcional gerador fica fácil perceber que para obtermos a teoria efetiva do modelo de cadeias de instantons e vórtices devemos descobrir a forma explícita de  $Q(x, y)$ . A aplicação sucessiva da derivada em relação às fontes dada por (2.60), permite gerar diferentes gráficos de configurações deste ensemble, onde pares de instantons/anti-instantons são conectados por pares de vórtices de centro. Na próxima seção iremos mostrar de forma cuidadosa como podemos determinar esta quantidade, que preferimos chamar de *probabilidade ponta-a-ponta* para um vórtice de centro.

## 2.4 Probabilidade ponta-a-ponta para um único vórtice de centro em 3D

Vimos na seção 2.1.3 que podemos obter propagadores de polímeros de maneira análoga ao que obtemos em teoria quântica de campos. Nesta seção, gostaríamos de derivar uma expressão similar à (2.29), porém agora introduzimos os efeitos de volume excludente (contato) e as interações externas vetórias  $\lambda_\mu$ , como está exposto em (2.57) e



(2.58). Neste caso, os momentos da distribuição sob efeitos de fontes externas não pode ser calculado das formas tradicionais e nenhuma expressão explícita para a integração da cadeia aleatória é encontrada na literatura. Eis então a nossa contribuição: superamos as dificuldades expostas aqui notando que estamos interessados somente na obtenção de uma representação para  $Q(x, x_0)$ . Nos munimos então de técnicas de polímeros semi-flexíveis modernas, onde podemos introduzir efeitos de interação de uma maneira simples e intuitiva [85,91]. Aqui, fixamos os extremos deste objeto unidimensional e tomamos diferentes comprimentos para estes objetos tipo corda. A representação de campos desejada será obtida de

$$Q(x, x_0) = \int_0^\infty dL e^{-\mu L} \int \frac{d^2 u_0}{4\pi} \frac{d^2 u}{4\pi} q(x, u, x_0, u_0, L), \quad (2.61)$$

onde  $q(x, u, x_0, u_0, L)$  é a *função de Green* para vórtices de centro com comprimento fixo, extremos fixos e vetores tangentes nas pontas onde os instantons estão localizados (ver Figura 7). Como já explicamos anteriormente, as diferenciais  $d^2 u$  e  $d^2 u_0$  integram sobre uma casca esférica de raio unitário  $S^2$  e portanto, os fatores de  $4\pi$  são responsáveis pela normalização. As dimensões de  $Q(x, x_0)$  na equação (2.29), ou na sua versão interagente (2.61), é de inverso de comprimento ao quadrado,  $[L]^{-2}$ . Considerando a equação (2.60), vemos um parâmetro  $\xi$  com dimensões de massa, e a quantidade  $\xi Q(x, x_0) d^3 x$ , obtida pela aplicação da derivada presente em (2.59) via teoria de perturbação, torna-se um peso adimensional associado com vórtices de centro abertos de qualquer tamanho  $L$  limitando-se em um pequeno volume  $d^3 x$  ao redor de  $x$ , dado que o ponto inicial está em  $x_0$ . Este parâmetro possui um comportamento similar a um parâmetro de fugacidade necessário para descrever o plasma de monopólos em  $QED_3$  compacta, e derivar uma ação dual exibindo confinamento [78]. Nesta referência, os instantons estão associados a cordas de Dirac não observáveis, tal que a integração sobre os defeitos diz respeito somente aos monopólos. A fim de corrigir as dimensões, este fato pede um parâmetro de fugacidade com dimensão  $L^{-3}$  (uma densidade de monopólos), que multiplicada por  $d^3 x$  leva a uma quantidade adimensional contando o número de monopólos dentro deste volume. Em nosso modelo, monopólos e anti-monopólos estão unidos por pares de vórtices de centro, que são objetos observáveis. Por esta razão, nosso parâmetro  $\xi$  possui dimensão  $L^{-1}$ , com o objetivo de tornar o produto  $\xi Q(x, x_0) d^3 x$  adimensional.

Observando novamente a Figura 7, podemos realizar o seguinte procedimento que já é bastante utilizado em teoria de campos de objetos unidimensionais: discretizaremos o vórtice de centro contínuo como se estivéssemos vendo um polímero. Em seguida, escrevemos uma relação recursiva capaz de gerar este vórtice de centro contínuo no limite em que o número de monômeros (ou pedaços de iguais comprimento) vai a infinito, ou seja, nos moldes do modelo WLC interagente, podemos escrever

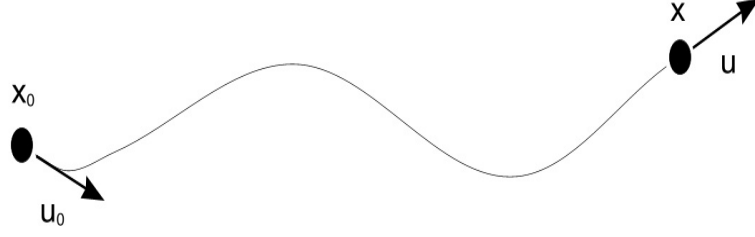


Figura 7: Vórtices de centro interagentes com comprimento fixo e orientações fixas que definem a probabilidade ponta-a-ponta  $q(x, u, x_0, u_0, L)$ .

$$q_{j+1}(x, u, x_0, u_0) = e^{-\Delta L \omega(x, u)} \int d^3 x' d^2 u' \psi(u - u') \delta(x - x' - u \Delta L) q_j(x', u', x_0, u_0), \quad (2.62)$$

juntamente com a condição inicial que fixa os extremos assim como a orientação inicial do vórtice de centro

$$q_0(x, u, x_0, u_0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0). \quad (2.63)$$

Vamos mostrar agora a engenhosidade desta relação recursiva. Utilizando, primeiramente,  $j = 0$  nela e lembrando da condição inicial (2.63), vemos que

$$q_1(x, u, x_0, u_0) = e^{-\Delta L \omega(x, u)} \psi(u - u_0) \delta(x - x_0 - u \Delta L). \quad (2.64)$$

Continuando a iteração da relação (2.62), é fácil notar que

$$\begin{aligned} q_N(x, u, x_0, u_0) &= \int d^3 x_1 d^2 u_1 \cdots d^3 x_{N-1} d^2 u_{N-1} e^{-\Delta L [\omega(x_1, u_1) + \cdots + \omega(x_{N-1}, u_{N-1}) + \omega(x, u)]} \\ &\times \psi(u_1 - u_0) \cdots \psi(u_{N-1} - u_{N-2}) \psi(u - u_{N-1}) \times \delta(x_1 - x_0 - u_1 \Delta L) \cdots \\ &\times \delta(x_{N-1} - x_{N-2} - u_{N-1} \Delta L) \delta(x - x_{N-1} - u \Delta L). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Definindo  $x_N = x$  e  $u_N = u$  podemos reescrever a equação acima de uma maneira mais compacta

$$\begin{aligned} q_N(x, u, x_0, u_0) &= \int d^3 x_1 d^2 u_1 \cdots d^3 x_{N-1} d^2 u_{N-1} \times e^{-\Delta L \sum_{i=1}^N \omega(x_i, u_i)} \times \prod_{j=0}^{N-1} \psi(u_{j+1} - u_j) \\ &\times \delta(x_{j+1} - x_j - u_{j+1} \Delta L). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Porém, sabemos que

$$q(x, x_0, L) = \int \frac{d^2 u_0}{4\pi} \frac{d^2 u}{4\pi} q(x, u, x_0, u_0, L), \quad (2.67)$$

onde

$$q(x, u, x_0, u_0, L) = \int [\mathcal{D}x(s)]_u e^{-\int_0^L ds [(1/2\kappa)\dot{u}_\alpha \dot{u}_\alpha + \phi(x(s)) - i(2\pi/g)u_\alpha(s)\lambda_\alpha(x(s))]}. \quad (2.68)$$

Aqui, a medida de integração funcional  $[\mathcal{D}x(s)]_u$  representa a integral sobre todos os caminhos possíveis  $x(s)$  com comprimento fixo  $L$ , extremos fixos  $x(0) = x_0$  e  $x(L) = x$ , e vetores tangentes iniciais e finais também fixos,  $\dot{x}(0) = u_0$  e  $\dot{x}(L) = u$ . Então notamos que se escolhermos as quantidades

$$\psi(u - u') \equiv \mathcal{N} e^{-(1/2\kappa)\Delta L(u - u')^2 / \Delta L^2}, \quad (2.69)$$

$$\omega(x, u) \equiv \left[ \phi(x) - i \frac{2\pi}{g} u \cdot \lambda(x) \right], \quad (2.70)$$

obtemos uma discretização de  $q(x, u, x_0, u_0, L)$  em  $N$  pedaços de comprimentos iguais a  $\Delta L$ . Em particular, vemos que os fatores  $\psi(u_{j+1} - u_j)$  juntamente com os vínculos  $\delta(x_{j+1} - x_j - u_{j+1}\Delta L)$ , reproduzem fielmente os efeitos de rigidez que estamos procurando introduzir. Em outras palavras, temos que  $q(x, u, x_0, u_0, L) = \lim_{N \rightarrow \infty} q_N(x, u, x_0, u_0)$ , com  $L = N\Delta L$ .

Da equação (2.62) somos capazes de ver que

$$q_{N+1}(x, u, x_0, u_0) = e^{-\Delta L \omega(x, u)} \int d^2 u' \psi(u - u') \times q_N(x - u\Delta L, u', x_0, u_0). \quad (2.71)$$

Seguimos agora um procedimento simples: para  $N$  grande, expandimos ambos os lados desta equação em potências de  $\Delta L = L/N$ . Vemos também que o fato da distribuição  $\psi(u - u')$  ser localizada (tipo gaussiana) nos indica que podemos realizar uma expansão em série de Taylor de  $\Delta u$ , próximo de  $u'$ , do lado direito. Explicitamente ( $q \equiv q(x, u, x_0, u_0, L)$ ),

$$\Delta L \left[ \frac{\partial}{\partial L} + u \cdot \nabla_x \right] q = \left[ \langle \Delta u \rangle_\psi^i \partial_u^i + \frac{1}{2!} \langle \Delta u \Delta u \rangle_\psi^{ij} \partial_u^i \partial_u^j - \omega(x, u) \right] q, \quad (2.72)$$

desde que a probabilidade  $q_N(x, u, x_0, u_0)$  depende de duas variáveis. Definimos aqui os momentos da distribuição  $\psi(u - u')$  como

$$\langle \Delta u \rangle_\psi^i \equiv \int d^{D-1} u' (u' - u)_i \psi(\Delta u), \quad (2.73)$$

e

$$\langle \Delta u \Delta u \rangle_\psi^{ij} \equiv \int d^{D-1} u' (u' - u)_i (u' - u)_j \psi(\Delta u), \quad (2.74)$$

renomeando  $\psi(u - u') \equiv \psi(\Delta u) = \mathcal{N} e^{-\frac{a}{2}(\Delta u)^2}$ , com  $a = 1/\kappa\Delta L$ . No capítulo seguinte mostraremos como podemos calcular os momentos da distribuição definidos acima para qualquer dimensão do espaço. Com isso, pedimos ao leitor que aceite, a priori, os resultados para  $d = 3$  encontrados lá. Apenas ressaltamos que o valor do primeiro momento não é relevante porque a probabilidade  $q$  independe da coordenada radial, mostrando um resultado nulo quando aplicamos uma derivada na direção radial, proveniente de  $\partial_u^i$  (definido em coordenadas esféricas). O segundo momento resulta em  $\langle \Delta u \Delta u \rangle_\psi^{ij} = \kappa\Delta L e^i \otimes e^j$  (onde os índices  $i$  e  $j$  representam apenas as componentes nas direções angulares). Assim, podemos reescrever a equação (2.72) como

$$\begin{aligned} \partial_L q(x, u, x_0, u_0, L) &= \left[ \frac{\kappa}{2} \nabla_u^2 - \omega(x, u) - u \cdot \nabla_x \right] q(x, u, x_0, u_0) \\ &= \left[ \frac{\kappa}{2} \nabla_u^2 - \phi(x) - u \cdot D_x \right] q(x, u, x_0, u_0, L). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Aqui, nesta equação de difusão,  $\nabla_u^2$  é o laplaciano tomado sobre uma casca esférica unitária e  $D_x \equiv \nabla_x - i\frac{2\pi}{g}\lambda(x)$ . Não podemos esquecer da condição inicial imposta por nós em (2.63), desde que ela resolve esta equação da difusão,

$$q(x, u, x_0, u_0, 0) = \delta(x - x_0)\delta(u - u_0). \quad (2.76)$$

Neste ponto, precisamos realizar as integrações sobre todas os vetores tangentes e sobre todos os comprimentos de forma tal que, no final do dia, possamos obter uma probabilidade ponta-a-ponta no formalismo da teoria quântica de campos. Primeiramente, integramos sobre  $d^2 u_0$  da seguinte maneira

$$q(x, u, x_0, L) = \int \frac{d^2 u_0}{4\pi} q(x, u, x_0, u_0, L), \quad (2.77)$$

que após integrar ambos os membros na equação (2.75), satisfaz

$$\partial_L q(x, u, x_0, L) = \left[ \frac{\kappa}{2} \nabla_u^2 - \phi(x) - u \cdot D_x \right] q(x, u, x_0, L), \quad (2.78)$$

sob a condição inicial

$$q(x, u, x_0, 0) = \delta(x - x_0). \quad (2.79)$$

Agora integramos em todos os comprimentos, sabendo que

$$Q(x, u, x_0) = \int_0^\infty dL e^{-\mu L} q(x, u, x_0, L). \quad (2.80)$$

Esta função satisfaz a relação

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\kappa}{2} \nabla_u^2 - \phi(x) - u \cdot D_x \right] Q(x, u, x_0) &= \int_0^\infty dL e^{-\mu L} \partial_L q(x, u, x_0, L) \\ &= \int_0^\infty dL \partial_L [e^{-\mu L} q(x, u, x_0, L)] + \mu \int_0^\infty dL e^{-\mu L} q(x, u, x_0, L) \\ &= -q(x, u, x_0, 0) + \mu Q(x, u, x_0), \end{aligned} \quad (2.81)$$

ou seja,

$$\left[ -\frac{\kappa}{2} \nabla_u^2 + \phi(x) + u \cdot D_x + \mu \right] Q(x, u, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (2.82)$$

Nosso último passo consiste em integrar sobre todos as orientações finais,

$$Q(x, x_0) = \int \frac{d^2 u}{4\pi} Q(x, u, x_0). \quad (2.83)$$

Percebemos que  $Q(x, x_0)$  será a componente com momento angular zero  $\mathcal{Q}_0$ , desde que realizando uma expansão de  $Q(x, u, x_0)$  em termos de diferentes momentos angulares, apenas esta componente restará. Logo,

$$Q(x, u, x_0) = \sum_{l=0} \mathcal{Q}_l(x, u, x_0), \quad Q(x, x_0) = \mathcal{Q}_0(x, x_0). \quad (2.84)$$

Devemos notar agora que o termo dependente da derivada covariante em (2.82) irá misturar diferentes momentos angulares quando multiplicarmos ele pela expansão da função  $Q(x, u, x_0)$ . Isto vem do fato de que o vetor tangente  $u$  possui momento angular, e portanto, precisamos tratar este termo com um pouco mais de cuidado. Assim, usamos a expansão,

$$u \cdot D_x Q(x, u, x_0) = \sum_{l=0} u \cdot D_x \mathcal{Q}_l = \sum_{l=0} \mathcal{R}_l, \quad (2.85)$$

onde definimos as quantidades que filtram momentos angulares específicos como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= [u \cdot D_x \mathcal{Q}_1]_0, \\ \mathcal{R}_1 &= [u \cdot D_x \mathcal{Q}_0 + u \cdot D_x \mathcal{Q}_2]_1, \end{aligned} \quad (2.86)$$

e escrevemos, para  $l = 0$ ,

$$[\phi(x) + \mu] \mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_0 = \delta(x - x_0), \quad (2.87)$$

e para  $l \neq 0$ ,

$$\frac{1}{f_l(x)} \mathcal{Q}_l + \mathcal{R}_l = 0, \quad f_l(x) \equiv \left[ \phi(x) + \mu + \frac{l(l+1)\kappa}{2} \right]^{-1}. \quad (2.88)$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= -[(u \cdot D_x \mathcal{Q}_0)(u \cdot \nabla_x f_1) + f_1(u \cdot D_x)^2 \mathcal{Q}_0]_0 - \{[u \cdot D_x \mathcal{Q}_2]_1(u \cdot \nabla_x f_1) + \\ &+ (f_1 u \cdot D_x)(u \cdot D_x \mathcal{Q}_2)_1\}_0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Aqui, devemos discutir fisicamente o que conhecemos como *semi-flexível*. Quanto mais harmônicos esféricos utilizamos para descrever uma função mais temos uma direção privilegiada e começamos a introduzir a idéia de rigidez na cadeia. Se escolhermos poucos harmônicos esféricos não há mais uma direção aproximadamente privilegiada e as orientações final e inicial se encontram descorrelacionadas. O limite semi-flexível consiste

em desprezarmos as contribuições dos momentos angulares  $l \geq 2$  [91], justamente para obtermos primeiras correções de uma cadeia aleatória, incluindo rigidez. Assim,

$$\mathcal{R}_0 \approx -[D_\alpha \mathcal{Q}_0 \partial_\beta f_1 + f_1 D_\alpha D_\beta \mathcal{Q}_0][u_\alpha u_\beta]_0. \quad (2.90)$$

Utilizando a decomposição em partes simétrica e anti-simétrica  $[u_\alpha u_\beta] = (u_\alpha u_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}$  e retendo apenas a componente com momento angular  $l = 0$ , temos

$$\mathcal{R}_0 \approx -\frac{1}{3}[\partial_\alpha f_1 D_\alpha \mathcal{Q}_0 + f_1 D^2 \mathcal{Q}_0], \quad (2.91)$$

e substituindo em (2.87), chegamos em

$$-\frac{1}{3}[\partial_\alpha f_1 D_\alpha \mathcal{Q}_0 + f_1 D^2 \mathcal{Q}_0] + [\phi(x) + \mu] \mathcal{Q}_0 = \delta(x - x_0), \quad (2.92)$$

com

$$f_1(x) = [\phi(x) + \mu + \kappa]^{-1}. \quad (2.93)$$

Assumimos agora, uma escala de massa para  $\kappa$  que seja muito maior que outras escalas correspondentes a combinações dos parâmetros  $\phi$  e  $\mu$ . Ou seja,

$$f_1(x) = \frac{1}{\kappa[1 + \chi]} = \frac{1}{\kappa}[1 - \chi + O(\chi^2)], \quad (2.94)$$

com  $\chi \equiv \frac{\phi(x) + \mu}{\kappa} \ll 1$ . Desprezamos os termos em ordem maior em  $\kappa$  e com isto, conseguimos, finalmente, chegar na equação diferencial aproximada para a probabilidade ponta-a-ponta de um único vórtice de centro, ingrediente fundamental para a derivação da teoria efetiva encontrada em nosso artigo [41]

$$\left[ -\frac{1}{3\kappa} D^2 + \phi(x) + \mu \right] \mathcal{Q}_0 = \delta(x - x_0). \quad (2.95)$$

Através da expressão (2.95) podemos determinar, finalmente, a teoria de campos efetiva por trás destas configurações de defeitos em 3D (para maiores detalhes, ver [41]). Em primeiro lugar, foi obtida uma representação para o setor de vórtice (através de uma

transformação de Hubbard-Stratonovich, onde introduzimos campos auxiliares complexos  $v$  e  $\bar{v}$ ), advinda da equação (2.95),

$$Z_{v,m} = \int [\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} \det \hat{O} e^{-S_v - \int d^3x 3\kappa\xi[v^2 + \bar{v}^2]}, \quad (2.96)$$

onde  $\tilde{\phi}(x) = 3\kappa\phi(x)$ ,  $m^2 = 3\kappa\mu$  e  $S_v = \int d^3x \bar{v}\hat{O}v$ . O operador  $\hat{O}$  é definido por,

$$\hat{O} = [-D^2 + \tilde{\phi}(x) + m^2]. \quad (2.97)$$

Para obter a teoria efetiva final, devemos integrar sobre o campo  $\phi(x)$ , mas precisamos observar que o operador  $\hat{O}$  é dependente de  $\phi$ . De forma geral, escrevemos  $\det \hat{O} = e^{tr \ln \hat{O}}$  e notamos que  $tr \ln \hat{O} = F[\tilde{\phi}, \lambda]$  deve ser invariante perante a transformação  $\lambda_\mu \rightarrow \lambda_\mu + \partial_\mu \omega$ . Seguindo então a referência [41], escrevemos

$$F[\tilde{\phi}, \lambda] = F_\phi[\tilde{\phi}] + F_\lambda[\epsilon\partial\lambda] + F_{int}[\tilde{\phi}, \epsilon\partial\lambda]. \quad (2.98)$$

Uma discussão muito importante que não foi levada em conta em [92] é que, no momento da expansão derivativa sobre o campo  $\phi$  (necessária para obtermos a teoria efetiva), devemos lembrar que há uma relação dual entre os campos  $\phi(x)$  e  $\rho(x)$  dada por [44]

$$\langle \phi(x) \rangle = \zeta \langle \rho(x) \rangle, \quad (2.99)$$

onde  $\zeta$  controla a intensidade da interação vórtice-vórtice (efeitos de contato). Aqui, usamos a seguinte identidade,

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \left[ e^{-S_\phi} \sum_n Z_n \right] = 0, \quad (2.100)$$

e definimos

$$\langle f(x) \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\phi} \sum_n [\mathcal{D}m]_n [\mathcal{D}v]_n f(x) e^{\left[ \sum_k \int_0^{L_k} ds \left( (2\pi i/g) \dot{x}_\alpha^{(k)} \lambda_\alpha(x^{(k)}(s)) - \phi(x^{(k)}(s)) \right) - S_d^0 \right]} \quad (2.101)$$

Como a densidade de vórtice  $\rho(x)$  na equação (2.51) é uma soma de distribuições delta de Dirac, o campo  $\phi(x)$  deveria conter modos de Fourier elevados, que poderiam



invalidar a expansão derivativa sobre  $\phi(x)$ . Contudo, cálculos na rede tem mostrado que vórtices de centro possuem um tamanho finito [31], gerando uma densidade de vórtice finita no limite contínuo [32]. Se estas informações forem incluídas na forma de uma suavização das distribuições delta em  $\rho(x)$ , quando os vórtices de centro proliferarem, podemos justificar nossa expansão derivativa. Gostaríamos de discutir um pouco sobre como esta suavização dos vórtices poderia ser originada. Esta idéia é importante até mesmo para quem quiser descrever modelos de superfícies randômicas em teorias de Yang-Mills  $SU(3)$  em 4D no contínuo [93, 94].

A consideração de que configurações de monopólos e vórtices de centro sejam realmente importantes para o vácuo de Yang-Mills dependem de sua estabilidade. Esta pode ser estudada calculando as flutuações quânticas sob um campo de fundo e analisando se a ação efetiva contem uma parte imaginária ou não. Em caso afirmativo, a probabilidade de permanecer em um estado contendo uma determinada configuração inicial será menor do que 1, indicando instabilidade. Nas referências [80, 95, 96], campos de fundo gerados por vórtices de centro com espessura foram analisados a um loop, mostrando que são instáveis. Este é um exemplo da *instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen* para campos de fundo magnéticos. Por outro lado, na referência [97] foi mostrada uma definição natural para um objeto tipo vórtice de centro com espessura, seria uma deformação diagonal do vórtice de centro fino, introduzido no contínuo como na referência [28]. Isto melhora o problema da instabilidade em 3D ou 4D ao considerar os grupos  $SU(2)$  e  $SU(3)$ . Para estes objetos, pode-se mostrar que o número de estados ligados no operador de flutuação passa a ser 1, indicando a possibilidade de estados ligados estáveis [97, 98].

Após integrarmos nos campos carregados, pode-se mostrar que este modelo reproduz o modelo de t'Hooft, porém agora acrescenta na sua essência um termo de derivada covariante, generalizando-o. Explicitamente,

$$Z^{\text{eff}} = \int [\mathcal{D}\lambda][\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] e^{-\int d^3x \left\{ \frac{1}{2} f_\mu \hat{K} f_\mu + \frac{\gamma}{2} \lambda_\mu \lambda_\mu + \bar{v} [-D^2 + m^2] v + 3\kappa\xi [v^2 + \bar{v}^2] + \frac{1}{2a} (\bar{v}v - b)^2 \right\}} . \quad (2.102)$$

Utilizando o suporte da rede, de que vórtices de centro podem adquirir dimensão, fomos capazes de atribuir, de forma conveniente, propriedades fenomenológicas a estes objetos como efeitos de tensão, rigidez, volume excludente e interações com campos externos. Assumimos um ensemble de cadeias formadas pela união de pares instanton/anti-instanton com pares de vórtices de centro. Mostramos como poderíamos obter todas as configurações possíveis das cadeias através de um funcional gerador. Graças à quantidade que denominamos de *bloco fundamental*, conseguimos representar este funcional gerador.

O bloco fundamental é nada mais nada menos que a probabilidade ponta-a-ponta

para um único vórtice de centro. Então, buscamos uma maneira de obter este objeto usando técnicas de polímeros, apresentadas no começo do capítulo, e fomos capazes de gerar de forma controlada, esta probabilidade ponta-a-ponta através de uma equação de difusão. Com isto, o modelo efetivo final (2.102) pôde ser obtido. Note que este resultado é altamente não trivial, desde que consegue reproduzir e generalizar o modelo de t'Hooft (1.91) assumindo características fenomenológicos para os vórtices de centro. A generalização consiste na inclusão do campo dual, que se encontra presente na derivada covariante abeliana. Vimos também que, no espaço-tempo euclidiano 3D, as cadeias são fundamentais para obter os termos do modelo  $Z_N$ . Este aspecto dá suporte a consideração desses objetos como fontes de confinamento. Este fato não tinha sido notado pela comunidade da rede, onde a maioria dos cálculos são feitos com vórtices fechados. As cadeias passam despercebidas ao guiar-se somente pela quantização canônica de t'Hooft em  $(2 + 1)D$ . Uma outra observação importante aqui consiste em notar que se o termo de massa  $m^2 \equiv 3\kappa\mu$ , presente em (2.102), torna-se negativo (assim como discutimos no modelo de t'Hooft), ele seria responsável pela formação de uma parede de Bloch e portanto de uma corda confinante nas teorias de Yang-Mills  $SU(2)$  em 3D. Portanto, esta fase poderia estar relacionada com uma rigidez negativa (e tensão positiva).

No próximo capítulo apresentaremos mais um estudo realizado em meu doutorado, onde derivamos uma probabilidade ponta-a-ponta para monopólos fechados em 4D. A inclusão de índices de simetria interna de grupo se faz necessária e isto altera bastante as discussões que fizemos até agora.

### 3 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO PARA LOOPS COLORIDOS EM 4D

No capítulo anterior aprendemos a lidar com objetos unidimensionais abelianos sujeitos às interações de volume excludente e campos externos, considerando também os efeitos da rigidez. Para obter modelos de Yang-Mills-Higgs, como o discutido em 1.4.3, deveríamos realizar um importante passo: trabalhar com ensembles que possuem informação não abeliana. Neste capítulo, buscaremos a inclusão desta informação no mesmo formalismo descrito em forma detalhada no capítulo anterior.

Uma diferença importante em relação ao tratamento anterior é que agora estudaremos modelos em 4D, o que significa que monopólos tornam-se curvas unidimensionais fechadas, enquanto vórtices de centro tornam-se defeitos localizados sobre superfícies. Infelizmente não sabemos ainda como podemos generalizar os procedimentos de difusão de curvas unidimensionais para superfícies bidimensionais, e por isso, neste trabalho, estudaremos os efeitos exclusivos dos monopólos sobre o vácuo de Yang-Mills 4D.

Aqui, estaremos interessados na introdução de informação não abeliana para caracterizar um ensemble de monopólos, calculando a probabilidade para objetos unidimensionais fechados interagentes e suas consequências sobre uma descrição efetiva. Entre as interações, destacamos a de campos escalares  $\phi$  (descrevendo efeitos de contato), isovetoriais  $\Phi^A$ , e campos vetoriais não abelianos  $\Lambda_\mu^A$ . Para tal, utilizamos a descrição clássica de uma linha de mundo produzida por uma partícula transportando cargas não abelianas acopladas com um campo de calibre externo nos moldes da referência [99]. Para uma discussão de ensembles de monopólos em um contexto abeliano ver [43].

Como vimos no capítulo 1, na referência [19] foi proposto um modelo efetivo utilizando o modelo de Yang-Mills-Higgs em 4D e o resultado incluiu um termo de derivada covariante não abeliana. Porém, esta proposta foi realizada de forma heurística, sem se preocupar com os detalhes do ensemble de monopólos que estávamos considerando. Então, a principal motivação deste capítulo será estudar como podemos integrar um ensemble de monopólos em 4D que possuem graus de liberdade não abelianos e obter algumas características desse modelo. Isto nos rendeu um segundo trabalho, submetido à *Journal of Physics A*, e que pode ser encontrado em [45].

Organizamos o capítulo da seguinte forma. Em primeiro lugar, discutimos ensembles de monopólos em 4D e mostramos como podemos introduzir a informação não abeliana no modelo. Em seguida, interpretamos a representação da integral de caminho sobre estados coerentes como uma amplitude de probabilidade para a propagação dos graus de liberdade internos. Após isso, introduzimos as propriedades naturais caracterizando objetos unidimensionais, como tensão e rigidez, como foi feito no capítulo anterior. Apresentamos a forma da equação de Chapman-Kolmogorov com cor para gerar a pro-

habilidade ponta-a-ponta em nosso modelo, para depois derivarmos a equação da difusão de um objeto unidimensional não abeliano e interagente. Finalmente, estaremos capacitados para obter o modelo efetivo correspondente à integração sobre os monopólos não abelianos.

### 3.1 Ensemble de monopólos

Com a finalidade de revelar a contribuição dos defeitos para teorias não abelianas foi mostrado que, realizando uma decomposição do campo de calibre em bases locais no espaço de cor, é possível separar a região perturbativa da teoria de Yang-Mills  $SU(N)$  do setor dos defeitos, como vimos no capítulo anterior. Começando de primeiros princípios, este setor carece de bom entendimento, e portanto uma parametrização dos defeitos, baseados em suas características fenomenológicas, se faz necessária para que possamos realizar a integração e obtermos o modelo efetivo resultante.

De acordo com [99], o acoplamento de uma linha de mundo de uma partícula carregando informação não abeliana, na representação  $\mathcal{D}$ -dimensional, é implementado pela lagrangiana

$$\mu(\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu)^{1/2} + \frac{1}{2}(\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) - ig \dot{x}_\mu I^A \Lambda_\mu^A, \quad I^A = T_{cd}^A \bar{z}_c z_d, \quad (3.1)$$

onde  $z_c$ , com  $c = 1, \dots, \mathcal{D}$ , descreve os graus de liberdade internos de cor. Assim, é natural introduzir a função de partição para um ensemble de monopólos (ou loops coloridos) como,

$$Z_d = \sum_n \int [\mathcal{D}m]_n e^{-[S^0 + S^{int}]}, \quad (3.2)$$

onde  $\sum_n$  soma sobre todos os números de loops, enquanto  $S^0$  e  $S^{int}$  constituem as partes livre e interagente da ação, contendo respectivamente os termos,

$$\mu(\dot{x}_\mu^{(k)} \dot{x}_\mu^{(k)})^{1/2}, \quad -ig \dot{x}_\mu^{(k)} I^A \Lambda_\mu^A(x^{(k)}), \quad (3.3)$$

onde  $k = 1, \dots, n$  denota cada um dos loops em um setor  $n$ .

Além do parâmetro fenomenológico  $\mu$ , descrevendo as propriedades de tensão dos loops, incluiremos em  $S^0$  o efeito da rigidez, medida por  $1/\kappa$  (ver capítulo anterior). Grandes valores de  $\kappa$  correspondem a loops mais flexíveis. A parte interagente contém o campo de calibre não abeliano  $\Lambda_\mu^A$  e também interações escalares e isovetoriais. Podemos acrescentá-las introduzindo campos auxiliares  $\phi(x)$  e  $\Phi^A(x)$ , que precisam ser integrados

com um peso apropriado  $e^{-W}$  (assim como em nosso capítulo anterior, ao incluir efeitos de volume excludente). Mais tarde especificaremos como podemos escrever o peso  $W$ .

Assumindo todas estas características, podemos escrever agora a função de partição (3.2) como,

$$Z_d = \int [\mathcal{D}\phi][\mathcal{D}\Phi] e^{-W} \sum_n Z_n, \quad (3.4)$$

com

$$Z_n = \int [\mathcal{D}m]_n \exp \left[ \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} ds (ig\dot{x}_\mu^{(k)} I^A \Lambda_\mu^A(x^{(k)}) - I^A \Phi^A(x^{(k)}) - \phi(x^{(k)})) - S^0 \right], \quad (3.5)$$

e

$$S^0 = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} ds \left[ \mu + \frac{1}{2}(\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\mu^{(k)} \dot{u}_\mu^{(k)} \right], \quad (3.6)$$

onde  $s$  é o parâmetro comprimento de arco e  $u^{(k)} = \dot{x}_\mu^{(k)}$  é o vetor tangente unitário.

A medida de integração  $[\mathcal{D}m]_n$  deve conter todas as possíveis linhas de mundo fechadas dos  $n$  monopólos, incluindo diferentes tamanhos e formas. Isto é, seguindo a descrição das referências [41, 43, 45], pode-se definir

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}m]_n &\equiv \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{dL_1}{L_1} \frac{dL_2}{L_2} \dots \frac{dL_n}{L_n} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \times \int [\mathcal{D}x^{(1)(s)}]_{x_1, L_1} \mathcal{D}x^{(2)(s)}]_{x_2, L_2} \dots \\ &\mathcal{D}x^{(n)(s)}]_{x_n, L_n} \times \int \sum_{a_1} [\mathcal{D}z^{(1)}]_{a_1, a_1} \sum_{a_2} [\mathcal{D}z^{(2)}]_{a_2, a_2} \dots \sum_{a_n} [\mathcal{D}z^{(n)}]_{a_n, a_n}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como os monopólos são idênticos, surge o fator  $1/n!$ . A medida,

$$[\mathcal{D}x^{(k)}(s)]_{x_k, L_k}, \quad (3.8)$$

representa a integração sobre todas as curvas fechadas com comprimento fixo  $L_k$ , tais que em  $s = 0$  e  $s = L_k$ , temos  $x(s) = x_k$ . Para maiores detalhes da definição da medida de integração para o ensemble de monopólos, indicamos o nosso artigo [45].

Agora, com a ajuda da equação (3.7), notamos que a função de partição (3.4) pode ser escrita em termos de um bloco fundamental  $Q^{ab}(x, x_0, L)$ ,

$$Z_d = \int [\mathcal{D}\phi][\mathcal{D}\Phi] e^{-W} e^{\int_0^\infty \frac{dL}{L} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \Sigma_a Q^{aa}(x,x,L)}, \quad (3.9)$$

onde

$$Q^{ba}(x, x_0, L) = \int [\mathcal{D}x(s)]_{x_0, x, L} [\mathcal{D}z(s)]_{(a,b)} \times \\ \times e^{-\int_0^L ds \left[ \mu + \frac{1}{2}(\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\mu \dot{u}_\mu + \phi(x) - ig \dot{x}_\mu \Lambda_\mu^A T_{cd}^A z^c z^d + \Phi^A T_{cd}^A z^c z^d \right]}, \quad (3.10)$$

é a probabilidade ponta-a-ponta descrevendo como um único objeto tipo corda se propaga de uma localização  $x_0$  e cor  $a$ , em  $s = 0$ , para  $x$  e  $b$ , em  $s = L$ . A medida  $[\mathcal{D}x(s)]_{x_0, x, L}$  representa a integral sobre os caminhos com comprimento fixo  $L$  tais que,  $x(0) = x_0$  e  $x(L) = x$ . Então, torna-se claro que o conhecimento sobre as propriedades do bloco fundamental (3.10) é essencial para obtermos a teoria efetiva para o ensemble de monopólos.

Na próxima seção, apresentaremos resumidamente algumas propriedades fundamentais dos estados coerentes para sistemas quânticos com graus de liberdade internos não abelianos.

### 3.2 Estados coerentes

Como um passo importante para lidar com objetos unidimensionais acoplados com campos de calibre não abelianos, precisamos compreender um pouco melhor como podemos descrever os graus de liberdade internos. Relatamos aqui, o necessário para entendermos processos posteriores (para detalhes, ver [45]). Em primeiro lugar, considere os operadores de criação e aniquilação,  $\hat{a}_a^\dagger$  e  $\hat{a}_a$ , satisfazendo as relações de comutação

$$[\hat{a}_a, \hat{a}_b^\dagger] = \delta_{ab}, \quad [\hat{a}_a, \hat{a}_b] = [\hat{a}_a^\dagger, \hat{a}_b^\dagger] = 0. \quad (3.11)$$

Quando aplicados uma vez sobre o vácuo, estes operadores criam ( $\hat{a}_a^\dagger$ ) ou aniquilam ( $\hat{a}_a$ ) um estado de cor bem definida  $a$ . No espaço de estados, uma base pode ser definida em termos dos diferentes números de ocupação, para cada cor possível,  $|n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}\rangle$ . Sabemos que,

$$|n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}\rangle = \prod_{a=1}^{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{n_a!}} (\hat{a}_a^\dagger)^{n_a} |0, \dots, 0\rangle, \quad (3.12)$$

e podemos definir os estados coerentes  $|z\rangle = |z^1, \dots, z^{\mathcal{D}}\rangle$ ,  $z^a \in C$ , com as propriedades

$$\hat{a}_a|z\rangle = z^a|z\rangle, \quad \hat{a}_a^\dagger|z\rangle = \frac{\partial}{\partial z^a}|z\rangle. \quad (3.13)$$

Uma abreviação consiste em denotar as variáveis dos estados coerentes e seus conjugados como  $z = (z^1, \dots, z^{\mathcal{D}})$  e  $\bar{z} = (\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{\mathcal{D}})$ , respectivamente. Os estados coerentes podem ser escritos como

$$|z\rangle = e^{z \cdot \hat{a}^\dagger} |0, \dots, 0\rangle, \quad (3.14)$$

e sua sobreposição é dada por

$$\langle z|z'\rangle = \langle 0|e^{\bar{z} \cdot \hat{a}} e^{z' \cdot \hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{\bar{z} \cdot z'}. \quad (3.15)$$

Qualquer estado  $|\psi\rangle$  pode ser expandido nas bases de números de ocupação da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}} \frac{\psi_{n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_{\mathcal{D}}!}} |n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}\rangle \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}} \psi_{n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}} \prod_{a=1}^{\mathcal{D}} \frac{(\hat{a}_a^\dagger)^{n_a}}{n_a!} |0, \dots, 0\rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e sua projeção sobre o estado coerente  $|z\rangle$  é

$$\langle z|\psi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}} \psi_{n_1, \dots, n_{\mathcal{D}}} \frac{(\bar{z}^1)^{n_1} \dots (\bar{z}^{\mathcal{D}})^{n_{\mathcal{D}}}}{n_1! \dots n_{\mathcal{D}}!}, \quad (3.17)$$

isto é,  $\langle z|\psi\rangle = \psi(\bar{z})$  é uma função anti-holomorfa das variáveis  $\bar{z}$ . Esta propriedade será muito importante para construirmos a relação recursiva que gerará a curva unidimensional desejada. No espaço dos estados de cor, o operador identidade fica

$$\hat{I} = \int dz d\bar{z} e^{-\bar{z} \cdot z} |z\rangle \langle z|; \quad \int dz d\bar{z} \equiv \int \prod_{a=1}^{\mathcal{D}} \left[ \frac{dz^a d\bar{z}^a}{2\pi i} \right], \quad (3.18)$$

ou explicitamente

$$\psi(\bar{z}) = \langle z | \hat{I} | \psi \rangle = \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}') \cdot z'} \psi(\bar{z}'). \quad (3.19)$$

Neste momento, indicamos o leitor ao nosso artigo [45] para estudar como podemos gerar uma integral de caminho em termos de estados coerentes e onde utilizamos a descrição de Balachandran [99]. Lá, mostramos como obter uma amplitude de transição entre dois estados coerentes final  $|z\rangle$ , e inicial  $|z_0\rangle$ , cujo resultado é

$$\langle z | e^{-\hat{H}L} | z_0 \rangle = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \int \prod_{i=1}^M dz_i d\bar{z}_i e^{\sum_{j=1}^M [(\bar{z}_{j+1}-\bar{z}_j) \cdot z_j - H(\bar{z}_{j+1}, z_j) \Delta L]} e^{\bar{z}_1 \cdot z_0}. \quad (3.20)$$

E se considerarmos estados iniciais  $|\psi\rangle$ , e finais  $|\phi\rangle$  gerais, escrevemos a amplitude de transição como

$$\begin{aligned} \langle \phi | e^{-\hat{H}L} | \psi \rangle &= \int dz d\bar{z} dz_0 d\bar{z}_0 e^{-\bar{z} \cdot z} e^{-\bar{z}_0 \cdot z_0} \bar{\phi}(z) \psi(\bar{z}_0) \langle z | e^{-\hat{H}L} | z_0 \rangle \\ &= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \int [\mathcal{D}z]_{(\psi\phi)} e^{\sum_{j=0}^M \left[ \frac{1}{2}(\bar{z}_{j+1}-\bar{z}_j) \cdot z_j + \frac{1}{2}\bar{z}_{j+1} \cdot (z_j - z_{j+1}) \right] - \sum_{j=1}^M H(\bar{z}_{j+1}, z_j) \Delta L} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde definimos

$$[\mathcal{D}z]_{(\psi\phi)} \equiv \prod_{i=0}^{M+1} dz_i d\bar{z}_i e^{-(\bar{z}_i \cdot z_i)/2} e^{-(\bar{z}_0 \cdot z_0)/2} \bar{\phi}(z) \psi(\bar{z}_0). \quad (3.22)$$

Vemos que esta descrição faz contato com o setor de cor da lagrangiana de Balachandran na equação (3.1), além de criar uma definição precisa para a medida de integração correspondente a este setor.

Em particular, para uma transição entre um estado de cor bem definida  $|\psi\rangle = |a\rangle$  para um outro estado de cor bem definida  $|\phi\rangle = |b\rangle$ , a medida de integração é

$$[\mathcal{D}z(s)]_{(a,b)} \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \prod_{i=0}^{M+1} dz_i d\bar{z}_i e^{-(\bar{z}_i \cdot z_i)/2} e^{-(\bar{z}_0 \cdot z_0)/2} z^b \bar{z}_0^a, \quad (3.23)$$

onde o fator de normalização  $\mathcal{M}$  é tal que, para  $L = 0$ , a quantidade

$$\langle \phi | e^{-\hat{H}L} | \psi \rangle \equiv \int [\mathcal{D}z]_{(\psi,\phi)} e^{-\int_0^L ds \mathcal{L}_E}, \quad (3.24)$$



resulta em  $\delta_{ab}$ . Nesta expressão,  $\mathcal{L}_E$  é a lagrangiana euclideana de Balachandran, dada por

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) - igu_\mu \Lambda_\mu^A T_{cd}^A \bar{z}^c z^d + \Phi^A T_{cd}^A \bar{z}^c z^d. \quad (3.25)$$

Na próxima seção faremos a junção da formulação da equação recursiva no espaço de  $x$  e  $u$  com a formulação da integral de caminho na representação de estados coerentes, apresentado nesta seção. Assim, conseguiremos representar o modelo completo definido na primeira seção deste capítulo, incluindo graus de liberdade não abelianos e a descrição de tensão, rigidez e efeitos de interações externos, escalares e isovetoriais.

### 3.3 A equação de Chapman-Kolmogorov com cor

Um passo importante para obter a equação da difusão para objetos unidimensionais é gerar a probabilidade ponta-a-ponta por meios de uma relação recursiva, semelhante à equação (2.62) do capítulo anterior. Vimos que esta abordagem segue idéias da Física de polímeros e que por meio desta fomos capazes de determinar o peso estatístico para um único vórtice de centro em 3D, porém, neste caso, ainda não tínhamos incluído os graus de liberdade internos, que agora encontram-se presentes na teoria. No setor de cor, a amplitude discretizada na equação (3.21) pode ser gerada de uma maneira similar, através de uma relação de recorrência do tipo

$$q_j(\bar{z}, z_0) = \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}') \cdot z'} e^{-H(\bar{z}, z') \Delta L} q_{j-1}(\bar{z}', z_0), \quad (3.26)$$

com a seguinte condição inicial

$$q_0(\bar{z}_1, z_0) = \langle z_1 | z_0 \rangle = e^{\bar{z}_1 \cdot z_0}. \quad (3.27)$$

Após  $M$  iterações, obtemos

$$q_M(\bar{z}_{M+1}, z_0) = \langle z | e^{-\hat{H}L} | z_0 \rangle. \quad (3.28)$$

Portanto, a fim de gerar o peso estatístico completo para um objeto unidimensional com cor, considere a equação de Chapman-Kolmogorov em  $n$  dimensões

$$q_j(x, u, x_0, u_0, \bar{z}, z_0) = \int d^n x' d^{n-1} u' dz' d\bar{z}' e^{-\mu\Delta L} e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} \psi(u-u') \times e^{-\omega(x, u, \bar{z}, z')\Delta L} \delta(x-x'-u\Delta L) q_{j-1}(x', u', x_0, u_0, \bar{z}', z_0), \quad (3.29)$$

onde

$$\psi(u-u') = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2\kappa}\Delta L \left(\frac{u-u'}{\Delta L}\right)^2}, \quad (3.30)$$

é a mesma distribuição de velocidades explicada no capítulo anterior, ou seja, ela será responsável pela introdução de rigidez no sistema (quão maiores forem os valores de  $\kappa$ , mais flexibilidade o objeto terá). O termo de interação é dado por,

$$\omega(x, u, \bar{z}, z') = \phi(x) - igu_\mu \Lambda_\mu^A(x) T_{ab}^A \bar{z}^a z'^b + \Phi^A(x) T_{ab}^A \bar{z}^a z'^b, \quad (3.31)$$

e a relação de recorrência é sujeita à condição inicial

$$q_0(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0) = \delta(x-x_0)\delta(u-u_0)e^{\bar{z}\cdot z_0}. \quad (3.32)$$

Neste caso, após  $M$  iterações da equação (3.29), obtemos

$$q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L) \equiv q_M(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0), \quad (3.33)$$

que quando projetada sobre os estados inicial e final bem definidos de cor, gera uma versão discretizada da integral de caminho

$$Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L) = \int [\mathcal{D}x(s)]_{(x_0, x, u, u_0, L)} [\mathcal{D}z(s)]_{(a, b)} \times e^{-\int_0^L ds \left[ \mu + \frac{1}{2}(\bar{z}_a \dot{z}_a - \dot{\bar{z}}_a z_a) + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\mu \dot{u}_\mu + \phi(x) - ig \dot{x}_\mu \Lambda_\mu^A T_{ab}^A \bar{z}^a z^b + \Phi^A T_{ab}^A \bar{z}^a z^b \right]}, \quad (3.34)$$

onde  $[\mathcal{D}x(s)]_{(x_0, x, u, u_0, L)}$  representa a integral sobre os caminhos com comprimento fixo  $L$  tais que,  $x(0) = x_0$ ,  $x(L) = x$ ,  $u(0) = u_0$  e  $u(L) = u$ . Ou seja,

$$Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L) = \frac{1}{\mathcal{M}} \int dz d\bar{z} dz_0 d\bar{z}_0 e^{-\bar{z}\cdot z} e^{-\bar{z}_0\cdot z_0} z^b \bar{z}_0^a q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, \bar{z}_0, L). \quad (3.35)$$

Da relação recursiva que gera a versão discretizada de  $q$ , seremos capazes de derivar, na próxima seção, a equação de difusão correspondente. Para isto, notamos que tomando  $j = M + 1$  na equação (3.29), mudando  $x \rightarrow x + u\Delta L$ , e integrando sobre  $x'$  através da função  $\delta$ , chegamos em

$$q(x + u\Delta L, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L + \Delta L) = \int d^{n-1}u' dz' d\bar{z}' \times e^{-\mu\Delta L} \psi(u - u') e^{(\bar{z} - \bar{z}') \cdot z'} \times e^{-\omega(x, u, \bar{z}, z')\Delta L} q(x, x_0, u', u_0, \bar{z}', z_0, L). \quad (3.36)$$

Finalmente, expandindo esta expressão em termos de até primeira ordem em  $\Delta L$ , obtemos

$$q + \Delta L(\partial_L q + u \cdot \nabla_x q) = \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z} - \bar{z}') \cdot z'} \int d^{n-1}u' \psi(u - u') \left[ 1 - (\mu + \omega(x, u, \bar{z}, z'))\Delta L \right] \times \left[ q' - \langle \Delta u \rangle_i \nabla_u^i q' + \frac{1}{2} \langle \Delta u \otimes \Delta u \rangle_{ij} \nabla_u^i \nabla_u^j q' \right], \quad (3.37)$$

onde definimos os momentos da distribuição  $\psi(u - u')$  da mesma forma do capítulo anterior,

$$\langle \Delta u \rangle_i = \int d^{n-1}u' (u' - u)_i \psi(u - u'), \quad (3.38)$$

$$\langle \Delta u \otimes \Delta u \rangle_{ij} = \mathcal{N} \int d^{n-1}u' (u - u)_i (u' - u)_j \psi(u - u'), \quad (3.39)$$

e utilizamos a seguinte notação abreviada,  $q = q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L)$  e  $q' = q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}', z_0, L)$ . No próximo tópico calcularemos estes momentos de distribuição em  $n$  dimensões e chegaremos na equação da difusão com cor, quantidade essencial para derivarmos a probabilidade ponta-a-ponta para um objeto unidimensional que possui um índice de cor.

### 3.4 Equação da difusão com cor

Nesta seção, discutiremos o primeiro e segundo momento da distribuição  $\psi(u - u')$ , com  $u, u' \in S^{n-1}$  e obteremos a equação da difusão em  $n$  dimensões.

Supomos, inicialmente, que um vetor unitário  $u$  está orientado sobre apenas uma direção das bases ortonormais cartesianas  $e_1, \dots, e_n$  no espaço  $R^n$  de vetores velocidade gerais (não normalizados). A simetria do problema implica que  $\langle \Delta u \rangle$  deve apontar ao longo de  $e_1$ , enquanto que, em geral, ele aponta ao longo do vetor unitário  $u$ . Portanto, o operador  $\langle \Delta u \rangle_i \nabla_u^i$  na equação (3.37) é a derivada radial em  $R^n$ , cuja aplicação sobre

a função  $q(x, u, x_0, u_0, \bar{z}, z_0, L)$  (que só depende de variáveis angulares) deve resultar em zero. Argumentos similares podem ser aplicados para o momento de segunda ordem. Considerando uma direção privilegiada  $e_1$ , e simetria rotacional sobre as direções  $e_2, \dots, e_n$ , notamos que

$$\langle \Delta u \otimes \Delta u \rangle = c e_1 \otimes e_1 + h (e_2 \otimes e_2 + \dots + e_n \otimes e_n). \quad (3.40)$$

O valor preciso de  $c$  é irrelevante para o cálculo da equação da difusão. Por causa da simetria da distribuição, quando ambos os vetores,  $u$  e  $u'$ , são rotacionados com uma transformação que muda  $e_1$  para um vetor  $u$  geral, o momento de segunda ordem torna-se

$$\langle \Delta u \otimes \Delta u \rangle = c u \otimes u + h (e_{\phi_1} \otimes e_{\phi_1} + \dots + e_{\phi_{n-1}} \otimes e_{\phi_{n-1}}), \quad (3.41)$$

onde  $e_{\phi_1}, \dots, e_{\phi_{n-1}}$  são direções ortogonais, tangentes à  $S^{n-1}$  no ponto  $u$ . As direções tangentes juntamente com  $u$  formam uma base esférica ortogonal em  $R^n$ . Portanto,

$$u \otimes u + e_{\phi_1} \otimes e_{\phi_1} + \dots + e_{\phi_{n-1}} \otimes e_{\phi_{n-1}} = I, \quad (3.42)$$

onde  $I$  é uma matriz identidade  $n \times n$ . Substituindo em (3.41), temos,

$$\langle \Delta u \Delta u \rangle_{ij} = (c - h) u_i u_j + h \delta_{ij}, \quad (3.43)$$

$$\langle \Delta u \Delta u \rangle_{ij} \nabla_u^i \nabla_u^j q = h \nabla_u^2 q = h \hat{L}_u^2 q. \quad (3.44)$$

Aqui, utilizamos o fato de  $q$  somente depender das variáveis angulares em  $R^n$ , tal que  $u_i u_j \nabla_u^i \nabla_u^j q = 0$ , e definimos

$$\nabla_u^2 q \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r q) + \hat{L}_u^2 q = \hat{L}_u^2 q, \quad (3.45)$$

onde  $r = |u|$  e  $\nabla_u^2$  é o laplaciano no espaço  $R^n$  de vetores velocidade não normalizados, enquanto que  $\hat{L}_u^2$  é o laplaciano sobre uma esfera  $S^{n-1}$ . Assim, tudo o que precisamos determinar é o valor de  $h$ . Podemos calcular esta quantidade tomando  $u = e_1$ , e vendo que

$$h = \langle \Delta u \otimes \Delta u \rangle_{22}. \quad (3.46)$$

Em coordenadas esféricas, um vetor unitário geral  $u' \in S^{n-1}$  é

$$\begin{aligned} u' = & \cos \phi_1 \hat{e}_1 + \sin \phi_1 \cos \phi_2 \hat{e}_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \hat{e}_3 \\ & + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1} \hat{e}_n \\ & + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1} \hat{e}_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

e a integração sobre  $u'$  é feita da seguinte maneira

$$\int d^{n-1} u' f(u') = \prod_{j=1}^{n-2} \int_0^\pi d\phi_j (\sin \phi_j)^{n-j-1} \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} f(u'). \quad (3.48)$$

Quando  $f(u')$  depende somente de  $\phi_1$ , temos que

$$\int d^{n-1} u' f(u') = \Omega_{n-2} \int_0^\pi d\phi_1 \sin^{n-2} \phi_1 f(u'), \quad (3.49)$$

e quando ele depende somente de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,

$$\int d^{n-1} u' f(u') = \Omega_{n-3} \int_0^\pi d\phi_1 (\sin \phi_1)^{n-2} \int_0^\pi d\phi_2 (\sin \phi_2)^{n-3} f(u'). \quad (3.50)$$

Nas últimas equações é necessário supormos que  $n \geq 4$ . O ângulo sólido  $\Omega_n$ , subentendido por  $S^n$  é dado por

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (3.51)$$

Logo, sabendo que a distribuição angular depende de  $(u' - u)^2 = 2(1 - \cos \phi_1)$ , e  $\Delta u_2 \Delta u_2 = \sin^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2$ , obtemos

$$\mathcal{N} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right) e^a}{2\pi^{\frac{n}{2}} \Omega_{n-2} I_{\frac{n-2}{2}}(a)}, \quad h = \frac{I_{\frac{n}{2}}(a)}{a I_{\frac{n-2}{2}}(a)} \mathcal{F}, \quad a = \frac{1}{\kappa \Delta L}, \quad (3.52)$$

com

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{n-3}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \left\{ \frac{4\Gamma(n-3)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} - \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right\}, \quad (3.53)$$

onde  $I_\nu(x)$  é a função de Bessel modificada. Por completeza, apresentamos o resultado separado para  $n = 3$ , visto que o utilizamos para o cálculo dos momentos no capítulo 2,

$$\mathcal{N} = \frac{a}{2\pi(1 - e^{-2a})}, \quad h = \frac{1}{a} \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a^2}. \quad (3.54)$$

Quando tomamos, finalmente, o limite quando  $a \rightarrow \infty$ , que corresponde ao limite do contínuo  $\Delta L \rightarrow 0$ , juntamente com um valor de  $\kappa$  finito (limite semi-flexível), a contribuição dominante será,

$$h = \frac{\sigma}{a} = \kappa\sigma\Delta L, \quad (3.55)$$

onde descobrimos que  $\sigma = 2/\pi$  em  $n = 4$ , enquanto  $\sigma = 1$ , para  $n = 3$ .

Voltamos agora para a equação da difusão (3.37), aplicando os resultados obtidos acima juntamente com a propriedade (3.19), obtemos (no limite do contínuo)

$$\begin{aligned} \partial_L q + u_\mu \partial_\mu q &= -[\mu + \phi(x)]q + \frac{\kappa\sigma}{2} \hat{L}_u^2 q + \bar{z}^c \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} (igu_\mu \Lambda_\mu^A - \Phi^A) \\ &\quad \times T_{cd}^A z'^d q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}', z_0, L). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Notando que podemos escrever,

$$e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} z'^d = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'}, \quad (3.57)$$

$$\int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} z'^d q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}', z_0, L) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L), \quad (3.58)$$

conseguimos colocar a equação da difusão na seguinte forma

$$\partial_L q = \left[ -\mu - \phi(x) + \frac{\kappa\sigma}{2} \hat{L}_u^2 - u_\mu \partial_\mu + (igu_\mu \Lambda_\mu^A - \Phi^A) T_{cd}^A \bar{z}^c \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} \right] q, \quad (3.59)$$

com a condição inicial

$$q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, 0) = \delta(x - x_0)\delta(u - u_0)e^{\bar{z}\cdot z_0}. \quad (3.60)$$

Somos capazes agora de expandir  $q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L)$  em potências das componentes  $\bar{z}$  e  $z_0$ , e somente termos lineares (para cada tipo de variável) contribuirão para  $Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L)$  na equação (3.35). Além disso, o último termo na equação (3.59) não mistura diferentes ordens em  $\bar{z}$ . Isto significa que realizando a integração em ambos lados da equação com,

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \int dz d\bar{z} dz_0 d\bar{z}_0 e^{-\bar{z}\cdot z} e^{-\bar{z}_0\cdot z_0} z^b \bar{z}_0^a \times, \quad (3.61)$$

é equivalente a fazer uma substituição,

$$q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L) \longrightarrow \bar{z}^c z_0^d Q^{cd}(x, x_0, u, u_0, L), \quad (3.62)$$

e igualar os coeficientes que acompanham  $z^b \bar{z}_0^a$ . Este processo, nos leva à seguinte equação de difusão,

$$\left[ (\partial_L - (\kappa\sigma/2))\hat{L}_u^2 + (\mu + \phi(x))\delta_{ac} + \Phi^A T_{ac}^A + u \cdot D_{ac} \right] Q^{cd}(x, x_0, u, u_0, L) = 0, \quad (3.63)$$

a qual contem a derivada covariante não abeliana (que surge naturalmente de nossos cálculos), designada por

$$u \cdot D_{ac} = u_\mu D_\mu^{ac}, \quad D_\mu^{ac} = \delta^{ac}\partial_\mu - ig\Lambda_\mu^A T_{ac}^A. \quad (3.64)$$

Similarmente, a correspondente condição inicial pode ser obtida integrando-se ambos os lados da equação (3.60) com (3.61), ou pela identificação dos coeficientes de  $z^b \bar{z}_0^a$  na expansão de  $e^{\bar{z}\cdot z_0}$ , explicitamente, obtemos

$$Q^{cd}(x, x_0, u, u_0, 0) = \delta^{cd}\delta(x - x_0)\delta(u - u_0). \quad (3.65)$$

Podemos representar  $Q^{cd}(x, x_0, u, u_0, 0)$  de uma forma mais elegante, introduzindo uma notação matricial. Assim, reescrevemos (3.63) como

$$\left[ (\partial_L - (\kappa\sigma/2))\hat{L}_u^2 + (\mu + \phi(x)) + \Phi^A T^A + u \cdot D \right] Q(x, x_0, u, u_0, L) = 0, \quad (3.66)$$

com a condição inicial

$$Q(x, x_0, u, u_0, 0) = \delta(x - x_0)\delta(u - u_0)1, \quad (3.67)$$

com 1 sendo uma matriz  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  e  $D_\mu = 1\partial_\mu - ig\Lambda_\mu^A T^A$ .

### 3.5 Descrição de campos efetiva em grandes distâncias

Agora estamos aptos a seguir passos similares aqueles dados em nosso artigo anterior [41], tomando cuidado com a nova dimensionalidade, a inclusão da cor e também com as condições de fronteira que estamos interessados. No caso dos vórtices de centro em 3D, procuramos uma probabilidade ponta-a-ponta  $Q(x, x_0)$  para um objeto unidimensional aberto com pontos extremos fixos e direções iniciais e finais dos vetores tangentes independentes. Em particular, a equação e a condição inicial descrevendo o processo de difusão no espaço  $x$  e  $u$  foi tratada sob esta suposição.

Aqui, na equação (3.9), estamos interessados na descrição de uma linha de mundo de monopólo que seja suave, contendo o ponto  $x$ , tal que estamos interessados na quantidade  $Q^{ba}(x, x_0, L)$  na equação (3.10), e no final ajustaremos  $a = b$ ,  $x = x_0$  para obtermos o peso do loop desejado. Note que na referência [41], unindo os pontos final e inicial de um vórtice de centro em grupos de  $N$  (para  $SU(N)$ ), para formar pares instantons/anti-instantons, o peso estatístico para uma cadeia fechada foi obtido como  $Q^N(x, x_0)$ .

De acordo com a linguagem apresentada nas seções anteriores,  $Q^{cd}(x, x_0, L)$  é identificado como os elementos da matriz

$$Q(x, x_0, L) = \int d^{m-1}u Q(x, x_0, u, u, L), \quad (3.68)$$

tal que o problema resulta em obter uma equação da difusão no espaço  $x$  para esta integral, sabendo que o integrando satisfaz (3.66) e a condição inicial (3.67). Primeiramente, expandimos a dependência em  $u$  de  $Q(x, x_0, u, u_0, L)$  nas autofunções (harmônicos esféricos)  $Y_{lj}(u)$  do operador laplaciano sobre  $S^{n-1}$ , onde

$$\hat{L}_u^2 Y_{lj}(u) = l(l + n - 2)Y_{lj}(u), \quad (3.69)$$



e a letra  $j$  representa os outros números quânticos que não sejam o momento angular. Em outras palavras, podemos expandir o peso estatístico  $Q$  em diferentes setores de momento angular,

$$Q(x, x_0, u, u_0, L) = \sum_{l=0} Q_l(x, x_0, u, u_0, L), \quad (3.70)$$

onde

$$Q_l(x, x_0, u, u_0, L) = \sum_{j=1}^{N(l,n)} Q_{lj}(x, x_0, u_0, L) Y_{lj}(u), \quad (3.71)$$

e  $N(l, n)$  é o número de harmônicos esféricos linearmente independentes com momento angular  $l$ , dado por  $N(0, n) = 1$  e para  $l \geq 1$ ,

$$N(l, n) = \frac{2l + n - 2}{l} \binom{l + n - 3}{l - 1}. \quad (3.72)$$

A condição inicial (3.67) é modificada para

$$\sum_{l,j} Q_{lj}(x, x_0, u_0, 0) Y_{lj}(u) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0) 1, \quad (3.73)$$

tal que usando a relação de completeza,

$$\begin{aligned} \delta(u - u_0) &= \sum_{l,j} [Y_{lj}(\phi_1^0, \phi_2^0, \dots, \phi_{n-1}^0)]^* Y_{lj}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}) \\ &= \sum_{l,j} [Y_{lj}(u_0)]^* Y_{lj}(u), \end{aligned} \quad (3.74)$$

ela torna-se

$$Q_{lj}(x, x_0, u_0, 0) = \delta(x - x_0) [Y_{lj}(u_0)]^* 1. \quad (3.75)$$

Em particular, da equação (3.71),

$$Q_0(x, x_0, u, u_0, 0) = \delta(x - x_0) [Y_{01}(u_0)]^* Y_{01}(u) 1 = \Omega_{n-1}^{-1} \delta(x - x_0) 1. \quad (3.76)$$

Como o termo  $u \cdot D$ , quando atua sobre  $Q$  na equação (3.66), ele mistura os diferentes setores de momento angular. Assim como no capítulo anterior, podemos renomear

$$(u \cdot D)Q = \sum_{l=0} (u \cdot D)\mathcal{Q}_l = \sum_{l=0} \mathcal{R}_l. \quad (3.77)$$

Com isso, vemos que as componentes de momento angular satisfazem as seguintes equações

$$h_l \mathcal{Q}_l + \mathcal{R}_l = -\partial_L \mathcal{Q}_l, \quad (3.78)$$

com  $h_l$  sendo uma matriz composta pelos seguintes elementos,

$$h_l^{cd} = [\phi + \mu + l(l + n - 2)\kappa\mathcal{F}/2]\delta_{cd} + \Phi^A T_{cd}^A. \quad (3.79)$$

Como exemplo, montamos as duas primeiras equações provenientes de (3.78)

$$h_0 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_0 = -\partial_L \mathcal{Q}_0, \quad h_1 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_1 = -\partial_L \mathcal{Q}_1, \dots \quad (3.80)$$

onde

$$h_0 = [\phi + \mu]1 + \Phi^A T^A, \quad (3.81)$$

e

$$h_1 = [\phi + \mu + (n - 1)\kappa\sigma/2]\delta + \Phi^A T^A. \quad (3.82)$$

Por outro lado, da definição de  $\mathcal{R}_l$  na equação (3.77), usando as propriedades para a adição de momento angular, e que as componentes de  $u$  possuem  $l = 1$ , vemos que  $\mathcal{R}_0$  depende de  $\mathcal{Q}_1$ , enquanto  $\mathcal{R}_1$  depende de  $\mathcal{Q}_0$  e de  $\mathcal{Q}_2$ , etc (composição de momentos angulares). Logo, escrevemos

$$\mathcal{R}_0 = \left[ (u \cdot D)\mathcal{Q}_1 \right]_0, \quad \mathcal{R}_1 = \left[ (u \cdot D)\mathcal{Q}_0 + (u \cdot D)\mathcal{Q}_2 \right]_1, \dots \quad (3.83)$$

Considerando agora o caso semi-flexível, espera-se que os efeitos de memória sobre a orientação inicial  $u_0$  devem ser suprimidos para grandes valores de  $L$ . Isto significa que a

distribuição final  $u$  será aproximadamente isotrópica, e podemos aproximá-la assumindo  $\mathcal{Q}_l \approx 0$ , para  $l \geq 2$ . A perda de memória é mais efetiva para grandes valores de  $\kappa$ , desde que  $\kappa$  significa flexibilidade e então mostra que o loop muda sua orientação mais facilmente. Então, neste limite, as quatro equações em (3.80) e (3.83) tornam-se um sistema fechado, onde podemos aproximar

$$\mathcal{R}_1 \approx \left[ (u \cdot D) \mathcal{Q}_0 \right]_1 = (u \cdot D) \mathcal{Q}_0, \quad (3.84)$$

para obtermos

$$-\partial_L \mathcal{Q}_0 = h_0 \mathcal{Q}_0 + \left[ (u \cdot D) \mathcal{Q}_1 \right]_0, \quad -\partial_L \mathcal{Q}_1 = h_1 \mathcal{Q}_1 + (u \cdot D) \mathcal{Q}_0, \quad (3.85)$$

Escrevendo  $\mathcal{Q}_1$  da segunda equação, aplicando  $u \cdot D$ , e tomando apenas a componente  $l = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \left[ (u \cdot D) \mathcal{Q}_1 \right]_0 &= -\partial_\mu (h_1^{-1}) \left[ u_\mu \partial_L \mathcal{Q}_1 \right]_0 - h_1^{-1} \partial_L \left[ (u \cdot D) \mathcal{Q}_1 \right]_0 - [u_\mu u_\nu]_0 (\partial_\mu (h_1^{-1}) D_\nu \mathcal{Q}_0 + \\ &+ h_1^{-1} D_\mu D_\nu \mathcal{Q}_0), \end{aligned} \quad (3.86)$$

Para grandes valores de  $\kappa$ , aproximamos a quantidade  $h_1^{-1}$  por uma série de Taylor (análogo ao capítulo anterior)

$$h_1^{-1} \approx \frac{\alpha}{\kappa} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\kappa} (\phi + \mu) 1 - \frac{\alpha}{\kappa} \Phi^A T^A \right], \quad \partial_\mu h_1^{-1} \approx O(1/\kappa^2), \quad (3.87)$$

com  $\alpha = \frac{2}{(n-1)\sigma}$ . Então, mantendo apenas termos de primeira ordem em  $1/\kappa$ , obtemos

$$\left[ (u \cdot D) \mathcal{Q}_1 \right]_0 \approx -\frac{\alpha}{\kappa n} (D_\mu D_\mu \mathcal{Q}_0) - \frac{\alpha}{\kappa} \partial_L \left[ (u \cdot D) \mathcal{Q}_1 \right]_0, \quad (3.88)$$

onde usamos

$$[u_\mu u_\nu]_0 = [u_\mu u_\nu - (1/n)\delta_{\mu\nu} + (1/n)\delta_{\mu\nu}]_0 = (1/n)\delta_{\mu\nu}. \quad (3.89)$$

Assim, através da combinação das equações (3.85) e (3.88), chegamos em

$$-\left(1 + \frac{\alpha}{\kappa} h_0\right) \partial_L \mathcal{Q}_0 \approx h_0 \mathcal{Q}_0 - \frac{\alpha}{\kappa n} D_\mu D_\mu \mathcal{Q}_0 + \frac{\alpha}{\kappa} \partial_L^2 \mathcal{Q}_0, \quad (3.90)$$

e para grandes valores de  $\kappa$  (porém finitos), quando  $(\alpha h_0/\kappa) \ll 1$ , obtemos

$$O\mathcal{Q}_0 + \partial_L\mathcal{Q}_0 + \frac{\alpha}{\kappa}\partial_L^2\mathcal{Q}_0 \approx 0, \quad (3.91)$$

onde

$$O = -\frac{\alpha}{\kappa n}D_\mu D_\mu + (\phi + \mu)1 + \Phi^A T^A. \quad (3.92)$$

O terceiro termo na equação (3.91) é irrelevante. Resolvendo formalmente a equação característica para a equação diferencial de segunda ordem em  $L$ , o comportamento para  $\kappa$  grande de uma base de soluções é

$$\mathcal{Q}_0^A(L) = e^{-LO}\mathcal{Q}_0^{(A)}(0), \quad \mathcal{Q}_0^{(B)}(L) = e^{-\frac{\kappa}{\alpha}L}e^{+LO}\mathcal{Q}_0^{(B)}(0). \quad (3.93)$$

Como  $O$  é um operador hermitiano positivo definido, a opção  $B$  não é bem comportada, logo restando apenas a opção  $A$ , que resolve

$$O\mathcal{Q}_0 + \partial_L\mathcal{Q}_0 = 0, \quad (3.94)$$

junto com a condição inicial (3.76),

$$\mathcal{Q}_0(x, x_0, u, u_0, 0) = \Omega_{n-1}^{-1}\delta(x - x_0)1. \quad (3.95)$$

Como falamos anteriormente, esta quantidade (bloco fundamental) é muito importante para a derivação do modelo efetivo obtido em [45]. Escrevemos aqui, apenas o resultado

$$Z_d = \int [\mathcal{D}\phi][\mathcal{D}\Phi]e^{-W} \int [\mathcal{D}\zeta][\mathcal{D}\bar{\zeta}]e^{-\int d^4x\mathcal{L}(\zeta, \Lambda, \phi, \Phi)}, \quad (3.96)$$

onde define-se

$$\mathcal{L}(\zeta, \Lambda, \phi, \Phi) = D_\mu^{\bar{a}b}\zeta_b D_\mu^{ac}\zeta_c + m^2\bar{\zeta}_a\zeta_a + \frac{\kappa n}{\alpha}\Phi^A\bar{\zeta}_a T_{ab}^A\zeta_b + \frac{\kappa n}{\alpha}\phi\bar{\zeta}_a\zeta_a, \quad (3.97)$$

com  $m^2 = \frac{n}{\alpha}\kappa\mu$  e os campos bosônicos complexos são representados por  $\zeta_a$ ,  $a = 1, \dots, \mathcal{D}$  (em uma dada representação de  $SU(N)$ ). Agora, gostaríamos de fazer contato com o

modelo de Yang-Mills-Higgs [19]. Quando escolhermos a representação adjunta de  $SU(N)$ , somos capazes de chegar em um modelo efetivo dado por

$$Z = \int [\mathcal{D}\zeta][\mathcal{D}\zeta^\dagger] e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{ef}(\zeta, \Lambda)}, \quad (3.98)$$

onde

$$\mathcal{L}_{ef}(\zeta, \Lambda) = \langle D_\mu \zeta, D_\mu \zeta \rangle + m^2 \langle \zeta, \zeta \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \zeta \wedge \zeta^\dagger, \zeta \wedge \zeta^\dagger \rangle + \frac{\eta}{4} \langle \zeta, \zeta \rangle^2, \quad (3.99)$$

ou ainda, em termos de pares de campos de Higgs hermitianos na representação adjunta,  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}(\zeta, \Lambda) = \frac{1}{2} \langle D_\mu \psi_I, D^\mu \psi_I \rangle + \frac{m^2}{2} \langle \psi_I, \psi_I \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \psi_I \wedge \psi_J, \psi_I \wedge \psi_J \rangle + \\ + \frac{\eta}{4} \langle \psi_I, \psi_I \rangle \langle \psi_J, \psi_J \rangle, \end{aligned} \quad (3.100)$$

onde usamos a métrica sobre a álgebra de Lie definida em (1.99).

Vimos neste capítulo como podemos descrever ensembles de loops não abelianos em 4D. Partimos da lagrangiana clássica de uma partícula sujeita à interações não abelianas e conseguimos realizar a representação deste ensemble utilizando o formalismo da integral de caminho sobre curvas. Não foi trivial entender como devemos realizar o limite para identificar os pontos extremos de um objeto unidimensional aberto. Relembramos alguns conceitos e definições sobre estados coerentes, cuja importância vem do fato de representar o setor não abeliano da teoria, e escrevemos uma equação de Chapman-Kolmogorov com cor. Em seguida, foi realizado o tratamento desta equação integral obtendo a equação de difusão correspondente, onde precisamos calcular os momentos de primeira e segunda ordem da distribuição angular. Com isso, após reduzir a dependência da probabilidade deste loop colorido nos setores não abelianos e orientacionais, conseguimos obter uma equação de difusão não abeliana. O surgimento da derivada covariante não abeliana nestes resultados é um bom sinal de que o método de obtenção da probabilidade ponta-a-ponta, inspirado em modelos de polímeros, é um excelente caminho para lidar com objetos unidimensionais e suas teorias efetivas correspondentes. Podemos observar que este resultado faz contato com o modelo efetivo proposto em [19] e exposto na seção 1.4.3 desta tese de doutorado. Este foi um passo importante para futuras investigações sobre os modelos de Yang-Mills-Higgs e a sua possível relação com ensembles de defeitos no contexto das teorias de Yang-Mills puras.

## CONCLUSÃO

Nesta tese de doutorado apresentamos um método para a obtenção de probabilidades ponta-a-ponta de objetos unidimensionais abertos e fechados, onde incluímos efeitos de interação externa, rigidez, volume excludente e ainda a introdução de informação não abeliana em nosso último trabalho. Também discutimos brevemente sobre como a derivação de modelos efetivos poderia originar efeitos confinantes em teorias de Yang-Mills. Para isso, nos baseamos no modelo de supercondutividade dual proposto por G. t’Hooft, onde o vácuo seria composto por um ensemble de objetos magnéticos que condensariam dando origem a um tubo de fluxo elétrico capaz de confinar cargas cromoeletricas (quarks).

No capítulo 1 apresentamos inicialmente as teorias de Yang-Mills, responsáveis por fornecerem a álgebra de grupos que permeia todas as nossas discussões seguintes. Em seguida, discutimos sobre dois dos defeitos mais importantes para os estudos desta tese: os vórtices de centro e os monopólos. Sabemos que defeitos ou excitações topológicas estão presentes nos mais variados ramos da física e apresentam resultados muito importantes. Uma simples transição de fase como a vaporização da água já é suficiente para entendermos o que estes objetos são. Eles surgem quando há coexistência entre duas fases possíveis do sistema, o que caracteriza um ponto de transição de fase. Eles são produzidos através dos mecanismos de quebra espontânea de simetria e por isso não deve ser uma surpresa que várias transições de fase podem ser compreendidas em termos destes defeitos. Por exemplo, a formação de bolhas no processo de vaporização da água indica que a bolha funciona como uma interface entre dois meios distintos (onde há coexistência de duas ou mais fases): o líquido e o gasoso. Na interface, devem ser respeitadas as igualdades de diversos parâmetros críticos, enquanto que nos dois meios em separado, cada um deles apresenta um determinado valor para cada um desses parâmetros (neste caso, chamamos estes defeitos de paredes de domínio, semelhante ao que ocorre com um magneto). Eles recebem nomes diferentes dependendo da simetria que foi quebrada no sistema. No magnetismo (ou no exemplo que indicamos de vaporização da água) eles são conhecidos como paredes de domínio (ou em inglês, “domain walls”) e em teorias de calibre não abelianas são denominados de monopólos e vórtices de centro. Portanto, neste capítulo fizemos questão de mostrar quais eram os pontos essenciais para o entendimento do contexto em que trabalhamos nos capítulos seguintes. Inserimos sua representação na rede e explicamos o porquê destes objetos serem relevantes para teorias que buscam a compreensão para o confinamento de quarks e glúons. A teoria destes objetos magnéticos na rede mostra bons resultados, e apontamos para um trabalho recente que indica como estes defeitos poderiam formar cadeias de vórtices e monopólos correlacionados.

Todas estas considerações sobre defeitos magnéticos na rede serviram para introduzir alguns modelos efetivos importantes que consideravam a condensação destes objetos

como responsáveis por criar uma corda confinante no vácuo das teorias de Yang-Mills. Em particular, o modelo de G. t'Hooft, em  $(2 + 1)D$ , leva em conta o estudo das fases de Yang-Mills analisando a simetria de centro  $Z_N$  correspondente a defeitos tipo vórtices de centro. Vimos que existem duas fases importantes que podemos citar: uma em que a simetria de centro é preservada no vácuo, não permitindo a condensação dos vórtices de centro e conseqüentemente impedindo a formação do tubo de fluxo cromoeletrico que poderia explicar o confinamento; a outra fase é justamente quando quebra-se espontaneamente a simetria de centro e com isso, há formação de paredes de domínio que possuiriam algumas propriedades relevantes para confinar quarks (cargas cromoeletricas). Este mecanismo importante leva o nome de *supercondutividade dual*. Outro aspecto interessante é o modelo de Yang-Mills-Higgs, que consegue explicar a interação entre quarks através de cordas confinantes gluônicas tipo vórtices de centro. A vantagem deste modelo efetivo consiste em mostrar que junções de monopólos e vórtices de centro podem ser utilizadas para entender a formação de mésons híbridos [19]. Em nosso segundo artigo, apresentado no capítulo 3 deste trabalho de doutoramento, introduzimos informação não abeliana nos ensembles em 4D de monopólos, além de outras propriedades que vem se mostrando importantes na determinação de modelos efetivos de objetos tipo corda.

Um terceiro ponto importante apresentado minuciosamente foi o formalismo da decomposição de Cho-Faddeev-Niemi e como este pode ser útil no processo de dualização das teorias de Yang-Mills. Dualizar uma teoria significa explicitar na função de partição a contribuição destes defeitos, que nem sempre aparecem explícitos na teoria. O formalismo de Cho-Faddeev-Niemi permite que façamos esta dualização em Yang-Mills e introduz defeitos tipo monopólos em uma das direções da base local de cor. Comentamos as correções que precisam ser feitas nos cálculos de Cho e agora podemos introduzir vórtices de centro nas outras duas direções da base local no espaço de cor, formando o que é conhecido como *cadeias de vórtices e monopólos correlacionados*. Esta inclusão é reforçada e motivada por estudos de rede, o laboratório da teoria quântica de campos para o confinamento. A inclusão dos vórtices de centro no formalismo de Cho-Faddeev-Niemi proporciona a possibilidade de um modelo para a descrição do vácuo de Yang-Mills consistindo de cadeias de instantons (monopólos em 3D euclidianas) acoplados com pares de vórtices de centro.

No capítulo 2 mostramos a primeira parte de nosso trabalho, onde conseguimos determinar a probabilidade ponta-a-ponta de objetos unidimensionais abertos (vórtices de centro em 3D) através da derivação de uma equação de difusão. A vantagem do formalismo apresentado neste capítulo consiste na sua facilidade de interpretação sob o ponto de vista da física de polímeros. A conexão entre física de polímeros e teoria quântica de campos pôde ser vista através do modelo WLC, que introduz efeitos de rigidez nestes objetos. A partir desta idéia, fomos capazes de determinar, utilizando técnicas recentes da física de polímeros, uma equação de recorrência para uma cadeia unidimensional aberta, onde

fatiamos este objeto em  $N$  pedaços de comprimentos iguais e mostramos que, iterando esta recorrência (que é do tipo Markoviana), podíamos obter uma teoria quântica de campos quando tomamos o limite do contínuo ( $\Delta L \rightarrow 0$  ou  $N \rightarrow \infty$ ).

A contribuição mais significativa para nossa área com esse formalismo foi a generalização do modelo de t'Hooft ao obtermos, de forma natural, uma derivada covariante que carrega os efeitos de interação com campos duais [41]. Isto não era conhecido até então e portanto será importante na descrição de modelos efetivos gerados por curvas unidimensionais em 3D. A probabilidade ponta-a-ponta para um único vórtice de centro mostrou-se fundamental para a determinação da teoria efetiva de um ensemble de cadeias de monopólos unidos por vórtices de centro em 3D. Este resultado foi bastante relevante para a comprovação de algumas suposições heurísticas propostas na referência [39]. Outro fato interessante seria analisar em qual limite o parâmetro  $\kappa$  torna-se negativo, desde que isto geraria uma fase confinante.

No capítulo 3 vimos como podemos aplicar os mesmos métodos apresentados no capítulo 2 para objetos unidimensionais fechados que, agora, transportam um índice de cor pertencente ao grupo  $SU(N)$ . Aqui, trabalhamos no espaço quadridimensional, onde monopólos comportam-se como linhas de mundo e vórtices de centro como superfícies bidimensionais. Infelizmente, uma generalização para a geração de objetos bidimensionais através de uma relação de recorrência (como proposta no capítulo 2) não é possível, portanto assumimos ensembles de monopólos unidos por superfícies de Dirac, eliminando assim o problema dos objetos bidimensionais, desde que a superfície não é observável. O interessante aqui foi o estudo não trivial de como poderíamos descrever objetos unidimensionais fechados sujeitos à álgebra de  $SU(N)$ . Além disso, introduzimos novamente os mesmos parâmetros de tensão, rigidez, volume excludente e acoplamento com campos externos, porém introduzindo informação não abeliana, um passo importante para se obter modelos efetivos mais gerais [45].

A descrição destes objetos precisou de bastante cuidado nas definições das medidas da integração de caminho sobre o ensemble. Utilizando o formalismo clássico para uma partícula sujeita à uma interação não abeliana introduzida em [99], conseguimos identificar integrais de caminho sob o formalismo de estados coerentes. Implementamos a nova relação recursiva levando em consideração a inclusão de estados coerentes juntamente com o formalismo desenvolvido no capítulo 2. Assim, fomos capazes de determinar a probabilidade ponta-a-ponta para objetos unidimensionais fechados sujeitos à interações não abelianas através da derivação cuidadosa de uma equação de difusão não abeliana. Novamente, este foi o ingrediente básico para a obtenção do modelo efetivo para um ensemble de monopólos. A grande conquista aqui foi a conexão que pudemos realizar com os modelos de Yang-Mills-Higgs descritos no capítulo 1. Um ponto relevante a ser citado é que nossa segunda parte do trabalho, quando lidamos com sistemas sujeitos à in-



terações não abelianas, ratificamos que nosso procedimento para a derivação de equações de difusão para objetos unidimensionais é bastante útil e abrangente. Notamos que, geralmente, dependeremos do que chamamos de *bloco fundamental*, que consiste justamente da probabilidade ponta-a-ponta para o objeto em consideração.

Em resumo, como discutimos no início desta tese, duas perguntas cruciais sobre as interações fortes são: existem objetos magnéticos que se tornam relevantes ao quantizar as teorias de Yang-Mills puras? quais os tipos de objetos que deveríamos considerar para gerar as propriedades do potencial confinante? Assumindo uma resposta afirmativa para a primeira pergunta, nesta tese, me dediquei a estudar uma classe de objetos que são bons candidatos a responderem a segunda. Utilizando técnicas oriundas da física de polímeros, obtivemos equações de difusão que representam objetos unidimensionais, como vórtices de centro em 3D ou monopólos em 4D. Estas equações ajudam a caracterizar os ensembles magnéticos, levando a certas descrições de campos efetivas. Por sua vez, os modelos efetivos, podem ser utilizados para extrair o comportamento da corda confinante, e compará-lo com as observações feitas na rede. Acreditamos que as equações de difusão derivadas aqui serão úteis, futuramente, para ajudar a determinar o tipo de ensemble correspondente às teorias de Yang-Mills.

## REFERÊNCIAS

- [1] EINSTEIN, A. Título original: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Tradução para o inglês de Robert W. Lawson: RELATIVITY: The special and general theory. Sheffield (England). 1920 edition, p.152, 1920.
- [2] DIRAC, P. A. M.; The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **114** 243 (1927).
- [3] DIRAC, P. A. M.; The Lagrangian in quantum mechanics. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, **3** 64 (1933).
- [4] FEYNMAN, R. P.; Space-Time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **20** 367 (1948); The theory of positrons. *Phys. Rev.*, **76** 749 (1949); Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. *Phys. Rev.*, **80** 440 (1950).
- [5] TOMONAGA, S.; On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Progress of Theoretical Physics*, **1** 27 (1946).
- [6] SCHWINGER, J.; On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, **73** 416 (1948); Quantum Electrodynamics I. A covariant formulation. *Phys. Rev.*, **74** 1439 (1948).
- [7] DYSON, F.; The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. *Phys. Rev.*, **75** 486 (1949); The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, **75** 1736 (1949).
- [8] GROSS, D. J.; WILCZEK, F.; Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, **30** 1343 (1973).
- [9] POLITZER, H. D.; Reliable perturbative results for strong interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **30** 1346 (1973).
- [10] FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N.; Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Phys. Lett. B*, **25** 29 (1967).
- [11] GRIBOV, V. N.; Quantization of non-Abelian gauge theories. *Nucl. Phys. B*, **139** 1 (1978).
- [12] SINGER, I. M.; Some remarks on the Gribov ambiguity. *Commun. Math. Phys.*, **60** 7 (1978).
- [13] ZWANZIGER, D.; Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by BRS invariance. *Nucl. Phys. B*, **399** 477 (1993).
- [14] ALKOFER, R.; von SMEKAL, L.; The infrared behavior of QCD Green's functions: confinement, dynamical symmetry breaking and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.*, **353** 281 (2001).

- [15] CAPRI, M. A. L.; LEMES, V. E. R.; SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P.; THIBES, R.; The gluon and ghosts propagators in Euclidean Yang-Mills theory in the maximal Abelian gauge: taking into account the effects of the Gribov copies and of the dimension two condensates. *Phys. Rev. D*, **77** 105023 (2008).
- [16] t'HOOFT, G.; On the phase transition towards permanent quark confinement. *Nucl. Phys. B*, **138** (1978) 1.
- [17] NAMBU, Y.; Strings, monopoles and gauge fields. *Phys. Rev. D*, **10** 4262 (1974).
- [18] MANDELSTAM, S.; Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories. *Phys. Rept.*, **23C** 245 (1976).
- [19] OXMAN, L. E.; Confinement of quarks and valence gluons in  $SU(N)$  Yang-Mills-Higgs model. *J. High Energy Phys.*, **03**, 038 (2013).
- [20] KONDO, K.; Dual superconductivity, monopole condensation and confining string in low-energy Yang-Mills theory: Part I. arXiv: [hep-th] 0009152 (2000).
- [21] BALI, G. S.; BORNIAKOV, V.; MÜLLER-PREUSSKER, M.; SCHILLING, K.; Dual superconductor scenario of confinement: A systematic study of Gribov copy effects. *Phys. Rev. D*, **54**, 2863 (1996).
- [22] SHIBA, H.; SUZUKI, T.; Monopoles and string tension in  $SU(2)$  QCD. *Phys. Lett. B*, **333**, 461 (1994).
- [23] STACK, J.; NEIMAN, S.; WENSLEY, R.; String tension from monopoles in  $SU(2)$  lattice gauge theory. *Phys. Rev. D*, **50**, 3399 (1994).
- [24] GREENSITE, J.; LANGFELD, K.; OLEJNIK, S.; REINHARDT, H.; TOK, T.; Color screening, Casimir scaling, and domain structure in  $G(2)$  and  $SU(N)$  gauge theories. *Phys. Rev. D*, **75**, 034501-1 (2007).
- [25] FABER, M.; GREENSITE, J.; OLEJNIK, S.; Casimir scaling from center vortices: Towards an understanding of the adjoint string tension. *Phys. Rev. D*, **57**, 2603 (1998).
- [26] DELDAR, S.; Potentials between static  $SU(3)$  sources in the fat center vortices model. *J. High Energy Phys.*, **0101**, 013-1 (2001).
- [27] CORNWALL, J. M.; In: MILTON, K. A.; SAMUEL, M. A. (eds.). Proceedings of the Workshop on Non-Perturbative Quantum Chromodynamics. Birkhauser, Stuttgart (1983).
- [28] ENGELHARDT, M.; REINHARDT, H.; Center projection vortices in continuum Yang-Mills theory. *Nucl. Phys. B*, **567**, 249 (2000).
- [29] AMBJØRN, J.; GIEDT, J.; GREENSITE, J.; Vortex structure versus monopole dominance in Abelian projected gauge theory. *J. High Energy Phys.*, **02**, 1 (2000).
- [30] CORNWALL, J. M.; YAN, B.; String tension and Chern-Simons fluctuations in the vortex vacuum of  $d = 3$  gauge theory. *Phys. Rev. D*, **53**, 4638 (1996).

- [31] DEL DEBBIO, L.; FABER, M.; GREENSITE, J.; OLEJNIK, S.; Center dominance and  $Z_2$  vortices in SU(2) lattice gauge theory. *Phys. Rev. D*, **55**, 2298 (1997).
- [32] LANGFELD, K.; REINHARDT, H.; TENNERT, O.; Confinement and scaling of the vortex vacuum of SU(2) lattice gauge theory. *Phys. Lett. B*, **419**, 317 (1998); **431**, 141 (1998).
- [33] AMBJØRN, J.; GIEDT, J.; GREENSITE, J.; Vortex structure in abelian-projected lattice gauge theory. *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **83-84**, 467 (2000).
- [34] DE FORCRAND, Ph.; PEPE, M.; Center vortices and monopoles without lattice Gribov copies. *Nucl. Phys. B*, **598**, 557 (2001).
- [35] GUBAREV, F. V.; KOVALENKO, A. V.; POLIKARPOV, M. I.; SYRITSYN, S. N.; ZAKHAROV, V. I.; Fine tuned vortices in lattice SU(2) gluodynamics. *Phys. Lett. B*, **574**, 136 (2003).
- [36] MACK, G.; PETKOVA, V. B.; Comparison of lattice gauge theories with gauge groups  $Z_2$  and SU(2). *Ann. Phys. (N.Y.)*, **123**, 442 (1979); **125**, 117 (1980).
- [37] CHO, Y. M.; A restricted gauge theory. *Phys. Rev. D*, **21** 1080 (1980); Glueball spectrum in extended QCD. *Phys. Rev. Lett.*, **46** 302 (1981); Extended gauge theory and its mass spectrum. *Phys. Rev. D*, **23** 2415 (1981).
- [38] FADDEEV, Ludvig D.; NIEMI, A. J.; Partially dual variables in SU(2) Yang-Mills theory. *Phys. Rev. Lett.*, **82** 1624 (1999).
- [39] OXMAN, Luis E.; Center vortices as sources of Abelian dominance in pure SU(2) Yang-Mills theory. *J. High Energy Phys.*, 12 (2008) 089.
- [40] GREENSITE, J.; The confinement problem in lattice gauge theory. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **51** 1 (2003).
- [41] DE LEMOS, A. L. L.; OXMAN, L. E.; TEIXEIRA, B. F. I.; Derivation of an Abelian effective model for instantons chains in 3D Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, **85** 125014 (2012).
- [42] POLYAKOV, A. M.; Two-dimensional quantum gravity: Superconductivity at high  $T_c$ . *Proc. Conf. on Fields, Strings and Critical Phenomena*, Les Houches, 63p., 1988.
- [43] BARDAKCI, K.; SAMUEL, S.; Local field theory for solitons. *Phys. Rev. D*, **18** 2849 (1978).
- [44] KLEINERT, H.; *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statics, Polymer Physics, and Financial Markets*. 3<sup>rd</sup>ed. World Scientific, p. 1505, 2004.
- [45] OXMAN, L. E.; SANTOS ROSA, G. C.; TEIXEIRA, B. F. I.; Coloured loops in 4D and their effective field representation. arXiv: [hep-th] 14020456 (2014).
- [46] t'HOOFT, G.; Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-Abelian gauge theories. *Nucl. Phys. B*, **190** 455 (1981).
- [47] YANG, C. N.; MILLS, R. L.; Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, **96** 191 (1954).

- [48] HIGGS, P.; Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, **13** 508 (1964).
- [49] DAS, A.; *Field Theory: A path integral approach*. 2<sup>nd</sup>ed. World Scientific, p. 377, 2006.
- [50] GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D.; On the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, **20**, 1064 (1950).
- [51] WICK, G. C.; Properties of Bethe-Salpeter wave functions. *Phys. Rev.*, **96** 1124 (1954).
- [52] CAPRI, M. A. L.; LEMES, V. E. R.; SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P.; THIBES, R.; Study of the maximal Abelian gauge in  $SU(2)$  Euclidean Yang-Mills theory in the presence of the Gribov horizon. *Phys. Rev. D*, **74**, 105007 (2006).
- [53] BAILIN, D.; LOVE, A.; *Introduction to gauge field theory*. Revised Edition. IOP Publishing, p. 380, 1993.
- [54] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D.; *An introduction to quantum field theory*. 1<sup>st</sup>ed.. Perseus books Publishing, p. 864, 1995.
- [55] LE BELLAC, Michel. *Quantum and statistical field theory*. Oxford: Oxford University Press, p. 593, 1991.
- [56] BECCHI, C. M.; ROUET, A.; STORA, R.; Renormalization of gauge theories. *Ann. Phys.*, **98** 287 (1976).
- [57] TYUTIN, I. V.; Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism. *Lebedev Physics Institute preprint 39* (1975).
- [58] MANDELSTAM, S.; An extension of the Regge formula. *Ann. Phys.*, **19** 254 (1962).
- [59] YANG, C. N.; Integral formalism for gauge fields. *Phys. Rev. Lett.*, **33** 445 (1975).
- [60] WILSON, K. G.; Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, **10** 2445 (1974).
- [61] CREUTZ, M.; *Quarks, gluons and lattices*. Cambridge University Press. 1<sup>st</sup>ed. p. 175, 1983.
- [62] BANDER, M.; Theories of quark confinement. *Physics Reports*, **75** 205 (1981).
- [63] GREENSITE, J.; *An introduction to the confinement problem*. 1<sup>st</sup>ed. Springer. p. 224, 2011.
- [64] t'HOOFT, G.; A property of electric and magnetic flux in non-abelian gauge theories. *Nucl. Phys. B*, **153** 141 (1979).
- [65] MACK, G.; Properties of lattice gauge theory models at low temperature. Editado por G. t'Hooft et al. em *Recent Developments in Gauge Theories*, Plenum Press: New York, 1980.
- [66] NIELSEN, H.; OLESEN, P.; A quantum liquid model for the QCD vacuum: Gauge and rotational invariance of domained and quantized homogeneous color fields. *Nucl. Phys. B*, **160** 380 (1979).

- [67] CREUTZ, M.; Asymptotic-Freedom scales. *Phys. Rev. Lett.*, **45** 313 (1980).
- [68] DEL DEBBIO, L.; FABER, M.; GREENSITE, J.; OLEJNIK, S.; Center dominance, center vortices and confinement. *NATO Science Series B*, **366** 47 (2002).
- [69] DIRAC, P. A. M.; Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. *Proc. Roy. Soc. A*, **133** 60 (1931).
- [70] WU, T. T.; YANG, C. N.; Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys. Rev. D*, **12** 3845 (1975).
- [71] t'HOOFT, G.; Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys. B*, **79** 276 (1974).
- [72] POLYAKOV, A. M.; Particle spectrum in the Quantum Field Theory. *JETP*, **20** 430 (1974).
- [73] SHNIR, Y. *Magnetic monopoles*. 1<sup>st</sup>ed. Springer. p. 534, 2005.
- [74] PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M.; Exact classical solution for the t'Hooft monopole and the Julia-Zee Dyon. *Phys. Rev. Lett.*, **35** 760 (1975).
- [75] BOGOMOL'NYI, E. B.; Stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24** 449 (1976).
- [76] BELAVIN, A. A.; POLYAKOV, A. M.; SCHWARTZ, Y.; TYUPKIN, S.; Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett. B*, **59** 85 (1975).
- [77] NAKAHARA, M.; *Geometry, Topology and Physics*. 2<sup>nd</sup>ed. Taylor & Francis Group. p. 596, (2003).
- [78] POLYAKOV, A. M.; Compact gauge fields and the infrared catastrophe. *Phys. Lett. B*, **59** 82 (1975); Quark confinement and topology of gauge theories. *Nucl. Phys. B*, **120** 429 (1977).
- [79] DeGRAND, T. A.; TOUSSAINT, D.; Topological excitations and Monte Carlo simulation of Abelian gauge theory. *Phys. Rev. D*, **22** 2478 (1980).
- [80] DIAKONOV, D.; MAUL, M.; Center vortex solutions of the Yang-Mills effective action in three and four dimensions. *Phys. Rev. D*, **66** 096004 (2002).
- [81] DE VEGA, H. J.; Fermions and vortex solutions in Abelian and nonAbelian gauge theories. *Phys. Rev. D*, **18** 2932 (1978).
- [82] DE VEGA, H. J.; SCHAPOSNIK, F. A.; Electrically charged vortices in nonAbelian gauge theories with Chern-Simons term. *Phys. Rev. Lett.*, **56** 2564 (1986).
- [83] DE VEGA, H. J.; SCHAPOSNIK, F. A.; Vortices and electrically charged vortices in nonAbelian gauge theories. *Phys. Rev. D*, **34** 3206 (1986).
- [84] HEO, J.; VACHASPATI, T.;  $Z(3)$  strings and their interactions. *Phys. Rev. D*, **58** 065011 (1998).
- [85] FREDRICKSON, G. H.; *The equilibrium theory of inhomogeneous polymers*. 1<sup>st</sup>ed. Clarendon Press: Oxford. p. 452, 2006.

- [86] HALPERN, M. B.; SIEGEL, W.; Particle limit of field theory: A new strong-coupling expansion. *Phys. Rev. D*, **16** 2486 (1977).
- [87] AMBJÖRN, J.; Quantization of geometry. arXiv: [hep-th] 9411179 (1995).
- [88] AMBJÖRN, J.; DURHUUS, B.; JONSSON, T.; *Quantum geometry: A statistical field theory approach*. 1<sup>st</sup>ed. Cambridge University Press. p.374, 1997.
- [89] KRATKY, O.; POROD, G.; X-ray investigation of chain-molecules in solution. *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, **68** 1106 (1949).
- [90] REIF, F.; *Fundamentals of statistical and thermal physics*. 1<sup>st</sup>ed. Mc Graw-Hill. p. 666, 1965.
- [91] MORSE, D. C.; FREDRICKSON, G. H.; Semiflexible polymers near interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, **73** 3235 (1994).
- [92] DE LEMOS, A. L. L.; Análise do setor não perturbativo das teorias de Yang-Mills: Cadeias de vórtices e instantons como fontes de confinamento. Tese de doutorado defendida em 2011 e disponível no endereço: <<http://www.if.uff.br/pt/teses-pradua-56/345>>.
- [93] ENGELHARDT, M.; QUANDT, M; REINHARDT, H.; Center vortex model for the infrared sector of  $SU(3)$  Yang-Mills theory: confinement and deconfinement. *Nucl. Phys. B*, **685** 227 (2004).
- [94] ENGELHARDT, M.; REINHARDT, H.; Center vortex model for the infrared sector of Yang-Mills theory-confinement and deconfinement. *Nucl. Phys. B*, **585** 591 (2000).
- [95] CHO, Y. M.; PAK, D. G.; *Phys. Lett. B*, Stable monopole-antimonopole string background in  $SU(2)$  QCD. **632** 745 (2006).
- [96] BORDAG, M.; On the vacuum energy of a color magnetic vortex. *Phys. Rev. D*, **67** 065001 (2003).
- [97] OXMAN, L. E.; Diagonal deformations of thin center vortices and their stability in Yang-Mills theories. *J. High Energ. Phys.*, **07** 078 (2011).
- [98] SANTOS-ROSA, G. C.; Vórtices de Centro nas Teorias de Yang-Mills. Dissertação de mestrado defendida em 2013 pela Universidade Federal Fluminense (UFF).
- [99] BALACHANDRAN, A. P; SALOMONSOM, P.; SKAGERSTAM, B.; WINNBERG, J.; Classical description of a particle interacting with a non-Abelian gauge field. *Phys. Rev. D*, **15** 2308 (1977).