

**UNIVERSIDADE FEDERAL  
FLUMINENSE**

**Instituto de Matemática e Estatística**

**Sobre a Fibra do Mapa de Baum-Bott em  
Folheações de Grau dois em  $\mathbb{P}^2$**

**Francisco Miguel Zamora Inuma**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador : Dr. Gabriel Calsamiglia Mendlewicz.  
Coorientador: Dr. Javier Ribón Herguedas.

Niterói, 29 de Junho de 2015.

# Sobre a Fibra do Mapa de Baum-Bott em Folheações de Grau dois em $\mathbb{P}^2$

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

---

Dr. Gabriel Calsamiglia Mendlewicz- IM/UFF.  
(Orientador)

---

Dr. Javier Ribón Herguedas- IM/UFF.  
(Coorientador)

---

Dr. Sergio Mariano Licanic - IM/UFF.

---

Dr. Renan Edgard Pereira De Lima - IME/SJC.

Niterói, 29 de Junho de 2015.

# Dedicatória

Dedico este trabajo a mi familia, en especial a mis padres y mi tío Willy.

# Agradecimentos

À minha família pelo apoio e compreensão ao longo de estos anos.

A meus queridos amigos Alci, Angie, Ayla, Caro, Claudio, Darwin, Edison, Elizabeth, Felipe, Genyle, Glaucia, Javier, Jessica, Jorge, Lucivanio, Milena, Pablo, Pamela, Paulo, Polly, Priscila, Richard, Roberto, Sugey, Thaynã, Virginia, Víctor.

Aos funcionários da UFF Renato, Bruno, Raquel, Mariana.

Meus sinceros agradecimentos ao meus orientadores Gabriel Calsamiglia e Javier Ribón, por estarem sempre dispostos a me ajudar e terem acreditado em mim. Também à professora Stefanella Boato por ter me ajudado quando cheguei ao Rio de Janeiro recomendado estudar na UFF, ao professor Sebastião Firmo pelo apoio com a bolsa, à professora Isabel Lugão pela compreensão, aos professores Thiago Fassarella, Maycol Falla, Arturo Fernandez, Percy Rojas e Adolfo Guillot pelo grande apoio e esclarecimento de dúvidas dentro e fora da universidade.

Um agradecimento especial mais uma vez ao meu orientador Gabriel, por ter sido mais que um professor, por ter sido um amigo, e sempre me ajudando, sem dúvida essa tese foi feita graças a ele.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

## RESUMO

O mapa de Baum-Bott associa a cada folheação os índices de Baum-Bott das suas singularidades. Mais precisamente, denotemos por  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  o conjunto das folheações de grau  $d \geq 2$  em  $\mathbb{P}^2$ , e por  $\mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  o subconjunto de  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  formado pelas folheações que só tem singularidades não degeneradas. Dada  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  com  $N(d)$  singularidades e conjunto singular  $Sing(\mathcal{F}) = \{p_1, \dots, p_{N(d)}\}$ . A associação

$$\mathcal{F} \longmapsto (BB(\mathcal{F}, p_1), \dots, BB(\mathcal{F}, p_{N(d)})).$$

não está bem definida pois se reordenamos os elementos de  $Sing(\mathcal{F})$  a folheação  $\mathcal{F}$  teria duas imagens assim, a associação não pode ser um mapa. Para poder definir um mapa, vamos simetrizar as coordenadas obtendo assim o mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{B}_d : \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2) &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}^{N(d)}}{S_{N(d)}}, \\ \mathcal{G} &\longmapsto [BB(\mathcal{G}, p_1), \dots, BB(\mathcal{G}, p_{N(d)})] \end{aligned}$$

onde  $Sing(\mathcal{G}) = \{p_1, \dots, p_{N(d)}\}$ . Podemos estender  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d$  a um mapa racional com o qual podemos definir o mapa

$$\mathcal{B}\mathcal{B}_d : \mathbb{F}ol(d, 2) \dashrightarrow \frac{(\mathbb{P}^1)^{N(d)}}{S_{N(d)}} \cong \mathbb{P}^{N(d)}.$$

Que será chamado de **mapa global de Baum-Bott** ou simplesmente, mapa de Baum-Bott.

Denotemos por  $Aut(\mathbb{P}^2)$  ao grupo de automorfismos holomorfos de  $\mathbb{P}^2$ . Consideremos a ação natural  $\Psi$  sobre  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  dada por  $(T, \mathcal{F}) \in Aut(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{F}ol(d, 2) \xrightarrow{\Psi} T^*(\mathcal{F}) \in \mathbb{F}ol(d, 2)$ . O objetivo principal deste trabalho é dar a prova de:

1. O posto do mapa de Baum-Bott na folheação de Jouanolou de grau  $d$ ,  $\mathcal{J}_d$  é:

$$\frac{d^2 + 7d - 6}{2}.$$

2. Para  $d = 2$ , a fibra genérica do mapa de Baum-Bott restrita a  $\mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$ , contém exatamente 240 órbitas da ação de  $Aut(\mathbb{P}^2)$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Noções de Folheações Holomorfas</b>	<b>5</b>
1.1	Folheações Holomorfas . . . . .	5
1.2	Índice de Interseção de Fibrados em Linha . . . . .	5
1.3	Pencil e Divisor de Tangência entre duas Folheações . . . . .	6
1.4	Índice de Baum-Bott . . . . .	7
1.5	Teorema de Baum-Bott . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Folheações em <math>\mathbb{P}^2</math></b>	<b>16</b>
2.1	O Mapa de Baum-Bott . . . . .	19
2.2	Teorema Principal . . . . .	21
2.3	O Posto na Folheação de Jouanolou de grau $d$ . . . . .	22
2.4	Folheações de Grau 2 . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Prova do Teorema Principal</b>	<b>54</b>
3.1	Resultados da Folheação de Jouanolou de Grau 2 . . . . .	54
3.2	Demonstração do Lema 3.1 . . . . .	70
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>

# Introdução

No presente trabalho estudamos os trabalhos realizados por Alcides Lins Neto e Jorge Vitório Pereira em [10] e [11] que provam algumas propriedades do mapa de Baum-Bott,  $\mathcal{BB}_d$ , para folheações de grau  $d \geq 2$ , no plano projetivo, que associa a cada folheação de grau  $d$  os índices de Baum-Bott de suas singularidades, que para nosso caso,  $\mathcal{F}$  possui  $N(d)$ . Para o caso geral temos o seguinte:

**Teorema A** [ A. L. Neto, J. V. Pereira] Para qualquer  $d \geq 2$ , o posto do mapa de Baum-Bott na folheação de Jouanolou de grau  $d$ ,  $\mathcal{J}_d$ , é

$$\frac{d^2 + 7d - 6}{2}.$$

Consideremos o grupo de automorfismos holomorfos de  $\mathbb{P}^2$ ,  $Aut(\mathbb{P}^2)$  com o isomorfismo de  $PSL(3, \mathbb{C})$  e consideremos também a ação natural  $\Psi$  sobre  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  (o conjunto de folheações de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^2$ ) dada por

$$(T, \mathcal{F}) \in Aut(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{F}ol(d, 2) \xrightarrow{\Psi} T^*(\mathcal{F}) \in \mathbb{F}ol(d, 2).$$

Dada  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$ , denotemos por  $\mathcal{O}rb(\mathcal{F})$  a órbita de  $\mathcal{F}$  por  $\Psi$ .

Para o caso  $d = 2$  estudaremos sobre as fibras do mapa  $\mathcal{BB}_2$ , que restrito a  $\mathbb{F}ol_{nd}(2, 2) = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 2) \text{ com só singularidades não degeneradas}\}$ , nos dá o resultado principal do trabalho. Enunciado a seguir:

**Teorema B** [ A. L. Neto] A fibra genérica de  $\mathcal{BB}_2$  contém exatamente 240 órbitas de  $\Psi$ .

Denotemos  $F(\mathcal{J}_2) := \mathcal{BB}_2^{-1}[\mathcal{BB}_2(\mathcal{J}_2)]$  e  $F_d(\mathcal{J}_d) := \mathcal{BB}_d^{-1}[\mathcal{BB}_d(\mathcal{J}_d)]$  às fibras de  $\mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_d$ . O importante do caso no qual  $d = 2$  é que se cumpre  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2) = F(\mathcal{J}_2)$  pois quando  $d \geq 3$  o conjunto  $F_d(\mathcal{J}_d) \setminus \mathcal{O}rb(\mathcal{J}_d) \neq \emptyset$ .

Usamos um modelo particular dentro de cada órbita da folheação. Mais precisamente, veremos que genericamente toda  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$  pode ser parametrizada por uma folheação  $\mathcal{F}_\Lambda$ , (ver a Seção 2.4) e com uma mudança de coordenadas podemos levar a outra folheação  $\mathcal{F}_{Z_\Lambda}$  na qual para obter os índices de Baum-Bott só devemos obter os resíduos de uma forma racional em  $\mathbb{P}^1$ . Com esses resultados prova-se que  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2) = F(\mathcal{J}_2)$ .

Usando o Teorema A para  $d = 2$ , temos que  $Posto_{\mathcal{J}_2} \mathcal{B}\mathcal{B}_2 = 6$ , o que implica a existência de uma vizinhança  $\mathcal{U}_2$  de  $\mathcal{J}_2$  em  $\mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  com as seguintes propriedades:

**Lema A** Existe uma seção transversal  $\Gamma$  a  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$  com as seguintes propriedades:

(A)  $\Gamma \subset \mathcal{U}_2$ . Além disso, se  $V := B(\Gamma) \subset \Sigma$ , então  $B|_\Gamma : \Gamma \rightarrow V$  é um biholomorfismo.

(B)  $\Gamma$  é  $Iso(\mathcal{J}_2)$ -invariante, isto é,  $\varphi^*(\Gamma) = \Gamma$  para todo  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$ . Onde

$$Iso(\mathcal{J}_2) = \{T \in Aut(\mathbb{P}^2) \mid T^*(\mathcal{J}_2) = \mathcal{J}_2\}.$$

(C)  $V$  é invariante pela ação

$$(\sigma, b) \in S_7 \times \mathbb{C}^7 \mapsto \hat{\sigma}(b) \in \mathbb{C}^7,$$

isto é,  $\hat{\sigma}(V) = V$ , para todo  $\sigma \in S_7$ .

(D) Se  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Gamma$  estão na mesma órbita, então existe  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$  tal que  $\mathcal{F}_2 = \varphi^*(\mathcal{F}_1)$ .

A demonstração é feita na última parte do capítulo três. Finalmente como consequência do resultado anterior temos o seguinte corolário:

**Corolário A** Sejam  $\Gamma$  e  $V = B(\Gamma)$  como no Lema 3.1. Para  $b \in V$ , defina

$$N(b) = \text{O número de órbitas contidas em } \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}[b] \text{ cortando } \Gamma.$$

Então:

(A) Se  $b \in V$ , então  $N(b)$  divide 240.

(B) Se  $b = (b_1, \dots, b_7) \in V$ , tal que  $b_i \neq b_j$ , para todo  $i \neq j$ , então  $N(b) = 240$ .

Este corolário ajuda a terminar a demonstração do Teorema 2.3.

A estrutura do trabalho é como segue:



No Capítulo 1, mencionamos sem dar muitos detalhes a definição de folheação holomorfa de dimensão 1, assim como as definições do índice de Baum-Bott, algumas propriedades e provamos o teorema de Baum-Bott.

No Capítulo 2, definimos o mapa de Baum-Bott no caso de folheações em  $\mathbb{P}^2$ , enunciamos o teorema principal deste trabalho e obtemos o posto da folheação de Jouanolou de grau  $d$ . Depois parametrizamos o espaço de folheações, encontramos uma maneira simples de calcular os índices de Baum-Bott, e demonstramos que  $Orb(\mathcal{J}_2) = F(\mathcal{J}_2)$ .

No Capítulo 3, demonstramos o teorema principal, no qual usamos os resultados obtidos no Capítulo 2. Lembramos também a definição de folheação holomorfa usando noções de geometria algébrica.

# Capítulo 1

## Noções de Folheações Holomorfas

Neste capítulo apresentamos o conceito de folheação holomorfa de dimensão um sobre uma superfície complexa  $X$ . Para mais detalhes ver [1].

### 1.1 Folheações Holomorfas

Uma **folheação**  $\mathcal{F}$  em uma superfície complexa  $X$  é definida por uma cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  e uma coleção de 1-formas  $\omega_i \in \Omega_X^1(U_i)$  com singularidades isoladas tal que se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então existe  $f_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$  tal que

$$\omega_i = f_{ij}\omega_j.$$

A coleção  $\{f_{ij}\}_{i,j \in I}$  forma um cociclo multiplicativo e define um fibrado em retas sobre  $X$ , chamado de **fibrado normal de  $\mathcal{F}$** , denotado  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ .

O **conjunto singular**,  $Sing(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  é o subconjunto discreto de  $X$  definido localmente por

$$Sing(\mathcal{F}) \cap U_i := \{\text{zeros de } \omega_i, \text{ para todo } i \in I\}.$$

### 1.2 Índice de Interseção de Fibrados em Linha

Apresentaremos sem muita formalidade a definição do índice de interseção de fibrados em linhas, para as definições de fibrados vetoriais holomorfos, fibrados em linhas, divisores ver [3] ou [15]. Dado dois fibrados em linhas  $L_1, L_2$  de uma superfície complexa  $X$  sejam

$Y_1, Y_2$  seus respectivos divisores. Também sejam  $[\eta_{Y_1}]$  e  $[\eta_{Y_2}]$  suas respectivas formas duais de Poincaré, então definimos o **índice de interseção de  $L_1$  e  $L_2$** , denotado por  $L_1 \cdot L_2$  como

$$L_1 \cdot L_2 := \int_X \eta_{Y_1} \wedge \eta_{Y_2}.$$

Denotamos  $L \cdot L$  por  $L^2$ .

### 1.3 Pencil e Divisor de Tangência entre duas Folheações

Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  duas folheações distintas em  $X$  com singularidades isoladas, tais que  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ . Então, existe uma cobertura por abertos  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  e coleções  $\{\omega_i\}_{i \in I}, \{\eta_i\}_{i \in I}, \{g_{ij}\}_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$ , tais que:

1.  $\omega_i$  e  $\eta_i$  são 1-formas holomorfas em  $U_i$ , que definem  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  em  $U_i$ , respectivamente.
2. Se  $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então em  $U_{ij}$

$$\omega_i = g_{ij}\omega_j \text{ e } \eta_i = g_{ij}\eta_j.$$

Pela condição 2, dado  $t \in \mathbb{P}^1$ , as coleções  $\{U_i, \omega_i + t\eta_i, g_{ij}\}_{i \in I}$  definem uma folheação  $\mathcal{F}_t$ . Assim, temos uma família linear de folheações  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$  tal que  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ , para todo  $t \in \mathbb{P}^1$ . Observe que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$  e  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\infty$ .

**Definição 1.1.** Dadas  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  duas folheações distintas em  $X$  com singularidades isoladas, tais que  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ , diremos que  $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$  é o **pencil** gerado por  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ .

**Observação 1.2.** Se  $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$  é o pencil gerado por  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , então para todo  $t, s \in \mathbb{P}^1$ , com  $t \neq s$ ,

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t).$$

**Definição 1.3.** Dadas duas folheações  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , o **conjunto(divisor) de tangência entre  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$** , denotado por  $Tang(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  é o conjunto analítico

$$Tang(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cap U_i = \{p \in X : \omega_i \wedge \eta_i(p) = 0\}.$$

## 1.4 Índice de Baum-Bott

Seja  $X$  uma superfície complexa, com coordenadas  $(z, w)$ ,  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $X$  com conjunto singular  $Sing(\mathcal{F})$  e fibrado normal  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ .

Seja  $p \in X$ , logo temos dois casos:

*i.)*  $p \in X \setminus Sing(\mathcal{F})$ , logo existe uma carta local onde  $\mathcal{F}$  é localmente dada pelo campo vetorial  $\partial_z$ , ou pela sua forma dual  $\omega = dw$ , que é uma forma fechada. Por outra parte, se  $f \in \mathcal{O}^*(X)$ , então as 1-formas  $\omega_1 = dw$  e  $\omega_2 = f(z, w)dw$  definem localmente a  $\mathcal{F}$ , e podemos considerar  $\omega = f(z, w)dw$  que já não é uma forma fechada, porém

$$d\omega = df \wedge dw = \frac{df}{f} \wedge f dw = \frac{df}{f} \wedge \omega = \beta \wedge \omega,$$

com  $\beta = \frac{df}{f}$  uma 1-forma holomorfa.

*ii.)*  $p \in Sing(\mathcal{F})$ , seja  $U_p$  uma vizinhança contendo  $p$  onde  $\mathcal{F}$  é definida por  $\omega$ , como  $p$  é isolada, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $p$  é a única singularidade de  $\mathcal{F}$  em  $V_p := B_\varepsilon(p) \subset \overline{V_p} \subset U_p$ , isto é  $V_p \subset\subset U_p$ . Neste caso, não necessariamente temos  $d\omega(p) = 0$ . Por exemplo, se  $p = (0, 0)$  e

$$X(z, w) = Az \frac{\partial}{\partial z} + Bw \frac{\partial}{\partial w}, \quad A, B \in \mathbb{C} \text{ tais que } A + B \neq 0$$

é um campo que define  $\mathcal{F}$ , sua forma dual é  $\omega = Azdw - Bwdz$  e

$$d\omega = (A + B)dz \wedge dw \neq 0.$$

Se existe uma 1-forma suave  $\beta$  em  $U_p$  tal que  $d\omega = \beta \wedge \omega$ , teríamos que

$$0 \neq d\omega(p) = (\beta \wedge \omega)(p) = 0.$$

Portanto, não podemos fatorar  $d\omega = \beta \wedge \omega$ , com  $\beta$  holomorfa.

Por outro lado, é possível achar uma  $(1, 0)$ -forma  $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega^{(1,0)}(U_p))$ , tal que  $d\omega = \beta \wedge \omega$  fora de  $V_p$ . Mais precisamente, se  $p = (0, 0)$  e  $\omega = A(z, w)dw - B(z, w)dz$ ,

onde  $A$  e  $B$  são holomorfas tais que  $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ , sabemos que existe uma função  $\mathcal{C}^\infty(X)$   $\psi_p : X \rightarrow \mathbb{C}$  com  $Supp(\psi_p) \subset U_p$ ,  $0 \leq \psi_p \leq 1$  em  $X$  e  $\psi|_{V_p}=1$ . Assim, defino  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in V_p, \\ 1 & \text{se } x \notin U_p, \\ \psi_p(x) & \text{se } x \in U_p \setminus V_p. \end{cases}$$

Agora, definimos a  $(1, 0)$ -forma suave em  $U_p$

$$\beta := F(z, w) \frac{A_z(z, w) + B_w(z, w)}{\|A(z, w)\|^2 + \|B(z, w)\|^2} (\overline{A}(z, w)dz + \overline{B}(z, w)dw).$$

Fazendo os cálculos ve-se que  $d\omega = \beta \wedge \omega$ .

Em resumo, para qualquer  $p \in X$  existem vizinhanças  $V_p, U_p$  com  $\overline{V_p} \subset U_p$ , uma 1-forma  $\omega_p \in \Omega^1(U_p)$  definida em  $U_p$  e uma  $(1, 0)$ -forma,  $\beta_p \in \mathcal{C}^\infty(U_p)$  tal que em  $U_p \setminus V_p$

$$d\omega_p = \beta_p \wedge \omega_p.$$

**Definição 1.4** (Índice de Baum-Bott). Seja  $X$  uma superfície complexa,  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $X$ , se  $p \in Sing(\mathcal{F})$ , o **índice de Baum-Bott de  $\mathcal{F}$  em  $p$** , denotado  $BB(\mathcal{F}, p)$  é definido por

$$BB(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta_p \wedge d\beta_p.$$

Onde  $\mathbb{S}_\varepsilon^3(p) = \partial B_\varepsilon(p) = \partial V_p$  é a 3-esfera e  $\beta_p$  é a  $(1, 0)$ -forma achada acima tal que  $d\omega_p = \beta_p \wedge \omega_p$  em  $U_p \setminus V_p$ .

Vejamos a boa definição de  $BB(\mathcal{F}, p)$ . Para isso vamos ver que independe da escolha de  $\beta_p, \omega_p$  e  $\varepsilon$ . Por comodidade vamos escrever  $\beta = \beta_p, \omega = \omega_p, U = U_p$  e  $V = V_p$ . Vamos precisar do seguinte:

**Lema 1.5** (Lema de Divisão). *Seja  $\alpha$  uma  $p$ -forma  $\mathcal{C}^\infty$  em  $X \setminus Sing(\mathcal{F})$  tal que  $\alpha \wedge \omega = 0$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Então existe uma  $(p - 1)$ -forma  $\mathcal{C}^\infty$  em  $U \setminus Sing(\mathcal{F})$  tal que*

$$\alpha = \beta \wedge \omega.$$

1. Independência de  $\beta$ .

Seja  $\tilde{\beta}$  outra (1,0)-forma com as mesmas propriedades de  $\beta$ , assim

$$d\omega = \beta \wedge \omega = \tilde{\beta} \wedge \omega \quad \text{em } U \setminus V.$$

Logo  $(\beta - \tilde{\beta}) \wedge \omega = 0$  e pelo Lema de Divisão 1.5 existe uma 0-forma, isto é, uma função  $g \in \mathcal{C}^\infty(U \setminus V)$  tal que

$$\beta - \tilde{\beta} = g\omega \implies d(\beta - \tilde{\beta}) = dg \wedge \omega + g d\omega,$$

assim

$$\begin{aligned} (\beta - \tilde{\beta}) \wedge d(\beta - \tilde{\beta}) &= g\omega \wedge (dg \wedge \omega + g d\omega) \\ &= g\omega \wedge dg \wedge \omega + g^2 \omega \wedge d\omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado têm-se que

$$\begin{aligned} \beta \wedge d\beta - \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} &= \beta \wedge d\beta - (\beta - g\omega) \wedge (d\beta - dg \wedge \omega - g d\omega) \\ &= \beta \wedge dg \wedge \omega + g\omega \wedge d\beta \\ &= \beta \wedge dg \wedge \omega - gd\beta \wedge \omega \\ &= (\beta \wedge dg - gd\beta) \wedge \omega. \end{aligned}$$

Por outra parte

$$\begin{aligned} d(g\beta \wedge \omega) &= d(g\beta) \wedge \omega + g\beta \wedge d\omega \\ &= -(\beta \wedge dg - gd\beta) \wedge \omega \\ &= -(\beta \wedge d\beta - \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}). \end{aligned}$$

E assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta - \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} &= \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} -d(g\beta \wedge \omega) \\ &= - \int_{\partial \mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} g\beta \wedge \omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Onde a última igualdade decorre do fato de que  $\partial \mathbb{S}_\varepsilon^3(p) = \emptyset$ . Portanto

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta = \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}.$$

O que demonstra que  $BB(\mathcal{F}, p)$  não depende de  $\beta$ .

2. Independência de  $\omega$ .

Seja  $\tilde{\omega} = h\omega$ ,  $h \in \mathcal{O}^*(U)$  outra forma definindo  $\mathcal{F}$  em  $U$ . Como  $d\omega = \beta \wedge \omega$  em  $U \setminus V$ , temos que em esse conjunto

$$\begin{aligned}
 d\tilde{\omega} &= dh \wedge \omega + h d\omega = dh \wedge \frac{\tilde{\omega}}{h} + h(\beta \wedge \omega) \\
 &= \frac{dh}{h} \wedge \tilde{\omega} + \beta \wedge h\omega \\
 &= \left( \frac{dh}{h} + \beta \right) \wedge \tilde{\omega} \\
 &= (d(\log h) + \beta) \wedge \tilde{\omega}.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

assim, defino  $\tilde{\beta} := d(\log h) + \beta$ , logo temos  $d\tilde{\beta} = d\beta$  e a equação (1.1) fica

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\beta} \wedge \tilde{\omega} \quad \text{em } U \setminus V.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} &= d\tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} = (d(\log h) + \beta) \wedge d\beta \\
 &= d(\log h) \wedge d\beta + \beta \wedge d\beta.
 \end{aligned}$$

O que implica

$$\tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} - \beta \wedge d\beta = d(\log h) \wedge d\beta. \tag{1.2}$$

Mas,

$$d[d(\log h) \wedge \beta] = d(\log h) \wedge d\beta,$$

e logo em (1.2) obtemos que

$$\tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} - \beta \wedge d\beta = d[d(\log h) \wedge \beta].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta - \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} &= \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} d[d(\log h) \wedge \beta] \\
 &= \int_{\partial \mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} d(\log h) \wedge \beta \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta = \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}.$$

O que demonstra que  $BB(\mathcal{F}, p)$  não depende de  $\omega$ .

### 3. Independência de $\varepsilon$ .

Sejam  $\varepsilon' < \varepsilon$ , logo pelo teorema de Stokes

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta = \int_{B_\varepsilon[p]} d(\beta \wedge d\beta). \quad (1.3)$$

e

$$\int_{\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3(p)} \beta \wedge d\beta = \int_{B_{\varepsilon'}[p]} d(\beta \wedge d\beta). \quad (1.4)$$

de (1.3)-(1.4) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta - \int_{\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3(p)} \beta \wedge d\beta &= \int_{B_\varepsilon(p)} d(\beta \wedge d\beta) - \int_{B_{\varepsilon'}[p]} d(\beta \wedge d\beta) \\ &= \int_{B_\varepsilon[p] \setminus B_{\varepsilon'}[p]} d(\beta \wedge d\beta). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Afirmamos que  $\beta \wedge d\beta$  é fechada em  $B_\varepsilon[p] \setminus B_{\varepsilon'}[p]$ .

Sabemos que  $d\omega = \beta \wedge \omega$  em  $X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , logo

$$\begin{aligned} 0 &= d(d\omega) = d(\beta \wedge \omega) = d\beta \wedge \omega - \beta \wedge d\omega \\ &= d\beta \wedge \omega - \beta \wedge \beta \wedge \omega \\ &= d\beta \wedge \omega. \end{aligned}$$

Assim,  $d\beta \wedge \omega = 0$  e pelo Lema de Divisão existe uma função  $\alpha$  suave tal que  $d\beta = \alpha \wedge \omega$ , e assim

$$d(\beta \wedge d\beta) = d\beta \wedge d\beta = \alpha \wedge \omega \wedge \alpha \wedge \omega = 0 \quad \text{em } X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}).$$

E como  $B_\varepsilon[p] \setminus B_{\varepsilon'}[p] \subset X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  a afirmação está demonstrada.

Finalmente, substituindo na equação (1.5) obtemos

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta - \int_{\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3(p)} \beta \wedge d\beta = \int_{B_\varepsilon[p] \setminus B_{\varepsilon'}[p]} d(\beta \wedge d\beta) = \int_{B_\varepsilon[p] \setminus B_{\varepsilon'}[p]} 0 = 0.$$

De onde temos

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon^3(p)} \beta \wedge d\beta = \int_{\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3(p)} \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}.$$

O que demonstra que  $BB(\mathcal{F}, p)$  não depende de  $\varepsilon$ .



Dos itens anteriores temos que  $BB(\mathcal{F}, p)$  está bem definido.

**Exemplo 1.6.** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação definida por um campo linear  $A$  invertível em  $p$ , com autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  então*

$$BB(\mathcal{F}, p) = \frac{(\text{Tr}A)^2}{\text{Det}A} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.$$

*Cuja prova está no Exemplo 3.3.5. de [13].*

Os números  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  são chamados de **valores característicos** da singularidade  $p$ . Singularidades com parte linear invertível são chamadas de **singularidades não degeneradas**.

Vimos que o índice não depende do radio  $\varepsilon$  considerado, então o índice é invariante por mudança de coordenadas, isto decorre usando o teorema de mudança de variável para integrais e que se  $\beta$  é tal que  $d\omega = \beta \wedge \omega$ , então  $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*\beta \wedge \varphi^*\omega$ , onde  $\varphi$  é um biholomorfismo, mais precisamente:

**Teorema 1.7.** *O índice de Baum-Bott é invariante por biholomorfismos. Mais precisamente, se  $\varphi : (V, q) \rightarrow (U, p)$  é um biholomorfismo, então:*

$$BB(\varphi^*(\mathcal{F}), q) = BB(\mathcal{F}, p).$$

O Teorema 1.7 garante que o conceito de índice pode ser definido para singularidades isoladas de folheações em variedades de dimensão 2 através das cartas locais.

## 1.5 Teorema de Baum-Bott

**Teorema 1.8.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação em uma superfície compacta  $X$ , então*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p).$$

*Demonstração.* Seja  $[\eta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}]$  a form dual de Poincaré  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ , logo temos que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^2 = \int_X \eta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}} \wedge \eta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}.$$

Portanto, devemos achar  $\eta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}$ .

Do feito anteriormente achamos uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ , 1-formas holomorfas  $\omega_i \in \Omega_X(U_i)$  com singularidades isoladas gerando  $\mathcal{F}$  com  $\omega_i = g_{ij}\omega_j$  em  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , e  $(1,0)$ -formas suáveis  $\beta_i \in A^{(1,0)}(U_i)$  tais que para todo  $i \in I$  temos

$$d\omega_i = \beta_i \wedge \omega_i \quad \text{em } U_i \setminus V_i,$$

onde

$$V_i \subset\subset U_i, \quad U_i \cap V_j = \emptyset, \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Em particular para  $U_i \cap U_j \neq \emptyset, i \neq j$

$$d\omega_i = \beta_i \wedge \omega_i.$$

Lembrando que em  $U_i \cap U_j$  também temos  $\omega_i = g_{ij}\omega_j$  obtemos

$$\begin{aligned} \beta_i \wedge \omega_i &= d\omega_i = dg_{ij} \wedge \omega_j + g_{ij}d\omega_j = dg_{ij} \wedge \omega_j + g_{ij}\beta_j \wedge \omega_j \wedge \\ &= (dg_{ij} + g_{ij}\beta_j) \wedge \omega_j = \left( \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j \right) \wedge g_{ij}\omega_j \\ &= \left( \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j \right) \wedge \omega_i, \end{aligned}$$

de onde

$$\left( \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j - \beta_i \right) \wedge \omega_i = 0.$$

Seja  $h_{ij} = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j - \beta_i$ , logo a igualdade acima fica

$$h_{ij} \wedge \omega_i = 0$$

pelo Lema de Divisão existe  $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j)$  tal que

$$h_{ij} = a_{ij}\omega_i$$

de onde vemos que  $h_{ij}$  se anula nas folhas de  $\mathcal{F}$  e assim podem ser vistos como um cociclo de seções suáveis de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ , assim  $[h_{ij}] \in H^1(X, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*)) = 0$ , logo existem  $\gamma_i \in A^{(1,0)}(U_j)$  tais que

$$h_{ij} = \gamma_i - \gamma_j, \quad \text{em } U_i \cap U_j, \quad (1.6)$$

com  $\gamma_i \wedge \omega_i = 0$ , assim,  $\gamma_i = a_i \omega_i$  em  $U_i$  e em  $U_i \setminus V_i$

$$d\omega_i = (\beta_i + \gamma_i) \wedge \omega_i. \quad (1.7)$$

Por outro lado temos da equação (1.6) que em  $U_i \cap U_j$

$$\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j - \beta_i = h_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$$

de onde

$$\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} = (\beta_i + \gamma_i) - (\beta_j + \gamma_j), \quad \text{em } U_i \cap U_j,$$

o que implica que

$$d(\beta_i + \gamma_i) = d(\beta_j + \gamma_j), \quad \text{em } U_i \cap U_j,$$

mostrando que  $d(\beta_i + \gamma_i)$  não depende do aberto  $U_i$ . Assim, definimos

$$\theta_i := \beta_i + \gamma_i \text{ em } U_i$$

e  $\Theta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}$  a 2-forma definida localmente como:

$$\Theta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}|_{U_j} = \frac{1}{2\pi i} d\theta_j = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_j + \gamma_j).$$

Logo  $\eta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}} = \Theta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}$ , assim

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^2 = \int_X \Theta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}} \wedge \Theta_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}}}.$$

Mais precisamente

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_X d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j). \quad (1.8)$$

Por outra parte, lembrando que  $\gamma_i \wedge \omega_i = 0$ ,  $\gamma_i = a_i \omega_i$  e  $d\omega_j = \beta_j \wedge \omega_j$  em  $U_j \setminus V_j$  prova-se que

$$d(\gamma_j + \beta_j) \wedge \omega_j = 0 \text{ em } U_j \setminus V_j, \quad (1.9)$$

logo pelo Lema de Divisão existe  $\Gamma_j$  uma 1-forma tal que

$$d(\gamma_j + \beta_j) = \Gamma_j \wedge \omega_j \text{ em } U_j \setminus V_j. \quad (1.10)$$

Seja  $\tilde{\beta}_j = \gamma_j + \beta_j$ , pela equação (1.7) temos que

$$d\omega_j = \tilde{\beta}_j \wedge \omega_j \quad (1.11)$$

em  $U_j \setminus V_j$ , e também que

$$d(\tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j) = d\tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j. \quad (1.12)$$

Logo da equação (1.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_X d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[ \int_{X \setminus \cup_j V_j} d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j) + \int_{\cup_j V_j} d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[ \int_{X \setminus \cup_j V_j} \Gamma_j \wedge \omega_j \wedge \Gamma_j \wedge \omega_j + \int_{\cup_j V_j} d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\cup_j V_j} d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\cup_j V_j} d\tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\cup_j V_j} d(\tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_j \int_{V_j} d(\tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_j \int_{\partial V_j} \tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j \text{ por Stokes} \\ &= \sum_j \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial V_j} \tilde{\beta}_j \wedge d\tilde{\beta}_j = \sum_j BB(\mathcal{F}, p_j) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p). \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração.

□

# Capítulo 2

## Folheações em $\mathbb{P}^2$

Lembremos que uma folheação holomorfa,  $\mathcal{F}$ , no plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  pode ser definida em uma carta afim  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  por um campo vetorial holomorfo

$$X(x, y) = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$$

ou pela sua 1-forma dual

$$\omega = (x, y) = P(x, y)dy - Q(x, y)dx.$$

Onde  $P$  e  $Q$  são polinômios. O grau de  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_X$  é definido como o número de tangências da folheação com uma reta genérica  $l \subset \mathbb{P}^2$ . Mostra-se que se o campo vetorial  $X$  definido como acima induz uma folheação de grau  $d$ , então

$$P(x, y) = p(x, y) + xg(x, y), \quad Q(x, y) = q(x, y) + yg(x, y),$$

onde  $p, q, g$  são polinômios em  $\mathbb{C}[x, y]$ ,  $\max\{\deg(p), \deg(q)\} \leq d = \deg(g)$  e  $g$  é homogêneo. Ou seja,  $X$  é da forma

$$X(x, y) = p(x, y)\partial_x + q(x, y)\partial_y + g(x, y)R(x, y), \quad (2.1)$$

onde  $R(x, y) = x\partial_x + y\partial_y$  é o campo radial.

Denotemos por  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  ao conjunto de folheações de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^2$ ,  $d \geq 2$  e por  $\mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  ao conjunto de folheações em  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  com somente singularidades não degeneradas. Vamos definir o divisor de tangência de uma folheação com respeito a um pencil de retas. Seja  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$  e

$$X(x, y) = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$$

o campo que define a  $\mathcal{F}$ .

Vamos associar um divisor de tangências a  $\mathcal{F}$  como segue:

- I.  $P$  e  $Q$  não possuem fatores em comum, ou seja, o conjunto singular é de codimensão pelo menos 2. Suponhamos que na carta escolhida  $(x, y)$  a reta no infinito seja não invariante e seja  $l \subset \mathbb{P}^2$  uma reta genérica como acima, denotamos por  $\mathbf{Tang}(l, \mathcal{F}_X)$  ao conjunto de **pontos de tangências de  $l$  com  $\mathcal{F}$** . Se  $g \neq 0$ , o conjunto de direções dado por  $\{g(x, y) = 0\}$ , na reta do infinito  $l_\infty$  de  $\mathbb{C}^2$ , define o conjunto de tangências de  $\mathcal{F}_X$  com  $l_\infty$ , denotado por  $Tang(l_\infty, \mathcal{F}_X)$ .

**Definição 2.1.** Considere um pencil de retas  $\mathcal{L} = \{l_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$  com vértice na origem, o **divisor de tangências de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $\mathcal{L}$**  é definido por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} Tang(l_t, \mathcal{F}).$$

Prova-se em [14] que  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$  é ou todo  $\mathbb{P}^2$  ou uma curva (possivelmente singular) de grau  $d + 1$ .

**Exemplo 2.2.** Consideremos o exemplo da folheação de Jouanolou em  $\mathbb{P}^2$  de grau  $d$  definida pelo campo

$$X(x, y) = (y^d - x^{d+1})\partial_x + (1 - yx^d)\partial_y$$

e o pencil  $\mathcal{L} = \{(at, bt) : t \in \mathbb{C}, [a : b] \in \mathbb{P}^1\}$ , então  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$  é dado em coordenadas homogêneas  $[z_0 : z_1 : z_2]$  em  $\mathbb{P}^2$  pela equação:

$$z_1^{d+1} - z_0 z_2^d = 0.$$

Se agora consideramos o pencil de retas verticais  $x = c$  e retas horizontais  $y = c$ , ambas com base na reta do infinito, obtemos divisores cujas equações são as homogenizações das coordenadas do campo  $X$ , mais precisamente

$$z_1^d z_2 - z_0^{d+1} = 0 \quad e \quad z_2^{d+1} - z_0^d z_1 = 0.$$

**Observação 2.3.** *Se  $l$  é uma reta que pertence a  $\mathcal{L}$ , então*

$$l \cap \mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{0\} \cup \text{Tang}(l, \mathcal{F}).$$

*Por exemplo*

$$l_{\infty} \cap \mathcal{D}_{\{x=c\}} = \{x=0\} \cup \{g(x, y) = 0\}.$$

II.  $P$  e  $Q$  possuem fator comum  $h$ , isto é  $P = hp_1$ ,  $Q = hq_1$ , onde  $p_1$  e  $q_1$  não possuem fator comum. Assim

$$X = P\partial_x + Q\partial_y = h(p_1\partial_x + q_1\partial_y) = hY.$$

Onde  $Y = p_1\partial_x + q_1\partial_y$ . Seja  $\mathcal{F}_Y$  a folheação definida por  $Y$ , logo

$$\text{Tang}(l, \mathcal{F}_X) := \{h = 0\} \cup \text{Tang}(l, \mathcal{F}_Y),$$

e as outras definições decorrem fazendo as mudanças necessárias.

**Observação 2.4.** *No presente trabalho, não vamos assumir que  $P$  e  $Q$  não possuem fator comum, como é usual, na teoria de folheações complexas. Com esta convenção, segue da equação (2.1) que  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  pode ser considerado como um espaço projetivo complexo de dimensão*

$$M(d) := (d + 3)(d + 1) - 1.$$

*E finalmente, observemos que  $\mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  é um subconjunto aberto de Zariski de  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  (ver [13], Teorema 2.4.1.).*

**Observação 2.5.** *Se  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$  tem somente singularidades isoladas, então*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \text{mult}(\mathcal{F}, p) = d^2 + d + 1 =: N(d),$$

*onde  $\text{mult}(\mathcal{F}, p)$  denota a multiplicidade da singularidade  $p$ . Em particular, quando  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$ , temos que  $\text{mult}(\mathcal{F}, p) = 1$  e portanto  $\mathcal{F}$  tem exatamente  $N(d)$  singularidades (ver [13], Teorema 2.4.11.).*

## 2.1 O Mapa de Baum-Bott

Se  $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$ , seja  $Sing(\mathcal{F}_0) = \{p_1, \dots, p_{N(d)}\}$ , então no Corolário 2.3.4. em [13] prova-se que existe uma vizinhança de  $\mathcal{F}_0$ ,  $V$ , em  $\mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  e mapas holomorfos

$$P_j : V \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad 1 \leq j \leq N(d),$$

tais que

(i)  $P_j(\mathcal{F}_0) = p_j$ ,  $1 \leq j \leq N(d)$ .

(ii) Para toda  $\mathcal{F} \in V$ , temos que

$$Sing(\mathcal{F}) = \{P_1(\mathcal{F}), \dots, P_{N(d)}(\mathcal{F})\}.$$

Neste caso, podemos definir para cada  $j \in \{1, \dots, N(d)\}$  mapas holomorfos

$$\begin{aligned} B_{dj} : V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{F} &\longmapsto BB(\mathcal{F}, P_j(\mathcal{F})) \end{aligned} ,$$

com os quais definimos

$$\begin{aligned} BB_d : V &\longrightarrow \mathbb{C}^{N(d)} \\ \mathcal{F} &\longmapsto (BB(\mathcal{F}, P_1(\mathcal{F})), \dots, BB(\mathcal{F}, P_{N(d)}(\mathcal{F}))). \end{aligned}$$

O mapa  $BB_d$ , será chamado o **mapa local de Baum-Bott**. Mais precisamente, as coordenadas de  $\mathbb{C}^{N(d)}$  são os polinômios simétricos elementares

$$s_1 = \sum_i b_i, \quad s_2 = \sum_{i < j} b_i b_j, \dots, s_{N(d)} = \prod_i b_i.$$

Pelo Teorema 2.6, sua imagem está contida no hiperplano  $\mathcal{H}_{BB}$  definido pela relação de Baum-Bott  $s_1 = (d + 2)^2$ .

Podemos estender o domínio de  $BB_d$  a  $\mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  definindo em  $\mathbb{C}^{N(d)}$  a relação:

$$(z_1, \dots, z_{N(d)}) \sim (w_1, \dots, w_{N(d)}) \iff \exists \sigma \in S_{N(d)} : w_j = z_{\sigma(j)}, j \in \{1, \dots, N(d)\},$$

onde  $S_{N(d)}$  é o grupo simétrico de  $N(d)$  elementos. Têm-se que essa relação é de equivalência e denotaremos por

$$\frac{\mathbb{C}^{N(d)}}{S_{N(d)}}$$



ao quociente de  $\mathbb{C}^{N(d)}$  pela relação e a classe de equivalência de  $(z_1, \dots, z_{N(d)}) \in \mathbb{C}^{N(d)}$  é

$$[z_1, \dots, z_{N(d)}] := \{(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(N(d))}) : \sigma \in S_{N(d)}\}.$$

Logo, se  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  com  $Sing(\mathcal{F}) = \{p_1, \dots, p_{N(d)}\}$ , definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{B}_d : \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2) &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}^{N(d)}}{S_{N(d)}}, \\ \mathcal{G} &\longmapsto [BB(\mathcal{G}, p_1), \dots, BB(\mathcal{G}, p_{N(d)})] \end{aligned}$$

onde  $Sing(\mathcal{G}) = \{p_1, \dots, p_{N(d)}\}$ . Dado  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  a sua fibra pelo mapa  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d$ ,  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d^{-1}(\mathcal{B}\mathcal{B}_d(\mathcal{F}))$ , será denotada por  $F_d(\mathcal{F})$ . Podemos estender  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d$  a um mapa racional

$$\mathcal{B}\mathcal{B}_d : \mathbb{F}ol(d, 2) \dashrightarrow \frac{(\mathbb{P}^1)^{N(d)}}{S_{N(d)}} \cong \mathbb{P}^{N(d)}.$$

O qual será chamado de **mapa global de Baum-Bott** ou simplesmente, mapa de Baum-Bott. Lembrando que para o caso de  $\mathbb{P}^2$  temos o teorema dos índices de Baum-Bott.

**Teorema 2.6.** *Se  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$  só tem singularidades isoladas, então*

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = (d+2)^2.$$

Em particular, o máximo posto de  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d$  em  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  sempre é menor que  $N(d)$  e o mapa de Baum-Bott nunca é dominante pois sua imagem tem codimensão maior ou igual a 1.

**Teorema 2.7.** *Se  $d \geq 2$  então o posto genérico (posto máximo) de  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d$  é  $N(d)-1 = d^2+d$ . Em particular, se  $d \geq 2$  então a dimensão da fibra genérica de  $\mathcal{B}\mathcal{B}_d$  é  $3d+2$ .*

*Demonstração.* Para  $d = 2$ , ver [4] e para  $d \geq 3$  ver [10]. □

**Definição 2.8.** Se  $d \geq 2$ , a fibra  $F_d(\mathcal{F})$  é dita **excepcional** se  $dim(F_d(\mathcal{F})) > 3d+2$ . Caso contrário, dizemos que a fibra é **não excepcional**.

Agora, denotemos por  $Aut(\mathbb{P}^2) \cong PSL(3, \mathbb{C})$  ao grupo de automorfismos holomorfos de  $\mathbb{P}^2$  e consideremos a ação natural  $\Psi$  sobre  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  dada por

$$(\varphi, \mathcal{F}) \in Aut(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{F}ol(d, 2) \xrightarrow{\Psi} \varphi^*(\mathcal{F}) \in \mathbb{F}ol(d, 2).$$

Se  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$ , denotemos por  $Orb(\mathcal{F})$  a órbita de  $\mathcal{F}$  por  $\Psi$ , isto é

$$Orb(\mathcal{F}) = \{\varphi^*(\mathcal{F}), \varphi \in Aut(\mathbb{P}^2)\}.$$

Pelo Teorema 1.7 sabemos que os índices de Baum-Bott são invariantes por biholomorfismos locais, e portanto temos que para toda  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d, 2)$ ,

$$Orb(\mathcal{F}) \subset F_d(\mathcal{F}).$$

Em particular, a fibra  $F_d(\mathcal{F})$  é folheada pelas órbitas de  $\Psi$ . Quando  $d = 2$ , se  $F_2(\mathcal{F})$  é genérica, então  $dim(F_2(\mathcal{F})) = 8 = dim(Aut(\mathbb{P}^2))$  e neste caso a fibra genérica é uma união finita de órbitas de  $\Psi$ .

Temos também o **grupo de isotropía** de  $\mathcal{F}$ ,

$$Iso(\mathcal{F}) = \{T \in Aut(\mathbb{P}^2), T^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\}.$$

Dado  $A \subset \mathbb{F}ol(d, 2)$ , o **saturado** de  $A$  é

$$Sat(A) = \{T^*(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in A, T \in Aut(\mathbb{P}^2)\}.$$

## 2.2 Teorema Principal

Restringindo  $\mathcal{B}\mathcal{B}_2$  a  $\mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$ , temos o seguinte resultado respeito à fibra genérica do  $\mathcal{B}\mathcal{B}_2$ :

**Teorema 2.9** (Teorema Principal). *A fibra genérica de  $\mathcal{B}\mathcal{B}_2$  contém exatamente 240 órbitas de  $\Psi$ .*

Ou seja, temos que provar que existe um aberto  $\mathcal{M}$  da imagem(aberto de Zariski), tal que para todo  $b \in \mathcal{M}$ , a fibra possui 240 órbitas.

A idéia principal da prova é reduzir o cálculo dos índices de Baum-Bott das singularidades de uma folheação  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$  ao cálculo dos resíduos de uma 1-forma racional em  $\mathbb{P}^1$ , quando  $\mathcal{F}$  satisfaz algumas condições genéricas em uma singularidade isolada fixa. No

Teorema 2.27 provamos que se  $b_0 \notin \{0, 4, 16\}$  então existe uma folheação  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$ , com singularidades  $\{p_1, \dots, p_7\}$  tais que

$$BB(\mathcal{F}, p_7) = b_0, \quad BB(\mathcal{F}, p_j) = \frac{16 - b_0}{6}, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Como consequência desse teorema teremos que a folheação de Jouanolou de grau 2,  $\mathcal{J}_2$ , satisfaz  $Orb(\mathcal{J}_2) = F_2(\mathcal{J}_2)$ .

## 2.3 O Posto na Folheação de Jouanolou de grau $d$

Mencionemos alguns fatos conhecidos sobre a folheação de Jouanolou de grau  $d \geq 2$ ,  $\mathcal{J}_d$ . Ela é definida nas coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  pelo campo vetorial

$$X_d(x, y) = (1 - xy^d)\partial_x + (x^d - y^{d+1})\partial_y = \partial_x + x^d\partial_y - y^dR, \quad R = x\partial_x + y\partial_y.$$

Em [7] o autor mostra que  $\mathcal{J}_d$  não possui curvas algébricas invariantes, usando o caráter simétrico de  $\mathcal{J}_d$ :  $Iso(\mathcal{J}_d)$  é o produto semi-direto de um grupo cíclico de ordem 3 e um grupo cíclico de ordem  $N(d)$ . Se  $\zeta$  é uma  $N(d)$ -raíz primitiva da unidade, então os geradores de  $Iso(\mathcal{J}_d)$ , nas coordenadas  $(x, y)$  são:

$$A : (x, y) \rightarrow (\zeta^{-d}x, \zeta y), \quad B : (x, y) \rightarrow (y^{-1}, xy^{-1}).$$

O conjunto singular de  $\mathcal{J}_d$  é igual a

$$Sing(\mathcal{J}_d) = \{p_j \in \mathbb{C}^2 | p_j = A^{j-1}(1, 1), 1 \leq j \leq d^2 + d + 1\},$$

ou seja, é a órbita do ponto  $p_1 = (1, 1)$  de  $A$ . Pela invariância do índice de Baum-Bott por biholomorfismos, temos que

$$BB(\mathcal{J}_d, p_j) = \frac{(d+2)^2}{N(d)}, \quad 1 \leq j \leq N(d).$$

Assim, têm-se

$$\mathcal{BB}_d(\mathcal{J}_d) = \left[ \frac{(d+2)^2}{N(d)}, \dots, \frac{(d+2)^2}{N(d)} \right]. \quad (2.2)$$

Observemos também que quando  $d \geq 3$ , então  $\dim(F_d(\mathcal{J}_d)) \geq 3d + 2 > 8 = \dim(\text{Orb}(\mathcal{J}_d))$ . Em particular, isto mostra que para todo  $d \geq 3$  existem folheações satisfazendo (2.2) que não estão na órbita de  $\mathcal{J}_d$ . Finalmente, a prova do Teorema 2.9 será feita usando  $\text{Orb}(\mathcal{J}_2) = F_2(\mathcal{J}_2)$  e analisando as folheações em uma vizinhança de  $\mathcal{J}_2$  com índices de Baum-Bott dois a dois distintos.

Nesta seção vamos provar o seguinte teorema:

**Teorema 2.10.** *Para qualquer  $d \geq 2$ , o posto do mapa de Baum-Bott na folheação de Jouanolou,  $\mathcal{J}_d$  é*

$$\frac{d^2 + 7d - 6}{2}.$$

Usaremos alguns resultados sobre  $\text{Iso}(\mathcal{J}_d)$  para determinar o posto de  $\mathcal{BB}_d$  em  $\mathcal{J}_d$ . Com este fim, em lugar de considerar  $\mathcal{BB}_d$  definido em  $\mathbb{F}ol(d, 2)$ , o consideraremos definido em  $\mathcal{X}(d, 2) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-1))$ , onde  $\mathbb{F}ol(d, 2) \cong \mathbb{P}(\mathcal{X}(d, 2))$ , (ver Observação 3.8). De esta maneira, o problema fica em achar o posto em  $X_d$ .

Seja

$$\mathcal{P}_d = \{x^i y^j \partial_x, x^k y^l \partial_y, x^m y^n R \mid 0 \leq i+j, k+l \leq d \text{ e } m+n = d\}.$$

Então  $\mathcal{X}(d, 2) = \langle \mathcal{P}_d \rangle_{\mathbb{C}}$ . Se  $X \in \mathcal{X}(d, 2)$ , ou seja,  $X$  é um campo vetorial polinomial em  $\mathbb{C}^2$ , e como  $A^* : \mathcal{X}(d, 2) \rightarrow \mathcal{X}(d, 2)$ , o pullback de  $A$ ,  $A^*(X) = DA^{-1}(X \circ A)$ , onde

$$A^*(X)(q) = DA_{A(q)}^{-1}(X(A(q))), \quad DA^{-1} = \begin{bmatrix} \zeta^d & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix}$$

temos que todos os elementos de  $\mathcal{P}_d$  são autovetores de  $A^*$ , por exemplo

$$\begin{aligned} A^*(x^i y^j \partial_x) &= \begin{bmatrix} \zeta^d & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\zeta^{-d} x)^i (\zeta y)^j \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \zeta^d \zeta^{-di} x^i \zeta^j y^j \partial_x \\ &= \zeta^{j-d(i-1)} x^i y^j \partial_x. \end{aligned}$$

Análogamente obtemos que  $A^*(x^k y^l \partial_y) = \zeta^{l-1-dk} x^k y^l \partial_y$ ,  $A^*(x^m y^n R) = \zeta^{n-dm} x^m y^n R$ .

Em particular obtemos

$$A^*(X_d) = \zeta^d X_d,$$

ou seja,  $A^*$  deixa invariante  $\mathcal{J}_d$ . Como  $\zeta$  é uma  $N(d)$ -raíz primitiva da unidade, temos que  $A^*$  tem  $N(d)$  autoespaços associados aos autovalores  $\zeta^j$ ,  $1 \leq j \leq N(d)$ . Denotemos por  $F_j$  ao autoespaço associado a  $\zeta^j$ , para cada  $1 \leq j \leq N(d)$ , então

$$\mathcal{X}(d, 2) = \bigoplus_{j=1}^{N(d)} F_j.$$

Seja  $U$  uma vizinhança de  $X_d$  em  $\mathcal{X}(d, 2)$ , e  $\gamma_j : U \rightarrow \mathbb{P}^2$ ,  $j = 1, \dots, N(d)$  mapas holomorfos tais que  $\gamma_j(X_d) = p_j$  e para cada  $X \in U$ ,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}(X)) = \{\gamma_1(X), \dots, \gamma_{N(d)}(X)\}.$$

Onde  $\mathcal{F}(X)$  é a folheação induzida pelo campo  $X$ . De esta maneira, calcular o posto do mapa de Baum-Bott é equivalente a calcular o posto do mapa  $B = (B_1, \dots, B_{N(d)}) : U \rightarrow \mathbb{C}^{N(d)}$ , definido como

$$B_j(X) = BB(X, \gamma_j(X)) = \frac{\text{tr}^2(DX(\gamma_j(X)))}{\det(DX(\gamma_j(X)))}.$$

Assim, temos  $\text{Posto}(\mathcal{BB}_d, \mathcal{J}_2) = \text{Posto}(B, \mathcal{X}_d)$ . Agora vamos achar o posto de  $B$  em  $X_d$  que é por definição o posto da derivada de  $B$  em  $X_d$ ,

$$T := DB(X_d) : \mathcal{X}(d, 2) \rightarrow \mathbb{C}^{N(d)}.$$

Por comodidade vamos denotar  $T_j := DB_j(X_d)$ , para  $1 \leq j \leq N(d)$ .

**Lema 2.11.** *Para qualquer  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$ ,*

$$T_j(A^*(Y)) = \zeta^d T_{j+1}(Y), \tag{2.3}$$

para  $1 \leq j \leq N(d)$ , e  $T_{N(d)} = T_0$ . Em particular:

(a)  $A^*(\text{Ker}(T)) = \text{Ker}(T)$ .

(b)  $F_j \cap \text{Ker}(T_1) = F_j \cap \text{Ker}(T)$ , para todo  $j = 1, \dots, N(d)$ .

(c) *Seja*

$$k = \#\{j | T_1|_{F_j} \neq 0\},$$

então  $\text{Posto}(T) = \text{Posto}_{\mathcal{J}_d} \mathcal{BB}_d = k$ .

*Demonstração.* Observemos primeiro, que para todo  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$ , as folheações induzidas por  $A^*(X_d + Y)$  e  $X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)$  são iguais, com efeito

$$\begin{aligned} A^*(X_d + Y) &= A^*(X_d) + A^*(Y) \\ &= \zeta^d X_d + A^*(Y) \\ &= \zeta^d (X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)). \end{aligned}$$

Assim,  $\mathcal{F}(A^*(X_d + Y)) = \mathcal{F}(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y))$ . Além disso, temos

$$p \in \text{Sing}(\mathcal{F}(A^*(X_d + Y))) \iff A(p) \in \text{Sing}(X_d + Y).$$

Seja  $P_j(Y) = A^{-1}(\gamma_j(X_d + Y))$ , logo

$$\begin{aligned} P_j(0) &= A^{-1}(\gamma_j(X_d)) = A^{-1}(p_j) \\ &= A^{-1}(A^{j-1}(1, 1)) \\ &= A^{(j-1)-1}(1, 1) \\ &= p_{j-1}, \end{aligned}$$

e também se  $P_j(Y) = q_j$ , então  $A(q_j) = \gamma_j(X_d + Y)$ , logo  $A(q_j) \in \text{Sing}(X_d + Y)$  e sabemos que

$$\begin{aligned} A(q_j) \in \text{Sing}(X_d + Y) &\iff q_j \in \text{Sing}(\mathcal{F}(A^*(X_d + Y))) \\ &= \text{Sing}(A^*(X_d + Y)) \\ &= \text{Sing}(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)) \\ &= \{\gamma_j(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)) \mid 1 \leq j \leq N(d)\}. \end{aligned}$$

Então, existe  $k \in \{1, \dots, N(d)\}$  tal que

$$\gamma_k(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)) = q_j = A^{-1}(\gamma_j(X_d + Y)).$$

Como é para qualquer  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$ , tomando  $Y = 0$  e usando que  $P_j(0) = p_{j-1} = \gamma_{j-1}(X_d)$  temos na igualdade acima

$$\gamma_k(X_d) = A^{-1}(\gamma_j(X_d)) = P_j(0) = \gamma_{j-1}(X_d).$$

Logo  $k = j - 1$ , isto implica que

$$\gamma_{j-1}(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)) = A^{-1}(\gamma_j(X_d + Y)),$$

assim

$$\gamma_j(X_d + Y) = A(\gamma_{j-1}(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y))),$$

para todo  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$  suficientemente pequeno, onde por convenção temos que  $\gamma_0 = \gamma_{N(d)}$ . Agora, temos que

$$\begin{aligned} B_j(X_d + Y) &= BB(X_d + Y, \gamma_j(X_d + Y)) \\ &= BB(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y), \gamma_{j-1}(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y))) \\ &= B_{j-1}(X_d + \zeta^{-d}A^*(Y)). \end{aligned}$$

Em particular, temos  $B_j(X_d) = B_{j-1}(X_d)$ . Daqui

$$\begin{aligned} DB_j(X_d)(Y) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{B_j(X_d + tY) - B_j(X_d)}{t|Y|} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{B_{j-1}(X_d + \zeta^{-d}A^*(tY)) - B_{j-1}(X_d)}{t|Y|} \\ &= DB_{j-1}(X_d)(\zeta^{-d}A^*(Y)). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} T_j(Y) &= DB_j(X_d)(Y) = DB_{j-1}(X_d)(\zeta^{-d}A^*(Y)) \\ &= \zeta^{-d}DB_{j-1}(X_d)(A^*(Y)) \\ &= \zeta^{-d}T_{j-1}(A^*(Y)). \end{aligned}$$

Isto é  $T_j(Y) = \zeta^{-d}T_{j-1}(A^*(Y))$ , ou seja

$$T_j(A^*(Y)) = \zeta^d T_{j+1}(Y).$$

(a) Seja  $Z \in A^*(Ker(T))$ , logo, existe  $Y \in Ker(T)$  tal que  $Z = A^*(Y)$ . Assim  $T_j(Z) = T_j(A^*(Y)) = \zeta^d T_{j+1}(Y) = 0$ , isto implica que  $Z \in Ker(T)$ .

(b) De 2.3 temos que  $T_1((A^*)^k(Y)) = \zeta^{kd}T_{1+k}(Y)$ . Assim, se  $Y \in F_j \cap Ker(T_1)$  se e somente se,  $A^*(Y) = \zeta^j Y$  e  $T_1(\zeta^{kj}Y) = \zeta^{kj}T_1(Y) = 0$ , ou seja

$$0 = T_1(\zeta^{kj}Y) = T_1((A^*)^k(Y)) = \zeta^{dk}T_{1+k}(Y),$$

mais precisamente,  $T_n(Y) = 0$ , para todo  $n \in \{1, \dots, N(d)\}$  e  $A^*(Y) = \zeta^j Y$ , isto é,  $Y \in F_j \cap Ker(T)$ . Assim  $F_j \cap Ker(T_1) = F_j \cap Ker(T)$ .

(c) Sabemos que  $\text{Posto}(DB(X_d)) = \dim(\text{Im}(T))$ . Seja

$$\{j|T_1|_{F_j} \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_k\}, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_k.$$

Sejam  $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(d, 2)$ , tais que para todo  $i = 1, \dots, k$ ,  $Y_i \in F_{j_i}$  e  $T_1(Y_i) \neq 0$ .

Como  $T_j(A^*(Y)) = \zeta^d T_{j+1}(Y)$ , temos que

$$\begin{aligned} T_j(Y_i) &= \zeta^{-d} T_{j-1}(A^*(Y_i)) \\ &= \zeta^{-d} T_{j-1}(\zeta^{j_i} Y_i), \quad (\text{pois } Y_i \in F_{j_i}). \\ &= \zeta^{(j_i-d)} T_{j-1}(Y_i), \end{aligned}$$

e por indução temos que  $T_j(Y_i) = \zeta^{(j_i-d)(j-1)} T_1(Y_i)$ , assim

$$T(Y_i) = (T_1(Y_i), \dots, T_{N(d)}(Y_i)) = T_1(Y_i)(1, \zeta^{(j_i-d)}, \dots, \zeta^{(N(d)-1)(j_i-d)}).$$

Provemos agora que os vetores  $T(Y_1), \dots, T(Y_k) \in \mathbb{C}^{N(d)}$  são linealmente independentes. Como  $T_1(Y_i) \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , basta provar que os vetores,

$$(1, \zeta^{(j_i-d)}, \zeta^{2(j_i-d)}, \dots, \zeta^{(N(d)-1)(j_i-d)}), \quad i = 1, \dots, k$$

são linealmente independentes. Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \zeta^{(j_1-d)} & \zeta^{2(j_1-d)} & \dots & \zeta^{(N(d)-1)(j_1-d)} \\ 1 & \zeta^{(j_2-d)} & \zeta^{2(j_2-d)} & \dots & \zeta^{(N(d)-1)(j_2-d)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \zeta^{(j_k-d)} & \zeta^{2(j_k-d)} & \dots & \zeta^{(N(d)-1)(j_k-d)} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\det(M) = \prod_{r < s} (\zeta^{(j_s-d)} - \zeta^{(j_r-d)}),$$

e como  $\zeta^{(j_s-d)} \neq \zeta^{(j_r-d)}$  para  $r < s$ , temos que  $\det(M) \neq 0$ . Isso termina a prova do item (c) e do lema.

□

Lembremos que  $\mathcal{P}_d$  é uma base de  $\mathcal{X}(d, 2)$ . Dado  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$ , denotemos por  $\mathcal{P}_d(Y)$  ao subconjunto de  $\mathcal{P}_d$  da forma

$$\mathcal{P}_d(Y) = \{x^i y^j Y \mid 0 \leq i + j \leq d\}.$$



Com esta notação, temos que

$$\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_d(\partial_x) \sqcup \mathcal{P}_d(\partial_y) \sqcup \mathcal{P}_d(R).$$

**Lema 2.12.** *Sejam  $i, j \geq 0$  tais que  $0 \leq i + j \leq d$  e  $A^*(x^i y^j) = x^i y^j$ . Então,  $i = j = 0$ . Em particular, dado  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$ , os autovalores de  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}_d(Y)$  são distintos para  $Y_1 \neq Y_2$ .*

**Lema 2.13.** *Para todo  $j = 1, \dots, N(d)$ , temos  $0 \leq \dim(F_j) \leq 3$ . Além disso*

(a)  $\dim(F_d) = 3$  e  $F_d \subset \text{Ker}(T)$ .

(b)  $\dim(F_j) = 3$ , se e somente se  $j = d$ .

(c)  $\#\{j | F_j \neq \{0\}\} = \frac{d^2 + 7d - 4}{2}$ .

*Demonstração.* Como

$$\mathcal{P}_d(\partial_x) \cup \mathcal{P}_d(\partial_y) \cup \mathcal{P}_d(R)$$

é uma base de  $\mathcal{X}(d, 2)$  formada por autovetores de  $A^*$ , temos do Lema 2.12 que os vetores em  $\mathcal{P}_d(\partial_x)$ ,  $\mathcal{P}_d(\partial_y)$  e em  $\mathcal{P}_d(R)$  tem autovalores diferentes. Portanto,  $0 \leq \dim(F_j) \leq 3$ .

(a) Suponhamos que  $\dim(F_j) = 3$ , então  $F_j$  contém um vetor em cada parte da base  $\mathcal{P}_d(\partial_x) \cup \mathcal{P}_d(\partial_y) \cup \mathcal{P}_d(R)$ .

Observemos que  $F_d = \langle \partial_x, x^d \partial_y, y^d R \rangle$  e provemos que  $F_d \subset \text{Ker}(T)$ . Definamos  $C_{(s,t)}(x, y) = (sx, ty)$  então

$$DC_{(s,t)}^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix},$$

logo para  $Y \in \mathcal{X}(d, 2)$ ,  $C_{(s,t)}^*(Y) = DC_{(s,t)}^{-1}(Y(sx, ty))$ .

Agora, consideremos a família  $X(r, s, t) \in \mathcal{X}(d, 2)$  definida por

$$X(r, s, t) = rC_{(s,t)}^*(X_d) = rs^{-1}\partial_x + rt^{-1}s^d x^d \partial_y - rt^d y^d R.$$

Assim, para  $r, s, t \neq 0$  temos  $B(X(r, s, t)) = B(X_d)$ .

Isto implica que os vetores  $\partial_x, x^d \partial_y$  e  $y^d R$  pertencem a  $\text{Ker}(T)$ . Portanto,  $F_d \subset \text{Ker}(T)$ .

(b) Suponhamos que  $\dim(F_r) = 3$  para algum  $r \in \{1, \dots, N(d)\}$ . Então

$$F_r = \langle x^i y^j \partial_x, x^k y^l \partial_y, x^m y^n R \rangle,$$

onde  $0 \leq i + j, k + l \leq d$  e  $m + n = d$ . Assim

$$-d(i-1) + j = -dk + l - 1 = -dm + n = r \pmod{N(d)}. \quad (2.4)$$

Como  $-d(d+1) = 1 \pmod{N(d)}$ , multiplicando a primeira e terceira igualdade de (2.4) por  $(d+1)$  temos

$$\begin{aligned} (i-1) + (d+1)j &= m + (d+1)n = nd + (m+n) = nd + d \\ &= n(d+1) \pmod{N(d)} \\ \implies dj + i + j - 1 &= d(n+1) \pmod{N(d)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Agora, multiplicando a primeira e última igualdade de (2.4) por  $(d+1)$  temos

$$dj + i + j = 1 = r(d+1) \pmod{N(d)}. \quad (2.6)$$

Suponhamos que  $r \neq d$ . Para o caso  $i = j = 0$ , de (2.6) temos  $r = d$ , que é absurdo. Portanto, devemos ter  $1 \leq i + j \leq d$ . Assim

$$\begin{aligned} 0 \leq dj + i + j - 1 &\leq dj + d - 1 = d(j+1) - 1 \leq d(d+1) - 1 < N(d) \\ \implies dj + i + j - 1 &= d(n+1), \end{aligned}$$

pois  $0 < d(n+1) \leq d(d+1) < N(d)$ .

Portanto,  $d \mid (dj + i + j - 1)$ , e assim  $d \mid (i + j - 1)$ , como  $0 \leq i + j \leq d - 1$  isto implica que  $i + j - 1 = 0$ , ou seja  $i + j = 1$  e  $j = n + 1 > 0$ . Daqui temos que  $i = 0$ ,  $j = n + 1$  e  $r = n - dm = (n + 1 + d) \pmod{N(d)}$ . Segue que  $d(m+1) + 1 = 0 \pmod{N(d)}$ , o que implica que  $i = 0$ ,  $j = 1$ ,  $m = d$ ,  $n = 0$  e  $r = d + 1$ .

Por outra parte, de isto mais (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} r &= d + 1 = (-dk + l - 1) \pmod{N(d)} \\ \implies d(k+1) + 2 &= l \pmod{N(d)}. \end{aligned}$$

Mas isso é impossível para  $0 \leq k + l \leq d$ . Com efeito, se  $0 \leq k \leq d - 1$ , então

$$0 < d(k+1) + 2 \leq d^2 + 2 < N(d) \implies l = d(k+1) + 2 \implies l > d,$$

que não pode acontecer. Agora, para o caso  $k = d$ , então  $l = 0$ , assim  $d(d+1)+2 = 0 \pmod{(N(d))}$  que absurdo.

Concluimos então que  $r = d$ .

(c) Seja  $M = \#\{j|F_j \neq \{0\}\}$ . Então  $M$  é o número de autovalores diferentes de  $A^*$ . O Lema 2.12 nos diz que todos os vetores em  $\mathcal{P}_d(\partial_x)$  tem autovalores diferentes. Como

$$\#(\mathcal{P}_d(\partial_x)) = \frac{(d+1)(d+2)}{2},$$

obtemos esse número de autovalores, com seus correspondentes autovetores em  $\mathcal{P}_d(\partial_x)$ .

Consideremos a função

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}_d(x\partial_x) &\longrightarrow \mathcal{P}_d(y\partial_y) \\ x^i y^j \partial_x &\longmapsto x^{i-1} y^{j+1} \partial_y, \end{aligned}$$

logo, se  $Y \in \mathcal{P}_d(x\partial_x)$  com  $A^*(Y) = \lambda Y$ , então  $A^*(\phi(Y)) = \lambda \phi(Y)$ . Isto mostra que os autovetores de  $A^*$  em  $\mathcal{P}_d(\partial_y)$  que correspondem a novos autovalores (não achados nos conjuntos anteriores) devem pertencer a  $\mathcal{P}_d(\partial_y) \setminus \mathcal{P}_d(y\partial_y)$ . Portanto, são da forma  $x^k \partial_y$ ,  $0 \leq k \leq d$ . Vamos ver que existem  $d - 1$  novos autovalores em esse conjunto.

De fato, se  $x^i \cdot y^j \cdot \partial_x$  e  $x^k \cdot \partial_y$  tem o mesmo autovalor, então

$$-d(i-1) + j = -k \cdot d - 1 \pmod{(N(d))}.$$

Assim

$$i - 1 + (d+1)j = k - (d+1) \pmod{(N(d))},$$

o que implica

$$k = d(j+1) + i + j \pmod{(N(d))}.$$

Já sabemos que,  $k = d, i = j = 0$ , é a solução que corresponde a vetores em  $F_d$ .

Outra solução é  $k = d - 1, i = 0$  e  $j = d$ . Por outro lado, si  $0 \leq j \leq d - 1$ , então

$$0 < d(j+1) + i + j \leq d^2 + d < N(d) \Rightarrow d(j+1) + i + j = k,$$

implicando que

$$i = j = 0 \text{ e } k = d.$$

Portanto, só existem dois autovalores repetidos e  $d-1$  novo no conjunto. O autovalor repetido corresponde a  $F_d$  e  $F_{2d}$ .

Agora, só temos que ver quantos novos autovalores podemos encontrar em  $\mathcal{P}_d(R)$ . Suponhamos primeiro que temos um vetor  $x^m \cdot y^n \cdot R$  em  $\mathcal{P}_d(R)$  com o mesmo autovalor de um vetor  $x^i \cdot y^j \cdot \partial_x \in \mathcal{P}_d(\partial_x)$ . Este caso já foi considerado na prova da parte (b). Temos duas possibilidades:  $(i, j) = (0, 0)$ ,  $(m, n) = (0, d)$  (o qual corresponde a vetores em  $F_d$ ) e  $(i, j) = (0, 1)$ ,  $(m, n) = (d, 0)$  (o qual corresponde a  $F_{d+1}$ ). Suponhamos agora que temos um vetor  $x^m \cdot y^n \cdot R$  em  $\mathcal{P}_d(R)$  e um vetor  $x^k \cdot \partial_y$  em  $\mathcal{P}_d(\partial_y)$  com o mesmo autovalor. Então

$$\begin{aligned} -kd - 1 &= -dm + n \pmod{N(d)} \\ \implies k - (d + 1) &= m + n(d + 1) = d(n + 1) \pmod{N(d)}, \end{aligned}$$

o qual implica que

$$k = dn + 2d + 1 \pmod{N(d)}.$$

Da relação acima, temos as duas soluções seguintes:  $k = d$ ,  $(m, n) = (0, d)$  (o qual corresponde a  $F_d$ ) e  $k = 0$ ,  $(m, n) = (1, d - 1)$ . Por outra parte, se  $0 \leq n \leq d - 2$ , então

$$2d + 1 \leq dn + 2d + 1 \leq d^2 + 1 < N \implies k = dn + 2d + 1 > d,$$

o qual contradiz  $0 \leq k \leq d$ . Portanto, existem duas soluções repetidas, que correspondem a  $F_d$  e  $F_{d^2+d}$ .

Isto implica que existe em total três autovalores em  $\mathcal{P}_d(R)$  que já encontramos nos conjuntos anteriores. Como  $\#(\mathcal{P}_d(R)) = d + 1$ , temos  $d - 2$  novos autovalores correspondendo a autovalores no conjunto  $\mathcal{P}_d(R)$ . Logo, o número total de autovalores de  $A^*$  é

$$M = \frac{(d+1)(d+2)}{2} + d - 1 + d - 2 = \frac{d^2 + 7d - 4}{2},$$

o qual prova o lema.

□

Para provar o Teorema 2.10, basta provar a seguinte:

**Afirmção:** Para todo  $j \in \{0, \dots, N(d) - 1\}$  tal que  $j \neq d$  e  $F_j \neq \{0\}$ , então  $T_1|_{F_j} \neq 0$ .

Com efeito, por (a) e (c) do Lema 2.13, temos que

$$k = \#\{j|T_1|_{F_j} \neq 0\} = \frac{d^2 + 7d - 4}{2} - 1 = \frac{d^2 + 7d - 6}{2}.$$

Logo, por (c) do Lema 2.11, temos que  $Posto_{\mathcal{J}_d} \mathcal{B}\mathcal{B}_d = k$ , que demonstra o Teorema 2.10.

Para demonstrar a afirmação, temos primeiro que estudar a variação local dos índices de Baum-Bott.

Seja  $X$  um campo vetorial polinomial em  $\mathcal{X}(d, 2)$  e  $p_0 \in \mathbb{C}^2$  uma singularidade não degenerada de  $X$ . Seja  $X_1 = DX(p_0)$ . Tomemos  $U \subset \mathcal{X}(d, 2)$  uma vizinhança de  $X$  tal que existe um mapa holomorfo  $p : U \rightarrow \mathbb{C}^2$  com  $p(X) = p_0$  e para cada  $Y \in U$ ,  $p(Y)$  é uma singularidade não degenerada de  $Y$ . Seja  $B : U \rightarrow \mathbb{C}$ , o mapa definido por  $B(Y) = BB(Y, p(Y))$ . Temos o seguinte resultado:

**Lema 2.14.** *Suponhamos que os autovalores de  $X_1$  pertençam ao domínio de Poincaré sem ressonâncias. Seja  $Z \in X(d, 2) \cap Ker(DB(X))$ . Então, existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  e um germe de campo vetorial holomorfo  $Y$  em  $p_0$  tal que*

$$Z_{p_0} = \lambda \cdot X_{p_0} + [X_{p_0}, Y],$$

onde  $X_{p_0}$  e  $Z_{p_0}$  são os germes dos respectivos campos vetoriais em  $p_0$ . Em particular, se  $Z(p_0) = 0$ , então  $Y(p_0) = 0$  e

$$Z_1 = \lambda \cdot X + [X_1, Y_1],$$

onde,  $Z_1 = DZ(p_0)$  e  $Y_1 = DY(p_0)$ .

*Demonstração.* Seja  $B : U \rightarrow \mathbb{C}$  como antes,  $B(X) = b_0$  e  $S := B^{-1}(b_0)$ . Temos que  $DB(x) \neq 0$ . Com efeito, por comodidade, vamos supor  $p_0 = 0 \in \mathbb{C}^2$ . Neste caso, temos

$$X = X_1 + \text{termos de ordem superior.}$$

Como estamos no domínio de Poincaré sem ressonâncias, podemos linearizar  $X$  ao campo

$$X_1 = \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y, \text{ com } \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}_- \text{ e } \lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}.$$

Consideremos a curva  $X(t)$  em  $\mathcal{X}(d, 2)$  definida por

$$X(t) = X + tx \partial_x,$$

então  $X(0) = X$ ,  $X(t)(0) \equiv 0 \in \mathbb{C}^2$  e  $X(t)_1 = X_1 + t \partial_x$ . Assim

$$B(X(t)) = BB(X(t), p(X(t))) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + t)^2}{(\lambda_1 + t)\lambda_2},$$

o que implica

$$DB(X)(x \partial_x) = \frac{d}{dt} B(X(t))|_{t=0} = \frac{1 - (\lambda_2/\lambda_1)^2}{\lambda_2} \neq 0, \text{ (pois } \lambda_2/\lambda_1 \neq 1, -1).$$

Assim  $DB(X) \neq 0$  e  $S$  é uma subvariedade suave de  $U$  de codimensão 1.

Agora, seja  $Z \in \text{Ker}(DB(X))$ . Como  $S$  é suave, existe  $\varepsilon > 0$  e uma curva real analítica  $Y(t) \subset S$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  tal que  $Y(0) = X$  e  $(d/dt)Y(t)|_{t=0} = Z$ . Assim, podemos escrever

$$Y(t) = X + tZ + \sum_{n=2}^{\infty} t^n Y_n, \quad Y_n \in \mathcal{X}(d, 2), \forall n \geq 2.$$

Definamos  $p(t) := p(Y(t))$ , assim  $p(0) = p_0$  e  $p(t)$  é uma singularidade não degenerada de  $Y(t)$ . Sejam  $\lambda_1(t)$  e  $\lambda_2(t)$  os autovalores de  $DY(t)(p(t))$ , onde podemos supor que  $t \rightarrow \lambda_j(t)$  é real analítico e  $\lambda_j(0) = \lambda_j$ , para  $j = 1, 2$ . Como  $B(Y(t)) = b_0$ , para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , obtemos

$$b_0 \equiv \frac{(\lambda_1(t) + \lambda_2(t))^2}{\lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \implies \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Isto implica que,

$$\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_1} =: \phi(t),$$

com  $\phi(t)$  real analítica,  $\phi(0) = 1$ .

Por outra parte, pelo teorema de linearização de Poincaré, existem  $0 < \delta \leq \varepsilon$ , uma vizinhança  $V$  de  $0 \in \mathbb{C}^2$  e um mapa real analítico  $\Psi : (-\delta, \delta) \times V \rightarrow \mathbb{C}^2$  tais que:

- (i)  $\Psi(t, 0) = p(t)$ , para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .
- (ii) Para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $\Psi_t(x, y) := \Psi(t, x, y)$  é um biholomorfismo de  $V$  em  $V(t) := \Psi_t(V)$  e  $\Psi_0 = Id_V$ .
- (iii) Para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ , temos

$$\Psi_t^*(Y(t)) = \phi(t)Y(0) = \phi(0)X.$$

Escrevendo explicitamente a última relação, temos

$$D\Psi_t^{-1} \cdot Y(t) \circ \Psi_t = \phi(t) \cdot X \Rightarrow Y(t) \circ \Psi_t = \phi(t) \cdot D\Psi_t \cdot X. \quad (2.7)$$

Seja  $\Psi_t(x, y) = (\Psi_t^1(x, y), \Psi_t^2(x, y))$  e considere o campo vetorial

$$W = P_1(\partial/\partial x) + P_2(\partial/\partial y),$$

onde

$$P_j(x, y) = \frac{\partial \Psi^j}{\partial t}(0, x, y), \quad j = 1, 2.$$

Note que as componentes de  $W$  e  $(\partial/\partial t)\Psi|_{t=0}$  coincidem. Tomando a derivada parcial dos dois membros de (2.7) com respeito a  $t$  em  $t = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} Z + DX \cdot W &= Z + DY(0) \cdot W \\ &= Y'(0) \circ \Psi_0 + DY(0) \circ \Psi_0 \cdot \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= \phi'(0) \cdot D\Psi_0 \cdot X + \phi(0) \cdot D \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi|_{t=0} \right) \cdot X \\ &= \phi'(0) \cdot X + DW \cdot X. \end{aligned}$$

Se fazemos  $\lambda = \phi'(0)$ , então tem-se

$$Z = \lambda \cdot X + DW \cdot X - DX \cdot W = \lambda \cdot X + [W, X].$$

Isto prova o lema. □

Voltando a nosso problema original resta mostrar que para qualquer  $j \in \{0, \dots, N(d) - 1\}$  tal que  $j \neq d$  e  $F_j \neq \{0\}$ , então  $T_1|_{F_j} \neq 0$ . Isto será obtido no seguinte resultado.

**Lema 2.15.** *Seja  $W \in \mathcal{P}_d$  é tal que  $W \in \ker(T_1)$ . Então  $W \in F_d$ .*

*Demonstração.* Seja  $W \in \mathcal{P}_d \cap \ker(T_1)$ . Assim, temos três possibilidades:

i)  $W = x^i y^j \partial_x$ , com  $0 \leq i+j \leq d$ . Como  $\partial_x \in \ker(T_1)$ , afirmamos que, se  $1 \leq i+j \leq d$ , então  $W \notin \ker(T_1)$ . Com efeito.

Seja  $Z = W - \partial_x = (x^i y^j - 1) \partial_x$ . Como  $T_1(\partial_x) = 0$ , temos que

$$T_1(W) = 0 \iff T_1(Z) = 0.$$

Lembremos que  $T_1 = DB_1(X_d)$ ,  $B_1(X) = BB(\mathcal{F}(X), \gamma_1(X))$ , e  $\gamma_1(X_d) = p_1 = (1, 1)$ . Como  $Z(1, 1) = 0$ , pelo Lema 2.14, só temos que verificar se  $Z_1 = DZ(1, 1)$  pertence à imagem do mapa:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C} \times L_1 &\longrightarrow L_1 \\ (\lambda, Y_1) &\longmapsto \Psi(\lambda, Y_1) = \lambda \cdot X_1 + [X_1, Y_1], \end{aligned}$$

onde  $L_1$  é o conjunto de 1-jato de germes de campos vectoriais holomorfos  $Y$  em  $(1, 1)$  tais que  $Y(1, 1) = 0$ . Seja  $M_2 = \mathcal{M}^{2 \times 2}(\mathbb{C})$ , assim o mapa

$$\begin{aligned} \Phi : L_1 &\longrightarrow M_2 \\ Y = P\partial_x + Q\partial_y &\longmapsto \Phi(Y) = DY(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial P}{\partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial Q}{\partial y}(1, 1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Chamaremos a imagem de  $Y_1$ ,  $\Phi(Y_1)$ , a sua forma matricial, e por comodidade, vamos denotar por  $Y_1$  a  $\Phi(Y_1)$ . Por outro lado, temos que

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 & -d \\ d & -(d+1) \end{bmatrix}, \text{ e } Z_1 = \begin{bmatrix} i & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

então, temos que  $\Psi(\lambda, Y_1) = \lambda X_1 + [X_1, Y_1]$  e

$$[X_1, Y_1] = Y_1 X_1 - X_1 Y_1 = \begin{bmatrix} d(\beta + \gamma) & d(\delta - \alpha - \beta) \\ d(\gamma + \delta - \alpha) & -d(\beta + \gamma) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}.$$



Assim,  $tr([X_1, Y_1]) = 0$  e  $x = z - y$ . Suponhamos que  $Z_1 = \Psi(\lambda, Y_1)$ , logo

$$i = tr(Z_1) = \lambda \cdot tr(X_1) = -\lambda \cdot (d+2) \longrightarrow \lambda = -\frac{i}{d+2}.$$

O que implica que as entradas da matriz  $Z_1 + (i/(d+2))X_1 = Z_1 - \lambda X = [X_1, Y_1]$  devem satisfazer  $x = z - y$ . Por outra parte, temos que

$$Z_1 + (i/(d+2))X_1 = \begin{bmatrix} \frac{(d+1)i}{d+2} & \frac{(d+2)j - di}{d+2} \\ \frac{di}{d+2} & -\frac{(d+1)i}{d+2} \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $Z \in Ker(T_1)$ , se, e somente se

$$\frac{(d+1)i}{d+2} = \frac{di}{d+2} - \frac{(d+2)j - di}{d+2},$$

e isto acontece, se, e somente se  $(d-1)i = (d+2)j$ . Essa última relação implica que  $d+2$  divide a  $i$  e isso só pode acontecer se  $i = 0$  e assim  $j = 0$ , que é uma contradição.

ii)  $W = x^k y^l \partial_y$ , com  $0 \leq k+l \leq d$ . Lembremos que  $x^d \partial_y \in Ker(T_1)$ . Afirmamos que, se  $0 \leq k \leq d-1$  e  $0 \leq k+l \leq d$ , então  $W \notin Ker(T_1)$ .

A demonstração é análoga ao caso anterior. Seja  $Z = W - x^d \partial_y = (x^k \cdot y^l - x^d) \partial_y$ . Como  $x^d \partial_y \in Ker(T_1)$ , temos que

$$W \in Ker(T_1) \iff Z \in Ker(T_1).$$

Neste caso temos que  $Z(1,1) = 0$  e

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k-d & l \end{bmatrix} \implies \lambda = -\frac{l}{d+2} \longrightarrow Z_1 - \lambda X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{d+2} & -\frac{d \cdot l}{d+2} \\ \frac{dl + (k-d)(d+2)}{d+2} & \frac{l}{d+2} \end{bmatrix}.$$

Daqui,  $Z_1 \in Ker(T_1)$ , se e somente se

$$-\frac{l}{d+2} = \frac{dl + (k-d)(d+2)}{d+2} + \frac{l}{d+2} \iff (d-k)(d+2) = (2d+1)l.$$

Assim, se  $0 \leq k+l \leq d$ , a relação acima só é possível se  $k = d$  e  $l = 0$ .

iii)  $W = x^m y^n R$ , onde  $m + n = d$ . Temos também que  $y^d R \in \text{Ker}(T_1)$ . Afirmamos que, se  $0 \leq n \leq d - 1$ , então  $W \notin \text{Ker}(T_1)$ . Neste caso, tomamos

$$Z = W - y^d R = (x^m \cdot y^n - y^d)R,$$

então  $Z(1, 1) = 0$  e também

$$Z_1 = \begin{bmatrix} m & n - d \\ m & n - d \end{bmatrix} \implies \text{tr}(Z_1) = 0$$

e

$$\lambda = 0 \implies m = m - (n - d) \implies n = d \text{ e } m = 0.$$

Isto termina a prova do lema e do Teorema 2.10. □

**Corolário 2.16.** *Para  $d = 2$ , obtemos que o posto do mapa de Baum-Bott,  $\mathcal{BB}_2$ , em  $\mathcal{J}_2$  é 6.*

## 2.4 Folheações de Grau 2

Nesta seção vamos trabalhar só com folheações de grau 2, por essa razão denotemos por  $\mathcal{BB} := \mathcal{BB}_2$ , se  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$ ,  $F(\mathcal{F}) := \mathcal{BB}^{-1}(\mathcal{BB}(\mathcal{F}))$ . Denotemos também por  $\Lambda = (\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma)$  as coordenadas em  $\mathbb{C}^6$  e definamos os polinômios

$$\begin{cases} p_\Lambda(x, y) = \lambda x + Ax^2 + Bxy + (1 - \lambda)y^2 + x(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) \\ q_\Lambda(x, y) = y + (\lambda - 1)x^2 + Axy + By^2 + y(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) \end{cases} \quad (2.8)$$

Seja  $X_\Lambda$  o campo vetorial

$$X_\Lambda = p_\Lambda(x, y)\partial_x + q_\Lambda(x, y)\partial_y$$

e  $\mathcal{F}_\Lambda$  a folheação definida por  $X_\Lambda$ . Provaremos que com condições genéricas, uma folheação  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$  é equivalente a alguma  $\mathcal{F}_\Lambda$ , para algum  $\Lambda \in \mathbb{C}^6$ .

Observemos que  $0 \in \text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda)$  e se  $\lambda \neq 0, 1$ , então  $BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}$ .

Por outro lado, seja  $\Delta = \{(\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma), \lambda \neq 0, 1\}$ , e  $\mathcal{W} := \{\mathcal{F}_\Lambda, \Lambda \in \Delta\}$ . Mostraremos que o cálculo dos índices de Baum-Bott das singularidades de uma folheação  $\mathcal{F}_\Lambda \in \mathcal{W}$  é reduzido ao cálculo dos resíduos de uma 1-forma racional  $\omega_\Lambda$  em  $\mathbb{P}^1$ .

Agora vamos falar sobre a condição genérica mencionada no início da Seção 2.2 que uma folheação  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$  deve satisfazer para cumprir para obter resultados que servirão para demonstrar o Teorema 2.27. Mais precisamente, seja  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$  com singularidade  $p$ , satisfazendo a seguinte condição:

“O divisor de tangências de  $\mathcal{F}$  com o pencil de retas passando por  $p$  é uma cúbica irreduzível,  $C$  com um nó em  $p$ .”

Como  $\mathcal{F}$  tem grau dois, temos que  $Sing(\mathcal{F}) \subset C$ .

Doravante, vamos nos referir a essa condição como **condição (\*)**. No seguinte resultado mostramos que o conjunto de folheações satisfazendo a condição (\*) em alguma singularidade, pode ser parametrizado por uma família de campos vetoriais com seis parâmetros como em (2.8).

**Lema 2.17.** *Se  $\mathcal{F}$  satisfaz condição (\*) em  $p \in \mathbb{P}^2$ , então existe um sistema de coordenadas afim  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  e um campo vetorial polinomial  $X_\Lambda = p_\Lambda(x, y)\partial_x + q_\Lambda(x, y)\partial_y$  representando  $\mathcal{F}$ , onde  $p_\Lambda$  e  $q_\Lambda$  são como em (2.8).*

*Demonstração.* Fixemos uma carta afim  $\phi = (u, v) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  com  $\phi(p) = 0 \in \mathbb{C}^2$  e onde  $\mathcal{F}$  é representada por um campo vetorial  $Y$  como em (2.1) com  $d = 2$ . Como  $0 \in Sing(\mathcal{F}_Y)$ , então  $Y$  pode ser escrito como

$$Y(u, v) = DY_0(u, v) + A(u, v)\partial_u + B(u, v)\partial_v + h(u, v)R(u, v),$$

onde  $R(u, v) = u\partial_u + v\partial_v$  é o campo radial, e  $A, B, h$  são polinômios homogêneos de grau 2.

Agora, sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  os autovalores de  $DY_0$ , logo

$$Y(u, v) = (\lambda_1 u + A + uh)\partial_u + (\lambda_2 v + B + vh)\partial_v,$$

de onde temos sua 1-forma dual

$$\omega_Y = (\lambda_1 u + A + uh)dv - (\lambda_2 v + B + vh)du.$$

Seja  $\mathcal{R}$  a folheação induzida por  $R$  em  $\mathbb{P}^2$  e  $\omega_R = u dv - v du$  sua 1-forma dual.

Assim, o divisor de tangências entre as folheações  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{R}$  é dado por (lembrando que  $\mathbb{C}^2 \cong U_i$ , para algum  $i = 0, 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{R}) \cap \mathbb{C}^2 &= \{(u, v) = \phi(q) : q \in \mathbb{P}^2, (\omega_Y \wedge \omega_R)(\phi(q)) = 0\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : \tilde{G}(u, v) du \wedge dv = 0\} \\ &= \{\tilde{G}(u, v) = 0\}. \end{aligned}$$

Por outra parte

$$\omega_Y \wedge \omega_R = (\lambda_1 - \lambda_2)(uv + (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(vA - uB)) du \wedge dv. \quad (2.9)$$

Assim,

$$\tilde{G}(u, v) = uv + (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(vA - uB),$$

de onde,  $\deg(\tilde{G}) \leq 3$  e  $0$  é ponto singular de  $\tilde{G}$ . Aqui usamos o fato que o divisor de tangências entre duas folheações é invariante por automorfismos de  $\mathbb{P}^2$ , mais precisamente, se  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são duas folheações e  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ , então

$$\varphi(\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \text{Tang}(\varphi^*\mathcal{F}, \varphi^*\mathcal{G}).$$

Como  $\mathcal{F}_Y$  satisfaz a condição (\*) em  $0 \in \mathbb{C}^2$ ,  $\tilde{G} = 0$  é uma cúbica irredutível com nó em  $0$ .

Mostra-se no Teorema 4.1, página 80, de [6], que  $\tilde{G}$  é projetivamente equivalente à cúbica

$$G(x, y) = xy - x^3 - y^3.$$

Seja  $L : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  essa transformação projetiva, então  $L(x, y) = (u, v)$ ,  $L(0) = 0$ , e o divisor de tangências  $G$  entre  $L^*(\mathcal{F})$  e o campo radial passando por  $0$  é a cúbica  $G$ .

Representando  $L^*(\mathcal{F})$  nas coordenadas  $(x, y)$  pelo campo vetorial

$$Z(x, y) = Z_1(x, y) + Z_2(x, y) + g(x, y)R(x, y),$$

onde  $g$  é homogêneo de grau 2,  $Z_j(x, y) = p_j(x, y)\partial_x + q_j(x, y)\partial_y$ , com  $p_j, q_j$  homogêneos de grau  $j$ ,  $j = 1, 2$ . Como a folheação radial passando pelo  $0$  é invariante por automorfismos que fixam o  $0$ , de maneira análoga ao feito na equação (2.9) temos que

$$\begin{aligned}\omega_Z \wedge \omega_R &= \omega_{Z_1} \wedge \omega_R + \omega_{Z_2} \wedge \omega_R \\ &= \rho(xy - x^3 - y^3)dx \wedge dy, \quad \rho \neq 0.\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}yp_1(x, y) - xq_1(x, y) &= \rho xy, \\ yp_2(x, y) - xq_2(x, y) &= -\rho(x^3 + y^3)dx.\end{aligned}$$

Igualando termos de graus iguais, achamos  $Z_1$  e  $Z_2$ .

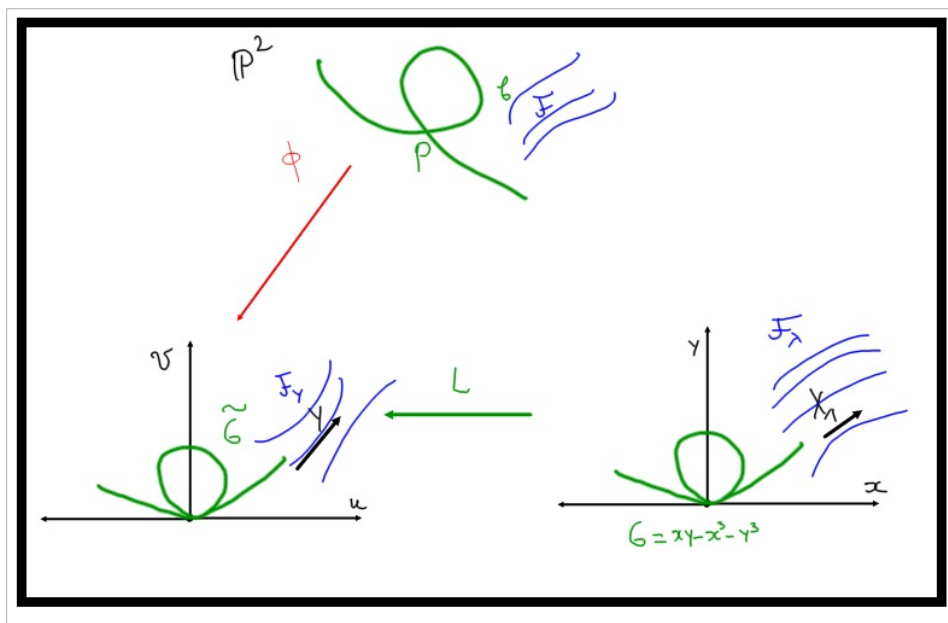
(i)  $Z_1(x, y) = ax\partial_x + by\partial_y$ , onde  $\rho = a - b$ .

(ii)  $Z_2(x, y) = -\rho y^2\partial_x + \rho x^2\partial_y + g_1(x, y)R(x, y)$ , onde  $g_1$  é homogêneo de grau 1.

Como  $\rho \neq 0$ , temos que  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ . Podemos assumir  $b \neq 0$ . Fazendo

$$\lambda = \frac{a}{b}, \frac{g_1}{b} = Ax + By, \frac{g_2}{b} = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

e  $\Lambda = (\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma)$ , obtemos  $b^{-1}Z = X_\Lambda$  como em (2.8), completando a prova do lema.



□

**Observação 2.18.** Da prova do Lema 2.17 que  $\mathcal{F}$  satisfaz a condição (\*) em  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  se e somente se

(a) Para cada campo vetorial  $X$  representando  $\mathcal{F}$  numa vizinhança de  $p$ , os autovalores de  $DX(p)$  são distintos.

(b)  $\mathcal{F}$  não possui reta invariante passando por  $p$ .

Com efeito. Se uma das condições acima não é satisfeita então  $X$  seria conjugado ao campo radial, e assim,  $x = 0$  seria fator de  $G$ , que contradiz que  $G$  seja irredutível. Reciprocamente, se  $G$  não fosse irredutível, seria divisível por  $x$  ou por  $y$ . Por outro lado, as curvas  $(x = 0)$  e  $(y = 0)$  são  $\mathcal{R}$ -invariantes, assim  $\mathcal{F}$  possui uma reta invariante passando por  $p$  o que contradiz (b).

Além disso, quando  $p$  é singularidade não degenerada de  $\mathcal{F}$ , a condição (a) acima, é equivalente a

(a')  $BB(\mathcal{F}, p) \neq 4$ .

Agora, vamos manter fixo um sistema de coordenadas afim  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ . Sejam  $\Delta = \{(\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma), \lambda \neq 0, 1\}$ ,  $\mathcal{W} = \{\mathcal{F}_\Lambda, \Lambda \in \Delta\}$ ,  $\mathcal{F}_\Lambda$  e  $X_\Lambda$  como anteriormente.

**Observação 2.19.** Seja  $\mathcal{H} \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  o grupo de invariância do divisor definido no sistema de coordenada afim fixado, por  $(xy - x^3 - y^3 = 0)$ . Tem-se que  $\mathcal{H}$  é gerado pelas transformações

$$\sigma(x, y) = (y, x), \quad \delta(x, y) = (jx, j^2y), j = e^{2\pi i/3}.$$

Em particular,  $\mathcal{H}$  é isomorfo a  $S_3$ , e portanto tem 6 elementos. Além disso, dado  $\Lambda = (\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma) \in \Delta$  tem-se:

1.  $\delta^*(X_\Lambda) = X_{\tilde{\delta}(\Lambda)}$ , onde  $\tilde{\delta}(\Lambda) = (\lambda, jA, j^2B, j^2\alpha, \beta, j\gamma)$ .
2.  $\sigma^*(X_\Lambda) = \lambda X_{\hat{\sigma}(\Lambda)}$ , onde  $\hat{\sigma}(\Lambda) = (\lambda^{-1}, \lambda^{-1}B, \lambda^{-1}A, \lambda^{-1}\gamma, \lambda^{-1}\beta, \lambda^{-1}\alpha)$ .

Portanto, temos que

$$\delta^*(\mathcal{F}_\Lambda) = \mathcal{F}_{\tilde{\delta}(\Lambda)}, \quad \sigma^*(\mathcal{F}_\Lambda) = \mathcal{F}_{\hat{\sigma}(\Lambda)} \text{ e } \mathcal{H}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{W}.$$

**Observação 2.20.** Da prova do Lema 2.17 e da Observação 2.19 temos que se  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$ , então

$$\#(\mathcal{W} \cap \text{Orb}(\mathcal{F})) \leq 6 \cdot 7 = 42.$$

Pois para cada singularidade, temos 6 cúbicas, e 6 folheações.

**Lema 2.21.** *Seja  $\Lambda = (\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma) \in \Delta$  e  $\mathcal{F}_\Lambda$  como antes. Então existe uma transformação biracional  $\Phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  e um sistema coordenado afim  $(t, v) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  tal que:*

(I)  $\Phi^{-1}$  é um biholomorfismo numa vizinhança de  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{0\}$  e

$$\Phi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{0\}) \subset (v = 0).$$

(II)  $\Phi^*(\mathcal{F}_\Lambda)$  é definido pelo campo vetorial

$$Z_\Lambda = (\lambda - 1)t^3v\partial_t + (P_\Lambda(t) + tQ_\Lambda(t)v + \lambda t^3v^2)\partial_v,$$

onde

$$\begin{cases} P_\Lambda(t) = t^6 + Bt^5 + (A + \lambda)t^4 + (\lambda + \beta + 1)t^3 + (B + \alpha)t^2 + At + \lambda, \\ Q_\Lambda(t) = (3 - \lambda)t^3 + Bt^2 + At + (3\lambda - 1). \end{cases} \quad (2.10)$$

*Demonstração.* A folheação  $\mathcal{F}_\Lambda$  é representada no sistema coordenado afim  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  pela 1-forma

$$\omega_\Lambda = (\lambda x + p_2(x, y) + xg_2(x, y))dy - (y + q_2(x, y) + yg_2(x, y))dx,$$

onde

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= Ax^2 + Bxy + (1 - \lambda)y^2, \\ q_2(x, y) &= (\lambda - 1)x^2 + Axy + By^2, \\ g_2(x, y) &= \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2. \end{aligned}$$

Começamos por uma explosão

$$\pi : (\tilde{\mathbb{P}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{P}^2, 0)$$

em  $0 \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ , onde  $D = \pi^{-1}(0)$ . Consideremos a carta  $(t, x) \in \mathbb{C}^2 \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ , onde  $\pi(t, x) = (x, tx)$ . Tem-se que  $\pi^*(\omega_\Lambda) = x\theta_\Lambda$ , onde

$$\theta_\Lambda = x[\lambda + xp_2(1, t) + x^2g_2(1, t)]dt - (1 - \lambda)[t - x(t^3 + 1)]dx.$$

Notemos que  $\pi^{-1}$  é um biholomorfismo numa vizinhança de  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{0\}$  e

$$\pi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{0\}) \subset \{t - x(t^3 + 1) = 0\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Definamos um mapa racional  $\Phi_1$  por

$$\Phi_1(t, v) = \left( t, \frac{1}{v + \frac{1}{t} + t^2} \right) = (t, x)$$

com inversa

$$\Phi_1^{-1}(t, x) = \left( t, \frac{1}{x} - \frac{1 + t^3}{t} \right).$$

Em particular,  $\Phi_1^{-1}$  é um difeomorfismo numa vizinhança de

$$\{t - x(t^3 + 1) = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$$

e

$$\Phi_1^{-1}(\{t - x(t^3 + 1) = 0\}) \setminus \{(0, 0)\} \subset \{v = 0\}.$$

Agora, definamos  $\Phi := \pi \circ \Phi_1$ . Note que  $\Phi^{-1}$  é um biholomorfismo numa vizinhança de  $Sing(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{(0, 0)\}$  e

$$\Phi^{-1}(Sing(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{(0, 0)\}) \subset \{v = 0\}.$$

Por outro lado, fazendo pullback tem-se

$$\Phi_1^*(\theta_\Lambda) = \frac{1}{t^2(v + t^{-1} + t^2)^3} \cdot \eta_\Lambda,$$

onde

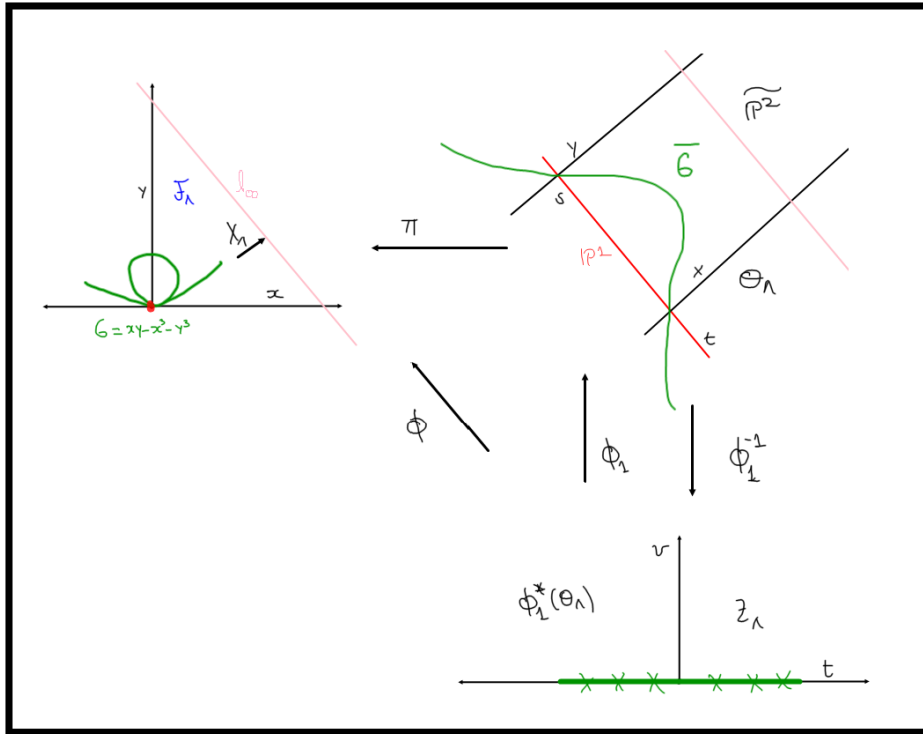
$$\eta_\Lambda = (P_\Lambda(t) + tQ_\Lambda(t)v + \lambda v^2)dt - (\lambda - 1)t^3v dv,$$

onde  $P_\Lambda$  e  $Q_\Lambda$  são como (2.10). O lema segue observando que o campo vetorial dual a  $\eta_\Lambda$  é

$$Z_\Lambda = (\lambda - 1)t^3v\partial_t + (P_\Lambda(t) + tQ_\Lambda(t)v + \lambda t^3v^2)\partial_v.$$

Concluindo a demonstração do Lema 2.21.





□

**Observação 2.22.** *Notemos que*

$$\text{Sing}(Z_\Lambda) \setminus \{0\} = \Phi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) \setminus \{0\}) = (v = P_\Lambda(t) = 0) \setminus \{0\}.$$

Como  $P_\Lambda(t)$  é um polinômio mônico de grau 6, podemos escrever

$$P_\Lambda(t) = \prod_{j=1}^6 (t - \tau_j(\Lambda)),$$

onde  $\tau_1(\Lambda), \dots, \tau_6(\Lambda)$  são raízes de  $P_\Lambda(t) = 0$ . Quando  $\mathcal{F}_\Lambda \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  então

- (i)  $\tau_j(\Lambda) \neq 0$ , se  $1 \leq j \leq 6$ . Segue do fato de que se  $t = 0$  fosse raiz de  $P_\Lambda(t) = 0$ , então  $\lambda = 0$ , absurdo.
- (ii)  $\tau_i(\Lambda) \neq \tau_j(\Lambda) \neq 0$ , se  $1 \leq i < j \leq 6$ . Pois se existessem duas raízes iguais, teríamos duas singularidades iguais, digamos  $p = p_1 = p_2$ , logo  $m_p > 1$  e não seria não degenerada.

Por simplicidade, denotaremos  $q_j := (\tau_j(\lambda), 0)$ ,  $p_j(\Lambda) := \Phi(\tau_j(\Lambda), 0) = \Phi(q_j)$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , assim  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) = \{0, p_1(\Lambda), \dots, p_6(\Lambda)\}$ .

**Corolário 2.23.** *Assuma que  $\mathcal{F}_\Lambda \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$ . Seja*

$$\omega_\Lambda := \frac{Q_\Lambda^2(t)}{(1-\lambda)tP_\Lambda(t)} dt \quad (2.11)$$

Com as notações da Observação 2.22 temos

$$BB(\mathcal{F}_\Lambda, p_j(\Lambda)) = Res(\omega_\Lambda, t = \tau_j(\Lambda)), \quad 1 \leq j \leq 6. \quad (2.12)$$

*Demonstração.* Usando as notações da Observação 2.22 e lembrando que  $\Phi$  é um bihomomorfismo numa vizinhança de  $q_j$ , temos que

$$BB(\mathcal{F}_\Lambda, p_j(\Lambda)) = BB(Z_\Lambda, q_j), \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Como as singularidades de  $\mathcal{F}_\Lambda$  são não degeneradas, temos que

$$Det(DZ_\Lambda(q_j)) \neq 0,$$

e assim

$$BB(Z_\Lambda, q_j) = \frac{tr^2(DZ_\Lambda(q_j))}{det(DZ_\Lambda(q_j))}.$$

Fazendo os cálculos temos que

$$\begin{aligned} tr(DZ_\Lambda(q_j)) &= \tau_j(\Lambda)Q_\Lambda(\tau_j(\Lambda)), \\ det(DZ_\Lambda(q_j)) &= (1-\lambda)\tau_j(\Lambda)^3P'_\Lambda(\tau_j(\Lambda)). \end{aligned}$$

Logo

$$BB(Z_\Lambda, q_j) = \frac{Q_\Lambda^2(\tau_j(\Lambda))}{(1-\lambda)\tau_j(\Lambda)P'_\Lambda(\tau_j(\Lambda))} = Res(\omega_\Lambda, t = \tau_j(\Lambda)).$$

□

**Observação 2.24.** *Do Teorema de Baum-Bott, Teorema 2.6, temos que para  $\mathcal{F}_\Lambda \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  com singularidades isoladas,  $Sing(\mathcal{F}_\Lambda) = \{0, p_1(\Lambda), \dots, p_6(\Lambda)\}$*

$$BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) + \sum_{j=1}^6 BB(\mathcal{F}_\Lambda, p_j(\Lambda)) = 16.$$

*Provemos isto usando o Corolário 2.23 usando a equação (2.12) e o teorema dos resíduos.*

*Da prova do Lema 2.21 a 1-forma meromorfa  $\omega_\Lambda$  em  $\mathbb{P}^1$  tem oito polos:  $\{0, \infty, \tau_1(\Lambda), \dots, \tau_6(\Lambda)\}$ .*

*Fazendo os cálculos temos*

$$Res(\omega_\Lambda, 0) = \frac{(3\lambda - 1)^2}{\lambda(1 - \lambda)}, \quad Res(\omega_\Lambda, \infty) = \frac{(\lambda - 3)^2}{\lambda - 1}.$$

Além disso, sabemos que

$$BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}.$$

Da fórmula dos resíduos temos que

$$\sum_{t \text{ polo de } \omega_\Lambda} \text{Res}(\omega_\Lambda, t) = 0,$$

daqui

$$\text{Res}(\omega_\Lambda, 0) + \text{Res}(\omega_\Lambda, \infty) + \sum_{j=1}^6 \text{Res}(\omega_\Lambda, \tau_j) = 0,$$

logo

$$\sum_{j=1}^6 \text{Res}(\omega_\Lambda, \tau_j(\Lambda)) = -\frac{(3\lambda - 1)^2}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{(\lambda - 3)^2}{\lambda - 1}.$$

Portanto,

$$BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) + \sum_{j=1}^6 BB(\mathcal{F}_\Lambda, p_j(\Lambda)) = BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) + \sum_{j=1}^6 \text{Res}(\omega_\Lambda, \tau_j) = 16.$$

Como queríamos mostrar.

**Lema 2.25.** *Seja  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  e assuma que qualquer singularidade de  $\mathcal{F}$  está contida numa reta  $\mathcal{F}$ -invariante. Então  $\mathcal{F}$  tem uma singularidade radial.*

**Corolário 2.26.** *Seja  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  e assuma que  $BB(\mathcal{F}, p) \neq 4$  para todo  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ . Então  $\mathcal{F}$  tem pelo menos uma singularidade satisfazendo as condições (a') e (b). Em particular,  $\text{Orb}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Como  $BB(\mathcal{F}, p) \neq 4$ , a condição (a') é óbvia, além disso,  $\mathcal{F}$  não tem singularidade radial, pelo lema anterior isso implica que existe uma singularidade  $p$  que não possui reta invariante passando por ela, assim cumpre a condição (b), logo  $\mathcal{F}$  satisfaz a condição (\*), isto é, existe  $\Lambda$  tal que  $\mathcal{F}$  se expressa como  $\mathcal{F}_\Lambda$  ou seja,  $\text{Orb}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ .  $\square$

A seguir, um dos teoremas mais importantes para a prova do Teorema 2.9.

**Teorema 2.27.** *Se  $b_0 \notin \{0, 4, 16\}$ , então*

(A) *Existe  $\mathcal{F} \in \mathcal{W} \cap \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  com*

$$(a) \text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, \dots, p_6, p_7 = 0\}.$$

$$(b) BB(\mathcal{F}, p_7) = b_0.$$

$$(c) BB(\mathcal{F}, p_j) = \frac{16 - b_0}{6}, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

(B) Assuma que os valores característicos  $\lambda$  e  $\lambda^{-1}$  de  $\mathcal{F}$  em  $p_7$  satisfaçam

$$\lambda, \lambda^{-1} \notin \{t, t = -5 \text{ ou } t^3 + 12t^2 - 3t + 2 = 0\} =: \mathcal{A}.$$

Então

$$F(\mathcal{F}) \cap \mathcal{W} = \text{Orb}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{W} = \{\mathcal{F}, \phi^*(\mathcal{F})\},$$

onde  $\phi(x, y) = (y, x)$ .

(C) Caso contrario, ou seja,  $\lambda, \lambda^{-1} \in \mathcal{A}$ , então  $F(\mathcal{F})$  é uma fibra excepcional de  $\mathcal{BB}$  de dimensão 9. Em particular, só existem quatro fibras excepcionais de  $\mathcal{BB}$  para o qual o elemento genérico satisfaz (A).

*Demonstração.* Seja  $b_0$  como na hipótese. Desejamos provar que existe  $\Lambda = (\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma) \in \Delta$  tal que  $\mathcal{F}_\Lambda \in \mathbb{F}ol_{nd}(d, 2)$  com  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\Lambda) = \{0, p_1(\Lambda), \dots, p_7(\Lambda)\}$  satisfazendo:

$$1. BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) = b_0 = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}.$$

$$2. BB(\mathcal{F}_\Lambda, p_i(\Lambda)) = BB(\mathcal{F}_\Lambda, p_j(\Lambda)) =: \mu, \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq 6.$$

Como  $BB(\mathcal{F}_\Lambda, 0) = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}$ , do teorema de Baum-Bott, segue que  $\mu$  satisfaz

$$6\mu + \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} = 16. \quad (2.13)$$

Pelo Lema 2.21 e o Corolário 2.23 isto é equivalente a provar que existem polinômios  $P_\Lambda$  e  $Q_\Lambda$  como na equação (2.10) tal que a 1-forma

$$\omega_\Lambda = \frac{Q_\Lambda^2(t)}{(1 - \lambda)tP_\Lambda(t)} dt,$$

tem todos os seus resíduos nas raízes de  $P_\Lambda(t) = 0$  iguais a  $\mu$  e seja

$$a := \text{Res}(\omega_\Lambda, 0) = \frac{(3\lambda - 1)^2}{\lambda(1 - \lambda)}.$$

Como  $\deg(Q_\Lambda^2) \leq 6 < \deg(tP_\Lambda)$ , se fazemos

$$P_\Lambda(t) = (t - \tau_1) \dots (t - \tau_6),$$

temos que

$$\omega_\Lambda = \left( \frac{a}{t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\text{Res}(\omega_\Lambda, \tau_j)}{t - \tau_j} \right) dt = \left( \frac{a}{t} + \mu \sum_{j=1}^6 \frac{1}{t - \tau_j} \right) dt = \left( \frac{a}{t} + \mu \frac{P'_\Lambda(t)}{P_\Lambda(t)} \right) dt.$$

Ou seja, temos que achar  $\Lambda \in \Delta$  tal que é satisfeita a seguinte identidade:

$$\frac{Q_\Lambda^2(t)}{(1 - \lambda)tP_\Lambda(t)} = \frac{a}{t} + \mu \frac{P'_\Lambda(t)}{P_\Lambda(t)}, \quad (2.14)$$

onde  $P_\Lambda$  e  $Q_\Lambda$  são como na equação (2.10).

Substituindo o valor de  $a$  na equação (2.14) obtemos

$$\lambda(1 - \lambda)\mu t P'_\Lambda(t) + (3\lambda - 1)^2 P_\Lambda(t) - \lambda Q_\Lambda^2(t) \equiv 0. \quad (2.15)$$

A igualdade acima impõe condições sobre os coeficientes de  $t, \dots, t^5$  do lado direito envolvendo os parâmetros  $\lambda, A, B, \alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Vamos provar que tem uma solução se  $b_0 \notin \{0, 4, 16\}$ . Depois de substituir (2.10) e (2.13) em (2.15) os coeficientes de  $t$  e  $t^5$  são:

$$\begin{cases} \text{Coeficientes de } t \text{ em (2.15)} : & \frac{1}{6}(\lambda + 5)(\lambda - 1)^2 A = 0. \\ \text{Coeficientes de } t^5 \text{ em (2.15)} : & \frac{1}{6}(5\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 B = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Como  $\lambda \neq 1$ , das equações em (2.16) temos os seguintes três casos:

**Caso 1.**  $\lambda = -5$ , então  $B = 0$  e  $A \in \mathbb{C}$ .

**Caso 2.**  $\lambda = -1/5$ , então  $A = 0$  e  $B \in \mathbb{C}$ .

**Caso 3.**  $\lambda, \lambda^{-1} \neq -5$ , então  $A = B = 0$ .

Vejamos esses casos.

**Caso 1.** Substituindo  $\lambda = -5$  e  $B = 0$  em (2.10) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coeficientes de } t^3 \text{ em (2.15): } \quad -32\beta - 1152 = 0 \Rightarrow \beta = -36. \\ \text{Coeficientes de } t^2 \text{ em (2.15): } \quad 64\alpha + 5A^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -5A^2/64. \\ \text{Coeficientes de } t^4 \text{ em (2.15): } \quad -128\gamma - 48A = 0 \Rightarrow \gamma = -3A/8. \end{array} \right.$$

Assim, temos

$$\Lambda = (-5, A, 0, -5A^2/64, -36, -3A/8) =: \Lambda(A)$$

e assim  $\mathcal{F}_{\Lambda(A)} := \mathcal{F}_A$  é definida por

$$X_A = p_A(x, y)\partial_x + q_A(x, y)\partial_y,$$

onde

$$\begin{aligned} p_A(x, y) &= -5x + Ax^2 + 6y^2 + x \left( -\frac{5}{64}A^2x^2 - 36xy - \frac{3}{8}Ay^2 \right), \\ q_A(x, y) &= y - 6x^2 + Axy + y \left( -\frac{5}{64}A^2x^2 - 36xy - \frac{3}{8}Ay^2 \right). \end{aligned}$$

Isto mostra (A) para este caso. Por outro lado, como  $\lambda \in \mathcal{A}$ , falta provar (C). Observemos que temos obtido uma família de folheações  $E_0 = \{\mathcal{F}_A\}_{A \in \mathbb{C}}$ . Temos que para todo  $A \in \mathbb{C}$ ,  $iso(\mathcal{F}_A)$  é finito, e assim

$$\dim(Sat(E_0)) = 9.$$

Por outra parte,  $BB(\mathcal{F}_{X_A}, 0) = -\frac{16}{5}$ , o que implica que  $\mu = \frac{16}{5}$  e

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}_{X_A}) = \left[ -\frac{16}{5}, \frac{16}{5}, \frac{16}{5}, \frac{16}{5}, \frac{16}{5}, \frac{16}{5}, \frac{16}{5} \right] =: M.$$

Como  $Sat(E_0) \subset \mathcal{BB}^{-1}(M)$ , a fibra  $\mathcal{BB}^{-1}(M)$  é excepcional, mostrando (C).

**Caso 2.** Neste caso temos  $\lambda = -1/5$ , então  $A = 0$ . Seja  $\sigma(x, y) = (y, x)$ , da Observação 2.19 temos que se  $\Lambda = (-5, A, 0, -5A^2/64, -36, -3A/8)$  como no caso anterior,

$$\hat{\sigma}(\Lambda) = (-1/5, 0, -A/5, 3A/40, 36/5, A^2/64),$$

fazendo  $B = -A/5$ , obtemos a solução para o caso 2

$$\hat{\sigma}(\Lambda) = (-1/5, 0, B, -3B/8, 36/5, 25B^2/64).$$

Que prova (A) para este caso.

**Caso 3.** Neste caso  $\lambda, \lambda^{-1} \neq 5$ . Substituindo  $A = B = 0$  em (2.10), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coeficientes de } t^3 \text{ em (2.15) : } \frac{1}{2}[(\lambda + 1)^3\beta + (\lambda^2 + 18\lambda + 1)(\lambda - 1)^2] = 0. \\ \text{Coeficientes de } t^2 \text{ em (2.15) : } \frac{1}{3}\alpha(\lambda^3 + 12\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0. \\ \text{Coeficientes de } t^4 \text{ em (2.15) : } \frac{1}{3}\gamma(2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 12\lambda + 1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Como  $\lambda \neq -1$ , da primeira equação temos que

$$\beta = \beta(\lambda) = -\frac{(\lambda^2 + 18\lambda + 1)(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 1)^3}.$$

Como os polinômios  $\lambda^3 + 12\lambda^2 - 3\lambda + 2$  e  $2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 12\lambda + 1$  não tem raízes em comum, da segunda e terceira equações em (2.17) temos os seguintes subcasos:

**Caso 3.1**  $\lambda^3 + 12\lambda^2 - 3\lambda + 2 \neq 0$  e  $2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 12\lambda + 1 \neq 0$ .

Neste caso temos que  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\lambda, \lambda^{-1} \notin \mathcal{A}$  e temos

$$\Lambda = \Lambda(\lambda) = (\lambda, 0, 0, 0, \beta(\lambda), 0).$$

Obtendo o campo vetorial

$$X_\lambda = (\lambda x + (1 - \lambda)y^2 + \beta(\lambda)x^2y)\partial_x + (y + (\lambda - 1)x^2 + \beta(\lambda)xy^2)\partial_y$$

que induz a folheação  $\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)} = \mathcal{F}_{X_\lambda}$  que satisfaz a parte (A) do teorema.

Provemos agora a parte (B). Da Observação 2.19 sabemos que

$$\sigma^*(\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}) = \mathcal{F}_{\hat{\sigma}(\Lambda(\lambda))},$$

onde

$$\hat{\sigma}(\Lambda(\lambda)) = (\lambda^{-1}, 0, 0, 0, \beta(\lambda^{-1}), 0) = \Lambda(\lambda^{-1}).$$

Assim temos que as únicas soluções da identidade (2.15) com  $\lambda, \lambda^{-1} \notin \mathcal{A}$  e os índices de Baum-Bott pedidos são  $\Lambda(\lambda)$  e  $\Lambda(\lambda^{-1})$  e portanto

$$F_2(\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}) \cap \mathcal{W} = \{\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}, \mathcal{F}_{\Lambda(\lambda^{-1})}\},$$

mas, como

$$\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda^{-1})} = \mathcal{F}_{\hat{\sigma}(\Lambda(\lambda))} = \sigma^*(\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}) \in \mathcal{O}rb(\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}),$$

obtemos

$$F_2(\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{O}rb(\mathcal{F}_{\Lambda(\lambda)}) \cap \mathcal{W}. \quad (2.18)$$

Provando (B) do Teorema 2.27.

**Caso 3.2** Neste caso obtemos

$$\Lambda = (\lambda, 0, 0, \alpha, \beta(\lambda), 0).$$

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  as raízes de  $s^3 + 12s^2 - 3s + 2 = 0$ , logo para cada  $i = 1, 2, 3$  e cada  $\alpha \in \mathbb{C}$  obtemos o campo

$$X_{i\alpha} = P_{i\alpha}(x, y)\partial_x + Q_{i\alpha}(x, y)\partial_y,$$

onde

$$P_{i\alpha} = \lambda_i x + (1 - \lambda_i)y^2 + x(\alpha x^2 + \beta(\lambda_i)xy)$$

e

$$Q_{i\alpha} = y + (\lambda_i - 1)x^2 + y(\alpha x^2 + \beta(\lambda_i)xy),$$

que induz a folheação  $\mathcal{F}_{i\alpha} := \mathcal{F}_{X_{i\alpha}}$ . Temos assim, três famílias de folheações

$$E_i = \{\mathcal{F}_{i\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{C}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para  $i \in \{1, 2, 3\}$  fixo e  $\alpha \in \mathbb{C}$  seja  $Sing(\mathcal{F}_{i\alpha}) = \{0, p_1^i(\alpha), \dots, p_6^i(\alpha)\}$ . Se  $\mathcal{F}_{i\alpha} \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$ , então

$$* \quad BB(\mathcal{F}_{i\alpha}, 0) = \frac{(\lambda_i + 1)^2}{\lambda_i}.$$



$$* \quad BB(\mathcal{F}_{i\alpha}, p_j^i(\alpha)) = \frac{16 - BB(\mathcal{F}_{i\alpha}, 0)}{6} = -\frac{(\lambda_i^2 - 14\lambda_i + 1)}{6\lambda_i}, \text{ para } 1 \leq j \leq 6.$$

Por outro lado, temos que

$$-\left( \frac{s^2 - 14s + 1}{6s} + \frac{(s+5)^2}{12} \right) = -\frac{1}{12s}(s^3 + 12s^2 - 3s + 2).$$

Sendo  $\lambda_i$  raiz de  $s^3 + 12s^2 - 3s + 2 = 0$ , a igualdade anterior implica que

$$BB(\mathcal{F}_{i\alpha}, p_j^i(\alpha)) = -\frac{(\lambda_i^2 - 14\lambda_i + 1)}{6\lambda_i} = \frac{(\lambda_i + 5)^2}{12}, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Em particular

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}_{i\alpha}) = \left[ \frac{(\lambda_i + 1)^2}{\lambda_i}, \frac{(\lambda_i + 5)^2}{12}, \dots, \frac{(\lambda_i + 5)^2}{12} \right] =: M_i$$

e

$$E_i \subset \mathcal{BB}^{-1}(M_i) \implies \text{Sat}(E_i) \subset \mathcal{BB}^{-1}(M_i).$$

Mostra-se que para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$ , o grupo  $\text{Iso}(\mathcal{F}_{i\alpha})$  é finito, isto implica que

$$\dim(\text{Sat}(E_i)) = 9,$$

mostrando que  $\mathcal{BB}^{-1}(M_i)$  é excepcional para cada  $i = 1, 2, 3$ .

**Caso 3.3** Usando a Observação 2.19 podemos reduzir ao caso anterior, analogamente ao feito nos casos 1 e 2.

Isto termina a prova do Teorema 2.27.

□

**Corolário 2.28.** *Seja  $\mathcal{G} \in \mathbb{Fol}_{nd}(2, 2)$ , tal que:*

1.  $\text{Sing}(\mathcal{G}) = \{q_1, \dots, q_7\}$ .
2.  $BB(\mathcal{G}, q_7) = b_0 \notin \{0, 4, 16\}$ .
3.  $BB(\mathcal{G}, q_j) = \frac{16 - b_0}{6}, 1 \leq j \leq 6$ .

4. Denotemos por  $\lambda, \lambda^{-1}$  e  $\rho, \rho^{-1}$  aos valores característicos de  $\mathcal{G}$  em  $q_7$  e  $q_j$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , respectivamente. Assuma que  $\lambda, \lambda^{-1} \notin \mathcal{A}$  e

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 1, \quad \forall \alpha \in \{\lambda, \lambda^{-1}\}, \quad \forall \beta, \gamma \in \{\rho, \rho^{-1}\}. \quad (2.19)$$

Então  $\mathcal{O}rb(\mathcal{G}) = F(\mathcal{G})$ .

*Demonstração.* A condição (2.19) e o teorema de Camacho-Sad implica que não existe uma reta  $\mathcal{G}$ -invariante passando por  $q_7$ , pois caso contrario, seja  $l$  tal reta, então como  $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$ ,  $l$  contém exatamente três singularidades de  $\mathcal{G}$ , sejam  $q_5$  e  $q_6$ . Pelo teorema de Camacho-Sad temos que

$$CS(\mathcal{G}, l, q_5) + CS(\mathcal{G}, l, q_6) + CS(\mathcal{G}, l, q_7) = 1.$$

Mas  $CS(\mathcal{G}, l, q_5)$ ,  $CS(\mathcal{G}, l, q_6)$  só podem ser  $\rho, \rho^{-1}$  e  $CS(\mathcal{G}, l, q_7)$  pode ser  $\lambda, \lambda^{-1}$ , logo (2.19) implica que a igualdade acima é impossível, e assim não existe uma reta  $\mathcal{G}$ -invariante passando por  $q_7$ .

Portanto,  $\mathcal{G}$  satisfaz as condições (a') e (b) da Observação 2.18 e podemos aplicar o Lema 2.17 para obter  $\mathcal{F}_\Lambda \in \mathcal{O}rb(\mathcal{G}) \cap \mathcal{W}$ , com  $\Lambda = (\lambda, A, B, \alpha, \beta, \gamma)$ . Temos também que  $F_2(\mathcal{G}) = F_2(\mathcal{F}_\Lambda)$  e como  $\Lambda$  satisfaz as condições do Caso 3.1 temos que  $\Lambda = (\lambda, 0, 0, 0, \beta(\lambda), 0)$  e

$$F_2(\mathcal{G}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_\Lambda) \cap \mathcal{W} = \{\mathcal{F}_\Lambda, \sigma^*(\mathcal{F}_\Lambda)\} \subset \mathcal{O}rb(\mathcal{G}),$$

logo

$$F_2(\mathcal{G}) = \text{Sat}(F_2(\mathcal{G}) \cap \mathcal{W}) \subset \text{Sat}(\mathcal{O}rb(\mathcal{G})) \subset F_2(\mathcal{G}).$$

Portanto,

$$F_2(\mathcal{G}) = \mathcal{O}rb(\mathcal{G}).$$

□

# Capítulo 3

## Prova do Teorema Principal

Na prova do Teorema 2.9 vamos usar que  $\text{Card}(\text{Iso}(\mathcal{J}_2)) = 21$  e resultados dos capítulos anteriores.

### 3.1 Resultados da Folheação de Jouanolou de Grau 2

Lembremos da Seção 2.3 que a folheação de Jouanolou de grau dois,  $\mathcal{J}_2$ , pode ser definida em uma carta afim  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  pelo campo vetorial

$$X_{\mathcal{J}} := (1 - xy)\partial_x + (x^2 - y^2)\partial_y.$$

E também que  $\text{Iso}(\mathcal{J}_2) = \langle T, S \rangle$  é um grupo de ordem 21, onde nessas coordenadas

- $T(x, y) = (\zeta^{-2}x, \zeta y), \quad \zeta = e^{2\pi i/7}.$
- $S(x, y) = (y^{-1}, xy^{-1}).$

Além disso, cumpre-se  $T^*(X_{\mathcal{J}}) = \zeta^2 X_{\mathcal{J}}, S^*(X_{\mathcal{J}}) = y^{-1} X_{\mathcal{J}}$  e

$$\text{Sing}(\mathcal{J}_2) = \{p_1, \dots, p_7\},$$

onde  $p_1 = (1, 1)$  e  $p_j = T^{j-1}(1, 1), 1 \leq j \leq 7$ , e portanto

$$BB(\mathcal{J}_2, p_i) = BB(\mathcal{J}_2, p_j), \quad \forall 1 \leq i < j \leq 7.$$

Assim pelo teorema de Baum-Bott

$$BB(\mathcal{J}_2, p_j) = \frac{16}{7}, \quad \forall 1 \leq j \leq 7.$$

Os valores característicos da folheação de Jouanolou  $\mathcal{J}_2$  em qualquer das suas singularidades são  $\lambda_0 = \frac{1+4\sqrt{3}i}{7}$  e  $\lambda_0^{-1} = \bar{\lambda}_0$ . Temos que  $\mathcal{J}_2$  satisfaz as hipóteses do Corolário 2.28 e temos

- $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2) = F_2(\mathcal{J}_2)$ .
- $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2) \cap W = \{\mathcal{F}_{\Lambda_1}, \mathcal{F}_{\Lambda_2}\}$ , donde  $\Lambda_1 = (\lambda_0, 0, 0, 0, \beta(\lambda_0), 0)$  e  $\Lambda_2 = (\bar{\lambda}_0, 0, 0, 0, \beta(\bar{\lambda}_0), 0)$ .

Como todas as singularidades de  $\mathcal{J}_2$  são não degeneradas, podemos achar uma vizinhança  $\mathcal{U}_1$  de  $\mathcal{J}_2$  em  $\mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  e funções holomorfas

$$P_j : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad 1 \leq j \leq 7,$$

tais que

(i)  $P_j(\mathcal{J}_2) = p_j, 1 \leq j \leq 7$ .

(ii) Para toda  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_1$ , temos que

$$Sing(\mathcal{F}) = \{P_1(\mathcal{F}), \dots, P_7(\mathcal{F})\}.$$

Para cada  $j = 1, \dots, 7$ , fixemos uma bola  $W_j$  com centro em  $p_j$ , tal que  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$  se  $i \neq j$ . Fazendo  $\mathcal{U}_1$  pequeno podemos assumir que

(iii)  $P_j(\mathcal{U}_1) \subset W_j, 1 \leq j \leq 7$ .

Definamos  $B : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^7$  por

$$B(\mathcal{F}) = (BB(\mathcal{F}, P_1(\mathcal{F})), \dots, (BB(\mathcal{F}, P_7(\mathcal{F})))) := (B_1(\mathcal{F}), \dots, B_7(\mathcal{F})).$$

Se

$$\Sigma = \left\{ (b_1, \dots, b_7) \in \mathbb{C}^7; \sum_{j=1}^7 b_j = 16 \right\},$$

pelo teorema de Baum-Bott temos que  $B(\mathcal{U}_1) \subset \Sigma$ .

No Corolário 2.16 vimos que  $B$  tem posto 6 em  $\mathcal{J}_2$ . Assim, existem vizinhanças  $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$  de  $\mathcal{J}_2$  em  $\mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  e  $V_2$  de  $(16/7, \dots, 16/7)$  em  $\Sigma$  tais que  $B|_{\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_2 \rightarrow V_2$  tem posto 6.

Fixemos algumas notações:

- (I)  $b_0 := B(\mathcal{J}_2) = (16/7, \dots, 16/7)$ .
- (II) Dado  $b = (b_1, \dots, b_7) \in \mathbb{C}^7$ , denotamos por  $[b] = [b_1, \dots, b_7]$ , a imagem de  $b$  pelo mapa de simetrização  $\mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7/S_7$ .
- (III) Dado  $\sigma \in S_7$ , denotamos por  $\hat{\sigma} : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$  ao mapa definido por:

$$\hat{\sigma}(b_1, \dots, b_7) = (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(7)}).$$

**Lema 3.1.** *Existe uma seção transversal  $\Gamma$  a  $\text{Orb}(\mathcal{J}_2)$  com as seguintes propriedades:*

- (A)  $\Gamma \subset \mathcal{U}_2$ . Além disso, se  $V := B(\Gamma) \subset \Sigma$ , então  $B|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow V$  é um biholomorfismo.
- (B)  $\Gamma$  é  $\text{Iso}(\mathcal{J}_2)$ -invariante, isto é,  $\varphi^*(\Gamma) = \Gamma$  para todo  $\varphi \in \text{Iso}(\mathcal{J}_2)$ .
- (C)  $V$  é invariante pela ação

$$(\sigma, b) \in S_7 \times \mathbb{C}^7 \mapsto \hat{\sigma}(b) \in \mathbb{C}^7.$$

*Isto é,  $\hat{\sigma}(V) = V$ , para todo  $\sigma \in S_7$ .*

- (D) Se  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Gamma$  estão na mesma órbita, então existe  $\varphi \in \text{Iso}(\mathcal{J}_2)$  tal que  $\mathcal{F}_2 = \varphi^*(\mathcal{F}_1)$ .

A demonstração desse lema será feita na próxima seção.

**Corolário 3.2.** *Sejam  $\Gamma$  e  $V = B(\Gamma)$  como no Lema 3.1. Para  $b \in V$ , defina*

$$N(b) = \text{O número de órbitas contidas em } \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}[b] \text{ cortando } \Gamma.$$

*Então:*

- (A) Se  $b \in V$ , então  $N(b)$  divide 240.
- (B) Se  $b = (b_1, \dots, b_7) \in V$ , tal que  $b_i \neq b_j$ , para todo  $i \neq j$ , então  $N(b) = 240$ .

*Demonstração.* Pela parte (A) do Lema 3.1 o mapa  $B|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow V$  é um biholomorfismo. Seja  $b \in V$ , denotemos  $\mathcal{F}_b := (B|_{\Gamma})^{-1}(b) \in \Gamma$ . Assim, temos que  $\mathcal{F}_{b_0} = \mathcal{J}_2$ ,  $B(\mathcal{F}_b) = b$  e  $\mathcal{BB}(\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}) = [b]$ , para todo  $\sigma \in S_7$ .

Vamos definir um homomorfismo de grupos

$$\Phi : Iso(\mathcal{J}_2) \rightarrow S_7.$$

Dados,  $\mathcal{F} \in \Gamma$  e  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$ , pela parte (B), do Lema 3.1, temos que

$$\varphi^*(\mathcal{F}) \in \varphi^*(\Gamma) = \Gamma, \quad i.e. \quad \varphi^*(\mathcal{F}) \in \Gamma.$$

Se  $Y$  é um campo vetorial que define  $\mathcal{F}$ , então o campo vetorial

$$\varphi^*(Y) = (d\varphi)^{-1}(Y \circ \varphi)$$

define a  $\varphi^*(\mathcal{F})$ . Em particular temos que

$$Sing(\mathcal{F}) = \varphi(Sing(\varphi^*(\mathcal{F}))).$$

Como

$$Sing(\mathcal{F}) = \{P_1(\mathcal{F}), \dots, P_7(\mathcal{F})\} \text{ e } \varphi(Sing(\varphi^*(\mathcal{F}))) = \{P_1(\varphi^*(\mathcal{F})), \dots, P_7(\varphi^*(\mathcal{F}))\},$$

então existe uma única permutação  $\sigma_{\varphi} \in S_7$ , tal que

$$P_{\sigma_{\varphi}(j)}(\mathcal{F}) = \varphi(P_j(\varphi^*(\mathcal{F}))), \quad 1 \leq j \leq 7. \quad (3.1)$$

Defino

$$\begin{aligned} \Phi : Iso(\mathcal{J}_2) &\longrightarrow S_7 \\ \varphi &\longmapsto \Phi(\varphi) = \sigma_{\varphi}. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.1) mostra-se que  $\Phi$  é um homomorfismo de grupos e que

$$\Phi(T)(1, \dots, 7) = (7, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

e

$$\Phi(S)(1, \dots, 7) = (1, 5, 2, 6, 3, 7, 4).$$

Sendo que  $Iso(\mathcal{J}_2) = \langle T, S \rangle$  isto implica que  $\Phi(Iso(\mathcal{J}_2)) = \langle \Phi(T), \Phi(S) \rangle$ . Assim

$$\Phi : Iso(\mathcal{J}_2) \rightarrow \Phi(Iso(\mathcal{J}_2))$$

é um isomorfismo de grupos, portanto  $\#\Phi(Iso(\mathcal{J}_2)) = 21$ . Antes de seguir com a prova, usaremos a seguinte:

**Proposição 3.3.** *Se  $\mathcal{F} \in \Gamma$ , e  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$ , então com as notações de (III), têm-se*

$$B(\varphi^*(\mathcal{F})) = \widehat{\Phi(\varphi)}(B(\mathcal{F})).$$

*Demonstração.* Usando a equação 3.1 e as definições, temos que

$$\begin{aligned} B(\varphi^*(\mathcal{F})) &= (BB(\varphi^*(\mathcal{F}), P_1(\varphi^*(\mathcal{F}))), \dots, BB(\varphi^*(\mathcal{F}), P_7(\varphi^*(\mathcal{F})))) \\ &= (BB(\varphi^*(\mathcal{F}), \varphi^{-1}(P_{\Phi(\varphi)(1)}(\mathcal{F}))), \dots, BB(\varphi^*(\mathcal{F}), \varphi^{-1}(P_{\Phi(\varphi)(7)}(\mathcal{F})))) \\ &= (BB(\mathcal{F}, P_{\Phi(\varphi)(1)}(\mathcal{F})), \dots, BB(\mathcal{F}, P_{\Phi(\varphi)(7)}(\mathcal{F}))) \\ &= \widehat{\Phi(\varphi)}(B(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

□

Continuando com a prova do Corolário 3.2, fixemos  $b = (b_1, \dots, b_7) \in V$ , então temos que

$$\mathcal{BB}^{-1}[b] \cap \Gamma = \{\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}, \sigma \in S_7\}$$

e como  $\Gamma$  é transversal a  $\mathcal{Orb}(\mathcal{J}_2)$  isto implica que

$$\#(\mathcal{BB}^{-1}[b] \cap \Gamma) = 7!,$$

ou seja, existem  $7!$  folheações em  $\mathcal{BB}^{-1}[b] \cap \Gamma$ . Agora, seja

$$G_b = \{\sigma \in S_7, \hat{\sigma}(b) = b\} = Iso(b).$$

Achemos a quantidade de folheações em  $\mathcal{Orb}(\mathcal{F}_b) \cap \Gamma$ , isto é

$$\#[\mathcal{Orb}(\mathcal{F}_b) \cap \Gamma].$$

Dado  $\sigma \in S_7$ , temos duas possibilidades:

1.  $\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}$  e  $\mathcal{F}_b$  pertencem à mesma órbita de  $Aut(\mathbb{P}^2)$ .
2.  $\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}$  e  $\mathcal{F}_b$  não pertencem à mesma órbita de  $Aut(\mathbb{P}^2)$ .

No primeiro caso seja

$$M_b := \#\{\sigma \in S_7; \mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)} \text{ e } \mathcal{F}_b \text{ pertencem à mesma órbita de } Aut(\mathbb{P}^2)\}.$$

Ou seja,  $M_b = \#[\mathcal{Orb}(\mathcal{F}_b) \cap \Gamma]$ .

Pela parte (D) do Lema 3.1, sabemos que se  $\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}$  e  $\mathcal{F}_b$  pertencem à mesma órbita se e somente se, existe  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$  tal que

$$\varphi^*(\mathcal{F}_b) = \mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(b) &= B(\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}) = B(\varphi^*(\mathcal{F}_b)) \\ &= \widehat{\Phi(\varphi)}(B(\mathcal{F}_b)) = \widehat{\Phi(\varphi)}(b). \end{aligned}$$

Assim

$$\Phi(\varphi)^{-1} \circ \sigma \in G_b.$$

Portanto,  $\mathcal{F}_{\hat{\sigma}(b)}$ , e  $\mathcal{F}_b$  pertencem á mesma órbita se existem  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$  e  $g \in G_b$  tal que

$$\Phi(\varphi)^{-1} \circ \sigma = g \implies \sigma = \Phi(\varphi) \circ g.$$

Então

$$M_b = \#\{\sigma \in S_7 \mid \sigma = \Phi(\varphi) \circ g, \varphi \in Iso(\mathcal{J}_2), g \in G_b\}.$$

Fixando  $g \in G_b$  temos que

$$\{\Phi(\varphi) \circ g \mid \varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)\} = \Phi(Iso(\mathcal{J}_2))g$$

que é a classe lateral à direita de  $g$  segundo  $\Phi(Iso(\mathcal{J}_2))$ , logo

$$M_b = 21 \times l, \quad l \text{ é o número de classes laterais à direita de } g.$$

Para o segundo caso, seja  $c \in V$  diferente de  $b$ , pelo item (C) do Lema 3.1 sabemos que  $\hat{\sigma}(V) = V$ , para todo  $\sigma \in S_7$ , então podemos achar  $\sigma \in S_7$  tal que  $c = \hat{\sigma}(b)$  e usando o mesmo argumento temos que  $M_c = M_b$ , isto é,  $M_b$  não depende da permutação, e assim cada órbita tem a mesma quantidade de pontos, logo

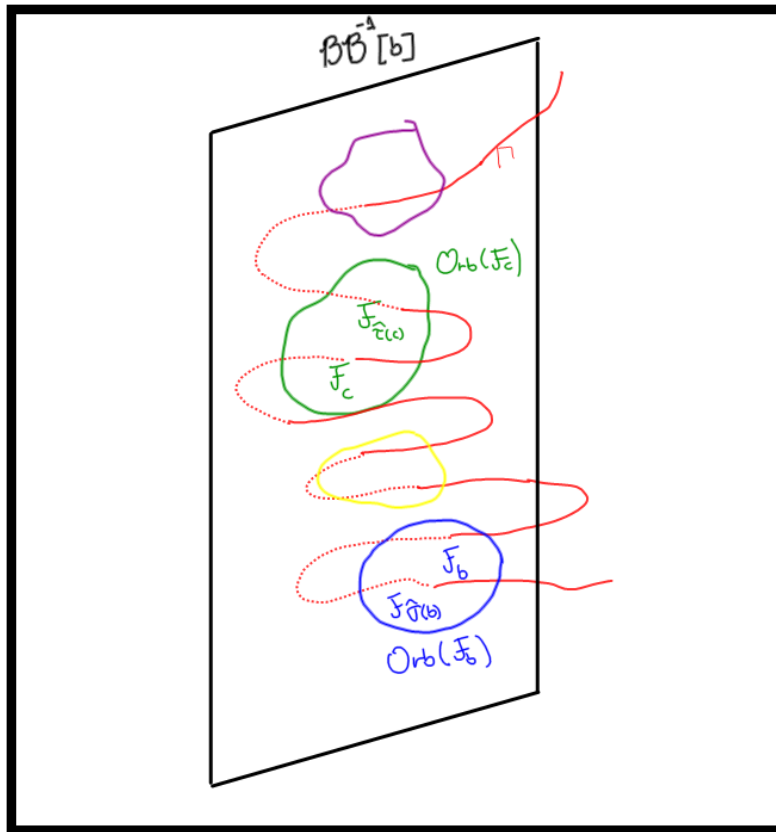
$$\begin{aligned} \#S_7 &= (\text{Número de órbitas contidas em } \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}[b] \text{ que cortam a } \Gamma) \cdot M_b \\ &= N(b) \cdot 21 \cdot l. \end{aligned}$$

Ou seja

$$N(b) = \frac{\#S_7}{21 \cdot l} = \frac{240}{l}.$$

No caso de que  $b_i \neq b_j$ , para todo  $i \neq j$ , temos que  $G_b = \{Id_{S_7}\}$  e então  $l = 1$ , isto implica que  $N(b) = 240$ , concluindo a prova do Corolário 3.2.





□

A demonstração do Teorema 2.9 será atingida se mostramos que existe uma vizinhança  $V_1 \subset V$  de  $b_0$  em  $\Sigma$  tal que para todo  $b \in V_1$  qualquer órbita contida em  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$  intersecta a seção transversal  $\Gamma$ . De fato, se isso é verdade, então:

- (a.) Para todo  $b \in V_1$ , o número de órbitas contidas em  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$  é no máximo 240, pois pelo mencionado acima, cada órbita contida em  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$  corta a  $\Gamma$ , e pelo Corolário 3.2 esse número divide 240.
- (b.) Se  $b = (b_1, \dots, b_7) \in V$ , tal que  $b_i \neq b_j$ , para todo  $i \neq j$ , então todas as órbitas contidas em  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$  (que são  $N(b) = 240$ ) cortam a  $\Gamma$ . Assim, existem 240 órbitas contidas em  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$ .

Usando os dados anteriores, o Teorema 2.9 será uma consequência das seguintes afirmações:

- (c.) Se a fibra de  $b \in \Sigma$  não é excepcional, então cada órbita contida em  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$  é uma componente irredutível de  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$ .
- (d.) Se as fibras de  $b, b' \in \Sigma$  não são excepcionais e a fibra de  $b$  é genérica, então o número de componentes irredutíveis de  $\mathcal{BB}^{-1}[b']$  é menor ou igual ao número de componentes irredutíveis de  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$ .
- (e.) O conjunto  $A = \{b \in \Sigma \mid \mathcal{BB}^{-1}[b] \text{ é uma fibra genérica}\}$  é aberto e denso em  $\Sigma$  (por definição de genérica).
- (f.) O conjunto  $B = \{b \in V_1 \mid b = (b_1, \dots, b_7), b_i \neq b_j, \text{ se } i \neq j\}$  é aberto e denso em  $V_1$ .

Com efeito, o conjunto  $\mathcal{M} = A \cap B$  é aberto e denso, e para todo  $b \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{BB}^{-1}[b]$  é genérica e tem 240 órbitas da ação  $\Psi$ .

A existência da vizinhança  $V_1$  como acima será uma consequência do seguinte lema.

**Lema 3.4.** *Seja  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência em  $\mathbb{F}ol_{nd}(2, 2)$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{BB}(\mathcal{F}_n) = [b_0].$$

*Então, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{O}rb(\mathcal{F}_n) \cap \Gamma \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* Como  $\Gamma$  é transversal a  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$  em  $\mathcal{J}_2$ , é suficiente provar que  $\mathcal{J}_2$  pertence ao fecho de

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}rb(\mathcal{F}_n).$$

Provemos que para  $n$  suficientemente grande temos que  $\mathcal{O}rb(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ .

Seja  $Sing(\mathcal{F}_n) = \{p_1^n, \dots, p_7^n\}$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{BB}(\mathcal{F}_n) = [b_0] = [16/7, \dots, 16/7],$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{F}_n, p_j^n) = \frac{16}{7}, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, 7\}.$$

Em particular, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_1$ , então

$$BB(\mathcal{F}_n, p_j^n) \neq 4, \quad 1 \leq j \leq 7.$$

Portanto, se  $n \geq n_1$ , então o Corolário 2.26 implica que

$$\mathcal{O}rb(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$$

e  $\mathcal{F}_n$  tem pelo menos uma singularidade satisfazendo (a') e (b) da Observação 2.18.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a singularidade  $p_7^n$  de  $\mathcal{F}_n$  é a singularidade que satisfaz as condições (a') e (b) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sejam  $\lambda_n, \lambda_n^{-1}$  os valores característicos de  $\mathcal{F}_n$  em  $p_7^n$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{F}_n, p_7^n) = \frac{16}{7},$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda_n, \lambda_n^{-1}\} = \{\lambda_0, \lambda_0^{-1}\}.$$

Asumamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda_0.$$

Em particular, fixando uma carta afim  $(x, y) \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^2$ , existe

$$\Lambda_n = (\lambda_n, A_n, B_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{C}^6$$

tal que  $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{\Lambda_n} \in \mathcal{O}rb(\mathcal{F}_n)$ .

Nesta carta afim,  $\mathcal{G}_n$  é representado pelo campo vetorial  $X_n = p_n \partial_x + q_n \partial_y$ , onde

$$\begin{cases} p_n(x, y) = \lambda_n x + A_n x^2 + B_n xy + (1 - \lambda_n) y^2 + x(\alpha_n x^2 + \beta_n xy + \gamma_n y^2), \\ q_n(x, y) = y + (\lambda_n - 1)x^2 + A_n xy + B_n y^2 + y(\alpha_n x^2 + \beta_n xy + \gamma_n y^2). \end{cases}$$

É suficiente provar a seguinte:

**Proposição 3.5.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_n = (\lambda_0, 0, 0, 0, \beta(\lambda_0), 0) =: \Lambda_0.$$

Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\Lambda_0} \in \mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2).$$

*Demonstração.*

1. Suponhamos primeiro que a sequência  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada. Neste caso, é suficiente provar que qualquer subsequência convergente de  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\Lambda_0$ . Podemos supor sem perda de generalidade que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_n = (\lambda_0, A_0, B_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \tilde{\Lambda}_0 \in \mathbb{C}^6.$$

Seja  $\omega_n := \omega_{\Lambda_n}$  como no Corolário 2.23,

$$\omega_n = \frac{Q_n^2(t)}{(1 - \lambda_n)tP_n(t)} dt,$$

onde

$$\begin{cases} P_n(t) = t^6 + B_n t^5 + (A_n + \lambda_n)t^4 + (\lambda_n + \beta_n + 1)t^3 + (B_n + \alpha_n)t^2 + A_n t + \lambda_n, \\ Q_n(t) = (3 - \lambda_n)t^3 + B_n t^2 + A_n t + 3\lambda_n - 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Por comodidade seja  $C_n = A_n + \lambda_n$ ,  $D_n = \lambda_n + \beta_n + 1$  e  $E_n = B_n + \alpha_n$ , assim (3.2)

fica

$$\begin{cases} P_n(t) = t^6 + B_n t^5 + C_n t^4 + D_n t^3 + E_n t^2 + A_n t + \lambda_n, \\ Q_n(t) = (3 - \lambda_n)t^3 + B_n t^2 + A_n t + 3\lambda_n - 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = \omega_{\tilde{\Lambda}_0} = \frac{Q_0^2(t)}{(1 - \lambda_0)tP_0(t)} dt =: \omega_0,$$

onde  $P_0(t)$  e  $Q_0(t)$  são como em (3.3) com  $n = 0$ . Denotemos por  $\tau_1^0, \dots, \tau_6^0$  as raízes de  $P_0(t) = 0$ .

Seja  $\Phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  a transformação birracional do Lema 2.21. Escolhamos raízes  $\tau_1^n, \dots, \tau_6^n$  de  $P_n(t) = 0$  e as singularidades  $q_1^n, \dots, q_6^n$  de  $\mathcal{G}_n$  de tal maneira que

$$\Phi(\tau_j^n) = q_j^n, \quad 1 \leq j \leq 6, n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\text{Res}(\omega_n, 0) = \frac{(3 - \lambda_n)^2}{\lambda_n \cdot (1 - \lambda_n)} =: \mu_n$$

e

$$\text{Res}(\omega_n, \tau_j^n) = BB(\mathcal{G}_n, q_j^n), \quad 1 \leq j \leq 6, n \in \mathbb{N},$$

podemos escrever

$$\omega_n = \left( \frac{\mu_n}{t} + \sum_{j=1}^6 \frac{BB(\mathcal{G}_n, q_j^n)}{t - \tau_j^n} \right) dt. \quad (3.4)$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_j^n) = \frac{16}{7}, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, 6\}$$

e as raízes de  $P_n(t) = 0$  convergem às raízes de  $P_0(t) = 0$ , de (3.4) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = \left( \frac{\mu_0}{t} + \frac{16}{7} \sum_{j=1}^6 \frac{1}{t - \tau_j^0} \right) dt, \text{ onde } \mu_0 = \frac{(3 - \lambda_0)^2}{\lambda_0(1 - \lambda_0)}.$$

Mas isto implica que

$$\frac{\mu_0}{t} + \frac{16 P_0'(t)}{7 P_0(t)} = \frac{Q_0^2(t)}{(1 - \lambda_0)t Q_0(t)}.$$

Por outro lado, como  $\lambda_0 \notin \mathcal{A}$ , pelo feito na prova do Teorema 2.27 a equação em coeficientes de  $P_0$  e  $Q_0$  implica que

$$\tilde{\Lambda}_0 = (\lambda_0, 0, 0, \beta_0(\lambda_0), 0) = \Lambda_0.$$

Portanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_n = \Lambda_0$ .

2. Suponhamos agora, que a sequência  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  não é limitada. As equações em (3.3) mostram que as componentes de  $\Lambda_n$  são polinômios simétricos de  $\tau^n := (\tau_1^n, \dots, \tau_6^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto a sequência  $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  não é limitada. Podemos assumir então que

(I)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_1^n = \infty$ .

(II) As sequências  $\{\tau_j^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergem em  $\mathbb{P}^1$ ,  $2 \leq j \leq 6$ , isto é

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = \tau_j^0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad 2 \leq j \leq 6.$$

Como  $P_n(t)$  é mônico com coeficiente constante  $\lambda_n$ , obtemos

$$\prod_{j=1}^6 \tau_j^n = \lambda_n,$$

tomando limite temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^6 \tau_j^n = \lambda_0 \notin \{0, \infty\}.$$

Assim, existe  $j \in \{2, \dots, 6\}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = 0.$$

Definamos

$$k := \#\{j; \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = \infty\}, \text{ e } l := \#\{j; \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = 0\} \geq 1.$$

Reordenando de novo os índices  $j = 2, \dots, 6$ , podemos assumir que

$$(III) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = \infty, \quad 1 \leq j \leq k.$$

$$(IV) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = 0, \quad k+1 \leq j \leq k+l.$$

(V) Se  $k+l < 6$  então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = \tau_j^0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k+l+1 \leq j \leq 6.$$

Agora usemos que

$$BB(\mathcal{G}_n, q_j^n) = Res(\omega_n, \tau_j^n)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_j^n) = \frac{16}{7}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} BB(\mathcal{G}_n, q_j^n) &= Res(\omega_n, \tau_j^n) = \frac{Q_n^2(\tau_j^n)}{(1 - \lambda_n) \tau_j^n P_n'(\tau_j^n)} \\ &= \frac{((3 - \lambda_n)(\tau_j^n)^3 + B_n(\tau_j^n)^2 + A_n \tau_j^n + 3\lambda_n - 1)^2}{(1 - \lambda_n) \tau_j^n \prod_{i \neq j}^6 (\tau_j^n - \tau_i^n)} \\ &= \frac{\left( (3 - \lambda_n) + \frac{B_n}{\tau_j^n} + \frac{A_n}{(\tau_j^n)^2} + \frac{(3\lambda_n - 1)}{(\tau_j^n)^3} \right)^2}{(1 - \lambda_n) \prod_{i \neq j}^6 \left( 1 - \frac{\tau_i^n}{\tau_j^n} \right)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lembrando que os polinômios de (3.3) são simétricos temos que

$$B_n = -(\tau_1^n + \cdots + \tau_6^n) \text{ e } A_n = - \sum_{j_1 < \cdots < j_5} \tau_{j_1}^n \cdots \tau_{j_5}^n. \quad (3.6)$$

Provemos que  $k \geq 2$  e  $l \geq 2$ . Com efeito, suponhamos por contradição que  $k = 1$ , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_1^n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n < \infty, \text{ para } j > 1.$$

Portanto, (3.6) implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{(\tau_1^n)^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{\tau_1^n} = -1.$$

Tomando limite quando  $n \rightarrow +\infty$  em (3.5) e usando que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_1^n) = 16/7$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{16}{7} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_1^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\left( (3 - \lambda_n) + \frac{B_n}{\tau_1^n} + \frac{A_n}{(\tau_1^n)^2} + \frac{(3\lambda_n - 1)}{(\tau_1^n)^3} \right)^2}{(1 - \lambda_n) \prod_{i \neq 1}^6 \left( 1 - \frac{\tau_i^n}{\tau_1^n} \right)} \right) \\ &= \frac{(2 - \lambda_0)^2}{1 - \lambda_0}, \end{aligned}$$

e essa igualdade não é certa pois  $\lambda_0 = \frac{1 + 4\sqrt{3}i}{7}$ . Portanto,  $k \geq 2$ . Fazendo a mudança de variáveis  $t = 1/s$  e analogamente ao caso anterior tem-se que  $l \geq 2$ .

Agora provemos que  $k \geq 3$  e  $l \geq 3$ . Suponhamos por contradição que  $k = 2$ . Como  $l \geq 2$ , temos

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_1^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_2^n = \infty$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_3^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_4^n = 0$ .
- (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n \in \mathbb{C}$  para  $j > 4$ .

Tomando subsequências e reordenando se for necessário podemos supor que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tau_2^n}{\tau_1^n} = z \in \mathbb{C}.$$

Neste caso, de (3.6) temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{(\tau_1^n)^2} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{\tau_1^n} = -1 - z.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{16}{7} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_1^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\left( (3 - \lambda_n) + \frac{B_n}{\tau_1^n} + \frac{A_n}{(\tau_1^n)^2} + \frac{(3\lambda_n - 1)}{(\tau_1^n)^3} \right)^2}{(1 - \lambda_n) \prod_{i \neq 1}^6 \left( 1 - \frac{\tau_i^n}{\tau_1^n} \right)} \right) \\ &= \frac{(2 - \lambda_0 - z)^2}{(1 - \lambda_0)(1 - z)}. \end{aligned}$$

Lembrando também que  $\frac{(\lambda_0 + 1)^2}{\lambda_0} = \frac{16}{7}$ , a igualdade acima fica

$$\frac{(\lambda_0 + 1)^2}{\lambda_0} = \frac{16}{7} = \frac{(2 - \lambda_0 - z)^2}{(1 - \lambda_0)(1 - z)}. \quad (3.7)$$

Mas não existe  $z \in \mathbb{C}$  satisfazendo a equação (3.7). Para  $z = 0$ , de maneira análoga obtemos outra contradição.

Por outro lado, se  $z \neq 0$ , então de (3.6) temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{(\tau_2^n)^2} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{\tau_2^n} = -1 - \frac{1}{z}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{16}{7} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_2^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\left( (3 - \lambda_n) + \frac{B_n}{\tau_2^n} + \frac{A_n}{(\tau_2^n)^2} + \frac{(3\lambda_n - 2)}{(\tau_2^n)^3} \right)^2}{(1 - \lambda_n) \prod_{i \neq 2}^6 \left( 1 - \frac{\tau_i^n}{\tau_2^n} \right)} \right) \\ &= \frac{(2 - \lambda_0 - 1/z)^2}{(1 - \lambda_0)(1 - 1/z)}. \end{aligned}$$

e temos mais uma vez

$$\frac{(\lambda_0 + 1)^2}{\lambda_0} = \frac{(2 - \lambda_0 - z)^2}{(1 - \lambda_0)(1 - z)} = \frac{(2 - \lambda_0 - 1/z)^2}{(1 - \lambda_0)(1 - 1/z)} = \frac{16}{7}.$$



E como no caso anterior, não existe  $z \in \mathbb{C}$  que satisfaça a relação acima.

Essas contradições provam que  $k \geq 3$ . Fazendo a mesma mudança que no caso anterior, pode-se provar que  $l \geq 3$ . Portanto,  $k = l = 3$ , isto implica

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = \infty$ , para  $1 \leq j \leq 3$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = 0$  para  $4 \leq j \leq 6$ .

De (3.4) obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = \omega_0,$$

onde

$$\omega_0 = \frac{\mu_0 + 3 \cdot \frac{16}{7}}{t} dt = \frac{64}{7} - \frac{80\sqrt{3}}{21}i}{t} dt = \frac{\mu_1}{t} dt \neq 0. \quad (3.8)$$

A contradição será usando o seguinte resultado mais geral, no qual não é necessário assumir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} BB(\mathcal{G}_n, q_j^n) = \frac{16}{7}, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

**Lema 3.6.** *Seja*

$$\omega_n = \frac{Q_n^2(t)}{(1 - \lambda_n)tP_n(t)} dt,$$

como em (3.4) e  $\tau_1^n, \dots, \tau_6^n$  as raízes de  $P_n(t) = 0$ . Suponha que

- (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .
- (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = \frac{\mu_1}{t} dt$ ,  $\mu_1 \in \mathbb{C}$ .
- (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = \infty$ , se  $j = 1, 2, 3$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_j^n = 0$ , se  $j = 4, 5, 6$ .

Então  $\mu_1 = 0$ .

Isto contradiz (3.8) concluindo a demonstração da Proposição 3.5.

*Demonstração.* Dado um polinômio de grau  $k$ ,  $p(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_k$ ,  $a_0 \neq 0$ , definimos  $[p] := [a_0 : a_1 : \dots : a_k] \in \mathbb{P}^k$ , assim

$$[P_n] = [1 : B_n : C_n : D_n : E_n : A_n : \lambda_n] \in \mathbb{P}^6$$

e

$$[Q_n] = [3 - \lambda_n : B_n : A_n : 3\lambda_n - 1] \in \mathbb{P}^3.$$

Segue de (1) e (3) das hipóteses do Lema 3.6 que a sequência  $\{(B_n, C_n, D_n, E_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^5$  não é limitada e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [P_n] = [0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^6,$$

isto é, existe uma sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{C}^*$  com

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n P_n(t) = t^3.$$

Assim, temos duas possibilidades:

- \* A sequência  $\{(A_n, B_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^2$  é limitada. Neste caso os coeficientes de  $Q_n$  são limitados, e como a sequência  $\{(B_n, C_n, D_n, E_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^5$  não é limitada temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = 0.$$

Que demonstra o Lema.

- \* A sequência  $\{(A_n, B_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^2$  não é limitada. Neste caso, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [Q_n] = [0 : B_0 : A_0 : 0] \in \mathbb{P}^3.$$

Portanto, existe uma sequência  $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{C}^*$  com

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n Q_n(t) = B_0 t^2 + A_0 t \neq 0.$$

Em particular, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n^2}{c_n} \omega_n = \frac{(B_0 t^2 + A_0 t)^2}{(1 - \lambda)^4} dt.$$

Suponhamos que  $\mu_1 \neq 0$ , neste caso, o limite acima e a hipótese (2) do lema, implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n^2}{c_n} = \frac{(B_0 t^2 + A_0 t)^2}{\mu_1 (1 - \lambda) t^3} dt, \text{ para todo } t.$$

Mas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n^2}{c_n} = K$ ,  $K$  constante enquanto o lado direito não. Isso contradiz que  $\mu_1 \neq 0$ , logo  $\mu_1 = 0$ .

Isso completa a prova do Lema 3.6. □

Como  $\mu_1 = 0$  isto contradiz (3.8), e portanto, o caso (2) não pode acontecer.

Logo, temos provado a Proposição 3.5. □

Isto completa a prova do Lema (3.4). □

## 3.2 Demonstração do Lema 3.1

Antes de começar a demonstração lembremos a definição de folheação holomorfa no sentido algébrico.

**Definição 3.7.** Uma **folheação de dimensão um e grau  $d$  em  $\mathbb{P}^2$**  é uma seção global não nula de  $\mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-1)$ , para algum  $d \geq 0$ , módulo múltiplos constantes. Denotamos por  $\mathbb{F}ol(d, 2)$  ao espaço de folheações de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^2$ .

**Observação 3.8.** Da Definição 3.7, temos que se definirmos por  $\mathcal{X}(d, 2)$  ao conjunto de campos vetoriais polinomiais da forma

$$p(x, y)\partial_x + q(x, y)\partial_y + g(x, y)R(x, y),$$

onde  $\max\{\text{grau}(p), \text{grau}(q)\} \leq d$  e  $g$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$ , logo

$$\mathcal{X}(d, 2) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-1)).$$

Assim  $\mathbb{F}ol(d, 2) = \mathbb{P}(\mathcal{X}(d, 2))$ .

Nesta seção faremos o estudo realizado na Seção 2.3 para o caso  $d = 2$ .

Sejam  $S, T$  e  $X_{\mathcal{J}}$  como na Seção 3.1. Vimos que cumpre-se  $T^*(X_{\mathcal{J}}) = \zeta X_{\mathcal{J}}$ ,  $S^*(X_{\mathcal{J}}) = y^{-1}X_{\mathcal{J}}$  e também que o mapa de Baum-Bott é definido em

$$\mathbb{F}ol(2, 2) = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))).$$

Assim  $\mathcal{X}(2, 2)$  é o conjunto de campos vetoriais da forma

$$X(x, y) = p(x, y)\partial_x + q(x, y)\partial_y + g(x, y)R(x, y),$$

onde  $p, q, g$  são polinômios em  $\mathbb{C}[x, y]$ ,  $\max\{\deg(p), \deg(q)\} \leq d = \deg(g) = 2$ , e  $g$  homogêneo, onde  $R(x, y) = x\partial_x + y\partial_y$  é o campo radial. Note que

$$\mathcal{X}(2, 2) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$$

e neste caso temos que

$$\mathcal{X}(2, 2) = \langle x^i y^j \partial_x, x^i y^j \partial_y, x^k y^l R \mid 0 \leq i, j, k, l \leq 2, k + l = 2, \text{ e } i + j \leq 2 \rangle_{\mathbb{C}}. \quad (3.9)$$

Assim, podemos considerar  $\mathbb{F}ol(2, 2)$  parametrizado em coordenadas homogêneas por  $\mathcal{X}(2, 2)$  com projeção

$$\pi : \mathcal{X}(2, 2) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{X}(2, 2)) = \mathbb{F}ol(2, 2).$$

De (3.9) vemos que  $\mathcal{X}(2, 2)$  é o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial gerado pelo conjunto

$$\mathcal{P}_2 = \{x^i y^j \partial_x, x^i y^j \partial_y, x^k y^l R \mid 0 \leq i, j, k, l \leq 2, k + l = 2, \text{ e } i + j \leq 2\}.$$

Um elemento de  $\mathcal{P}_2$  será chamado de **monômio**. Dado  $X \in \mathcal{X}(2, 2)$  e  $W \in \mathcal{P}_2$ , denotaremos por  $Cf_W(X)$  ao coeficiente de  $W$  quando escrevemos  $X$  na base  $\mathcal{P}_2$ .

**Observação 3.9.** *Dado um campo vetorial polinomial  $Y$  em  $\mathbb{C}^2$ , definimos  $\tilde{S}(Y) := yS^*(Y)$  e  $\tilde{T}(Y) = \zeta^{-2}T^*(Y)$ , prova-se que  $\tilde{S}(\mathcal{X}(2, 2)) = \mathcal{X}(2, 2)$  e*

$$\tilde{S} : \mathcal{X}(2, 2) \rightarrow \mathcal{X}(2, 2)$$

*é um isomorfismo.*

Como  $T^*(X_{\mathcal{J}}) = \zeta^2 X_{\mathcal{J}}$ ,  $S^*(X_{\mathcal{J}}) = y^{-1} X_{\mathcal{J}}$ , obtemos  $\tilde{S}(X_{\mathcal{J}}) = X_{\mathcal{J}}$  e  $\tilde{T}(X_{\mathcal{J}}) = X_{\mathcal{J}}$ .  
 Observemos também que

$$\tilde{S} \circ \tilde{T} = \tilde{T}^2 \circ \tilde{S}, \quad \tilde{S}^3 = I, \quad \tilde{T}^7 = I, \quad (3.10)$$

onde  $I$  é a identidade de  $\mathcal{X}(2, 2)$ .

Seja  $G := \langle \tilde{T}, \tilde{S} \rangle$  o grupo gerado pelos isomorfismos  $\tilde{S}$  e  $\tilde{T}$  de  $\mathcal{X}(2, 2)$ . Temos que

\*  $\varphi(X_{\mathcal{J}}) = X_{\mathcal{J}}$ , para todo  $\varphi \in G$ .

\* (3.10) implica que  $G$  é isomorfo a  $Iso(\mathcal{J}_2)$ .

Em particular, podemos considerar a ação de  $Iso(\mathcal{J}_2)$  sobre  $\mathbb{F}ol(2, 2)$ , parametrizada nas coordenadas homogêneas por  $\mathcal{X}(2, 2)$ , pela ação do grupo  $G$  sobre  $\mathcal{X}(2, 2)$ .

A primeira parte da prova do Lema 3.1 será feita achando um subespaço de dimensão 6  $G$ -invariante,  $E \subset \mathcal{X}(2, 2)$ , tal que  $X_{\mathcal{J}} + E$  seja transversal a  $T_{X_{\mathcal{J}}}\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$ , o espaço tangente de  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$  em  $X_{\mathcal{J}}$ .

Como  $\tilde{T}^7 = I$ , os autovalores de  $\tilde{T}$  são:

$$\zeta^j, \quad 0 \leq j \leq 6, \quad \zeta = e^{2\pi i/7}.$$

Em particular, se denotarmos por  $E_j$  ao autoespaço do autovalor  $\zeta^j$ , então a decomposição canônica do operador  $\tilde{T} : \mathcal{X}(2, 2) \rightarrow \mathcal{X}(2, 2)$  pode ser escrita como

$$\mathcal{X}(2, 2) = \bigoplus_{j=0}^6 E_j.$$

Observemos também que a primeira relação de (3.10) implica que

$$\tilde{S}(E_r) = E_{4r \bmod 7}, \quad \text{para todo } r,$$

daqui

$$\tilde{S}(E_0) = E_0, E_1 \xrightarrow{\tilde{S}} E_4 \xrightarrow{\tilde{S}} E_2 \xrightarrow{\tilde{S}} E_1, \text{ e } E_3 \xrightarrow{\tilde{S}} E_5 \xrightarrow{\tilde{S}} E_6 \xrightarrow{\tilde{S}} E_3. \quad (3.11)$$

Por outra parte, prova-se que

\*  $E_0 = \langle \partial_x, x^2 \partial_y, y^2 R \rangle$ .

$$* E_1 = \langle y\partial_x, x^2R \rangle.$$

$$* E_2 = \langle y^2\partial_x, x\partial_y \rangle.$$

$$* E_3 = \langle x^2\partial_x, xy\partial_y \rangle.$$

$$* E_4 = \langle \partial_y, xyR \rangle.$$

$$* E_5 = \langle x\partial_x, y\partial_y \rangle.$$

$$* E_6 = \langle xy\partial_x, y^2\partial_y \rangle.$$

Usaremos os resultados provados na Seção 2.3. Se  $B : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^7$  como o mapa definido em uma vizinhança de  $X_{\mathcal{J}} \in \mathcal{X}(2, 2)$  então o Teorema 2.10 implica que  $\dim(\text{Ker}(DB(X_{\mathcal{J}}))) = 9$  e sua projeção,  $\pi$ , sobre  $T_{\mathcal{J}_2}\mathbb{F}ol(2, 2)$  coincide com  $T_{\mathcal{J}_2}\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$ .

De fato, como  $\tilde{T}(Y) = \zeta^{-2}T^*(Y) = \zeta^{-2}A^*(Y)$ , onde  $A^*$  é definido na Seção 2.3, temos que  $F_j = E_{j-2}$ , assim no Lema 2.15, provamos que um monômio  $W \in \mathcal{P}_2$  está em  $\text{Ker}(DB(X_{\mathcal{J}_2}))$  se, e somente se,  $W \in F_2 = E_{2-2} = E_0$ . Portanto, da equação (3.11) temos que se escolhermos os monômios

$$W_1 = y\partial_x \in E_1, \text{ e } W_3 = x^2\partial_x \in E_3,$$

temos que

$$\tilde{S}(W_1) \in E_4, \quad \tilde{S}^2(W_1) \in E_2, \quad \tilde{S}(W_3) \in E_5, \quad \tilde{S}^2(W_3) \in E_6,$$

então o subespaço

$$E = \langle W_1, \tilde{S}(W_1), \tilde{S}^2(W_1), W_3, \tilde{S}(W_3), \tilde{S}^2(W_3) \rangle$$

tem dimensão 6, é  $G$ -invariante e transversal a  $\text{Ker}(DB(X_{\mathcal{J}_2}))$ . Com efeito, vejamos primeiro que  $\tilde{T}(E) = E$  e  $\tilde{S}(E) = E$ . Seja

$$v = aW_1 + b\tilde{S}(W_1) + c\tilde{S}^2(W_1) + dW_3 + e\tilde{S}(W_3) + f\tilde{S}^2(W_3) \in E,$$

lembrando que  $\tilde{S}^3 = Id$ , temos que

$$\tilde{S}(v) = a\tilde{S}(W_1) + b\tilde{S}^2(W_1) + cW_1 + d\tilde{S}(W_3) + e\tilde{S}^2(W_3) + fW_3 \in E.$$

Assim,  $\tilde{S}(E) \subset E$ .

Seja agora  $v \in E$ ,

$$v = aW_1 + b\tilde{S}(W_1) + c\tilde{S}^2(W_1) + dW_3 + e\tilde{S}(W_3) + f\tilde{S}^2(W_3) \in E,$$

logo

$$\begin{aligned} v &= aW_1 + b\tilde{S}(W_1) + c\tilde{S}^2(W_1) + dW_3 + e\tilde{S}(W_3) + f\tilde{S}^2(W_3) \\ &= a\tilde{S}^3(W_1) + b\tilde{S}(W_1) + c\tilde{S}^2(W_1) + d\tilde{S}^3(W_3) + e\tilde{S}(W_3) + f\tilde{S}^2(W_3) \\ &= \tilde{S}(a\tilde{S}^2(W_1) + bW_1 + c\tilde{S}(W_1) + d\tilde{S}^2(W_3) + eW_3 + f\tilde{S}(W_3)) \\ &= \tilde{S}(bW_1 + c\tilde{S}(W_1) + a\tilde{S}^2(W_1) + eW_3 + f\tilde{S}(W_3) + d\tilde{S}^2(W_3)) \\ &= \tilde{S}(w), \quad w \in E. \end{aligned}$$

Portanto,  $\tilde{S}(E) = E$ , assim  $\tilde{S}^k(E) = E$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Agora, vejamos que o mesmo acontece para  $\tilde{T}$ . Seja

$$v = aW_1 + b\tilde{S}(W_1) + c\tilde{S}^2(W_1) + dW_3 + e\tilde{S}(W_3) + f\tilde{S}^2(W_3) \in E,$$

lembrando que

$$W_1 \in E_1, \quad \tilde{S}(W_1) \in E_4, \quad \tilde{S}^2(W_1) \in E_2, \quad W_3 \in E_3, \quad \tilde{S}(W_3) \in E_5, \quad \tilde{S}^2(W_3) \in E_6,$$

temos que

$$\text{i) } \tilde{T}(W_1) = \zeta W_1.$$

$$\text{ii) } \tilde{T}(\tilde{S}(W_1)) = \zeta^4 \tilde{S}(W_1).$$

$$\text{iii) } \tilde{T}(\tilde{S}^2(W_1)) = \zeta^2 \tilde{S}^2(W_1).$$

$$\text{iv) } \tilde{T}(W_3) = \zeta W_3.$$

$$\text{v) } \tilde{T}(\tilde{S}(W_3)) = \zeta^5 \tilde{S}(W_3).$$

$$\text{vi) } \tilde{T}(\tilde{S}^2(W_3)) = \zeta^6 \tilde{S}^2(W_3).$$

Assim

$$\begin{aligned} \tilde{T}(v) &= a\tilde{T}(W_1) + b\tilde{T}(\tilde{S}(W_1)) + c\tilde{T}(\tilde{S}^2(W_1)) + d\tilde{T}(W_3) + e\tilde{T}(\tilde{S}(W_3)) + f\tilde{T}(\tilde{S}^2(W_3)) \\ &= \zeta aW_1 + b\zeta^4 \tilde{S}(W_1) + c\zeta^3 \tilde{S}^2(W_1) + d\zeta W_3 + e\zeta^5 \tilde{S}(W_3) + f\zeta^6 \tilde{S}^2(W_3) \\ &= a'W_1 + b'\tilde{S}(W_1) + c'\tilde{S}^2(W_1) + d'W_3 + e'\tilde{S}(W_3) + f'\tilde{S}^2(W_3) \in E. \end{aligned}$$

Assim,  $\tilde{T}(E) \subset E$ . Portanto,  $\tilde{T}(E) = E$ , logo  $\tilde{T}^k(E) = E$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Seja agora  $\psi \in G$ , então  $\psi = \tilde{T}^k \tilde{S}^l$ , logo pelo feito acima temos que  $\psi(E) = E$ , isto mostra que  $E$  é  $G$ -invariante.

Além disso,  $DB(X_{\mathcal{J}}) : E \rightarrow T_{b_0}\Sigma$  é um isomorfismo. Assim, obtemos

- (i) A projeção de  $X_{\mathcal{J}} + E$  em  $\mathbb{F}ol(2, 2)$ , digamos  $\tilde{E}$ , é transversal a  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$  em  $\mathcal{J}_2$ .
- (ii) Existem vizinhanças  $\Gamma_1$  de  $\mathcal{J}$  em  $\tilde{E}$  e  $V_1$  de  $b_0$  em  $\Sigma$  tais que  $B_1 := B|_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \rightarrow V_1$  é um biholomorfismo.

Assim, se definimos

$$V := \bigcap_{\sigma \in S_7} \hat{\sigma}(V_1), \text{ e } \Gamma := B_1^{-1}(V),$$

então  $\Gamma$  e  $V$  satisfazem (A), (B) e (C) do Lema 3.1.

**Proposição 3.10.** *Se  $V$  e  $\Gamma$  são suficientemente pequenos, então  $\Gamma$  satisfaz (D) do Lema 3.1. Mais precisamente, se  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Gamma$  estão na mesma órbita, então existe  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$  tal que  $\mathcal{F}_2 = \varphi^*(\mathcal{F}_1)$ .*

*Demonstração.* Como  $\dim(\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)) = 8$  e  $\Gamma$  é uma seção transversal a  $\mathcal{O}rb(\mathcal{J}_2)$ , se  $\Gamma$  é suficientemente pequeno então existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  da identidade  $I \in Aut(\mathbb{P}^2)$  com a seguinte propriedade:

$$(**) \quad \text{Se } \mathcal{F} \in \Gamma, \varphi \in \mathcal{U}, \text{ e } \varphi^*(\mathcal{F}) \in \Gamma, \text{ então } \varphi = I.$$

Vamos supor que  $\Gamma$  satisfaz a propriedade (\*\*).

Suponhamos por contradição, que a Proposição 3.10 não é verdadeira. Assim, existem sequências  $(\mathcal{F}_{1n})_n, (\mathcal{F}_{2n})_n$  de folheações em  $\Gamma$ , e  $(\varphi_n)_n$  em  $Aut(\mathbb{P}^2) \setminus Iso(\mathcal{J}_2)$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{jn} = \mathcal{J}_2, j = 1, 2, \text{ e } \varphi^*(\mathcal{F}_{1n}) = \mathcal{F}_{2n}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Notemos que a condição (\*\*) implica que a sequência  $(\varphi_n)_n$  é discreta em  $Aut(\mathbb{P}^2)$ .

A ideia é provar que existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \varphi \in Aut(\mathbb{P}^2)$ . Pois nesse caso, teremos

$$\mathcal{J}_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^*(\mathcal{F}_{1n}) = \varphi^*(\mathcal{J}_2),$$



assim  $\varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$ .

Mas como a sequência é discreta em  $Aut(\mathbb{P}^2)$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$  temos que  $\varphi_n = \varphi \in Iso(\mathcal{J}_2)$  que é uma contradição.

**Observação 3.11.** Dizemos que quatro pontos em  $\mathbb{P}^2$  estão em **posição geral** se eles são dois a dois distintos e quaisquer deles, dois a dois distintos, não estão na mesma reta. Observe-se que quatro pontos quaisquer, dois a dois distintos, em  $Sing(\mathcal{J}_2)$  estão em posição geral.

Usaremos o seguinte resultado:

**Lema 3.12.** Seja  $(\psi_n)_n$  uma sequência em  $Aut(\mathbb{P}^2)$ . Assumamos que existem sequências  $(x_{jn})_n$  e  $(y_{jn})_n$  em  $\mathbb{P}^2$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tais que:

(A)  $\psi_n(x_{jn}) = y_{jn}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $j = 1, 2, 3, 4$ .

(B)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{jn} = x_j \in \mathbb{P}^2$ , e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{jn} = y_j \in \mathbb{P}^2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

(C) Os quatro pontos em ambos conjuntos  $\{x_1, \dots, x_4\}$  e  $\{y_1, \dots, y_4\}$  estão em posição geral.

Então existe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = \psi \in Aut(\mathbb{P}^2).$$

Continuando a prova da Proposição 3.10, sejam  $P_1, \dots, P_7$  os mapas holomorfos locais, definidos anteriormente, tais que

$$Sing(\mathcal{F}) = \{P_1(\mathcal{F}), \dots, P_7(\mathcal{F})\}$$

e  $P_j(\mathcal{J}_2) = p_j$ ,  $1 \leq j \leq 7$ . Na prova do Corolário 3.2 vimos que

$$Sing(\mathcal{F}_{1n}) = \varphi_n(Sing(\varphi_n^*(\mathcal{F}_{1n}))) = \varphi_n(Sing(\mathcal{F}_{2n})).$$

Como

$$Sing(\mathcal{F}_{jn}) = \{P_1(\mathcal{F}_{jn}), \dots, P_7(\mathcal{F}_{jn})\}, j = 1, 2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

existe uma permutação  $\sigma_n \in S_7$  tal que

$$\varphi_n(P_i(\mathcal{F}_{2n})) = P_{\sigma_n(i)}(\mathcal{F}_{1n}), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq i \leq 7.$$

Tomando uma subsequência se for necessário, como  $S_7$  é finito, podemos assumir que  $\sigma_n = \sigma \in S_7$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular

$$\varphi_n(P_i(\mathcal{F}_{2n})) = P_{\sigma(i)}(\mathcal{F}_{1n}), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq i \leq 7. \quad (3.12)$$

Denotando  $x_{jn} = P_j(\mathcal{F}_{2n})$  e  $y_{jn} = P_{\sigma(j)}(\mathcal{F}_{1n})$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , então

1.  $\varphi_n(x_{jn}) = y_{jn}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $j = 1, 2, 3, 4$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{jn} = p_j$ , e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{jn} = p_{\sigma(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .
3. Os quatro pontos em ambos conjuntos  $\{p_1, \dots, p_4\}$  e  $\{p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(4)}\}$  estão em posição geral.

Portanto, pelo Lema 3.12, existe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2).$$

Isto termina a prova do Lema 3.1 e assim do Teorema 2.9. □

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Brunella. *'Birational Geometry of Foliations'*. Publicações Matemáticas 2009, IMPA.
- [2] P. Griffiths: *'Introduction to Algebraic Curves'*. Translations of Mathematical Monographs vol. 76, American Mathematical Society (1989).
- [3] P. Griffiths and J. Harris. *'Principles of Algebraic Geometry'*. Wiley-Interscience, New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [4] A. Guillot. *'Semicompleteness of homogeneous quadratic vector fields'*. Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 56(2006), 1583-1615.
- [5] R. Hartshorne: *'Algebraic Geometry'*. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York (1977).
- [6] A. Hefez. *'Introdução à Geometria Projetiva'*. Monografias de Matemática Nro. 46, IMPA(1990).
- [7] J.P. Jouanolou. *'Équations de Pfaff Algébriques'*. Lecture Notes in Math.m 708, Springer-Verlag, Berlin (1979).
- [8] Ueno, Kenji. *'Algebraic Geometry 2: Sheaves and Cohomology'*. Translations of mathematical monographs 197. American Mathematical Society, 1999.
- [9] R. Miranda: *'Algebraic Curves and Riemann Surfaces'*. Graduate Studies in Mathematics vol. 5, American Mathematical Society (1995)

- [10] A. L. Neto e J. V. Pereira. ‘*The generic rank of the Baum-Bott map for foliations of the projective plane*’. *Compos. Math.*, 142(6) (2006), 1549-1586.
- [11] A. L. Neto. ‘*Fibers of the Baum-Bott map for foliations of degree two on  $\mathbb{P}^2$* ’. *Bull Braz Math Soc, New Series* 43(1),129-169 2012. Sociedade Brasileira de Matemática.
- [12] K. Petri. ‘*Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen*’. *Math. Ann.* 88, 242-289 (1922).
- [13] B. Scárdua, A. L. Neto ‘*Folheações Algébricas Complexas*’. 21 Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA(2011).
- [14] Marcio G. Soares: ‘*Determination of the top Baum-Bott number via classical intersection Theory*’*Bull Braz Math Soc, New Series* 35(1), 127-150(2004).
- [15] F. Miguel Zamora I. ‘*Teoremas de los Índices*’.Tesis de Licenciatura UNMSM, em preparação.