

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DO NOROESTE FLUMINENSE DE EDUCAÇÃO SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, BIOLÓGICAS E DA TERRA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

JOSEANA VEIGA DE SOUZA FRANGO

O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PRÉ-CONDICIONADO POR
FATORAÇÃO INCOMPLETA LU DE NÍVEL ZERO

SANTO ANTÔNIO DE PÁDUA
2018

JOSEANA VEIGA DE SOUZA FRANGO

**O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS
PRÉ-CONDICIONADO POR FATORAÇÃO INCOMPLETA LU
DE NÍVEL ZERO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Bacharelado em Matemática com ênfase em Matemática Aplicada e Computacional, do Departamento de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra, no Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Thiago Jordem Pereira

Santo Antônio de Pádua
2018

Ficha catalográfica automática - SDC/BINF

F827m Frango, Joseana Veiga de Souza
O Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado por
Fatoração Incompleta LU de nível zero / Joseana Veiga de
Souza Frango ; Thiago Jordem Pereira, orientador. Santo
Antônio de Pádua, 2018.
53 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-
Universidade Federal Fluminense, Instituto do Noroeste
Fluminense de Educação Superior, Santo Antônio de Pádua,
2018.

1. Sistemas Lineares. 2. Métodos Numéricos. 3. Método dos
Gradientes Conjugados. 4. Pré-condicionamento por Fatoração
ILU. 5. Produção intelectual. I. Título II. Pereira, Thiago
Jordem , orientador. III. Universidade Federal Fluminense.
Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior.
Departamento de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra.

CDD -

JOSEANA VEIGA DE SOUZA FRANGO

**O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS
PRÉ-CONDICIONADO POR FATORAÇÃO INCOMPLETA LU
DE NÍVEL ZERO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Bacharelado em Matemática com ênfase em Matemática Aplicada e Computacional, do Departamento de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra, no Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Aprovada em 11 de julho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago Jordem Pereira - INFES/UFF
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Silveira Sousa - INFES/UFF

Prof. Dr. Wagner Rambaldi Telles - INFES/UFF

Santo Antônio de Pádua
2018

À minha família, por tudo.

AGRADECIMENTOS

Gratidão a Deus, pela vida;

Gratidão a minha família por fazer o (im)possível, desde sempre, para que eu estude;

Gratidão ao meu namorado Máriel, pelo seu carinho e apoio todos esses anos;

Gratidão à amizade sincera dos meus amigos Ítalo e Melise;

Gratidão aos colegas Ayrton e Sabrina, pela amizade e convivência nesses anos;

Gratidão ao meu orientar Thiago Jordem, pela confiança, orientação e dedicação neste trabalho e em outros momentos fundamentais.

*“São as nossas escolhas, que revelam o que realmente somos, muito mais do que as
nossas qualidades.”*

(Alvo Percival Wulfrico Brian Dumbledore)

RESUMO

Ao lidar com problemas de diversas áreas científicas como a Física, Química, Engenharias e até a própria Matemática, muitos deles são modelados por sistemas lineares. Algumas dessas aplicações apresentam certo nível de dificuldade, observados em sistemas lineares de grande porte ou esparsos. Nesses casos, buscar uma solução ao problema diretamente pode ser inviável. Uma alternativa a tal necessidade é utilizar métodos iterativos para buscar uma solução aproximada, porém precisa, do sistema linear. Com isso, ao longo das últimas décadas, a investigação de métodos numéricos iterativos na resolução de sistemas lineares vem ganhando destaque, principalmente o uso dos métodos dos Gradientes Conjugados (GC). Sua convergência eficiente se deve principalmente ao seu conjunto de direções A -conjugadas linearmente independentes. Entretanto, tal eficiência é prejudicada quando a matriz de coeficientes é esparsa ou mal condicionada, por exemplo. A fim de reparar tal dano ao método dos GC, emprega-se o pré-condicionamento da matriz de coeficientes. Dessa forma, resolve-se um sistema linear equivalente ao original, cuja matriz pré-condicionadora seja uma aproximação da matriz original de coeficientes. As inúmeras maneiras para se gerar uma matriz pré-condicionadora, faz com que existam diferentes tipos de pré-condicionadores, dos quais adota-se neste trabalho os de Fatoração Incompleta LU de Nível Zero - ILU(0). Logo, este trabalho tem como intuito analisar a convergência do método dos Gradientes Conjugados com pré-condicionador ILU(0), aplicado a sistemas lineares esparsos obtidos da discretização de equações diferenciais parciais por diferenças finitas.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Gradiente Conjugado. Pré-condicionadores. Fatoração ILU(0).

ABSTRACT

In dealing with problems from various scientific areas such as Physics, Chemistry, Engineering and even Mathematics itself, many of them are modeled by linear systems. Some of these applications have a certain level of complexity, observed in large or sparse linear systems. In such cases, seeking a solution to the problem directly may be impracticable. An alternative to such a need is to use iterative methods to find an approximate but precise solution of the linear system. Thus, over the last decades, the investigation of numerical iterative methods in the resolution of linear systems has been gaining prominence, mainly the use of the Conjugated Gradient (GC) methods. Its efficient convergence is mainly due to its set of linearly independent A -conjugated directions. However, such efficiency is impaired when the coefficient matrix is sparse or poorly conditioned, for example. In order to repair such damage to the GC method, the preconditioning of the coefficient matrix is employed. Thus, we solve a linear system equivalent to the original, whose preconditioning matrix is an approximation of the original matrix of coefficients. The innumerable ways to generate a preconditioner matrix make it possible to have different types of preconditioners, from which the Incomplete Factor Incomplete Level Zero - ILU(0) is adopted. Therefore, the purpose of this work is to analyze the convergence of the Conjugated Gradient methods with ILU(0) preconditioner, applied to sparse linear systems obtained from the discretization of partial differential equations by finite differences.

Keywords: Linear Systems. Conjugate Gradient. Preconditioners. ILU(0) Factorization.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 1 m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$	42
Tabela 2 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 5 m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$	42
Tabela 3 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$	42
Tabela 4 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 1 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	43
Tabela 5 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 5 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	43
Tabela 6 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 e $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	44
Tabela 7 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 12×12 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$	45
Tabela 8 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 12×12 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	45
Tabela 9 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 16×16 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$	46
Tabela 10 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 16×16 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	46
Tabela 11 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 25×25 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$	47
Tabela 12 - Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 25×25 , $L = 10 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	47

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC	Condição de Contorno
CI	Condição Inicial
DC	Direções Conjugadas
DFR	Método das Diferenças Finitas Regressivas
EDP	Equação Diferencial Parcial
GC	Gradientes Conjugados
GCPC	Gradientes Conjugados Pré-Condicionado
ILU	Fatoração Incompleta LU
ILU(0)	Fatoração Incompleta LU de nível zero
MDF	Método das Diferenças Finitas
PMD	Passo Máximo Descendente

LISTA DE SÍMBOLOS

$S_{m \times n}$	Representação de sistemas lineares
\mathbf{A}	Matriz dos coeficientes
\mathbf{x}	Vetor das variáveis
\mathbf{b}	Vetor dos termos independentes
\mathbf{L}	Matriz triangular inferior
\mathbf{U}	Matriz triangular superior
\mathbf{D}	Matriz diagonal
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{A}^T	Matriz transposta da matriz dos coeficientes
\mathbf{C}	Matriz Pré-condicionadora
$u(x, t)$	Temperatura na posição x da equação do calor unidimensional
α^2	Constante de difusividade térmica da equação do calor
L	Comprimento da barra
t	Tempo
h	Tamanho do passo associado à variável x
k	Tamanho do passo associado à variável y
λ	Parâmetro utilizado na discretização pelo MDF
$F(\mathbf{x})$	Função quadrática
$\nabla F(\mathbf{x})$	Gradiente da função quadrática
c	Escalar real da função quadrática
$\vec{\mathbf{x}}^*$	Minimizador da função quadrática
N	Número de iterações
tol	Tolerância
$\vec{\mathbf{r}}$	Resíduo associado ao GC
α	Parâmetro utilizado para o cálculo dos resíduos no GC
$\vec{\mathbf{d}}$	Direção associada ao GC
β	Parâmetro utilizado para o cálculo das direções conjugadas
E	Erro de arredondamento

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	18
2 PROBLEMAS TRATADOS	22
2.1 Problema 1	22
2.2 Problema 2	24
2.3 Problema 3	26
2.4 Problema 4	27
3 O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS	28
3.1 O Problema de Minimização	28
3.2 O Método do Passo Máximo Descendente	29
3.3 O Método das Direções Conjugadas	31
3.4 O Método do Gradiente Conjugado	32
3.5 O Método do Gradiente Conjugado Pré-Condicionado	33
4 O PRÉ-CONDICIONADOR DE FATORAÇÃO INCOMPLETA LU DE NÍVEL ZERO	36
4.1 Os pré-condicionadores de fatoração Incompleta LU	36
4.1.1 O pré-condicionador de fatoração ILU de nível zero	38
5 RESULTADOS NUMÉRICOS	41
5.1 O Problema 1 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	41
5.2 O Problema 2 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	44
5.3 O Problema 3 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	45
5.4 O Problema 4 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$	46

CONCLUSÃO	49
REFERÊNCIAS	51

INTRODUÇÃO

Contexto científico

Os sistemas de equações algébricas lineares ou, simplesmente, sistemas lineares são um dos assuntos com maior versatilidade em aplicações de áreas científicas como Física, Economia, Engenharia, entre outras [5, 7, 9, 13, 16]. A natureza desses problemas, implica em sistemas lineares, muitas vezes, esparsos. Isto é, esses sistemas possuem um grande número de equações lineares, cujos coeficientes são valores iguais a zero [8, 22]. Tais características dificultam a utilização de métodos diretos para encontrar a solução do problema. Nesses casos, uma alternativa viável é buscar uma aproximação desta solução via métodos iterativos, de modo que este diminua o número de operações em relação ao método direto, além de evitar problemas de instabilidade numérica e armazenamento de dados [8]. Essa busca por uma solução precisa é parte importante da álgebra linear computacional e análise numérica, já que os métodos numéricos tendem a torná-la mais eficiente e rápida.

Deste modo, a investigação teórica e numérica de métodos iterativos utilizados para resolver sistemas de equações lineares, apresenta avanços significativos nas últimas décadas, afirmando cada vez mais sua validade [2, 12]. Existem diversos métodos numéricos empregados para tal finalidade, dos quais destaca-se o método dos Gradientes Conjugados (GC) [6, 8, 24]. O estudo desse método iniciou-se na década de 50, com trabalhos de Hestenes e Stiefel (1952) [14], motivados pela solução de sistemas originados da discretização de equações diferenciais parciais e viabilizados pela inserção computacional nos cálculos científicos [8]. Assim como os demais métodos desse tipo, a convergência dos GC está estritamente relacionada as características da matriz dos coeficientes \mathbf{A} , do sistema linear. Convergir, neste caso, à solução do sistema linear equivale a encontrar o mínimo local da uma função quadrática. Isto é possível, devido ao conjunto de direções A -conjugadas linearmente independentes na qual este método se baseia, e que influi na eficiência do GC. Entretanto, tal eficiência nem sempre se mantém nos casos em que a matriz \mathbf{A} dos coeficientes é esparsa ou mal condicionada [6, 8, 22].

Nesse contexto, o pré-condicionamento surge como uma alternativa para resolver este tipo de problema. Nesta técnica associa-se uma matriz, chamada de pré-condicionador, ao sistema linear original, obtendo um sistema equivalente. Tal sistema tem a mesma

solução e apresenta melhores características de convergência, uma vez que a matriz pré-condicionadora de \mathbf{A} , associada ao sistema original, é melhor condicionada. Ao associar um pré-condicionador a um método iterativo, como o Gradiente Conjugado, há a preocupação em preservar as propriedades da matriz dos coeficientes, como a esparsividade [9]. Uma das classes de pré-condicionadores que se adequam a essa restrição é a de Fatoração Incompleta, que recebe esta denominação ao ignorar alguns preenchimentos na construção da aproximação da matriz \mathbf{A} . A partir da maneira como acontecem tais preenchimentos, pode-se classificar os pré-condicionadores dessa categoria. Em especial, o pré-condicionador de Fatoração Incompleta LU (*Incomplete Lower Upper Factorization - ILU*) se baseia na Eliminação Gaussiana, modificando as matrizes triangulares superior e inferior de tal forma que a aproximação dessas, juntas, resultam em uma aproximação da matriz \mathbf{A} [22, 25]. O caso mais simples desse pré-condicionador é a Fatoração Incompleta LU de preenchimento (ou nível) zero, ou apenas, $ILU(0)$, cujo descarte de elementos da matriz dos coeficientes releva apenas a posição dos elementos nulos da matriz dos coeficientes para descartar (ou não) o que for necessário [9, 22]. Com isso, uma de suas vantagens está na facilidade de implementação, mesmo que seu aspecto em não considerar o valor numérico de cada elemento possa limitar sua eficiência.

Portanto, nesta pesquisa estuda-se a convergência do método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados por Fatoração Incompleta de nível zero aplicado aos sistemas lineares obtidos da discretização da equação do calor unidimensional, pelo método de Diferenças Finitas Regressivas (DFR), cuja matriz dos coeficientes é esparsa, tridiagonal, simétrica e positiva definida [6, 23]. Também são consideradas outras situações, tratadas em [6], que envolvam sistemas lineares esparsos com dimensões maiores, em relação ao primeiro problema. Assim, na análise dos resultados numéricos verificam-se os parâmetros utilizados, o número de iterações, os erros de arredondamento e a aproximação da solução numérica à solução analítica, a fim de averiguar a eficiência do GC associado ao pré-condicionamento abordado.

Objetivos

Os objetivos aqui apresentados dimensionam as intenções dos estudos numéricos deste trabalho de pesquisa.

Objetivo Geral

Este trabalho tem como principal objetivo analisar a convergência do método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionado por Fatoração Incompleta LU com Preenchimento Zero, aplicado na resolução de sistemas lineares esparsos.

Objetivos Específicos

Além do objetivo já exposto, outros particulares são considerados. A seguir, apresenta-se tais objetivos específicos:

- analisar a convergência do método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado por Fatoração ILU(0), na resolução de sistemas lineares cuja matriz dos coeficientes é do tipo esparsa tridiagonal, obtido mediante a utilização do método de Diferenças Finitas aplicado na discretização de uma barra de comprimento finito. Além disso, tal análise é realizada para outros sistemas lineares, cuja matriz dos coeficientes é do tipo esparsa, apresentados em [6];
- comparar os resultados encontrados pelo método dos Gradientes Conjugados sem e com pré-condicionamento à solução analítica para cada caso considerado, além de examinar o número de iterações e os erros de arredondamento;
- possibilitar estudos futuros sobre outros pré-condicionadores de Fatoração Incompleta LU, aplicados aos mesmos problemas considerados neste estudo, ou em outros problemas que modelem situações reais com maior nível de complexidade.

Estrutura do trabalho

Esta Seção apresenta, a seguir, a descrição de cada capítulo desta monografia, os quais são fundamentais para sua estrutura e cumprimento dos objetivos já mencionados. Desse modo:

- O Capítulo 1 expõe alguns conceitos fundamentais para compreensão sobre sistemas lineares, destacando alguns tipos de matrizes presente neste estudo, os quais a matriz de coeficientes pode assumir;
- Já o Capítulo 2 apresenta a formulação dos problemas considerados, neste estudo, como condução de calor; além de outros casos extraídos das referências aqui utilizadas;

- Na sequência, o Capítulo 3 aborda o método iterativo dos Gradientes Conjugados, utilizado na resolução de sistemas lineares. Aqui são incluídas sua definição, formulação, seu algoritmo e a forma como se dá seu pré-condicionamento;
- Por outro lado, o Capítulo 4 é dedicado à técnica de pré-condicionamento Fatoração Incompleta LU, na qual destaca-se o pré-condicionamento pela Fatoração ILU(0);
- Finalizando, o Capítulo 5 analisa os resultados numéricos obtidos da utilização do método dos Gradientes Conjugados e Gradientes Conjugados Pré-condicionado por Fatoração ILU(0) aplicados à motivação apresentada no Capítulo 2, consumando sua investigação numérica sobre a convergência deste método.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Encontrar a solução de um sistema linear é determinar o vetor de variáveis que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema. Para que isso aconteça, é necessário admitir \mathbf{A} como uma matriz inversível, logo, o sistema (1.1) tem uma única solução $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, onde \mathbf{A}^{-1} é a inversa da matriz \mathbf{A} [3, 1, 21].

A matriz dos coeficientes de um sistema linear pode receber nomes especiais, de acordo com as propriedades que apresentam. Estas propriedades as diferenciam de uma matriz qualquer, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou pelo perfil dos seus elementos [3, 1, 21]. Dessa maneira, considerando a definição da matriz \mathbf{A} dos coeficientes (1.4), do sistema de equações lineares (1.3), seguem as definições:

Definicao 1.2 *Chama-se **matriz quadrada** aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Ao longo do trabalho, são utilizadas apenas matrizes quadradas, de modo que as próximas definições são expressas para esse tipo específico de matriz.

Definicao 1.3 Denomina-se **matriz triangular superior** a matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Definicao 1.4 Denomina-se **matriz triangular inferior** a matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Definicao 1.5 Chama-se **matriz diagonal**, a matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, ou seja, os elementos fora da diagonal são nulos.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Definicao 1.6 Chama-se **matriz identidade** de ordem n aquela em que os elementos $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, com $i, j = 1, \dots, n$.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Definicao 1.7 A **matriz transposta** da matriz \mathbf{A} , é dada por $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n \times m}$, onde cada linha de \mathbf{A}^T corresponde a uma coluna de \mathbf{A} .

Definicao 1.8 A **matriz simétrica** é aquela em que $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$, para $i, j = 1, \dots, n$, isto é, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Definicao 1.9 Diz-se que uma matriz é **semi-definida positiva** se for simétrica e se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \neq 0$.

Definicao 1.10 Diz-se que uma matriz é **definida positiva** se for simétrica e se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq 0$.

Definicao 1.11 Uma **matriz tridiagonal** é uma matriz quadrada cujos elementos diferentes de zero ficam na diagonal principal, e nas diagonais respectivamente acima e abaixo dela.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Definicao 1.12 Uma **matriz pentadiagonal** é uma matriz quadrada cujos elementos diferentes de zero ficam na diagonal principal, e em duas diagonais acima e abaixo da principal, respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ddots & & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{53} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Definicao 1.13 Uma matriz é **esparsa** quando apresenta uma quantidade elevada de elementos nulos quando comparada à quantidade de elementos não-nulos.

2 PROBLEMAS TRATADOS

Neste Capítulo apresenta-se a motivação utilizada para o estudo da convergência do método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado pela Fatoração ILU(0). Tal motivação está direcionada à resolução de sistemas lineares de problemas que envolvem matrizes esparsas [6, 8].

2.1 Problema 1

O Problema 1 é caracterizado pelo fluxo de calor num corpo ao longo do tempo, relacionado diretamente com a variação da temperatura desse no meio [17]. O modelo matemático adotado para uma barra uniforme de comprimento L , termicamente isolada, com suas extremidades mantidas a $10^\circ C$ e $30^\circ C$, é constituído por uma equação diferencial parcial que modela a condução de calor, juntamente com as suas condições de contorno e iniciais extraído de [23], dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) = 10 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 30, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\alpha = 1$, e

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq L \end{cases}. \quad (2.2)$$

Pode-se obter a solução analítica $u(x, t)$ do Problema 1 através do método de separação de variáveis, onde

$$u(x, t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-t \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \quad (2.3)$$

A Figura 1 representa esquematicamente o modelo matemático adotado em (2.1).

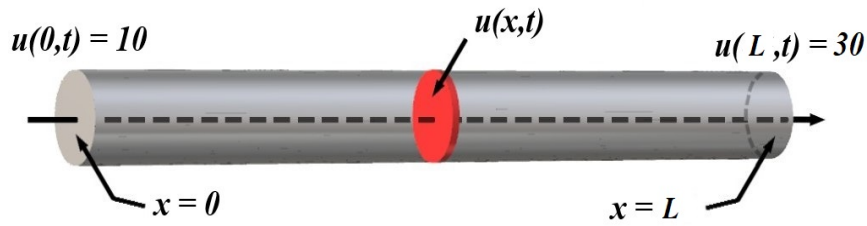


Figura 1: Barra unidimensional uniforme de comprimento L , com extremidades à temperaturas fixas.

Como o Problema 1 é contínuo, antes de se obter sua solução, é necessário discretizar a equação do calor unidimensional, utilizando o método de Diferenças Finitas Regressivo (DFR), a fim de torná-lo um problema discreto [6, 8, 17]. O DFR é incondicionalmente instável, isto é, o passo de tempo independe da resolução espacial da malha adotada, de modo que a condição de estabilidade

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

não precisa ser satisfeita [6].

Dessa maneira, ao aplicar o método de DFR obtém-se a equação discretizada (2.5) da equação do calor

$$(1 + 2\lambda)u(x_i, t_j) - \lambda u(x_{i+1}, t_j) - \lambda u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_{j-1}), \quad (2.5)$$

onde $\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2} = \frac{k}{h^2}$, já que $\alpha = 1$. Observa-se, na Equação (2.5), que ao variar i e j recai-se em um sistema linear do tipo

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j-1)}, \quad (2.6)$$

cuja matriz dos coeficientes \mathbf{A} é da forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\lambda & (1+2\lambda) & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

o vetor solução é

$$\mathbf{u}^j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ u_3^j \\ \vdots \\ u_{m-1}^j \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

e o vetor dos termos independentes

$$\mathbf{u}^{(j-1)} = \begin{pmatrix} u_1^{j-1} \\ u_2^{j-1} \\ u_3^{j-1} \\ \vdots \\ u_{m-1}^{j-1} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

é obtido pela condição inicial do problema (2.1), quando $j = 1$. Além disso, nota-se que $\lambda > 0$, implica em (2.7) diagonalmente dominante. Então, a matriz \mathbf{A} é esparsa do tipo tridiagonal, simétrica e positiva definida. Com efeito, pode-se usar o método iterativo dos Gradiente Conjugados para resolver o sistema linear (2.6).

2.2 Problema 2

As equações diferenciais parciais são responsáveis por modelar diversas aplicações. Diferente da equação parabólica do calor, que depende do tempo, as equação elípticas são independentes do tempo, e surgem de problemas físicos como a distribuição de calor estacionário em uma região plana, a energia potencial de um ponto em um plano submetido à forças gravitacionais no plano e problemas estacionários envolvendo fluidos incompressíveis, de acordo com Burden [6].

O Problema 2 é uma aplicação física, extraída de Burden [6], que envolve um cabo

coaxial feito de um condutor interno de 0,1 polegada quadrada, mantido a 0 volts; e um condutor externo de 0,5 polegada quadrada, mantido a 110 volts. O potencial em um ponto na seção transversal é descrito pela equação de Laplace [4, 6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.10)$$

para (x, y) no conjunto $R = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 0,5\}$.

Encontrar a aproximação do potencial entre os dois condutores equivale a determinar a solução do sistema linear do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cuja matriz \mathbf{A} de coeficientes, a seguir, é esparsa, simétrica e positiva definida, de dimensão 12×12 .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Além disso, tem-se o vetor das variáveis

$$\mathbf{w}^{(k)} = \begin{pmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ \vdots \\ w_{11}^k \\ w_{12}^k \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

e o vetor dos termos independentes

$$\mathbf{w}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

As características da matriz \mathbf{A} do sistema linear envolvido, permitem que o método dos Gradientes Conjugados seja aplicado para encontrar sua solução, e simultaneamente, determinar a solução do problema tratado nesta Seção. Vale a pena ressaltar, que as informações contidas em [6] não explicitam se o sistema linear foi gerado a partir da utilização do método de DFR, de maneira análoga ao processo de discretização da EDP do calor na Seção anterior.

2.3 Problema 3

O Problema 3, presente em Burden [6], se configura no seguinte sistema linear do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, composto pelas seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{cases} 0, & \text{quando } j = 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, 16, \\ -1, & \text{quando } \begin{cases} j = i + 1 \text{ e } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, \\ j = i - 1 \text{ e } i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, \\ j = i + 4 \text{ e } i = 1, 2, \dots, 12, \\ j = i - 4 \text{ e } i = 5, 6, \dots, 16, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.14)$$

e

$$\mathbf{b} = (1, 902207, 1, 051143, 1, 175689, 3, 480083, 0, 819600, -0, 264419, -0, 412789, 1, 175689, 0, 913337, -0, 150209, -0, 264419, 1, 051143, 1, 966694, 0, 913337, 0, 819600, 1, 902207)^T \quad (2.15)$$

Neste caso, \mathbf{A} tem dimensão 16×16 e é simétrica positiva definida.

2.4 Problema 4

Semelhante ao problema apresentado na Seção anterior, o Problema 4 apresenta as matrizes (2.16) e (2.17), que constituem um novo sistema linear do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{cases} 0, & \text{quando } j = 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, 25, \\ -1, & \text{quando } \begin{cases} j = i + 1 \text{ e } i = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, \\ 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, \end{cases} \\ j = i - 1 \text{ e } i = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \\ 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, \end{cases} \\ j = i + 5 \text{ e } i = 1, 2, \dots, 20, \\ j = i - 5 \text{ e } i = 6, 7, \dots, 25, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.16)$$

e

$$\mathbf{b} = (1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2)^T \quad (2.17)$$

É importante ressaltar que \mathbf{A} , desta motivação, tem dimensão 25×25 , de modo que seja maior em relação as matrizes de coeficientes apresentadas nos problemas anteriores (Seções 2.3 e 2.4). Além disso, tal matriz é simétrica e positiva definida.

3 O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

A necessidade de se obter soluções mais precisas dos problemas gerados em certas ciências, proporciona, cada vez mais, o desenvolvimento numérico e computacional, fazendo do desempenho dos métodos numéricos algo fundamental, tornando-os mais eficientes na busca das soluções dos sistemas lineares, que surgem em áreas científicas como Física, Economia, Engenharias, entre outras [6, 8]. Assim, problemas como os apresentados no Capítulo 2, por envolverem matrizes esparsas, dificultam a aplicação de métodos diretos para determinar com precisão a solução de sistemas lineares do tipo (1.1).

Logo, os métodos iterativos surgem como uma eficiente alternativa para estipular uma solução numérica tão próxima da solução quanto se espera. Um dos métodos mais úteis quando empregado para resolver sistemas lineares esparsos com elementos não nulos ocorrendo em padrões previsíveis [6], é o método dos Gradientes Conjugado (GC) [6, 8, 24]. Sua convergência, embora muitas vezes notável, pode ser melhorada ao associar o GC a um pré-condicionador, com intuito de tornar mais rápido e preciso os cálculos visando a solução do sistema linear [6, 22].

Com efeito, neste Capítulo estuda-se o método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado, o qual pode ser observado com mais detalhes nos trabalhos de Burden [6], Cunha [8], Shewchuk [24] e Saad [22].

3.1 O Problema de Minimização

O problema de interesse envolve uma função $F(\mathbf{x})$, para o caso em que F seja uma função quadrática $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por [24]:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}^T - \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) e positiva definida ($\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$), \mathbf{x} , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ são vetores e $c \in \mathbb{R}$ é um escalar.

Sabe-se que o vetor gradiente aponta na direção em que há maior crescimento na função [8]. Logo, calcula-se o gradiente da função (3.1) por

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}. \quad (3.2)$$

Quando o vetor gradiente se anula em um ponto \mathbf{x} , isto é, $\nabla F(\mathbf{x}) = \vec{0}$, então \mathbf{x} é um ponto crítico da função $F(\mathbf{x})$. Assim,

$$\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} = \vec{0} \quad (3.3)$$

Como \mathbf{A} é simétrica, a Equação (3.3) é reduzida para

$$\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} = \vec{0}. \quad (3.4)$$

Logo, pela Equação (3.4), obtém-se o sistema linear

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}, \quad (3.5)$$

que se deseja resolver. Além disso, como \mathbf{A} também é definida positiva, $\vec{\mathbf{x}}$ será também ponto mínimo de $F(\vec{\mathbf{x}})$. Portanto, resolver o sistema (3.5) equivale a encontrar um $\vec{\mathbf{x}}$ que minimize a função quadrática (3.1).

É importante ressaltar que uma função quadrática é fortemente convexa se, e somente se, sua matriz associada é definida positiva, uma vez que a superfície definida por este tipo de função tem a forma de um parabolóide. Mais informações e exemplos sobre essa afirmativa, podem ser encontrados em Shewchuk [24].

3.2 O Método do Passo Máximo Descendente

A partir do que já foi apresentado até aqui, a existência de um ponto que minimiza a função quadrática foi assegurado. A ideia do gradiente dessa função sugere a composição de direções para a construção do caminho que leve ao minimizador. Assim, o método do Passo Máximo Descendente (PMD) é utilizado para determinar as direções de busca.

Desse modo, supondo que \mathbf{x}^* seja o vetor que minimiza a Equação (3.1), busca-se uma série de pontos que sejam suficientemente próximos de \mathbf{x}^* , associados às direções

opostas ao gradiente. Isto é, a partir de um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, os próximos pontos são dados por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(0)}, \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{r}^{(0)}$ é o resíduo associado ao ponto $\mathbf{x}^{(0)}$. O resíduo, será a direção oposta ao gradiente, determinado por meio da Equação (3.4), de modo que

$$\mathbf{r}^{(k)} = -\nabla F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}. \quad (3.7)$$

Essa variável determina a diferença entre a solução \mathbf{x}^* e a sua aproximação $\mathbf{x}^{(k)}$.

Observa-se, da Equação (3.6), que $\alpha^{(k)}$ se relaciona com o resíduo \mathbf{r} . Essa variável determina o tamanho do passo, minimizando $F(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)})$ quando

$$\frac{d}{d\alpha} F(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}) = 0. \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) é garantida, ou seja, $\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}$ é o mínimo da função quadrática nesse ponto, quando $\mathbf{r}^{(k)}$ e $\mathbf{r}^{(0)}$ forem ortogonais [6]. Desse modo, [7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} F(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}) &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}) - \mathbf{b}^T (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}) + c \right] \\ 0 &= \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} \\ 0 &= \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} \\ 0 &= \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)} + (\mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)}) \mathbf{r}^{(k)} \\ 0 &= \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)} + (\mathbf{r}^{(k)}) \mathbf{r}^{(k)} \\ 0 &= \alpha^{(k)} (\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)} - (\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)} \\ \alpha^{(k)} &= \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.9), tem-se

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\nabla F(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)}} \quad (3.10)$$

Ainda pela Equação (3.7), o resíduo $\mathbf{r}^{(k+1)}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k+1)}. \quad (3.11)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{r}^{(k)}) \\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= (\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}) - \alpha^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)} \\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Vale a pena ressaltar que o PMD, pode apresentar, em alguns casos, um elevado custo computacional por necessitar de cálculos que envolvam multiplicações de vetores, como constam nas igualdades (3.6), (3.7) e (3.9) [9]. Além disso, o uso das aproximações $\mathbf{x}^{(k)}$, na Equação (3.12), podem afetar a convergência, tornando-a lenta [6, 9].

3.3 O Método das Direções Conjugadas

Na Equação (3.10), nota-se que $\alpha^{(k)}$ depende do cálculo de $\mathbf{r}^{(k)}$, caracterizando um problema. Um modo de solucioná-lo, é escolher um conjunto de direções \mathbf{A} -conjugadas linearmente independentes no lugar de direções ortogonais (ver Definição 3.3.1 e Lema 3.3.1).

Definição 3.3.1 *Um conjunto de vetores $\mathbf{d}^{(0)}, \dots, \mathbf{d}^{(k)} \in \mathbb{R}^n - 0$ é dito \mathbf{A} -conjugado, se $(\mathbf{d}^i)^T \mathbf{A} \mathbf{d}^j = 0$, para todo $i, j = 0, 1, 2, \dots, k$; $i \neq j$.*

Lema 3.3.1 *Direções conjugadas são linearmente independentes: para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva, qualquer conjunto de direções \mathbf{A} -conjugadas é linearmente independente.*

Com isso, interessa o fato de que todo método de direções \mathbf{A} -conjugadas encontra um minimizador da função quadrática (3.1) em, no máximo, n iterações [5], como sugere o Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.1 *Seja F uma função quadrática. Para qualquer ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, com qualquer escolha de conjunto de vetores \mathbf{A} -conjugados, o ponto $\mathbf{x}^{(k)}$ obtido de acordo com (3.6), para $k = 0, 1, \dots, n - 1$, é o minimizador de (3.1).*

Semelhante ao método do PMD, pelo Teorema 3.3.1 tem-se que o resíduo $\bar{\mathbf{r}}^{(k)}$ num ponto dado é ortogonal às direções conjugadas.

Teorema 3.3.1 *O resíduo $\mathbf{r}^{(k)}$, para $k = 1, 2, \dots, n$ de um método de direções conjugadas satisfaz*

$$(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{d}^j = 0, \quad (3.13)$$

para todo $j < k$ e $j = 1, 2, \dots, k$.

A maneira como é gerado o conjunto de direções \mathbf{A} -conjugadas é apresentado na Seção seguinte, juntamente com o método dos Gradientes Conjugados.

3.4 O Método do Gradiente Conjugado

O método dos Gradientes Conjugados, originalmente estudado por Hestenes e Stiefel em 1952 [14], faz a escolha do conjunto de direções de busca $\{\mathbf{d}^{(k)}\}$, de maneira que sejam ortogonais aos resíduos $\mathbf{r}^{(k)}$ a cada iteração, conforme apresentado no método das Direções Conjugadas.

Para isso, toma-se um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{d}^{(0)} = -\nabla F(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{r}^{(0)}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}. \quad (3.16)$$

A escolha do parâmetro $\beta^{(k)}$ é feita de tal forma que as direções $\mathbf{d}^{(k+1)}$ e $\mathbf{d}^{(k)}$ sejam \mathbf{A} -ortogonais. Assim, pela Definição 3.3.1, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k+1)} \\ 0 &= (\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A} (\mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) \\ 0 &= (\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} (\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)} \\ \beta^{(k)} &= -\frac{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k+1)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Logo, o método dos GC pode ser resumido pelas Equações (3.14), (3.9), (3.12), (3.17) e (3.15), que compõem o Algoritmo 1 utilizado na implementação do referido método.

Algoritmo 1 Método dos Gradientes Conjugados.

- 1: Dados de entrada: \mathbf{A} , $\vec{\mathbf{b}}$, $\mathbf{x}^{(0)}$ (solução inicial), N (número máximo de iterações) e tol (tolerância)
 - 2: Faça: $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$ e $k = 0$
 - 3: **enquanto** $k \leq N$ **faça**
 - 4: $\alpha^{(k)} = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)}}$
 - 5: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$
 - 6: $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}$
 - 7: $E = \mathbf{r}^{(k+1)} \cdot \mathbf{r}^{(k+1)}$
 - 8: **se** $E < tol$ **então**
 - 9: **solução** = $\mathbf{x}^{(k+1)}$
 - 10: **break**
 - 11: **fim se**
 - 12: $\beta^{(k)} = -\frac{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A}\mathbf{r}^{(k+1)}}{\beta^k (\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}}$
 - 13: $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$
 - 14: $k = k + 1$
 - 15: **fim enquanto**
-

3.5 O Método do Gradiente Conjugado Pré-Condicionado

Embora o Gradiente Conjugado seja um dos métodos iterativos mais eficientes, tal eficiência pode ser comprometida nos casos em que \mathbf{A} é esparsa ou mal condicionada [8]. Assim, como alternativa para acelerar a convergência desse método, atribui-se um pré-condicionamento ao sistema (3.5). Desse modo, o sistema linear (3.5) é substituído por outro equivalente tendo a mesma solução, porém com melhores características de convergência [6]. Esse sistema equivalente é obtido ao incorporar implicitamente a matriz pré-condicionadora ao sistema linear, de três maneiras distintas [16]:

(i) à esquerda: $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$

(ii) à direita: $\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(iii) misto: $\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}_2^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \mathbf{C}_2^{-1}\mathbf{y}$

Neste trabalho utiliza-se o pré-condicionamento à esquerda, onde \mathbf{C} é a matriz pré-condicionadora.

Cunha [8] afirma que, ao aplicar o pré-condicionamento no GC espera-se que \mathbf{C} seja tão próxima de \mathbf{A} de tal forma que \mathbf{C} seja simétrica positiva definida; $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ seja bem condicionado; e conseqüentemente, a equação $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja fácil de ser resolvida. É essencial assegurar que essas três propriedades aconteçam, pois, mesmo que \mathbf{C} seja simétrica positiva definida, não há garantia de que $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$ também serão.

Contudo, a estrutura das Equações (3.14), (3.9), (3.12), (3.17) e (3.15) do método dos GC se mantém, acrescentando-lhes apenas a aplicação da matriz pré-condicionadora \mathbf{C} ao resíduo, como seguem:

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}^{(0)} \quad (3.19)$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{r}^{(k)}\mathbf{d}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{d}^{(k)} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)} \quad (3.22)$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{\mathbf{d}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{r}^{(k+1)}}{\mathbf{d}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)}\mathbf{d}^{(k)} \quad (3.24)$$

Assim, as Equações (3.18) à (3.24) constituem o método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados (GCPC), usadas na implementação do Algoritmo 2, apresentado a seguir, através da modificação do Algoritmo 1. Além disso, se $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, no Algoritmo 2, então retorna ao método dos Gradientes Conjugados [22].

Algoritmo 2 Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado.

- 1: Dados de entrada: \mathbf{A} , \mathbf{b} , $\mathbf{x}^{(0)}$ (solução inicial), N (número máximo de iterações) e tol (tolerância)
 - 2: Faça: $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$ e $k = 0$
 - 3: Faça $k = 0$
 - 4: **enquanto** $k \leq N$ **faça**
 - 5: $aux = \mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}$
 - 6: $\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{r}^{(k)}\mathbf{d}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}}$
 - 7: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{d}^{(k)}$
 - 8: $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}$
 - 9: $\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}^{(k+1)}$
 - 10: $E = \mathbf{r}^{(k+1)} \cdot \mathbf{r}^{(k+1)}$
 - 11: **se** $E < tol$ **então**
 - 12: **solução** $= \mathbf{x}^{(k+1)}$
 - 13: **break**
 - 14: **fim se**
 - 15: $\beta^{(k)} = -\frac{\mathbf{d}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{r}^{(k+1)}}{\mathbf{d}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}}$
 - 16: $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)}\mathbf{d}^{(k)}$
 - 17: $k = k + 1$
 - 18: **fim enquanto**
-

A matriz pré-condicionadora, selecionada para este estudo, é obtida através da fatoração Incompleta LU na tentativa de se conserve as características da matriz \mathbf{A} , necessárias para que a solução do sistema linear seja encontrada pelo GCPC por fatoração Incompleta LU de nível zero. Este pré-condicionador é apresentado no próximo Capítulo.

4 O PRÉ-CONDICIONADOR DE FATORAÇÃO INCOMPLETA LU DE NÍVEL ZERO

Na literatura, existem diversos tipos de pré-condicionadores, com qualidades e limitações distintas. Tal diversidade, faz da escolha de um bom pré-condicionador para resolver um sistema linear (esparso ou mal condicionado), na maioria das vezes, uma combinação de arte e ciência, na percepção de Saad [22]. Assim, apesar do pré-condicionamento ser um processo sistematizado, adequar sua aplicação requer certa sensibilidade. Este, talvez, seja um dos principais motivos para a exploração desse tema como se pode ver nos trabalhos desenvolvidos por Benzi [2] e Ferronato [12], indicados por Medeiros [10]; bem como o trabalho de Saad [22], referenciado por Thibes [25].

Embora existam pré-condicionadores específicos que se adequam a problemas específicos influenciando na sua eficiência, neste estudo os pré-condicionadores algébricos se adequam melhor, uma vez que consideram as características da matriz \mathbf{A} dos coeficientes, do sistema linear [10, 13]. De modo geral, esse tipo de ferramenta tenta gerar uma aproximação da matriz original por fatorações incompletas ou aproximação de sua matriz inversa [2]. Ainda assim, segundo Benzi [2], este tipo de pré-condicionador se distribue em duas classes: fatorações incompletas e inversas aproximadas. Elas se diferenciam essencialmente na construção da matriz pré-condicionadora \mathbf{C} , pois na primeira a sua formação é implícita, enquanto na última a matriz é aplicada diretamente.

Levando em consideração o método iterativo dos Gradientes Conjugados, apresentado no Capítulo 3, e suas particularidades atreladas a matriz \mathbf{A} , neste trabalho aborda-se a classe de pré-condicionadores algébricos, da qual destacam-se os pré-condicionadores de Fatoração Incompleta LU de nível zero [2, 22, 26].

4.1 Os pré-condicionadores de fatoração Incompleta LU

Para Thibes [25], a Fatoração Incompleta é o processo, no qual as posições ocupadas por elementos zeros na matriz original continuam desta maneira, ignorando-se qualquer preenchimento (*fill-in*) que se daria pelos cálculos de atualização. Na prática, esse tipo de fatoração é usado quando, muitas vezes, se deseja preservar a esparsividade das matrizes. De acordo com Pereira [19], isto se faz necessário porque quando se aplica um método direto, como a fatoração \mathbf{LU} , à uma matriz esparsa como \mathbf{A} , esta tende a se tornar densa em função do grande número de elementos gerados durante o processo, os quais preenchem a matriz pré-condicionadora \mathbf{C} em posições que seriam nulas em \mathbf{A} .

Dessa forma, o descarte de parte desses elementos se faz necessário ao longo do processo de fatoração, considerando que um pré-condicionador precisa ser somente uma boa aproximação de \mathbf{A} [15], tal que $\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{U}}$, onde $\widehat{\mathbf{L}}$ e $\widehat{\mathbf{U}}$ são os fatores triangulares \mathbf{LU} calculados de forma incompleta. Logo, diz-se que a fatoração Incompleta \mathbf{LU} (*Incomplete LU Factorization* - ILU) é uma modificação na eliminação Gaussiana, a qual permite preenchimento em um determinado conjunto de posições nos fatores \mathbf{LU} . A escolha dessas posições acontecem a partir do conjunto S , dado por:

$$l_{ij} = 0, \quad \text{se } j > i \quad \text{ou} \quad (i, j) \notin S \quad (4.1)$$

$$u_{ij} = 0, \quad \text{se } i > j \quad \text{ou} \quad (i, j) \notin S. \quad (4.2)$$

Com isso, constrói-se os fatores $\widehat{\mathbf{L}}$ e $\widehat{\mathbf{U}}$, que são aproximações, respectivamente, de \mathbf{L} e \mathbf{U} , de modo que $\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{R}$, onde \mathbf{R} é o resíduo ou erro da fatoração. Normalmente, essa fatoração adota um subconjunto S das posições (i, j) da matriz \mathbf{A} quadrada, excluindo todas as posições de elementos nulos, considerando automaticamente as posições de elementos não nulos, isto é,

$$S = \{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0\}. \quad (4.3)$$

De modo geral, esse processo leva em consideração o padrão pré-estabelecido S , conforme o Algoritmo 3 abaixo.

Algoritmo 3 Fatoração ILU - KIJ

- 1: **para** $k = 1, \dots, n - 1$ **faça**
 - 2: **para** $i = k + 1, \dots, n$ e se $(i, k) \notin S$ **faça**
 - 3: $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
 - 4: **para** $j = k + 1, \dots, n$ e para $(i, j) \notin S$ **faça**
 - 5: $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$
 - 6: **fim para**
 - 7: **fim para**
 - 8: **fim para**
-

O Algoritmo 3 pode ser arranjado por qualquer procedimento com os três laços i , j , k da eliminação Gaussiana. A formulação KIJ utilizada neste algoritmo não é a melhor alternativa numérica. Observe que no passo 4, analisam-se todas as colunas de $k + 1$ a n , e para cada coluna são modificadas todas as linhas i , tais que $i > k$. À esta análise coluna a coluna, Saad [22] apresenta uma alternativa mais econômica para identificar os

elementos que pertencem ao complemento de S .

Essa alternativa, é a variante IKJ da Fatoração ILU, em que os dados são armazenados por linha e as matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} geradas simultaneamente [22]. Sua vantagem em relação a versão anterior, está na facilidade de implementação do Algoritmo (4).

Algoritmo 4 Fatoração ILU - IKJ

```

1: para  $k = 2, \dots, n$  faça
2:   para  $i = k, \dots, i - 1$  e se  $(i, k) \notin S$  faça
3:      $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
4:   para  $j = k + 1, \dots, n$  e para  $(i, j) \notin S$  faça
5:      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 
6:   fim para
7: fim para
8: fim para

```

Dessa maneira, pode-se dizer que esse tipo de pré-condicionador se diferencia pelas suas estratégias de preenchimento, sejam elas estruturais ou numéricas, ou uma combinação de ambas [18, 22, 25]. Essas classificações distinguem os pré-condicionadores de fatoração incompleta, dos quais destaca-se o de Fatoração Incompleta LU de nível zero, abordado na seção seguinte.

4.1.1 O pré-condicionador de fatoração ILU de nível zero

O tipo mais simples da Fatoração ILU é o que apresenta preenchimento zero (*zero fill-in*), chamado de Fatoração ILU de nível zero - ILU(0). Nesta técnica, o padrão de zeros S é escolhido para ser exatamente o mesmo padrão de zeros da matriz \mathbf{A} . Desse jeito, denota-se por $NZ(\mathbf{A})$ o conjunto de elementos não nulos de \mathbf{A} , dado por

$$NZ(\mathbf{A}) = \{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0; 1 \leq i, j \leq n\}. \quad (4.4)$$

A partir daí, são produzidas as matrizes $\widehat{\mathbf{L}}$ (triangular inferior) e $\widehat{\mathbf{U}}$ (triangular superior), de modo que possuam juntas o mesmo padrão de esparsividade de \mathbf{A} , ou seja, $NZ(\mathbf{A}) = NZ(\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{U}})$. Logo, o produto das matrizes $\widehat{\mathbf{L}}$ e $\widehat{\mathbf{U}}$ tem seus elementos não nulos em posições correspondentes na matriz \mathbf{A} , de modo que $\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{U}}$. O armazenamento desses fatores em \mathbf{C} desconsidera a diagonal principal de $\widehat{\mathbf{L}}$, cujos elementos são todos iguais a 1.

Assim, o Algoritmo (5) foi construído a partir do Algoritmo (4) utilizando o conjunto de zeros (4.4) (ver linhas 2 e 4).

Algoritmo 5 Fatoração ILU(0)

```

1: para  $k = 2, \dots, n$  faça
2:   para  $i = k, \dots, i - 1$  e se  $a_{ik} \notin NZ(\mathbf{A})$  faça
3:      $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
4:   para  $j = k + 1, \dots, n$  e para  $a_{ij} \notin NZ(\mathbf{A})$  faça
5:      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} * a_{kj}$ 
6:   fim para
7: fim para
8: fim para
9: para  $i = 1, \dots, n$  faça
10:  para  $j = 1, \dots, n$  faça
11:    se  $i < j$  então
12:       $\hat{u}_{ij} = a_{ij}$ 
13:    senão
14:       $\hat{u}_{ij} = 0$ 
15:    fim se
16:  fim para
17: fim para
18: para  $i = 1, \dots, n$  faça
19:  para  $j = 1, \dots, n$  faça
20:    se  $i > j$  então
21:       $\hat{l}_{ij} = a_{ij}$ 
22:    se  $i = j$  então
23:       $\hat{l}_{ij} = 1$ 
24:    senão
25:       $\hat{l}_{ij} = 0$ 
26:    fim se
27:  fim se
28:  fim para
29: fim para
30:  $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{U}}$ 

```

No Algoritmo 5, a modificação na matriz \mathbf{A} acontece nas linhas de 1 a 8. A partir da linha 9, tem-se a formação das aproximações dos fatores triangulares inferior \mathbf{L} e

superior \mathbf{U} , cujo produto resulta na matriz pré-condicionadora desejada. Estes processos seguem, respectivamente, a formulação dos trabalhos de Lugon [15] e Pires [20].

Ainda que a fatoração $ILU(0)$ seja simples e de baixo custo computacional [2], pode sofrer alguns problemas ao serem implementadas, como interrupções (ao tentar dividir pelos pivôs zeros) ou resultarem em matrizes indefinidas (pivôs negativos), ainda que a fatoração completa resulte em uma matriz positiva definida [25]. É importante também, que os elementos descartados não sejam elementos das diagonais. Caso contrário, a estabilidade do método pode ser comprometida. Além disso, para problemas mais complexos, este tipo de pré-condicionador resulta numa aproximação de \mathbf{A} de baixa qualidade [11, 18]. Nesse contexto, é necessário utilizar pré-condicionadores mais sofisticados, que permitam certo número de elementos não nulos nos fatores incompletos; ou que considerem exclusivamente a posição dos elementos da matriz esparsa.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste Capítulo apresenta-se os estudos numéricos comparativos entre os métodos dos Gradientes Conjugados e Gradientes Conjugados Pré-Condicionado por Fatoração ILU(0). Como motivação destes estudos utiliza-se os problemas do Capítulo 2, com o objetivo de analisar a influência do pré-condicionador ILU(0) na eficiência do método dos GC. Para isso, são analisados a convergência dos métodos à solução dos sistemas lineares, os erros de arredondamento e o número de iterações necessárias para a convergência dos métodos.

Primeiramente, comparam-se o desempenho dos métodos dos GC e GCPC-ILU(0) no Problema 1, onde a matriz \mathbf{A} dos coeficientes é esparsa, tridiagonal, simétrica e positiva definida. Posteriormente, são apresentados os resultados para os Problemas 2, 3 e 4, que envolvem matrizes esparsas, simétricas e positivas definidas, de outro tipo. Todos os resultados apresentados, nas próximas Seções, foram gerados em um notebook com processador Intel Core i5-7200 de 2.5 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional de 64bits - Windows 10 Home Single Language.

5.1 O Problema 1 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$

Os resultados numéricos expostos nesta Seção, foram gerados da tentativa de resolução do sistema linear (2.6), pelos métodos dos Gradientes Conjugados e Gradientes Conjugados Pré-condicionado por Fatoração ILU(0), para matrizes esparsas obtidas na discretização da equação do calor unidimensional pelo método de DFR, para barras de comprimentos $L = 1, 5$ e $10 m$. Em todos os casos, resolve-se o sistema linear (2.6) somente uma única vez, ou seja, para $j = 1$. Além disso, utilizou-se o passo tempo $\Delta t = 0,0007$, o qual corresponde a análise da temperatura da barra no ponto x no primeiro minuto após o início do processo, tendo como referência 1 dia de análise.

As Tabelas 1 à 3 apresentam os estudos numéricos comparativos entre os métodos GC e GCPC - ILU(0), onde analisa-se as convergências às soluções dos sistemas lineares com a matriz dos coeficientes quadrada de dimensão 32×32 , para barra unidimensional de comprimentos 1, 5 e $10 m$. Estas convergências são analisadas para os critérios de parada 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} e 10^{-5} e solução inicial $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, comparando os números de iterações e os erros de arredondamento. Na Tabela 1 observa-se que ambos os métodos convergiram em todos os casos. Porém, o método dos GCPC-ILU(0) apresentou

menores números de iterações, assim como os erros de arredondamento. Em particular, a convergência à solução por este método ocorreu em 1 iteração em todas as situações.

Tabela 1: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 1m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	5	$6,25182 \cdot 10^{-2}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$
10^{-2}	6	$6,64265 \cdot 10^{-3}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$
10^{-3}	7	$6,85739 \cdot 10^{-4}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$
10^{-5}	9	$8,66732 \cdot 10^{-6}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$

Com o intuito de avaliar a influência do tamanho da barra nestes resultados, utiliza-se comprimentos de barras iguais a $5m$ e $10m$ (ver Tabelas 2 e 3), para os mesmos parâmetros adotados anteriormente. Nota-se que o método dos GCPC-ILU(0) convergiu nos dois casos, com os números de iterações e erros de arredondamento menores comparando-os ao GC. Ainda assim, os GC convergiram para todas as tolerâncias estipuladas e em menos iterações do que os resultados contidos da Tabela 1. Novamente, o GCPC-ILU(0) determinou a solução em 1 iteração.

Tabela 2: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 5m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	2	$7,37263 \cdot 10^{-4}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$
10^{-2}	2	$7,37263 \cdot 10^{-4}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$
10^{-3}	2	$7,37263 \cdot 10^{-4}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$
10^{-5}	3	$6,01602 \cdot 10^{-7}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$

Tabela 3: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	1	$5,64175 \cdot 10^{-2}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$
10^{-2}	2	$3,15031 \cdot 10^{-6}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$
10^{-3}	2	$3,15031 \cdot 10^{-6}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$
10^{-5}	2	$3,15031 \cdot 10^{-6}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$

Dessa maneira, para compreender a interferência da solução inicial nos resultados até aqui apresentados, utiliza-se $\mathbf{x}^0 = (10, 10, \dots, 10)^T$, para as mesmas tolerâncias e as barras de comprimentos 1, 5 e 10 m . Assim, nas Tabelas 4 à 6 observa-se que o GCPC-ILU(0) mantém erros de arredondamento menores quando comparados ao GC, bem como as iterações. É perceptível, também para a nova solução adotada, que os resultados observados não são diferentes aos obtidos com $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$. Logo, não se notam influências no número de iterações e/ou nos erros de arredondamento dos GC e GCPC-ILU(0), ao utilizar soluções iniciais distintas.

Contudo, o GCPC-ILU(0) manteve o número de iterações 1, em todos os casos. Consequentemente, entende-se que a aplicação da fatoração ILU(0) na tentativa de resolução do sistema linear cuja matriz é esparsa tridiagonal, equivale a fatoração \mathbf{LU} . Entretanto, a utilização desse tipo de fatoração pode ser inviável em decorrência do preenchimento da matriz \mathbf{U} , em determinadas situações envolvendo matrizes esparsas e de grande porte. Assim, os estudos numéricos que seguem para os demais problemas analisam a influência do pré-condicionamento no GC aplicados a sistemas lineares, cujas matrizes \mathbf{A} dos coeficientes são esparsas e diferentes do Problema 1.

Tabela 4: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 1 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	5	$6,25182 \cdot 10^{-2}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$
10^{-2}	6	$6,64265 \cdot 10^{-3}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$
10^{-3}	7	$6,85739 \cdot 10^{-4}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$
10^{-5}	9	$8,66732 \cdot 10^{-6}$	1	$1,20948 \cdot 10^{-26}$

Tabela 5: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 , $L = 5 m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	2	$7,37263 \cdot 10^{-4}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$
10^{-2}	2	$7,37263 \cdot 10^{-4}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$
10^{-3}	2	$7,37263 \cdot 10^{-4}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$
10^{-5}	3	$6,01602 \cdot 10^{-7}$	1	$1,15174 \cdot 10^{-27}$

Tabela 6: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 32×32 e $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	1	$5,64175 \cdot 10^{-2}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$
10^{-2}	1	$3,15031 \cdot 10^{-6}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$
10^{-3}	2	$3,15031 \cdot 10^{-6}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$
10^{-5}	2	$3,15031 \cdot 10^{-6}$	1	$1,84909 \cdot 10^{-27}$

5.2 O Problema 2 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$

O Problema 2 apresentado na Seção 2.2, no Capítulo 2, envolve um sistema linear resolvido por meio do método dos GC e o método dos GCPC-ILU(0), cuja a matriz de coeficientes é esparsa de dimensão 12×12 elementos. O sistema linear envolvido foi determinado previamente em [6], de modo que a construção da matriz \mathbf{A} não dependa do comprimento do cabo coaxial. Neste caso, fixou-se $L = 10m$, pois não cabe analisar a influência da variação do comprimento L desse objeto nos resultados, da maneira analisada para a barra unidimensional na Seção 5.1. O passo tempo permanece $\Delta t = 0,0007$, enquanto são adotados novamente os critérios de parada, 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} e 10^{-5} ; e as mesmas soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, 10, \dots, 10)^T$.

Desse modo, a comparação entre GC e GCPC-ILU(0) dada na Tabela 7, foi construída para os resultados produzidos com solução inicial $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$. Em todos os casos, os dois métodos empregados convergiram. No entanto, os GC precisaram de menos iterações para determinar a solução do problema. Vale ressaltar também, que os erros de arredondamento gerados são menores em relação ao GCPC-ILU(0).

Já para a solução inicial $\mathbf{x}^0 = (10, 10, \dots, 10)^T$, os números de iterações e os erros de arredondamento permaneceram inalterados para a maioria dos critérios de parada estabelecidos (ver Tabela 8); exceto para a tolerância 10^{-5} no GCPC-ILU(0). Apesar disso, o desempenho dos GC permanece superior ao dos GCPC-ILU(0), para este problema em especial. Em vista disso, ainda se faz necessária a análise de outros casos para consolidar a influência da fatoração ILU(0) na convergência dos Gradientes Conjugados, o que é mostrado nas próximas Seções.

Tabela 7: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 12×12 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	2	$6,05845 \cdot 10^{-28}$	3	$6,16887 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	2	$6,05845 \cdot 10^{-28}$	3	$6,16887 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	2	$6,05845 \cdot 10^{-28}$	3	$6,16887 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	2	$6,05845 \cdot 10^{-28}$	4	$1,28112 \cdot 10^{-6}$

Tabela 8: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 12×12 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	2	$2,01948 \cdot 10^{-28}$	3	$3,86963 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	2	$2,01948 \cdot 10^{-28}$	3	$3,86963 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	2	$2,01948 \cdot 10^{-28}$	3	$3,86963 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	2	$2,01948 \cdot 10^{-28}$	4	$7,48439 \cdot 10^{-7}$

5.3 O Problema 3 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$

A conversação dos parâmetros adotados no estudo numérico do Problema 2 é imprescindível, para continuar os estudos numéricos do Problema 3, conforme o que já foi exposto anteriormente. No Problema 3, a matriz \mathbf{A} é esparsa de dimensão 16×16 elementos. Além disso, o passo tempo $\Delta t = 0,0007$ e o comprimento $L = 10m$ são fixados, por motivos equivalentes aos apresentados na Seção 5.2.

Ao construir a Tabela 9 para a solução inicial $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, conforme a Tabela 7, percebe-se pelos resultados nela contidos, que a medida que se reduzem os valores de tolerância, os erros de arredondamento também diminuem na maioria dos casos, tanto para os GC como para os GCPC-ILU(0), exceto para 10^{-3} . Embora os dois métodos convirjam à solução esperada, há maior esforço computacional, pois o número de iterações aumenta na proporção que as tolerâncias diminuem. Além disso, nota-se que, em cada caso, o número de iterações para o GCPC-ILU(0) cai à metade em relação ao número de iterações para o GC.

A partir da nova solução inicial $\mathbf{x}^0 = (10, 10, \dots, 10)^T$ aplicada, é possível verificar na Tabela 10, que as iterações aumentaram a medida que os critérios de parada foram refinados, para os GC e também os GCPC-ILU(0). Este último, se mostra mais eficiente ao buscar a solução do Problema 3, em menos iterações do que o primeiro, com menores erros de arredondamento, exceto para a tolerância 10^{-2} . Dessa maneira, é necessário atentar

Tabela 9: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 16×16 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	4	$4,94609 \cdot 10^{-2}$	2	$2,73138 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	6	$1,75953 \cdot 10^{-3}$	3	$1,39989 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	7	$1,96824 \cdot 10^{-5}$	3	$1,39989 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	8	$1,53084 \cdot 10^{-6}$	4	$2,43377 \cdot 10^{-7}$

que a solução inicial influencia diretamente, apenas, no desempenho do GCPC-ILU(0), uma vez que para os GC o número de iterações são iguais e E possuem mesma ordem de grandeza. Desse modo, os resultados comparados ressaltam que o pré-condicionamento utilizado foi mais eficiente para as características do Problema 3, onde os sistemas lineares gerados possuem \mathbf{A} com dimensão maior.

Tabela 10: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 16×16 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	4	$5,18204 \cdot 10^{-2}$	3	$1,00949 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	6	$1,88896 \cdot 10^{-6}$	4	$1,48232 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	7	$2,04207 \cdot 10^{-5}$	4	$1,48232 \cdot 10^{-5}$
10^{-5}	8	$1,59666 \cdot 10^{-6}$	5	$3,38493 \cdot 10^{-8}$

5.4 O Problema 4 para as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$

O sistema linear do Problema 4 da Seção 2.4, envolve uma matriz esparsa de dimensão 25×25 elementos. A dimensão desta matriz é maior do que as matrizes presentes nos problemas das Seções 5.2 e 5.3. De maneira semelhante aos estudos apresentados até aqui, são fixados os parâmetros $L = 10m$, $\Delta t = 0,0007$, os critérios de parada dos métodos numéricos 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} e 10^{-5} e as soluções iniciais $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ e $\mathbf{x}^0 = (10, 10, \dots, 10)^T$.

Na Tabela 11, pelas comparações entre GC e GCPC-ILU(0) quando a solução inicial é $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, \dots, 0)^T$, é possível observar que os resultados se apresentam de maneira semelhante aos obtidos no Problema 3 (ver Tabelas 9 e 10). Ou seja, a medida que varia-se a tolerância, os erros de arredondamento diminuem para ambos os métodos, enquanto os números de iterações aumentam, respectivamente. Apesar disso, os menores

erros são estimados para a tolerância 10^{-5} , em que se consome mais iterações para convergir à solução dos sistemas lineares. Ainda para esta tolerância, os GCPC-ILU(0) se mostrou mais eficiente do que os GC. Porém, o GCPC-ILU(0) só apresenta melhores erros nos casos 10^{-3} e 10^{-5} . Nesses casos, como para as demais tolerâncias, o GC precisou de mais iterações para atingir a solução do sistema linear resolvido, do que o GCPC-ILU(0).

A solução inicial $\mathbf{x}^0 = (10, 10, \dots, 10)^T$ utilizada agora, faz com que haja um aumento do número de iterações do GC e do GCPC-ILU(0), para as tolerâncias 10^{-1} e 10^{-2} (ver Tabela 12). Apesar disso, é expressivo a queda do número de iterações quando se usa o pré-condicionador ILU(0). Isto reforça a percepção de que a dimensão da matriz esparsa influencia na eficiência do pré-condicionador adotado neste estudo. De forma mais clara, depreende-se que quanto maior o sistema, mais eficiente o método do GC pré-condicionado pela fatoração ILU(0) se torna; reduzindo significativamente o número de iterações para chegar à solução esperada [6], como exemplificado nos estudos numéricos comparativos das Seções 5.1 - 5.3.

Além de tudo, percebe-se que o pré-condicionador ILU(0) quando associado ao GC se adequa melhor aos problemas em que a matriz esparsa não é tridiagonal, como no Problema 1. Nos Problemas 2, 3 e 4, o descarte de alguns elementos no processo de fatoração fica mais evidente, assim como a construção da matriz pré-condicionadora como uma aproximação do produto dos fatores \mathbf{L} e \mathbf{U} .

Tabela 11: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 25×25 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	5	$9,63126 \cdot 10^{-2}$	2	$5,87011 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	8	$1,13512 \cdot 10^{-3}$	3	$1,30394 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	9	$1,04787 \cdot 10^{-4}$	4	$2,67461 \cdot 10^{-5}$
10^{-5}	11	$3,99844 \cdot 10^{-6}$	5	$2,54544 \cdot 10^{-7}$

Tabela 12: Comparações entre GC e GCPC-ILU(0) para matriz 25×25 , $L = 10m$ e $\mathbf{x}^0 = (10, \dots, 10)^T$.

Tolerância	GC		GCPC - ILU(0)	
	Iteração	E	Iteração	E
10^{-1}	8	$7,25744 \cdot 10^{-2}$	3	$8,25665 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	9	$3,74961 \cdot 10^{-3}$	4	$6,99988 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	10	$8,96157 \cdot 10^{-4}$	4	$6,99988 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	12	$1,61188 \cdot 10^{-6}$	5	$9,68347 \cdot 10^{-6}$

CONCLUSÃO

Neste trabalho analisou-se a influência do pré-condicionador Fatoração Incompleta LU com preenchimento zero associado ao método iterativo dos Gradientes Conjugados, na resolução de sistemas lineares esparsos originários da discretização de equações diferenciais parciais, as quais modelam problemas como, por exemplo, a condução de calor em uma barra unidimensional e a diferença de potencial de um cabo condutor coaxial.

Embora a escolha de um pré-condicionador não siga regras preestabelecidas, o pré-condicionador de fatoração incompleta escolhido se adequa ao GC, uma vez que conserva as propriedades - simétrica e positiva definida - da matriz dos coeficientes, o que é essencial para a utilização dos métodos dos Gradientes Conjugados. Outra vantagem de ILU(0) está na decomposição incompleta da matriz \mathbf{A} , desconsiderando os elementos nulos das matrizes esparsas envolvidas nos sistemas lineares resolvidos, ao gerar a matriz pré-condicionada.

Assim sendo, ao resolver os sistemas lineares propostos no Capítulo 2, possibilitou uma análise numérica comparativa entre os métodos dos GC e dos GCPC-ILU(0), de maneira que ao considerar matrizes esparsas tridiagonais de dimensão 32×32 , o comportamento do GCPC-ILU(0) se assemelha à fatoração LU completa, independente da variação do comprimento da barra, bem como das estimativas iniciais.

Entretanto, nos Problemas 2 ao 4, cujas matrizes são esparsas de dimensões 12×12 , 16×16 e 25×25 , respectivamente, o GCPC-ILU(0) não apresenta comportamento similar ao Problema 1. Em particular, para a primeira a matriz de dimensão 12×12 , o método dos GC foi mais eficiente. Ainda assim, de modo geral, os resultados obtidos pelo GCPC-ILU(0), nas demais dimensões, foram satisfatórios, levando em consideração o número de iterações e os erros de arredondamento. Logo, constata-se que ao aplicar a fatoração ILU(0) ao GC, além de reduzir consideravelmente o número de iterações para a convergência à solução dos sistemas lineares; o método se mostra mais eficiente nas situações em que as matrizes esparsas tenham maiores dimensões.

Apesar do pré-condicionador de fatoração LU de nível zero ser o tipo mais simples entre pré-condicionadores de fatoração ILU, este se torna uma ferramenta eficaz na aceleração da convergência de métodos iterativos, como os GC. Existem outros pré-condicionadores de fatoração incompleta LU, que constroem a aproximação da matriz dos coeficientes relevando não só aspectos posicionais, mas também o valor numérico dos elementos. Como característica dessa categoria de pré-condicionadores, a preservação da

esparsividade das matrizes, permitem associá-los de maneira semelhante aos GC. Isto viabiliza novos estudos envolvendo a convergência desses métodos, seja pela aplicação de outros pré-condicionadores de fatoração ILU; ou pela tentativa de resolver problemas mais complexos.

REFERÊNCIAS

- [1] BARROSO, L. C., BARROSO, M. M. D. A., CAMPOS FILHO, F. F., CARVALHO, M. L. B. D., AND MAIA, M. L. *Cálculo Numérico (com aplicações)*, 2 ed. Harbra, 1987.
- [2] BENZI, M. Preconditioning techniques for large linear systems: a survey. *Journal of Computational Physics* 182 (2002), 418–477.
- [3] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., AND WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*, 3 ed. Harbra, 1980.
- [4] BOYCE, W. E., AND DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Guanabara Dois, 2011.
- [5] BRUFATI, T. E. B. *Método dos gradientes conjugados*. Trabalho de Conclusão de Curso, UFPA, Curitiba, 2011.
- [6] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Análise Numérica*, 8 ed. Cengage Learning, 2008.
- [7] CHUNG, C. L. *Simulação de reservatórios de óleo leve com poço horizontal hidráulicamente fraturado*. Trabalho de Conclusão de Curso, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2015.
- [8] CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*, 1 ed. Editora da UNICAMP, 2000.
- [9] DA COSTA, V. S. *Técnicas computacionais para resolução de sistemas lineares aplicadas a problemas de enchimento de reservatórios*. Dissertação de Mestrado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2008.
- [10] DE MEDEIROS, E. N. *NI-GMRES preconditionado*. Dissertação de Mestrado, UFRN, Natal, 2014.
- [11] FERNANDES, A. A. *Uma estrutura de solucionador iterativo linear com aplicação à solução de equações do problema de fluxo de carga*. Tese de Doutorado, UnB, Brasília, 2014.
- [12] FERRONATO, M. Preconditioning for sparse linear systems at the dawn of the 21st century: History, current development, and future perspectives. *ISRN Applied Mathematics* (2012).
- [13] FISCHBORN, M. *Computação de alto desempenho aplicada à análise de dispositivos eletromagnéticos*. Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, 2006.
- [14] HESTENES, R. M., AND STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Research Nat. Bur. Standarts* 49 (1952), 409–436.
- [15] LUGON, B., AND CATABRIGA, L. Algoritmos de reordenamento de matrizes esparsas aplicados a preconditionadores ilu (p). *XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2013), 2343–2354.

- [16] MAGRI, V. A. P. *Pré-condicionador multiescala algébrico aplicado à simulação de reservatórios de petróleo*. Dissertação de Mestrado, UFSC, Santa Catarina, 2015.
- [17] NASCIMENTO, J. D. S. M. D., AND SILVA, T. D. *Método de diferenças finitas: aplicação na equação do calor*. Trabalho de Conclusão de Curso, UNIFAP, Macapá, 2013.
- [18] PAZ, A. R. A. *Aplicação do método GMRES na solução de problemas de estabilidade em Sistemas de energia elétrica*. Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, 2012.
- [19] PEREIRA, F. H. *Estudo de métodos iterativos e pré-condicionadores para sistemas lineares esparsos não-simétricos*. Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto, 2003.
- [20] PIRES, R. A. *Elaboração de um código computacional para resolução de sistemas lineares de grande porte*. Trabalho de Conclusão de Curso, UFSJ, São João del-Rei, 2014.
- [21] RUGGIERO, M. A. G., AND DA ROCHA, V. L. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 2 ed. Pearson Makron Books, 1997.
- [22] SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.
- [23] SANTOS, R. J. *Séries de Fourier e equações diferenciais parciais*. UFMG, Belo Horizonte, 2007.
- [24] SHEWCHUK, J. R. *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*. Carnegie-Mellon University, 1994.
- [25] THIBES, H. V. *Um estudo da fatoração incompleta LU e Cholesky como pré-condicionadores nos métodos iterativos*. Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 2002.
- [26] VAN DER VORST, H. A. *Iterative Krylov methods for large linear systems*, vol. 13. Cambridge University Press, 2003.