Universidade Federal Fluminense
Instituto de Física

Fundamentos da Teoria Clássica de Campos

Pedro Rangel Braga

Orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói
2012

PEDRO RANGEL BRAGA

FUNDAMENTOS DA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Trabalho de monografia apresentado ao curso de graduação em Física - Bacharelado, da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à conclusão do curso.

Orientador: Prof. Dr. RODRIGO FERREIRA SOBREIRO

Niterói-RJ
2012

Aos meus pais, avós e noiva.

Agradecimentos

Será bem difícil, netas poucas linhas condensar todas as pessoas que devo agradecer, mas existem algumas que não poderiam ficar de fora desta seção. São muitas pessoas que foram fundamentais na minha formação neste tempo de faculdade, desde já peço desculpas se não citarei alguém.

Gostaria de agradecer em primeiro lugar, ao Prof. Rodrigo Sobreiro pela paciência e atenção, com que me recebeu e aceitou me orientar neste trabalho. Neste tempo em que fui orientado, amadureci bastante e consegui vislumbrar o que seguirei na minha vida acadêmica, e o senhor tem papel fundamental neste processo. Muito obrigado.

Agradeço também aos professores que fizeram parte da minha jornada, ao Prof. Jorge Sá Martins pelos incontáveis conselhos, que trancenderam a categoria de professor, ao Prof. Jesus Lubián pela primeira oportunidade de iniciação cientifica, pela imensa paciência, e por todos os conselhos dados. Agradeço também aos professroes Paulo Gomes, Marco Moriconi e Nivaldo Lemos por também fazerem parte da minha formação.

Minha graduação foi muito boa por estar com os melhores amigos que poderia ter, obrigado Lais, Rogério, Samir, Claudio e Débora. Devo agradecer e especial ao Leonardo Silveira, Allan vieira e Antônio Duarte que foram praticamente minha família, neste período todas as conversas desde discuções sobre disciplinas, até os salgadinhos de 1 real foram inesquecíveis. Ao Rosembergue e Rafael deixo meu agradecimento, pelos dois últimos períodos de faculdade que foram extremamente divertidos.

Aos amigos fora do IF-UFF Rodrigo, Daniel Izidro, Daniel Boechart, Telma e Fernando, obrigado.

Gostaria de agradecer a minha família por tudo o que fizeram por mim, minha mãe e meu pai me deixam sem palavras para descrever tudo o que representam para mim, meus avós Orlando e Abner que são extensões dos meus pais, minha tia Maristela que foi minha mãe de Niterói, meus primos/irmãos Caroline e Lucas por serem os melhores primos do mundo, assim como Alessandro e Leandro, ao meu amigo que se tornou irmão Rainer e a minha noiva Isabela, que sem ela não estaria neste momento da minha vida. Obrigado, sem voçês não conseguiria.

Por fim agradeço a AMBEV por não me deixar só nos momentos de tristeza, e por me fazer ainda mais feliz nos momentos de alegria, orbigado por ter me acompanhado intensamente neste período, ao Wolframalpha que teve papel fundamental em algumas integrais, a Sony Entertainment pelo Playstation 3, ao Don Vitto Corleone, e ao Fluminense Football Club que tem me dado alegria e um time de guerreiros que me inspira a continuar.

"There is no gain without pain."

(Benjamin Franklin)

Resumo

A teoria de campos desempenha um papel fundamental no desenvolvimento das teorias físicas, uma vez que quase todas as teorias de importância Física podem ser colocadas no formato de campos. Neste trabalho estudamos os principais grupos clássicos de transformações. Através do teorema de Noether, podemos ver como as tranformações estão presentes nas quantidades conservadas destes sistemas.

Abstract

Field theory plays a fundamental role in the development of physical theories, since almost all of the theories of physical importance, can be placed as a field theory. We study the major classical groups of symmetry. We discuss Noether's theorem, from which we can see how the transformations imply in the existence of conserved quantities in these systems.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Ao longo deste trabalho veremos conceitos importantes de simetrias em um sistema físico. A teoria de grupos tem papel fundamental no desenvolvimento da *Teoria Clássica de Campos*, uma vez que estes grupos são a base matemática para representarmos as ideias físicas para determinadas simetrias. Faremos um estudo sobre os principais grupos clássicos, porém voltaremos nossa atenção basicamente para *o grupo de Lorentz* e *o grupo de Poincaré*. Quando trocamos as coordenadas generalizadas $q_k(t)$ para coordenadas de campos $\psi^A(x^\mu)$, estamos trocando um sistema discreto por um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade. A simetria para estas novas coordenadas, é feita com um teorema extremamente elegante e poderoso, que é o teorema de Noether. Estudaremos principalmente dois sistemas, *campos escalares* e *campos vetoriais.* Analisaremos em cada sistema as quantidades conservadas com o uso do teorema de Noether.

Para definir uma simetria entre os campos escalares e vetorial introduziremos uma simetria de calibres global e local do grupo U(1), onde veremos a invariância da lagrangeana somente para simetria global, e a necessidade de se introduzir um potencial quando a simetria local é feita.

Neste trabalho, usei como base principalmente as notas de aula do Professor Rodrigo Ferreira Sobreiro, baseada em um curso do Professor César Augusto Linhares da Fonseca júnior na Universidade do Estado do Rio de Janeiro[1].

1.1 Notação.

As notações usadas foram as convencionalmente usadas em teoria de campos, utilizamos também a convenção para somatórios de Einstein. Escolhemos a convenção de que índices gregos vão de zero a três e índices latinos de um a três. Estaremos trabalhando com o sistema de unidades naturais

$$c = G = \hbar = \kappa = \ldots = 1, \tag{1.1}$$

ou seja, todas as constantes universais serão tidas como a unidade. A notação de derivada parcial com relação a coordenada x^μ de um objeto ψ que fora usada é

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu}\psi = \psi_{,\mu}. \tag{1.2}$$

Também foi usada a seguinte notação $dx^n = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \dots dx^n$

Capítulo 2

GRUPOS

2.1 Introdução.

Dois conceitos importantes em Física são os de invariância e covariância. São importantes por estarem ligados diretamente à observação de um fenômeno físico. Quando realizamos uma transformação, ou uma mudança de referencial de observação, iremos procurar se certas grandezas físicas, como por exemplo a energia ou o momento, são invariantes ou covariantes, ou seja, se elas mudam dado uma mudança no referêncial de observação e como acontece esta mudança. A covariância é uma declaração sob o modo de se transformar destas gradezas físicas, e as classifica perante seu caráter covariante. Uma pergunta importante a ser feita é: estas grandezas físicas terão este caráter sob que tipos de transformação? Para responder a pergunta anteriormente feita teremos que ter uma ideia sobre simetria. Uma grandeza que é invariante sob uma transformação será simétrica, já uma que é covariante terá uma lei de tranfromação. Uma das maneiras de analisar simetrias se dá através do estudo dos grupos de transformações. A conexão entre as grandezas físicas e simetrias será feita pelas representações de cada grupo de transformação. Então, partiremos de uma situação real, que é a observação de um dado sistema, neste detectamos uma simetria, então associamos esta a um grupo de transformações. Isto levará a um espaço abstrato da álgebra deste grupo, que terá uma representação, e por fim nos trará novas informações reais sobre o sistema observado. Como exemplo ilustrativo podemos citar o caso da propagação da luz. Ao estudar as equações de Maxwell, notamos uma simetria, esta simetria nos leva ao grupo de Lorentz, que terá uma representação onde se encaixa o fóton, mas terá outra representação onde se encaixa o elétron, outra onde se encaixa um quark et cetera.

2.2 Postulados.

Um conjunto de elementos *A,B,C...* forma um grupo G sob uma aperação (.) se os elementos podem ser combinados de tal forma a satisfazer quatro postulados:

1. *Identidade.* Dentre os elementos do grupo existe $\mathbb{1}$ tal que para qualquer elemento A do grupo

$$A.\mathbb{1} = \mathbb{1}.A = A. \tag{2.1}$$

2. *Fechamento.* O produto de dois elementos do grupo corresponde a um elemento do grupo. Seja $A \in G$ e $B \in G$ então,

$$A.B = C \in G. \tag{2.2}$$

3. *Inversa.* Para todo elemento A do grupo existe um elemento inverso A^{-1} tal que

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = \mathbb{1}. \tag{2.3}$$

4. *Associatividade.* Se três ou mais elementos são combinados sob operação de multiplicação, então a ordem da multiplicação é irrelevante, isto é

$$A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C. \tag{2.4}$$

Para formar um grupo precisamos que todos estes postulados sejam satisfeitos. Podemos ter uma coleção de elementos que seja finita, o que nos leva à um *grupo finito.* se, por outro lado, os elementos formarem um contínuo então o grupo é dito *grupo contínuo.* Além disto, se $A.B = B.A$ dizemos que o grupo é *Abeliano* ou comutativo, caso contrário é dito *não-Abeliano*, ou não-comutativo. Neste trabalho nos limitaremos a falar sobre os *grupos de Lie.*

2.3 Grupo de matrizes contínuas.

Uma matriz regular é uma matriz quadrada que possui inversa. Sob certas condições, pode-se mostrar que as matrizes quadradas $n \times n$ satisfazem os postulados mencionados acima sob a operação (.).O grupo envolvendo matrizes contínuas pode ser finito ou infinito, discreto ou contínuo, e ter entradas reais $\mathbb{R}^n$ ou complexas $\mathbb{C}^n$. Uma matriz regular de grau n atuando em R^n ou em C^n irá produzir uma tranformação $X \to X'$ ou $Z \to Z'$, onde X, $X' \in \mathbb{R}$ e Z, $Z' \in \mathbb{C}$, onde $Z_i = x_i + iy_i$. Em Física costumamos procurar transformações que deixam alguma forma funcional de X ou Z invariantes. Como por exemplo o caso de um espaço tridimensional Euclidiano, onde podemos considerar tranformação que deixa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ invariante.

2.3.1 *O grupo linear geral*

O grupo mais abrangente de matrizes lineares é o *grupo linear geral* GL(n,$\mathbb{C}$) de matrizes regulares inversíveis com entradas complexas de grau n. Uma matriz é caracterizada por n^2 elementos. Cada elemento pode conter uma parte real e uma parte imaginária. A variação contínua dos $2n^2$ elementos irá gerar um grupo de matrizes com $2n^2$ parâmetros reais e de dimensão $2n^2$.

2.3.2 *O grupo unitário U(n)*

O conjunto de matrizes unitárias A de grau n com n^2 elementos formam o *grupo unitário* U(n), que deixa a forma hermitiana

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i^*, \tag{2.5}$$

invariante. A unitariedade da matriz A é dada por

$$A^\dagger A = \mathbb{1}, \tag{2.6}$$

ou, de forma equivalente

$$a_{ik} a_{ij}^* = \delta_{ij}. \tag{2.7}$$

Portanto,

$$|a_{ij}|^2 \leqslant 1. \tag{2.8}$$

2.3.3 *O Grupo unitário especial SU(n)*

Se limitarmos nossa atenção para matrizes unitárias de determinante +1 nós obtemos o *grupo especial unitário* SU(n) com $(n^2 - 1)$ parâmetros.

2.3.4 *O Grupo ortogonal O(n)*

O grupo de matrizes ortogonais de grau n formam o *grupo ortogonal* O(n) de $n(n-1)/2$ parâmetros. Este caso é na verdade o grupo *U(n)* para matrizes reais. Como $A^t A = \mathbb{1}$ temos

$$\left|A^t A\right| = \left|A^t\right| |A| = |A|^2 = 1. \tag{2.9}$$

Logo temos que $|A| = \pm 1$.

2.3.5 *O Grupo ortogonal especial SO(n)*

Se voltarmos nossa atenção para as matrizes ortogonais porém com determinante igual a 1 temos o *grupo ortogonal especial* SO(n), que deixa invariante a forma quadrática $\rho = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

2.4 Exponenciais de matrizes

Definimos a exponencial de uma matriz A pela série

$$\begin{aligned} e^A &= \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Onde $A^0 = \mathbb{1}$.

A seguir, apresentaremos algumas relações importantes para as exponenciais de matrizes.

i. Se duas matrizes A e B são comutantes, então

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{2.11}$$

ii. Se B é uma matriz regular de grau n, então

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}. \tag{2.12}$$

iii. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de A, então os autovalores de e^A são $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$

iv. A série exponencial da matriz A definida pela equação (1.16) satisfaz as relações usuais de funções exponenciais

$$\begin{aligned} e^{A^*} &= (e^A)^*, \qquad e^{A^T} = (e^A)^T, \\ e^{A^\dagger} &= (e^A)^\dagger, \qquad e^{A^{-1}} = (e^A)^{-1} = e^{-A}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

v. O determinante de e^A é $e^{tr(A)}$.

2.5 Parametrização dos elementos de um grupo

Consederamos um grupo de matrizes regulares contínuas não singulares com parâmetros reais de grau n. Podemos escrever os elementos de uma matriz A deste grupo da forma

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}. \tag{2.14}$$

Note que, se $\alpha_{ij} = 0$, teremos a matriz A como sendo a identidade. Logo, podemos tratar os α_{ij} como parâmetros independentes e gerar os elementos do grupo pela variação dos mesmos em torno da identidade, de tal forma que os elementos do grupo podem ser representados por r parâmetros α_i tal que

$$A = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), \tag{2.15}$$

onde $\mathbb{1}$ é caracterizada por $\mathbb{1} = A(0, \ldots, 0)$.

Uma vez feita a decomposição do grupo em parâmetros a partir da identidade, podemos tomar esta variação suficientemente pequena de tal maneira que podemos representar os elementos de $A(\alpha)$ no entorno da identidade por uma série de Taylor

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= A(0) + \alpha_k \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_k}\right)_{a_k=0} + \frac{1}{2}\alpha_k\alpha_l \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_k}\right)_{a_k=0} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_l}\right)_{a_l=0} + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= A(0) + \alpha_k X_k + \frac{1}{2}\alpha_k\alpha_l X_k X_l + \mathcal{O}(\alpha^3), \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde

$$X_K = \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_k}\right)_{a_k=0}. \tag{2.17}$$

São os *geradores infinitesimais de grupo*. Geradores de um grupo funcionam como uma base onde a álgebra do grupo será contruida. Se o elemento inverso $A(\alpha)^{-1}$ também pode ser escrito na forma de uma expansão em torno da identidade, então podemos escrevê-lo como

$$A(\alpha)^{-1} = A(0) - \alpha_k X_k + \frac{1}{2}\alpha_k\alpha_l X_k X_l + \mathcal{O}(\alpha^3). \tag{2.18}$$

Logo, teremos

$$A(\alpha)^{-1}A(\alpha) = A(0) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{2.19}$$

Vamos definir o comutador dos geradores X_k como sendo

$$[X_k, X_l] = X_k X_l - X_l X_k = C^m_{kl} X_m. \tag{2.20}$$

Os objetos C^m_{kl} são chamados *constante de estrutura* de um grupo de Lie

Chamaremos de álgebra g de um grupo G a variação dos parâmetros de um grupo em torno da identidade, constituídas de seus geradores e constantes de estrutura. Os grupos de Lie de dimensão n definem um espaço de dimensão m, onde os vetores pertencentes a este espaço, se transformam sob a aplicação de um elemento deste grupo de acordo com sua álgebra. Considere um elemento A de um grupo de Lie atuando em um certo vetor $\vec{v}$, como por exemplo rotações que deixam a norma de um vetor de invariante. Como vimos podemos condensar as informações de como o elemento A irá atuar em $\vec{v}$ na forma de exponencias de matrizes. Então podemos dizer que a tranformação que este vetor irá sofrer será dada pela aplicação de $e^{\alpha^a X_a}$. Então de maneira grosseira podemos condensar nossa informação e dizer que temos $grupo = e^{algebra}$.

2.6 Rotações. Os grupos O(3) e SO(3)

Sejam R_{ij} as entradas de uma matriz de rotação em três dimensões atuando em um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ visto por um observador em $\mathcal{O}$. O resultado da aplicação de R_{ij} em $\vec{v}$, será visto por um observador em $\mathcal{O}'$, e será da forma

$$x_i^{'} = R_{ij} x_j. \tag{2.21}$$

Uma rotação mantém a forma métrica invariante, logo,

$$x_i^{'} x_i^{'} = x_j x_j. \tag{2.22}$$

Substituindo a forma de $x_i^{'}$ temos,

$$R_{ij} x_j R_{ik} x_k = x_j x_j, \tag{2.23}$$

que só será verdade se

$$R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}. \tag{2.24}$$

Logo podemos ver que as matrizes de rotações são ortogonais, ou seja, o grupo O(3).Desta relação temos ainda

$$detR = \pm 1. \tag{2.25}$$

Pelo fato de termos $detR = \pm 1$ temos, além de rotações, inversões carcterizadas por $detR = -1$. Portanto, para rotações com $detR = 1$ temos o grupo SO(3).

Sabemos que o grupo O(n) tem $n(n-1)/2$ parâmetros, então para o grupo O(3) teremos três parâmetros que irão caracterizar uma rotação em um espaço tridimensional. Tais parâmetros podem ser por exemplo três ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 em torno dos eixos x,y e z respectivamente dados pelas matrizes

$$R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

$$R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Agora vamos fazer uma variação infinitesimal nos parâmetros θ_i de forma que obtemos para $\theta_i \ll 1$

$$R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta_1 \\ 0 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + i\theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

$$R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + i\theta_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & 0 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + i\theta_3 \begin{pmatrix} 0 & -i & o \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Então estas rotações infinitesimais podem ser escritas como

$$R_k(\theta_k) = \mathbb{1} + i\theta_k J_k, \quad J_k = -i\frac{dR_k}{d\theta_k}, \quad J_k^\dagger = J_k. \tag{2.32}$$

Vemos então que as matrizes J são os geradores do grupo SO(3). A algebra de Lie das matrizes J é dada por

$$[J_m, J_l] = i\epsilon_{mlk} J_k. \tag{2.33}$$

Então, podemos escrever

$$R\left(\theta_k\right) = e^{J_k \theta_k}. \tag{2.34}$$

2.7 O grupo SU(2)

Vimos que o grupo SU(2) é composto por matrizes unitárias de grau 2 e $det = 1$, tal que

$$U^\dagger U = \mathbb{1}, \quad detU = 1. \tag{2.35}$$

Sendo

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Temos pelas condições de unitariedade de U e de seu determinante

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a_* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{2.37}$$

Temos então dois números complexos que caracterizam os parâmetros de SU(2), isso nos da 4 parâmetros reais, restando 3 deles que definem o grupo. Pode-se mostrar que há uma correspondência entre os grupos SO(3) e SU(2), gerando uma álgebra para o grupo SU(2). A esta correspondência damos o nome de homomorfismo, onde os três parâmetros livres são também três ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, de forma que a matriz U pode ser escrita como

$$U_k(\theta_k) = e^{\frac{i}{2}\sigma_k \theta_k}, \tag{2.38}$$

onde as σ_k são as matrizes de Pauli.

2.8 O grupo de Lorentz

Os elementos do grupo de Lorentz são as matrizes Λ que deixam o tensor métrico do espaço de Minkowski η invariante, tal que

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta, \tag{2.39}$$

onde

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Desta relação vemos que a identidade é automaticamente satisfeita. A associatividade também é satisfeita pois estamos tratando de matrizes. Seja $\tilde{\Lambda}$ a inversa de Λ tal que

$$\tilde{\Lambda}\Lambda = \Lambda\tilde{\Lambda} = \mathbb{1}. \tag{2.41}$$

Agora multiplicando a relação de invariância de η pela direita por $\tilde{\Lambda}$ e pela esquerda por $\tilde{\Lambda}^t$ temos

$$\tilde{\Lambda}^t \Lambda^t \eta \Lambda \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^t \eta \tilde{\Lambda} = \left(\Lambda\tilde{\Lambda}\right)^t \eta \left(\Lambda\tilde{\Lambda}\right) = \mathbb{1}\eta\mathbb{1} = \eta. \tag{2.42}$$

Logo

$$\tilde{\Lambda}^t \eta \tilde{\Lambda} = \eta. \tag{2.43}$$

Verificaremos agora a propriedade de fechamento. Sejam Λ_1 e Λ_2 sucessivas tranformações de Lorentz, e seja Λ tal que

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda. \tag{2.44}$$

Note que cada uma das tranformações Λ_1 e Λ_2 devem satisfazer a equação de invariância de η. Calculando $\Lambda^t \eta \Lambda$ obetemos

$$\Lambda^t \eta \Lambda = (\Lambda_1 \Lambda_2)^t \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^t \Lambda_1^t \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^t \eta \Lambda_1^t = \eta. \tag{2.45}$$

Logo podemos dizer que as tranformações de Lorentz formam mesmo um grupo. Temos $det\Lambda = \pm 1$ e que $-1 \geq \Lambda_0^0 \geq 1$. As tranformações com $det\Lambda = 1$ são chamadas de *transformações próprias* e as com $det\Lambda = -1$ são chamadas de *transformações impróprias*. As tranformações com $\Lambda_0^0 \geq 1$ são *ortócronas*. Já para as $\Lambda_0^0 \leq -1$ são as tranformações *antícronas*. Deste conjunto iremos tomar apenas as tranformações próprias e antícronas, pois somente com estas duas condições formamos o *grupo de Lorentz restrito SO(1,3)* que incorpora a identidade e tem a propriedade de fechamento. S é devido ao determinante ser unitário positivo, O devido a este grupo representar rotações e $(1,3)$ devido à distinção entre 1 coordenada temporal e 3 coordeadas epaciais. Tendo consciência do abuso de linguagem chamaremos a partir de agora o grupo restrito de Lorentz apenas por grupo de Lorentz. Para encontrar os geradores do grupo de Lorentz devemos tomar uma tranformação infinitesimal e estudar sua variação a partir da identidade. Seja uma tranformação infinitesimal de Lorentz dada por

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \tag{2.46}$$

substituindo na equação de invariancia de η temos

$$\left(\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu\right) \eta_{\mu\sigma} \left(\delta_\rho^\sigma + \omega_\rho^\sigma\right) = \eta_{\nu\rho} + \omega_{\rho\nu} + \omega_{\nu\rho} = \eta_{\nu\rho}, \tag{2.47}$$

onde desprezamos termos de ordem 2 em ω.Podemos concluir que

$$\omega_{\rho\nu} = -\omega_{\nu\rho}. \tag{2.48}$$

Esta relação nos dá 6 parâmetros independentes, como era de se esperar para o grupo *SO(1,3)*. Podemos reescrever esta relação como

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} \left(\Sigma_{\rho\sigma}\right)_\nu^\mu, \tag{2.49}$$

onde Σ são os geradores do grupo. Note que ω esta sendo escrito na base dos Σ uma vez que os índices ν e μ são índices de linhas e colunas das matrizes geradoras do grupo enquanto, os índices ρ e σ identificam qual matriz geradora esta sendo combinada com ω. Outro fato a ser notado é que Σ é antissimétrica, e mesmo que não o fosse a contração com ω faria permanecer somente a parte antissimétrica de Σ. Como estamos trabalhando com grupos de Lie, garantimos também a hermiticidade de Σ.

2.9 O grupo de Poincaré

Uma transformação de Poincaré é dada por uma transformação de Lorentz seguida de uma translação no espaço-tempo de Minkowski

$$x^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{2.50}$$

As transformações de Poincaré formam o grupo $ISO(1,3)$ e seus elementos são descritos por (Λ, a). Vamos verificar os postulados de grupo. A identidade é automaticamente satisfeita $(\Lambda, a) = (\mathbb{1}, 0)$. O elemento inverso e dado por $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda^{-1}, -a)$. A completeza verifica-se por

$$x^{'} = (\Lambda_1, a_1)\, x. \tag{2.51}$$

$$x^{''} = (\Lambda_2, a_2)\, x^{'} = \Lambda_2\, (\Lambda_1, a_1)\, x + a_2 = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)\, x = (\Lambda, a)\, x. \tag{2.52}$$

Mostrando assim que esta transformação forma um grupo.

Os geradores do grupo de Lorentz podem ser escritos na forma de operadores de momento angular da seguinte maneira

$$\Sigma_{\mu\nu} = -i\, (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, . \tag{2.53}$$

Temos também que os geradores do grupo das translações quando são escritos como operadores, tomam a forma dos operadores de momento na mecânica quântica, quando escritos na representação das posições, tal que $P_\rho = -i\partial_\rho$.

Calculemos o comutador dos geradores do grupo de Lorentz, com os geradores do grupo das translações. Para tal temos de aplicar este a um campo ϕ qualquer, uma vez que estão na forma de operadores

$$\begin{aligned}
[P_\rho, \Sigma_{\mu\nu}]\, \phi &= [-i\partial_\rho, i\, (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)]\, \phi \\
&= -\left[\partial_\rho\, (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) - (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, \partial_\rho\right] \phi \\
&= -\left[\partial_\rho\, (x_\mu \partial_\nu) - \partial_\rho\, (x_\nu \partial_\mu) - x_\mu \partial_\nu \partial_\rho - x_\nu \partial_\mu \partial_\rho\right] \phi \\
&= -\left[\eta_{\rho\mu} \partial_\nu + x_\mu \partial_\rho \partial_\nu - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu - x_\nu \partial_\rho \partial_\nu - x_\mu \partial_\nu \partial_\rho + x_\nu \partial_\mu \partial_\rho\right] \phi \\
&= -\left[\eta_{\rho\mu} \partial_\nu - \eta_{\rho\mu} \partial_\mu\right] \phi.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Portanto a álgebra do grupo de Poincaré é dada por

$$[P_\nu, P_\mu] = 0, \tag{2.55}$$

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\rho}\right), \tag{2.56}$$

$$[P_\rho, \Sigma_{\mu\nu}] = -\left[\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\mu}P_\mu\right]. \tag{2.57}$$

Capítulo 3

TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

3.1 Introdução

A interação a distância entre dois corpos, sempre foi objeto de estudo na Física, desde a atração gravitacional entre dois corpos celestes no espaço, até a interação entre dois quarks no interior de um hadron. Com o conceito de campo podemos entender como se dão estas interações. A *Teoria Clássica de Campos* é de extrema importância pois quase todas as teorias de importância física podem ser colocadas na forma de campos. Mais ainda, por este ser o primeiro passo para a segunda quantização, que é feita transformando as variáveis de campos em operadores, construindo assim a *Teoria Quântica de Campos.*

3.2 Rudimentos do cálculo funcional

Considere um ponto qualquer y que esteja no interior Ω onde os campos e o sistema estão descritos, e a variação $\delta\phi(y)$ neste ponto. Escrevemos

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y)} = \int dx^4 \left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(y)} + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x),\mu}\frac{\delta\left(\partial_\mu\phi(x)\right)}{\delta\phi(y)}\right], \tag{3.1}$$

como sendo a derivada de S com relação a $\phi(y)$. Como por hipótese a variação é bem definida, escrevemos

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta^4(x-y). \tag{3.2}$$

Onde δ^4 é a "função" delta de Dirac. Isto significa que $\delta^4(x-y)$ é a derivada funcional de ϕ com respeito a si mesmo. A diferencial usual da função de várias variáveis f

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i. \tag{3.3}$$

A expressão (3.2) é análoga à $d_j x^i = \delta^i_j$. Note que a variação em x nada tem a ver com a variação em y, logo

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\phi(x) = \partial_\mu\delta^4(x-y). \tag{3.4}$$

A gora, a (3.1) pode ser escrita como

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y)} = \int dx^4\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x)}\delta^4(x-y) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x),\mu}\partial_\mu\delta^4(x-y)\right], \tag{3.5}$$

logo

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y)} = \frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial\phi(y)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial\phi(y),\mu}. \tag{3.6}$$

Que nada mais é do que a equação de Euler-Lagrange para este ponto interno do domínio Ω.

3.3 Formulação lagrangeana

Para um sistema físico discreto, sua descrição é feita por coordenadas generalizadas $q_k(t)$. Para um sistema contínuo utilizaremos como coordenadas, as chamadas coordenadas de campo $\psi^A(x_\mu)$ [1]. Onde $A = 1, \ldots, M$ é um índice de campo, que irá considerar todos os campos do sistema físico em questão, ao passo que $\mu = 0, 1, \ldots, N$ é o índice das coordenadas de espaço-tempo. Se estivéssemos tratando do eletromagnetismo por exemplo, $A = 1, 2$ poderia ser $\vec{B}, \vec{E}$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$ seria t, x, y, z respectivamente.

A lagrangeana de um sistema contínuo unidimensional deve depender das coordenadas generalizadas de campo e, possívelmente suas derivadas no espaço e no tempo, além disso de uma forma mais geral pode também depender das coordenadas de espaço e tempo. Como estamos tratando de um sistema contínuo, as ideias apresentadas para a forma desta lagrangeana devem levar em conta seu caráter de assumir um valor em cada ponto do espaço. Pensando desta forma é razoável pensar que a lagrangeana do sistema deverá ser escrita em termos de uma densidade langrangeana$\mathcal{L}$ [2] integrada no intervalo do espaço-tempo em que estamos interessados. Então a forma mais geral possível para uma lagrangeana será

[1]De agora em diante, irei considerar implícita a dependência do campo ψ em relação as variáveis x_μ. Portanto $\psi^A = \psi^A(x_\mu)$, e também por simplificação farei $x = x_\mu$, quando necessário, a distinção com relação ao índices será feita.

[2]Tendo em vista o abuso de linguagem, de agora em diante chamaremos a densidade lagrangeana apenas de lagrangeana.

$$L = \int_{\Re} dx^3 \mathcal{L}\left(\psi^A, \partial_\mu \psi^A, x_\mu\right). \tag{3.7}$$

Logo a ação deve ter a forma

$$S = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}, \tag{3.8}$$

onde $d\Omega = dx^n = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \ldots$. Obteremos as equações de Euler-Lagrange, usando o princípio de Hamilton.[4]

Princípio de Hamilton. Dado um sistema mecânico descrito pela lagrangeana (3.7), seu movimento do instante t_1 ao instante t_2 é tal que a ação (3.8) é mínima(mais geralmente, estacionária) para a trajetória real, mantidos fixos os extremos da trajetória.

O fato de a ação ser mínima implica em

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L} = \int_{\Omega} d\Omega \delta \mathcal{L} = 0, \tag{3.9}$$

onde Ω representa uma região do espaço-tempo cuja borda permanece fixa. Então teremos

$$\delta S = \int_{\Omega} d\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta \psi^A_{,\mu} \right) = 0. \tag{3.10}$$

Queremos que a equação (3.10) seja em termos de $\delta\psi^A$, pois este se anula na borda de Ω. Para tal faremos uma integração por pates na segunda parcela de (3.10), de forma que

$$\int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta \psi^A_{,\mu} = - \int_{\Omega} d\Omega \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \right) \delta \psi^A. \tag{3.11}$$

Levando em (3.10) temos

$$\delta S = \int_{\Omega} d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \right) \right] \delta \psi^A = 0. \tag{3.12}$$

Note que esta expressão pode ser esccrita na forma da equação (3.2) da seguinte maneira

$$\delta S[\phi] = \int dx^4 \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x). \tag{3.13}$$

Como $\delta\psi^A$ se anula na borda de Ω, temos então pelo teorema fundamental do cálculo das variações

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \right) = 0. \tag{3.14}$$

Que são as equações de Euler-Lagrange para campos. Note que tais equações são fundamentais, valem em qualquer sistema de referência. Elas são resultado do princípio de Hamilton para uma região qualquer Ω do espaço-tempo.

3.4 Teorema de Noether

Quantidades conservadas em um sistema físico são de grande valia para o entendimento de como se comporta o sistema. Nesta seção levaremos em conta, não somente variações na borda de integração, como também variações no referencial de observação, e variações envolvendo apenas os campos. A invariância da ação tem portanto papel fundamental no estudo de teorias de campo. É o teorema de Noether que faz a conexão entre simetrias e quantidades físicas conservadas perante um grupo de tranformações. O teorema de Noether, por sua vez, é independente do grupo de transformações que podemos fazer e gera diferentes quantidades conservadas para cada grupo, daí sua importância para o estudo de teoria de campos.

3.4.1 Transformações de coordenadas

Seja $x^{'}_\mu = x^{'}_\mu(x)$. Isso implica em $\psi^{'A} = \psi^{'A}\left(\psi^A(x)\right)$. Vamos definir agora as seguintes variações

$$\delta x^\mu = x^{'\mu} - x^\mu, \quad \delta\psi^A(x) = \psi^{'A}(x^{'}) - \psi^A(x). \tag{3.15}$$

Logo temos como consequência $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}^{'}(x^{'}) - \mathcal{L}(x)$, onde

$$\mathcal{L}^{'}(x^{'}) = \mathcal{L}^{'}(\psi^{'A}(x^{'}), \partial^{'}_\mu \psi^{'A}(x^{'}), x^{'}, t^{'}) \;\; e \;\; \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left(\psi^A(x), \partial_\mu\psi^A(x), x, t\right). \tag{3.16}$$

A variação definida por δ trata de quantidades calculadas no sistema x^μ e $x^{'\mu}$ estabelecendo uma relação entre os dois sistemas de observação.

Agora vamos definir a variação $\tilde{\delta}$ como

$$\tilde{\delta}\psi^A(x) = \psi^{'A}(x) - \psi^A(x). \tag{3.17}$$

Note que, como em teoria de campos temos os campos como nossas variáveis, a variação $\tilde{\delta}$ 'e feita somente nas coordenadas de campo, ambos $\psi^{A'}$ e ψ^{A} sendo calculadas no mesmo referencial. Note também que $\tilde{\delta}x = 0$. Agora vamos escrever a variação $\tilde{\delta}$ em termos da variação δ

$$\tilde{\delta}\psi^{A}(x) = \psi^{'A}(x) - \psi^{A}(x) + \psi^{'A}(x^{'}) - \psi^{'A}(x^{'}) = \delta\psi^{A}(x) + \psi^{'A}(x) - \psi^{'A}(x^{'}). \quad (3.18)$$

Mas sabemos que pela variação δx^{μ} e $x^{\mu'}$ estão relacionados da seguinte maneira

$$x^{'\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad (3.19)$$

expandindo o termo em $x^{'}$ em série de Taylor até primeira ordem na variável x^{μ} temos

$$\psi^{'A}(x^{'\mu}) \approx \psi^{'A}(x^{'\mu}) + \partial_{\mu}\psi^{'A}(x^{'\mu})(x^{'\mu} - x^{\mu}) = \psi^{'A}(x^{'\mu}) + \partial_{\mu}\psi^{'A}(x^{\mu})\delta x^{\mu}. \quad (3.20)$$

Então

$$\tilde{\delta}\psi^{A}(x^{\mu}) = \delta\psi^{A}(x^{\mu}) - \partial_{\mu}\psi^{'A}(x^{\mu})\delta x^{\mu}, \quad (3.21)$$

mas

$$\psi^{'A}(x^{\mu}) = \psi^{A}(x^{\mu}) + \tilde{\delta}\psi^{A}(x^{\mu}), \quad (3.22)$$

logo

$$\tilde{\delta}\psi^{A}(x) = \delta\psi^{A}(x) - \partial_{\mu}\psi^{A}(x)\delta x^{\mu}. \quad (3.23)$$

Onde novamente desprezamos termos de segunda ordem em x^{μ}.

Vamos agora estudar a relação entre as variações δ e $\tilde{\delta}$ com a divergência ∂_{μ}. Comecemos então mostrando que $\tilde{\delta}$ comuta com ∂_{μ}

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}[\partial_{\mu}\psi^{A}(x^{\mu})] &= \partial_{\mu}\psi^{'A}(x^{\mu}) - \partial_{\mu}\psi^{A}(x^{\mu}) \\
&= \partial_{\mu}(\psi^{'A}(x^{\mu}) - \psi^{A}(x^{\mu})) \\
&= \partial_{\mu}\tilde{\delta}\psi^{A}(x^{\mu}), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

logo

$$\left[\tilde{\delta}, \partial_\mu\right] = 0. \tag{3.25}$$

Para a variação δ temos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[\delta\psi^A(x^\mu)\right] &= \partial_\mu \left[\psi^{'A}(x^{'\mu}) - \psi^A(x^\mu)\right] \\
&= \partial_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}) - \partial_\mu\psi^A(x^\mu) \\
&= \partial_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}) - \partial_\mu\psi^A(x^\mu) + \partial^{'}_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}) - \partial^{'}_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}) \\
&= \partial_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}) + \delta\left[\partial_\mu\psi^A(x^\mu)\right] - \partial^{'}_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Mas pela regra da cadeia temos

$$\partial_\mu\psi^{'A}(x^{'\mu}) = \partial_\mu x^{'\nu}\partial^{'}_\nu\psi^{'A}(x^{'\mu}). \tag{3.27}$$

Além disto temos

$$\partial_\mu x^{'\nu} = \partial_\mu x^\nu + \partial_\mu\delta x^\nu = \delta^\nu_\mu + \partial_\mu\delta x^\nu. \tag{3.28}$$

Levando as equações (3.28) e (3.27) em (3.26) obteremos a relação de comutação dada por

$$[\partial_\mu, \delta] = \partial_\mu\delta x^\nu\partial^{'}_\nu\psi^{'A}(x^{'\mu}). \tag{3.29}$$

3.4.2 Teorema de Noether

Teorema 3.4.1 (Teorema Noether)**.** [1] *Toda transformação de simetria contínua leva a uma lei de conservação.*

Para provarmos o teorema de Noether vamos variar a ação e impor a simetria sobre a mesma

$$\delta S = \int_\Omega d\Omega^{'}\mathcal{L}^{'}(x^{'}) - \int_\Omega d\Omega\mathcal{L}(x) = 0. \tag{3.30}$$

Para passar das variável com linha para as variáveis sem linha usamos

$$d\Omega^{'} = d\Omega(1 + \partial_\mu\delta x^\mu). \tag{3.31}$$

Tal relação é proveniente do jacobiano da transformação, ao tomarmos somente termos em primeira ordem em δ. Portanto

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d\Omega(1+\partial_\mu \delta x^\mu)[\mathcal{L}(x)+\delta\mathcal{L}] - \int_\Omega d\Omega\mathcal{L} \\ &= \int_\Omega d\Omega\delta\mathcal{L}(x^\mu) + \int_\Omega \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x^\mu), \end{aligned} \tag{3.32}$$

mas

$$\delta\mathcal{L}(x^\mu) = \mathcal{L}^{'}(x^{'\mu}) - \mathcal{L}(x) \quad e \quad \tilde{\delta}\mathcal{L}(x^\mu) = \mathcal{L}^{'}(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu). \tag{3.33}$$

Combinando estas duas equações temos

$$\delta\mathcal{L}(x^\mu) = \tilde{\delta}\mathcal{L}(x^\mu) + \mathcal{L}^{'}(x^{'\mu}) - \mathcal{L}^{'}(x^\mu), \tag{3.34}$$

com

$$\delta\mathcal{L}(x^\mu) = \tilde{\delta}\mathcal{L}(x^\mu) + \partial_\mu\mathcal{L}(x^\mu)\delta x^\mu. \tag{3.35}$$

Então a variação da ação pode ser escrita como

$$\delta S = \int_\Omega d\Omega \left[\tilde{\delta}\mathcal{L}(x^\mu) + \partial_\mu\mathcal{L}(x^\mu)\delta x^\mu + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x^\mu)\right]. \tag{3.36}$$

Reescrevendo as duas últimas parcelas como a derivada de um produto temos

$$\delta S = \int_\Omega d\Omega \left[\tilde{\delta}\mathcal{L}(x^\mu) + \partial_\mu\left(\mathcal{L}(x^\mu)\delta x^\mu\right)\right]. \tag{3.37}$$

Abrindo a operação $\tilde{\delta}$ temos

$$\tilde{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\tilde{\delta}\psi^A_{,\mu}, \tag{3.38}$$

mas fazendo uso das equações de Euler-Lagrange temos

$$\tilde{\delta}\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \tilde{\delta}\psi^A_{,\mu} \right). \tag{3.39}$$

Assim δS toma a forma

$$\delta S = \int_\Omega d\Omega \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \tilde{\delta} + \mathcal{L}\delta x^\mu \right]. \tag{3.40}$$

Escrevendo $\tilde{\delta}$ como função de δ temos

$$\tilde{\delta}\psi^A = \delta\psi^A - \partial_\nu \psi^A \delta x^\nu. \tag{3.41}$$

Substituindo na variação da ação temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d\Omega \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \left(\delta\psi^A - \partial_\nu \psi^A \delta x^\nu \right) + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \\ &= \int_\Omega d\Omega \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta\psi^A - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \partial_\nu \psi^A - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right], \end{aligned} \tag{3.42}$$

mas $\delta S = 0$ por hipótese. Logo pelo teorema fundamental do cálculo das variações o integrando deve se anular, uma vez que Ω é arbitrário, então

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta\psi^A - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \partial_\nu \psi^A - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right] = 0. \tag{3.43}$$

Esta equação mostra claramente um equação de continuidade para o que chamamos de corrente de Noether

$$f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta\psi^A - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \partial_\nu \psi^A - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu. \tag{3.44}$$

Então a equação da continuidade para a corrente de Noether é da forma

$$\partial_\mu f^\mu = 0 \tag{3.45}$$

Com esta equação de conservação provamos o teorema de Noether.

O termo entre parênteses não depende de variação dos campos, apenas nas coordenadas dado por δx^μ. Assim este termo é definido como o *tensor energia momento canônico*

$$\Theta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{A}_{,\mu}} \partial_{\nu} \psi^{A} - \delta^{\nu}_{\mu} \mathcal{L}. \tag{3.46}$$

Os demais termos estão relacionados a transformações que influenciam na variação dos campos. Em termos do tensor energia momento a corrente de Noether toma a forma

$$f^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{A}_{,\mu}} \delta \psi^{A} - \Theta^{\mu}_{\nu} \delta x^{\nu}. \tag{3.47}$$

3.5 Invarância de Poincaré

Antes de começarmos a tratar das transformações de Poincaré, iremos definir o que é um transformação de calibre.

Definição 1. *Uma transformação de calibre é tal, que diferentes configurações de campos, podem levar em quantidades observáveis idênticas.*

Ou seja, uma transformação de calibre, somente irá alterar, as configurações de campo, sem mexer nas coordenadas.

Uma teoria de campos relativística tem como postulados básicos:

- Um campo genérico ψ^A obedece ao princípio de Hamilton de mínima ação

$$\delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} = 0. \tag{3.48}$$

Onde

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^A, \partial_{\mu} \psi^A, x). \tag{3.49}$$

- A ação é invariante perante transformações de Poincaré.
- A ação pode ser invariante perante transformações de calibre.

Como estamos lidando agora com uma teoria relativística o espaço deixa de ser uma coisa geral, pois temos que lidar com uma geometria 4-dimensional. Então temos um espaço de Minkowski com tensor métrico definido pela equação (2.40)

3.5.1 Translações

Uma translação infinitesimal é definida por

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Sigma^{\mu}. \tag{3.50}$$

Onde Σ^{μ} é um parâmetro infinitesimal. Como é uma tranformação que afeta apenas as coodernadas temos $\psi'^{A}(x) = \psi^{A}(x)$, então $\delta\psi^{A}(x) = 0$.
Podemos escrever a corrente de Noether como

$$f^{\mu} = -\Theta^{\mu\nu}\Sigma_{\nu}. \tag{3.51}$$

Onde $\Theta^{\mu\nu}$o tensor energia momento canônico dado por

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\partial^{\nu}\psi^{A} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{3.52}$$

Como os Σ^{μ} são arbitrários a conservação da corrente de Noether implica na conservação do tensor energia momento canônico tal que

$$\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{3.53}$$

3.5.2 Transformações de Lorentz

Uma transformação infinitesimal de Lorentz é definida como

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu}. \tag{3.54}$$

Onde ω^{μ}_{ν} é um parâmetro infinitesimal e antissimétrico. Onde a aplicação em x^{ν} gera

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + \omega^{\mu\nu}x_{\nu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu}x_{\nu}, \tag{3.55}$$

logo

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu}x_{\nu}. \tag{3.56}$$

Uma transformação nos campos pode ser escrita em termos dos parâmetros infinitesimais $\omega^{\mu\nu}$ e dos geradores do grupo de Lorentz. Onde esta toma a forma

$$\psi'^A(x') = \psi^A(x) - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)^A_B \psi^B(x). \tag{3.57}$$

Onde como visto na seção (1.10) os $\Sigma_{\mu\nu}$ são os geradores do grupo e dependem da natureza dos campos. Partindo disto temos

$$\delta\psi^A(x) = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)^A_B \psi^B. \tag{3.58}$$

Então podemos escrever a corrente de Noether como

$$f^\mu = -\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\omega^{\mu\lambda}\left(\Sigma^{\mu\lambda}\right)^A_B \psi^B - \Theta^{\mu\nu}\omega_{\nu\lambda}x^\lambda. \tag{3.59}$$

Onde $\Theta^{\mu\nu}$ e x^λ estão contraídos com $\omega_{\nu\lambda}$ que é antissimétrico logo só sobrará a parte antissimétrica de $\Theta^{\mu\nu}x^\lambda$, então antisimetrizando este fator temos

$$\Theta^{\mu\nu}x^\lambda \to \frac{1}{2}\left(\Theta^{\mu\nu}x^\lambda - \Theta^{\mu\lambda}x^\nu\right). \tag{3.60}$$

Então a corrente de Noether associada a uma tranformação de Lorentz toma a forma

$$\begin{aligned} f^\mu &= a\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)^A_B \psi^B(x) + \frac{\omega_{\nu\lambda}}{2}\left(\Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda\right) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\nu\lambda}\left[\Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\nu\lambda}\right)^A_B \psi^B\right]. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Temos $\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$, que é antissimétrico em λ e ν, sob a forma

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} = \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\lambda\nu}\right)^A_B \psi^B. \tag{3.62}$$

Os parâmetros da transformação ω são arbitrários, então a corrente de Noether pode ser escrita como

$$\partial_\mu\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} = 0. \tag{3.63}$$

O tensor $\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$ pode ser interpretado como o tensor de densidade de momento angular total canônico. Este nome fica claro quando escrevemos $\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$ como a soma de um momento angular orbital e um momento de spin clássico. Para tal vamos substituir na equação (3.62) a expressão do tensor energia-momento canônico

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} &= x^{\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\partial^{\lambda}\psi^{B}-\eta^{\mu\lambda}\mathcal{L}\right)-x^{\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}\partial^{\nu}\psi^{B}}-\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{A}_{B}\psi^{B} \\
&= \left[x^{\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\partial^{\lambda}-x^{\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\partial^{\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{A}_{B}\right]\psi^{B}+\left(\eta^{\mu\nu}x^{\lambda}-\eta^{\mu\lambda}x^{\nu}\right)\mathcal{L} \\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\left(x^{\nu}\partial^{\lambda}-x^{\lambda}\partial^{\nu}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{B}_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{A}_{B}\right]\psi^{B}+\left(\eta^{\mu\nu}x^{\lambda}-\eta^{\mu\lambda}x^{\nu}\right)\mathcal{L} \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\left[\delta^{A}_{B}\left(x^{\nu}\partial^{\lambda}-x^{\lambda}\partial^{\nu}\right)+\left(i\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{A}_{B}\right]\psi^{B}+\left(\eta^{\mu\nu}x^{\lambda}-\eta^{\mu\lambda}x^{\nu}\right)\mathcal{L}. \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

Para uma interpretação que nos dê a ideia de momento angular façamos $\mu = 0$, $\lambda = i$ e $\nu = j$

$$\mathcal{M}^{0ij}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^{A}}\left[\delta^{A}_{B}\left(x^{j}\partial^{i}-x^{i}\partial^{j}\right)+\left(i\Sigma^{ij}\right)^{A}_{B}\right]\psi^{B}. \qquad (3.65)$$

Separando em duas partes temos

$$\mathcal{M}^{0ij}=\mathcal{J}^{ij}+\mathcal{S}^{ij}. \qquad (3.66)$$

Onde interpretamos

$$\mathcal{J}^{ij}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^{A}}\left(x^{j}\partial^{i}-x^{i}\partial^{j}\right)\psi^{B}, \qquad (3.67)$$

como a densidade de momento angular orbital. E o termo

$$\mathcal{S}^{ij}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^{A}}\left(i\Sigma^{ij}\right)^{A}_{B}\psi^{B}, \qquad (3.68)$$

é interpretado como a densidade de momento de spin pois depende de características intrínsecas dos campos. Portanto a associação com o tensor $\mathcal{M}$ será

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}=\mathcal{J}^{\mu\lambda\nu}+\mathcal{S}^{\mu\lambda\nu} \qquad (3.69)$$

Onde $\mathcal{J}$ é associado ao momento angular orbital do campo e $\mathcal{S}$ é associado com o momento de spin do campo, tal que

$$\mathcal{J}^{\mu\lambda\nu}=\Theta^{\mu\lambda}x^{\nu}-\Theta^{\mu\nu}x^{\lambda},\quad \mathcal{S}^{\mu\lambda\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\lambda\nu}\right)^{A}_{B}\psi^{B}. \qquad (3.70)$$

3.5.3 Transformações de Poincaré

Para uma tranformação infinitesimal de Poincaré teremos

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu} x_{\nu} + a^{\mu} \quad e \quad Q^{A}_{B} = -\frac{i}{2}\left(\Sigma^{\rho\lambda}\right)^{A}_{B}\omega_{\rho\lambda}. \tag{3.71}$$

A corrente de Noether será, para esta transformação,

$$\begin{aligned} f^{\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\left(i\Sigma^{\rho\lambda}\right)^{A}_{B}\omega_{\rho\lambda}\psi^{B} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\partial^{\nu}\psi^{A} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta x^{\nu} \\ &= = \frac{i}{2}\mathcal{S}^{\mu\rho\nu}\omega_{\rho\lambda} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{A}_{,\mu}}\partial^{\nu}\psi^{A} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta x^{\nu}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Tomando a divergência de δx^{μ} temos

$$\begin{aligned} \partial_{\rho}(\delta_{\lambda}) &= \omega^{\lambda\nu}\partial_{\rho}x_{\nu} \\ &= \omega^{\lambda\nu}\delta^{\nu}_{\rho} \\ &= \omega^{\lambda\rho} \\ &= -\omega^{\rho\lambda}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Então

$$f^{\mu} = -\mathcal{S}^{\mu\rho\lambda}\partial^{\rho}(\delta x^{\lambda}) - \Theta^{\mu\nu}\delta x_{\nu}. \tag{3.74}$$

Mas o primeiro termo pode ser escrito na forma de derivada de um produto, logo

$$f^{\mu} = -\partial_{\rho}\left(\mathcal{S}^{\mu\rho\lambda}\delta x_{\lambda}\right) + \partial_{\rho}\mathcal{S}^{\mu\rho\lambda}\delta x_{\lambda} - \theta^{\mu\nu}\delta x_{\nu}. \tag{3.75}$$

Tomando a divergência temos

$$\partial_{\mu}f^{\mu} = -\partial_{\mu}\partial_{\rho}\left(\mathcal{S}^{\mu\rho\lambda}\delta x_{\lambda}\right) + \partial_{\mu}\left(\partial_{\rho}\mathcal{S}^{\mu\rho\lambda}\delta x_{\lambda}\right) - \partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu}\delta x_{\nu}. \tag{3.76}$$

O operador derivada é simétrico enquanto o termo de spin não o é logo o primeiro termo de $\partial_{\mu}f^{\mu}$ é zero, restando assim

$$-\partial_{\mu}\left[\left(-\partial_{\rho}\mathcal{S}^{\mu\rho\nu} + \Theta^{\mu\nu}\right)\delta x_{\nu}\right] = 0. \tag{3.77}$$

Definindo o *tensor energia-momento simétrico* como

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \partial_\rho \mathcal{S}^{\mu\rho\nu}. \tag{3.78}$$

Escrevendo a expressão para δx^μ teremos

$$-\partial_\mu \left[\mathcal{T}^{\mu\nu} \left(\omega_{\nu\rho} x^\rho + a_\nu\right)\right] = 0. \tag{3.79}$$

Note que há uma contração de $\mathcal{T}^{\mu\nu} x^\rho$ com $\omega_{\nu\rho}$ que é anitissimétrico sobrando assim somente a parte antissimétrica de $\mathcal{T}^{\mu\nu} x^\rho$

$$\partial_\mu \left(\mathcal{T}^{\mu\nu}\right) a_\nu + \partial_\mu \frac{1}{2} \left(\mathcal{T}^{\mu\nu} x^\rho - \mathcal{T}^{\mu\rho} x^\nu\right) \omega_{\nu\rho} = 0. \tag{3.80}$$

Para mostrar que as divergências são independentes faremos a primeira parcela

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\Theta^{\mu\nu} - \partial_\rho \mathcal{S}^{\mu\rho\nu}\right). \tag{3.81}$$

O segundo termo é zero pela antissimetria de $\mathcal{S}^{\mu\rho\nu}$ o primeiro termo também será nulo com já vimos na equação (3.53). Como os parâmetros são arbitrários temos

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \quad e \quad \partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = 0. \tag{3.82}$$

Onde

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = \mathcal{T}^{\mu\nu} x^\rho - \mathcal{T}^{\mu\rho} x^\nu. \tag{3.83}$$

Capítulo 4

O campo escalar

4.1 Equação de Klein-Gordon e lagrangeana do campo escalar

Uma vez feita abordagem sobre as tranformações infinitesimais em que levamos em conta aspectos relativísticos, podemos agora aplicar este formalismo a campos relativísticos. Para tal precisamos de equações que estejam na foma covariante, ou seja, que traduzem as leis físicas da mesma forma em todos os referênciais inerciais.

Na mecânica quântica não relativística a relação de dispersão é da forma

$$E = \frac{P^2}{2m}. \tag{4.1}$$

Onde P e E se tornam operadores, sob a forma

$$p = -i\partial_j, \quad E = i\partial_t. \tag{4.2}$$

Então aplica-se a uma função de onda Ψ, e temos a equação de Schroedinger livre

$$\left(\partial_j^2 + i\partial_t\right)\Psi = 0. \tag{4.3}$$

Tal equação é um invariante de Galileu, mas não é invariante de Lorentz, o que devemos fazer é obeter equações e langrangeanas que sejam invariantes de Lorentz pela mesma substituição de operadores. Na relatividade restrita a relação de dispersão para uma partícula massiva é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2. \tag{4.4}$$

Aplicando a um campo $\phi(p)$ temos

$$\left(p^\mu p_\mu - m^2\right)\phi = 0. \tag{4.5}$$

Que é uma equação de campos clássica, a teoria quântica de campos é feita tomando os campos como operadores, o que não faremos neste trabalho.

Da relação $p_\mu = i\partial_\mu$. Temos

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = 0. \tag{4.6}$$

Que vale tanto para campos reais quanto para campos complexos.

Uma lagrangeana possível para ϕ real, que obedece a equação de klein-Gordon tem a forma dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{4.7}$$

Que tem equações de Euler-Lagrange dadas por

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0. \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi^2. \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right) &= \partial_\mu\left[\frac{\partial}{\partial\phi_{,\mu}}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right)\right] \\
&= \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\delta^\mu_\beta\right] \\
&= \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\right] \\
&= \partial_\mu\partial^\mu\phi.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Verificando realmente que esta lagrangeana fornece a equação de Klein-Gordon.

Para um campo escalar complexo teríamos

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi. \tag{4.11}$$

Obedecendo então a

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right) \phi^* = 0. \tag{4.12}$$

Um estudo bastante didático que podemos fazer neste momento é considear o campo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 + i\phi_2\right). \tag{4.13}$$

Então temos a lagrangeana dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu \left(\phi_1 - i\phi_2\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu \left(\phi_1 + i\phi_2\right) - \frac{m^2}{2} \left(\phi_1 - i\phi_2\right) \left(\phi_1 + i\phi_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu \left(\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2\right) - \frac{m^2}{2} \left(\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i \phi_i - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo concluimos que o campo escalar nada mais é do que dois campos reais de mesma massa.

4.2 O tensor energia-momento

Como temos campos escalares

$$\phi^{'}(x^{'}) = \phi(x). \tag{4.15}$$

Neste caso temos

$$Q^A_B = 0. \tag{4.16}$$

E ainda

$$\mathcal{S}^{\mu\nu\gamma} = 0. \tag{4.17}$$

o tensor energia-momento se escreve como

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu}. \tag{4.18}$$

Que, considerando o campo complexo, temos

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu}\partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu}\partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_\mu}\partial^\nu \phi^* - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{4.19}$$

Que fornece

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi^* - \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\sigma \phi^* \partial^\sigma \phi - m^2 \phi^* \phi\right). \tag{4.20}$$

Como exemplo, podemos calcular a densidade de energia

$$\mathcal{T}^{00} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + \dot{\phi}^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \dot{\phi} + \vec{\nabla}\phi^* . \vec{\nabla}\phi + m^2 \phi^* \phi. \tag{4.21}$$

E também a densidade de momento

$$\mathcal{T}^{oi} = \dot{\phi}^* \vec{\nabla}\phi + \left(\vec{\nabla}\phi^*\right)\dot{\phi}. \tag{4.22}$$

Capítulo 5

O campo vetorial

5.1 Campo vetorial massivo

Para campos vetorias usaremos a lagrangeana de Proca, por conta desta se reduzir ao eletromagnetismo quando $m = 0$. A lagrangeana de Proca é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\psi^{\mu}\psi_{\mu}. \tag{5.1}$$

Onde o tensor intensidade de campo é definido como

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu. \tag{5.2}$$

Vamos obter as equações de campo utilizando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\gamma} = m^2\psi_\gamma. \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\gamma,\sigma}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}}{\partial\psi_\gamma}\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi_{\gamma,\sigma}}\left(\partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu\right)\mathcal{F}^{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\gamma,\sigma}} = -\frac{1}{2}\left(\delta^\sigma_\mu\delta^\gamma_\nu - \delta^\sigma_\nu\delta^\gamma_\mu\right)\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{\sigma\gamma} - \mathcal{F}^{\gamma\sigma}\right) = \mathcal{F}^{\gamma\sigma}. \tag{5.5}$$

Resultando em

$$\partial_\nu\mathcal{F}^{\mu\nu} + m^2\psi^\mu = 0. \tag{5.6}$$

Esta é a chamada equação de Proca. Tomando a divergência temos

$$\partial_\mu \psi^\mu = 0. \tag{5.7}$$

Que é uma consequência das equações de campo pela antisimetria de $\mathcal{F}^{\mu\nu}$. Mas por outro lado se substituirmos a expressão de $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ temos

$$\partial_\nu \partial^\nu \psi^\mu - \partial_\nu \partial^\mu \psi^\nu + m^2 \psi^\mu = 0. \tag{5.8}$$

O segundo termo é zero como vimos, logo, as equações de campo são simplesmente as equações de Klein-Gordon para cada componente do campo

$$\left(\partial_\nu \partial^\nu + m^2\right) \psi^\mu = 0. \tag{5.9}$$

Sujeitas ao vínculo

$$\partial_\mu \psi^\mu = 0. \tag{5.10}$$

O tensor energia-momento se escreve como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\rho,\mu}} \partial_\nu \psi^\rho - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} - \partial^\rho \mathcal{S}_{\mu\rho\nu} \\ &= \partial_\nu \psi^\rho \mathcal{F}^{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\nu} \frac{1}{2} m^2 \psi^\sigma \psi_\sigma - \partial^\rho \mathcal{S}_{\mu\rho\nu}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Vimos que o termo de spin se esreve como

$$\mathcal{S}^{\mu\rho\nu} = -\frac{i}{2} \left[\mathcal{F}_{\alpha\mu} \left(\Sigma_{\rho\nu}\right)^\alpha_\beta + \mathcal{F}_{\alpha\rho} \left(\Sigma_{\nu\mu}\right)^\alpha_\beta - \mathcal{F}_{\alpha\nu} \left(\Sigma_{\mu\rho}\right)^\alpha_\beta \right] \psi^\beta. \tag{5.12}$$

E com

$$\left(\Sigma_{\nu\mu}\right)^\alpha_\beta = i \left(\delta^\alpha_\rho g_{\beta\nu} - \delta^\alpha_\nu g_{\beta\rho} \right). \tag{5.13}$$

O spin de Proca toma a forma

$$\mathcal{S}_{\mu\rho\nu} = \mathcal{F}_{\rho\mu} \psi^\nu. \tag{5.14}$$

Tomando sua divergência temos

$$\partial_\rho \mathcal{S}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \mathcal{F}_{\rho\mu}\psi^\nu + \mathcal{F}_{\rho\mu}\partial_\rho \psi^\nu. \tag{5.15}$$

Substituindo na expressão de $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ rearrumando e usando as equações de movimento temos

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\alpha}\mathcal{F}^\alpha_\nu + \eta_{\mu\nu}\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} + m^2\psi_\mu\psi_\nu - \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\psi^\alpha\psi_\alpha. \tag{5.16}$$

A densidade de energia é calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} &= \mathcal{F}_{0\alpha}\mathcal{F}^\alpha_0 + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} + m^2\psi^0\psi^0 - \frac{1}{2}m^2\psi^\alpha\psi_\alpha \\
&= \mathcal{F}_{0k}\mathcal{F}^k_0\frac{1}{4}\mathcal{F}_{jk}\mathcal{F}^{jk} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{0k}\mathcal{F}^{0k} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{k0}\mathcal{F}^{k0} + m^2\psi^0\psi^0 - \frac{1}{2}m^2\psi^0\psi_0 - \frac{1}{2}m^2\psi^k\psi_k \\
&= \mathcal{F}^{0k}\mathcal{F}^{0k} + \frac{1}{4}\mathcal{F}^{jk}\mathcal{F}^{jk} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{0k}\mathcal{F}^{0k} + \frac{1}{2}m^2\psi^0\psi^0 + \frac{1}{2}m^2\psi^k\psi^k \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{0k}\mathcal{F}^{0k} + \frac{1}{4}\mathcal{F}^{jk}\mathcal{F}^{jk} + \frac{1}{2}m^2\psi^0\psi^0 + \frac{1}{2}m^2\psi^k\psi^k.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Onde usamos a antissimetria de $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ e o fato de que a mudança de posição de índices espaciaisocorrem acompanhadas de um sinal negativo por conta da definição da métrica (2.40). A densidade de momento será

$$\mathcal{T}^{0i} = -\left(\mathcal{F}^{\alpha 0}\mathcal{F}^{\alpha j} + m^2\psi^0\psi^j\right). \tag{5.18}$$

5.2 Campo vetorial sem massa

Seja a lagrangeana de Proca de um campo sem massa dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}. \tag{5.19}$$

As equações de campos se tornam

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\nu\mu} = 0. \tag{5.20}$$

Neste caso se impormos o vínculo $\partial_\mu\psi^\mu$=0 teremos a equação da onda como as equações de campo

$$\partial^\nu \partial_\nu \psi^\mu = 0. \tag{5.21}$$

O tensor energia-momento se escreve como

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{F}^\mu_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\nu} + \eta^{\mu\nu}\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}. \tag{5.22}$$

Seja agora uma transformação de calibre dada por

$$\psi_\mu \rightarrow \psi - \partial_\mu \chi. \tag{5.23}$$

Onde $\chi = \chi(x)$ é um campo escalar arbitrário. O campo escalar $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ se tranforma como

$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu \rightarrow \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \chi. \tag{5.24}$$

portanto esta transformação de calibre deixa $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ invariante. Fazendo uma tranformação de calibre no vínculo temos

$$\partial_\mu \psi^\mu \rightarrow \partial_\mu \psi^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \chi. \tag{5.25}$$

Isto implica em um vínculo de calibre da forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi = 0. \tag{5.26}$$

Se quisermos que o novo campo também obedeça ao mesmo vínculo. Ou seja ψ^μ e χ obedecem a mesma equação de onda. A corrente de calibre desta transformação é dada por

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\nu,\mu} \delta \psi_\nu} = -\mathcal{F}^{\nu\mu}\partial_\nu \chi = \mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu \chi. \tag{5.27}$$

Tomando a divergência de j^μ e usando as equações de movimento temos

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu \chi = 0. \tag{5.28}$$

Este campo coincide exatamente com o campos eletromagnético fazendo a associação entre ψ^μ e A^μ.

Capítulo 6

Teoria de calibre para o campo escalar

6.1 Introdução

Até agora fizemos estudos de campos livres, ou seja, onde não há interação, mas sabemos que na natureza, os atributos de sistema físicos só podem ser medidos quando observamos sua resposta a uma perturbação exterior. Quando lidamos com um sistema de campos livres, podemos ter a necessidade de incluir outros campos quando certas simetrias são impostas. Veremos isto de forma explícita quando tratarmos do campo escalar livre, ao fazermos uma simetria local será necessário a inclusão de um potencial com as caracteristicas do quadri-potencial do eletromagnetismo A_μ.

6.2 Teorema de Noether para simetria global

Seja uma tranformação dada por

$$\phi^{'}(x^{'}) = e^{\omega^a T_a}\phi(x). \tag{6.1}$$

onde o parâmetro ω^a é não depende das coordenadas x_μ. Por este motivo esta transformação é chamada de *transformação global*.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \phi_i^{'}(x) &= \left[\delta_{ij} + \delta\omega^a (T_a)_{ij}\right]\phi_j(x) \\ &= \phi_i + \delta\omega^a (T_a)_{ij}\phi_j(x). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Em termos das tranformações (3.15), podemos escrever

$$\delta x^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a}\delta\omega^a, \quad \delta\phi_i(x) = \frac{\delta\phi_i(x)}{\delta\omega^a}\delta\omega^a. \tag{6.3}$$

A varição (3.23) nos campos tornam-se

$$\tilde{\delta}\phi_i(x) = \left[\frac{\delta\phi_i(x)}{\delta\omega^a} - \partial_\mu\phi_i(x)\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a}\right]\delta\omega^a. \tag{6.4}$$

Então de (6.2) temos

$$\frac{\delta\phi_i(x)}{\delta\omega^a} = (T_a)_{ij}\phi_j(x). \tag{6.5}$$

Levando as (6.3) e (6.4) em

$$\delta S[\phi] = \int dx^4 \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i(x)}\tilde{\delta}\phi_i(x) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i,\mu}}\tilde{\delta}\phi_i(x) + \mathcal{L}\delta x^\mu\right)\right], \tag{6.6}$$

temos

$$\delta S[\phi] = \int dx^4 \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i(x)}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(x)} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i,\mu}}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(x)} + \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a(x)}\right)\right]\delta\omega^a(x), \tag{6.7}$$

mas $\delta S = 0$, então

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i(x)}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(x)} = -\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i,\mu}}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(x)} + \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a(x)}\right). \tag{6.8}$$

Como $\phi_i(x)$ é solução das equações de Euler-Lagrange temos $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i(x)} = 0$, logo

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0, \tag{6.9}$$

onde

$$J^\mu_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i,\mu}}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(x)} + \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a(x)}. \tag{6.10}$$

6.3 Teorema de Noether para simetria local

Para uma simetria local devemos ter $\frac{\delta S[\phi]}{\delta\omega^a(x)} = 0$, logo

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i(x)}\tilde{\delta}\phi_i(x) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i,\mu}}\tilde{\delta}\phi_i(x) + \mathcal{L}\delta x^\mu\right) = 0. \tag{6.11}$$

Escrevendo de forma análoga a (6.7)

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\omega^a(y)} = \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(y)} + \partial\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_i(x)_{,\mu}}\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(y)} + \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a(y)}\right], \tag{6.12}$$

isto para um transformação local dada por

$$\phi_i^{'}(x^{'}) = \phi_i(x) + \delta\omega^a(x)(T_a)_{ij}\phi_j(x). \tag{6.13}$$

Teremos então

$$\tilde{\delta}\phi_i(x) = \delta\omega^a(x)(T_a)_{ij}\phi_j(x). \tag{6.14}$$

Além disto devemos para assegurar a simetria, adicionar um potêncial de calibre da forma

$$\tilde{\delta}A_\mu^a(x) = f_{bc}^a\delta\omega^b(x)A_\mu^c(x) - \partial_\mu\delta\omega^a. \tag{6.15}$$

Levando em conta que

$$\frac{\tilde{\delta}\phi_i(x)}{\delta\omega^a(y)} = \delta^4(x-y)(T_a)_{ij}\phi_j(x) \tag{6.16}$$

e

$$\frac{\delta A_\mu^a(x)}{\delta\omega^b(x)} = f_{bc}^a A_\mu^c\delta^4(x-y) - \delta_b^a\partial_\mu\delta^4(x-y), \tag{6.17}$$

logo teremos

$$\frac{\delta S[\phi,\mathbf{A}]}{\delta\omega^a(y)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i(x)}T_a\phi_i(y) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu^b}f_{bc}^a A_\mu^c + \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta_\mu^a}. \tag{6.18}$$

Mas $\frac{\delta S[\phi,\mathbf{A}]}{\delta\omega^a(y)} = 0$, então

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^a_\mu(y)} + \frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^b_\mu(y)} f^a_{bc} A^c_\mu(y) = -\frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta\phi_i(y)} T_a \phi_i(x). \tag{6.19}$$

Seja $J^\mu_a(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a_\mu(x)}$, então podemos escrever

$$\partial_\mu J^\mu_a(x) - f^a_{bc} A^b_\mu(x) J^c_\mu(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi_i(x)} T_a \phi(x). \tag{6.20}$$

O lado esquerdo desta equação será definido como a derivada covariante de J^μ_a.

6.4 Teoria de calibre para o campo escalar complexo

Seja a lagrangeana do campo escalar complexo sob a forma (4.11). Façamos uma transformação de calibre global gerada por um elemento α de U(1) dada por

$$\phi \rightarrow \phi^{'} = e^{i\alpha}\phi, \tag{6.21}$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^{'*} = e^{-i\alpha}\phi^*. \tag{6.22}$$

Note que esta lagrangeana é invariante sob estas transformações. A partir disto teremos

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a} = 0, \quad \frac{\tilde{\delta}\phi}{\delta\alpha} = i\phi, e \quad \frac{\tilde{\delta}\phi^*}{\delta\alpha} = -i\phi. \tag{6.23}$$

Então

$$J^\mu = -i\left[\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*\right]. \tag{6.24}$$

Levando em conta as equações de Klein-Gordon (4.5) teremos

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{6.25}$$

Logo, podemos ver que esta lagrangeana tem a simetria de calibre global de U(1) que é chamado campo de calibre. Assim como o teorema de Noether para uma simetria global requer, temos a divregência nula da corrente de Noether.

Faremos agoa uma transformação de calibre local gerada por um elemento $\alpha(x)$ de U(1) dada por

$$\phi \to \phi^{'} = e^{i\alpha(x)}\phi, \tag{6.26}$$

$$\phi^* \to \phi^{'*} = e^{-i\alpha(x)}\phi^*. \tag{6.27}$$

Levando a uma variação da lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{'} = \left(\partial_\mu - i\alpha\partial_\mu\alpha\right)\phi^* \left(\partial_\mu + i\alpha\partial_\mu\alpha\right)\phi - m^2\phi^*\phi. \tag{6.28}$$

O termo de massa permanece invariante, mas as derivadas tomam uma nova forma e o termo em $\partial_\mu\alpha$ não deixa esta lagrangeana permanecer invariante. Para tal, tomemos um potencial de calibre com as características do quadri-potencial A_μ do eletromagnetismo, tal que

$$A_\mu \to A_\mu^{'} = A_\mu - \partial_\mu\alpha, \tag{6.29}$$

que deixa invariante o tensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. A derivada usual passa a ser a derivada covariante $D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu)$, onde e é a carga elementar. Então vemos que há uma necessidade de mudar a forma da lagrangeana, escreveremos esta sob a forma

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu\phi\right)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}, \tag{6.30}$$

Onde o último termo é a lagrangeana do campo eletromagnético livre, e $\left(D_\mu\phi\right)^* = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\phi^*$. Observe que esta lagrangeana é invariante de calibre pelas transformações (6.26), (6.27) e (6.29). O tenosr energia momento para este sistema será

$$\Theta^{\mu\nu} = \left(D_\mu\phi\right)^* \partial^\nu\phi + \left(D_\mu\phi\right)\partial^\nu\phi^* + \mathcal{F}^{\mu\gamma}\partial^\nu A_\gamma - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{6.31}$$

Note, que como era de ser esperado pelo princípio de calibre, o observável $\Theta^{\mu\nu}$ é invariante sob as tranformações (6.26), (6.27) e (6.29).

Capítulo 7

Conclusão

Ao longo deste trabalho vimos como simetrias são importantes em Física. Da teoria de grupos aplicada a sistemas físicos conseguimos introduzir não só simetrias e representações, mas como dar significado as mesmas. Podemos dizer através das diferentes representações que as partículas são objetos gerados pela simetria de um sistema físico. Os números quânticos que caracterizam uma partícula podem ser resultados de diferentes simetrias, como por exemplo um quark, que tem uma simetria relacionada com a carga de sabor, outra com o spin, outra com a craga de cor, et cetera. Quando trabalhamos o grupo de Poincaré, vimos que os postulados da relatividade geral passam a ser uma consequência da geometria que usamos para montar este grupo, que são as translações e transformações de Lorentz, então temos as leis físicas como sendo objetos que permanecem invariantes, dada uma simetria. Usamos o teorema de Noether para estudar simetrias dos campos escalares e vetoriais, tal teorema foi de extrema importância, pela fato de não depender do grupo de tranformações que estamos trabalhando, nem o sistema de coordenadas considerado. Vimos que campos escalares tem termo de spin zero, logo são considerados como sistemas bosônicos, diferentemente de campos vetoriais que possuem mais graus de liberdade pois o termo de momento angular orbital e de spin é diferente de zero. Quando levamos em conta a expressão de um grupo de tranformação vimos novas expressões geradas pelo teorema de Noether. Quando as tranformações de calibres feitas foram globais, vimos uma expressão para a corrente de Noether chamada corrente de calibre, que será diferente para cada gerador de grupo, associando então uma "carga" conservada para cada gerador. Quando levamos em conta tranformações de calibre locais não observamos mais uma quantidade conservada, mas sim uma condição de vínculo que é a de que a corrente definida por $J^\mu_a(x) = -\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta A^a_\mu(x)}$ tenha derivada covariante zero.

A simetria de calibre U(1) que aplicamos no campo escalar complexo nos revelou, que quando esta é feita de forma global a lagrangeana não se altera e temos uma corrente conservada. Porém quando nos propomos a fazer uma simetria de calibre local de U(1), não mais tivemos esta invariância, o fato de impormos que esta lagrangeana deve ter uma simetria local para uma teoria de calibre, nos levou a introdução de um potencial da forma do quadri-potencial do eletromagnetismo, e uma nova forma da lagrangeana com campos escalares complexos e com o termo que representa o campo eletromagnético livre é introduzida, tal lagrangeana é invariante sob as tranformações locais de calibre. Então vemos que o eletromagnetismo toma forma naturalmente quando levamos em conta estas transformações. Portanto assim como as partículas que podem ser entendidas como uma manifestação geométrica de simetrias de certos sistemas, temos que o campo eletromagnético pode também ser entendido com uma manifestação puramente geométrica quando impomos uma simetria local do grupo U(1).

Capítulo 8

Bibliografia

Referências Bibliográficas

[1] R.F. Sobreiro, C. A. Linhares *Teoria de Campos* (Notas de aula, 2008)

[2] B. G. Wybourn, *Classical Groups for Physicists*, (Editora John Wiley & Sons Inc, New York 1974)

[3] V. A. Rubakov, *Classical Theory of gauge Fields*, (Editora Princeton University, 2002)

[4] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007), 2ª edição.

[5] R. Aldrovandi e J. G. Pereira, *Notes for a Course on Classical Fields* (Notas de aula, 2008)