Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística

Lucas Xavier Brandão

Propriedades de Lie em Anéis de Grupo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da UFF como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Paula Murgel Veloso

Niterói, 2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

B817p Brandão, Lucas Xavier
Propriedades de Lie em anéis de grupo / Lucas Xavier Brandão ; Paula Murgel Veloso, orientador. Niterói, 2019.
51 f.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PPGMAT.2019.m.02580530207

1. Anel de grupo. 2. Lie nilpotência. 3. Propriedade Lie n-Engel. 4. Involução. 5. Produção intelectual. I. Veloso, Paula Murgel, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da Dissertação de Mestrado em Matemática apresentada por Lucas Xavier Brandão

Aos dezoito dias do mês de julho de dois mil e dezenove, reuniram-se na sala 407 no quarto andar da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense, os membros da Comissão Examinadora constituída pelos Professores Paula Murgel Veloso (Universidade Federal Fluminense), Simon George Chiossi (Universidade Federal Fluminense) e Cristiane de Mello (Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro), sob a presidência do primeiro, para prova pública de defesa da Dissertação intitulada **"Propriedades de Lie em Anéis de Grupo"**, apresentada pelo Mestrando Lucas Xavier Brandão. A defesa da Dissertação atende às exigências contidas no Regulamento Específico do Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense. A Dissertação foi elaborada sob a orientação da Professora Paula Murgel Veloso. O Mestrando Lucas Xavier Brandão fez a exposição de seu trabalho durante 50 minutos, iniciando às 14h e concluindo às 14h50min. A seguir, respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora. Terminada a arguição, realizou-se a reunião da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido da aprovação do Mestrando Lucas Xavier Brandão, considerando-se o trabalho apresentado e a forma com que se houve na apresentação da defesa do mesmo. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pela Secretária Administrativa da Coordenação de Pós-Graduação em Matemática, pelos membros da Banca Examinadora e pelo Mestrando.

Niterói, 18 de julho de 2019.

Prof.ª Cristiane de Mello

Prof. Simon George Chiossi

Paula Murgel Veloso

Prof.ª Paula Murgel Veloso
(Orientadora)

Lucas Xavier Brandão

Lucas Xavier Brandão
(Mestrando)

Jaqueline G. Tavolaro

Jaqueline Garcez Tavolaro
(Secretária)

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.”

Dedico este trabalho à minha mãe, Elizete Xavier, e à minha avó, Lucimar Brandão.

Agradecimentos

À Deus, aos meus pais, Elizete e Elielson, e ao meu irmão, Felipe.

Aos meus avós, Lucimar e Pedro, e à minha tia Clara.

À professora Paula Veloso, minha conselheira e orientadora.

À UFF, aos professores, ao coordenador Max Souza e aos secretários da Pós-graduação.

Aos professores da banca, Simon Chiossi e Cristiane de Mello, pelas dicas e correções.

Aos meus colegas do curso, especialmente à Jaqueline, Rafael, Manoel e Andreza.

Aos meus tios, Nazaré e Salvador, e à minha família do Rio de Janeiro.

À minha família em Niterói, Pedro, Ester, Solomon, Susan e Mateus.

À Katia e aos meus companheiros de casa.

À UMP, ao Coral Simonton e à Primeira Igreja Presbiteriana de Niterói.

Aos meus amigos de Belém-PA, em especial, à Beatrice, Mônica e Luana.

À minha orientadora da graduação, Nazaré Bezerra.

E, finalmente, agradeço à CAPES, pelo investimento financeiro.

Resumo

Este trabalho faz um estudo detalhado do artigo *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions* de J. Hermes Castillo e C. Polcino Milies, o qual apresenta alguns resultados a respeito das propriedades Lie nilpotência e Lie n-Engel em anéis de grupo e, mais especificamente, nos seus elementos simétricos sob uma involução clássica orientada.

Palavras-chave: Anel de grupo; Lie nilpotência; Propriedade Lie n-Engel; Involução.

Abstrat

This work makes a detailed study of the article *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions* by J. Hermes Castillo and C. Polcino Milies, which presents some results regarding the Lie nilpotency and Lie n-Engel properties in group rings and, more specifically, in their symmetric elements under an oriented classical involution.

Keywords: Group ring; Lie nilpotency; Lie n-Engel property; Involution.

Sumário

Introdução

A Teoria dos Anéis de Grupo é uma área que tem despertado o interesse de vários matemáticos desde a primeira metade do século XX. Muitos são os seus problemas ainda em aberto, como é o caso do chamado "problema do isomorfismo", que, grosso modo, questiona se grupos associados a anéis de grupos isomorfos são isomorfomos e que, através de seus casos particulares, contribuiu bastante para o desenvolvimento da área. Vale ressaltar ainda a sua relação com outras áreas, tais como a Teoria das Representações, a Topologia Algébrica e a Teoria dos Códigos Corretores de Erros.

Entre a grande variedade de tópicos dessa teoria, estão as propriedades de Lie, as quais vêm sendo consideradas em anéis de grupo desde a década de 1970 até os dias atuais, conforme [5]. O objetivo deste trabalho é estudar em detalhes o artigo *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions* de J. Hermes Castillo e C. Polcino Milies, o qual fornece alguns resultados envolvendo duas dessas propriedades nos anéis de grupo: a Lie nilpotência e a propriedade Lie n-Engel.

No capítulo 1, encontram-se os elementos da Teoria dos Anéis de Grupos, que são essenciais para a compreensão deste texto, como a noção de anel de grupo e a sua involução clássica, e uma condição necessária para que essa estrutura satisfaça uma identidade polinomial. Este capítulo reúne também algumas definições da Teoria de Grupos, tais como grupo nilpotente, grupo p-abeliano e FC-subgrupo, e sua conexão com os conceitos já citados.

O capítulo 2 introduz as propriedades Lie nilpotência e Lie n-Engel em um anel de grupo, bem como as chamadas involuções clássicas orientadas. Os principais teoremas deste capítulo caracterizam os anéis de grupo que possuem tais propriedades, em termos de seus subconjuntos de elementos simétricos e antissimétricos sob uma involução clássica orientada, no caso em que o grupo base do anel de grupo não possui elementos de ordem 2.

Por fim, o capítulo 3 é dedicado ao estudo dessas propriedades nos elementos simétricos. São apresentadas caracterizações desse subconjunto quando o grupo base contém uma cópia do grupo dos quatérnios e também são considerados os teoremas análogos aos do capítulo 2 para grupos que não contêm os quatérnios.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos da Teoria de Anéis de Grupo e da Teoria de Grupos, que serão úteis para o desenvolvimento de nosso estudo. Assumimos que o leitor esteja familiarizado com os aspectos fundamentais da Teoria de Anéis, Grupos e Módulos.

1.1 Anéis de Grupo

Sejam G um grupo e R um anel com unidade. Denotamos por RG o conjunto de todas as combinações lineares formais da forma

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g,$$

onde $a_g \in R$ e $a_g \neq 0$ para um número finito de $g \in G$. Definimos o **suporte** de α por

$$\text{supp}(\alpha) = \{g \in G \mid a_g \neq 0\}.$$

Dados dois elementos, $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$ em RG, temos que $\alpha = \beta$ se, e somente se, $a_g = b_g, \ \forall \ g \in G$.

Definimos a **soma** de α e β por

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

e seu **produto** por

$$\alpha\beta = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh.$$

Observe que, com as operações acima, RG é um anel com unidade $\mathbf{1} = 1_R 1_G$, onde 1_R é a unidade de R e 1_G é o elemento neutro de G.

Podemos definir ainda um **produto de elementos de RG por elementos** $\lambda \in R$ do seguinte modo

$$\lambda \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g,$$

tornando, assim, RG um R-módulo.

Lembramos que, se R é anel comutativo com unidade, um R-módulo A é chamado uma **R-álgebra** se existe uma multiplicação, definida em A e denotada por justaposição, tal que, com a adição dada em A e esta multiplicação, A é um anel e tal que

$$r(ab) = (ra)b = a(rb),$$

para todo $r \in R$ e para todos $a, b \in A$.

Note que, no caso em que R é comutativo, RG é uma R-álgebra.

Definição 1.1. *O conjunto RG, com as três operações definidas acima, é o **anel de grupo de G sobre R**. Se R é comutativo, RG é também chamado a **álgebra de grupo de G sobre R**.*

Observação 1.2.

1) Considerando a inclusão $i : G \to RG$ que associa a cada elemento $x \in G$ o elemento $i(x) = \sum_{g \in G} a_g g$, onde $a_x = 1$ e $a_g = 0$ se $g \neq x$, temos que G pode ser visto como um subconjunto de RG. Assim, podemos dizer que RG é um R-módulo livre de base G.

2) A aplicação $\nu : R \to RG$ que a cada $r \in R$ associa o elemento $\nu(r) = \sum_{g \in G} a_g g$, onde $a_{1_G} = r$ e $a_g = 0$ se $g \neq 1_G$, é um monomorfismo de anéis. Isto permite considerar R como um subanel de RG.

3) Feitas as identificações acima, temos, para quaisquer $r \in R$ e $g \in G$, que $rg = gr$ em RG. Consequentemente, se R é comutativo, então R é central em RG.

4) Se R é um anel comutativo e G, H são grupos quaisquer, então $R(G \times H) \simeq (RG)H$ (o anel de grupo de H sobre o anel RG).

Exemplo 1.3.

Sejam $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ o grupo cíclico de ordem 3. Para quaisquer $\alpha = r_0 1 + r_1 a + r_2 a^2$ e $\beta = s_0 1 + s_1 a + s_2 a^2$ no anel de grupo $\mathbb{Q}C_3$, e para todo $c \in \mathbb{Q}$, temos

$$\alpha + \beta = (r_0 + s_0)1 + (r_1 + s_1)a + (r_2 + s_2)a^2,$$

$$\alpha\beta = (r_0 s_0 + r_1 s_2 + r_2 s_1)1 + (r_0 s_1 + r_1 s_0 + r_2 s_2)a + (r_0 s_2 + r_1 s_1 + r_2 s_0)a^2 \text{ e}$$

$$c\alpha = cr_0 1 + cr_1 a + cr_2 a^2.$$

Queremos dar uma descrição precisa de $\mathbb{Q}C_3$. Inicialmente, observamos que, se $\mathbb{Q}[X]$ denota o anel dos polinômios em uma variável com coeficientes racionais, então a aplicação $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}C_3$, dada por $f \longmapsto f(a)$, é um epimorfismo de anéis. De fato, para quaisquer $p(X), q(X) \in \mathbb{Q}[X]$, temos

$$(p + q)(a) = p(a) + q(a) \text{ e}$$

$$(p.q)(a) = p(a)q(a).$$

Logo, ϕ é homomorfismo. Além disso, para todo $\alpha = r_0 1 + r_1 a + r_2 a^2 \in \mathbb{Q}C_3$, temos $\alpha = \phi(r_0 + r_1 X + r_2 X^2)$ e, portanto, ϕ é sobrejetiva.

Assim,

$$\mathbb{Q}C_3 \simeq \frac{\mathbb{Q}[X]}{\ker(\phi)},$$

onde $\ker(\phi) = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(a) = 0\}$. Dado que $\mathbb{Q}[X]$ é um domínio de ideais principais, $\ker(\phi)$ é o ideal gerado pelo polinômio mônico f_0, de menor grau, tal que $f_0(a) = 0$.

Como $a^3 = 1$, segue que $X^3 - 1 \in \ker(\phi)$. Agora, note que, se $f = \sum_{i=0}^{k} r_i X^i$ é um polinômio de grau $k < 3$, temos que $f(a) = \sum_{i=0}^{k} r_i a^i \neq 0$, pois os elementos $\{1, a, a^2\}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Logo, $\ker(\phi) = (X^3 - 1)$ e, consequentemente,

$$\mathbb{Q}C_3 \simeq \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^3 - 1)}.$$

Seja $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ a decomposição de $X^3 - 1$ como um produto de polinômios irredutíveis em $\mathbb{Q}[X]$. Usando o Teorema do Resto Chinês, podemos escrever

$$\mathbb{Q}C_3 \simeq \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X - 1)} \oplus \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2 + X + 1)}.$$

Temos que $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{C}$ é uma raiz de X^2+X+1. Portanto, $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X-1)} \simeq \mathbb{Q}$ e $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2+X+1)} \simeq \mathbb{Q}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ e daí segue que

$$\mathbb{Q}C_3 \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Definição 1.4. *O homomorfismo de anéis $\omega : RG \to R$ definido por*

$$\omega\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g$$

é chamado a ***função de aumento*** *de RG e seu núcleo, dado por*

$$\Delta(G) = \left\{\sum_{g\in G} a_g \in RG \;\middle|\; \sum_{g\in G} a_g = 0\right\},$$

é o ***ideal de aumento*** *de RG.*

Para um subgrupo normal H de G, denotamos por $\Delta(G,H)$ o núcleo da aplicação natural

$$\begin{array}{ccc} RG & \longrightarrow & R(G/H) \\ \sum_{g\in G} a_g g & \longmapsto & \sum_{g\in G} a_g gH \end{array},$$

isto é,

$$\Delta(G,H) = \left\{\sum_{h\in H} \alpha_h(h-1) \;\middle|\; \alpha_h \in RG\right\}.$$

Proposição 1.5 ([13], Lema 3.3.2)**.** *Sejam H um subgrupo de um grupo G e S um conjunto de geradores de H. Então, o conjunto $\{s-1 \mid s \in S\}$ é um conjunto de geradores de $\Delta(G,H)$ como um ideal à esquerda de RG.*

Por exemplo, se G' é o subgrupo dos comutadores de G, $\Delta(G,G')$ é o ideal à esquerda de RG gerado por todos os elementos $ghg^{-1}h^{-1}-1 \in RG$, com $ghg^{-1}h^{-1} \in G'$.

Definição 1.6. *Se X é um subconjunto de um anel de grupo RG, o* ***anulador à direita*** *de X é o conjunto*

$$Ann_r(X) = \{\alpha \in RG \mid x\alpha = 0, \forall\, x \in X\}.$$

Dado um subconjunto finito X do grupo G, definimos em RG o elemento

$$\widehat{X} = \sum_{x \in X} x.$$

Proposição 1.7 ([13], Corolário 3.4.4)**.** *Seja G um grupo finito. Então:*

(i) $Ann_r(\Delta(G)) = R \cdot \widehat{G}$.

(ii) $Ann_r(\Delta(G)) \cap \Delta(G) = \{a\widehat{G} \mid a \in R, a|G| = 0\}$.

Lembramos que um ideal I de R é **nilpotente** se $I^n = \{\sum x_1 \dots x_n \mid x_i \in I\} = 0$, para algum um inteiro positivo n. De maneira equivalente, I é nilpotente, se existe um inteiro positivo n tal que $x_1 x_2 \dots x_n = 0$, para qualquer escolha de elementos $x_1, x_2 \dots, x_n \in I$.

Teorema 1.8 ([13], Teorema 6.3.1)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \geq 0$ e G um grupo arbitrário. Então, o ideal de aumento $\Delta(G)$ de FG é nilpotente se, e somente se, $p > 0$ e G é um p-grupo finito.*

Definição 1.9. *Uma* ***involução*** *de uma F-álgebra A é uma função linear $a \longmapsto a^*$ tal que*

(i) $(ab)^* = b^* a^*$;

(ii) $(a^*)^* = a$

para todos $a, b \in A$.

A conjugação complexa e a transposição de matrizes são exemplos de involuções.

Definição 1.10. *Seja A uma F-álgebra com involução. Os conjuntos*

$$A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\} \quad e \quad A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$$

são denominados conjunto dos ***elementos simétricos*** *e* ***antissimétricos*** *de A, respectivamente.*

Se $char(F) \neq 2$, então A é uma soma direta (como espaços vetoriais) de A^+ e A^-, pois, para todo $a \in A$,

$$a = \left(\frac{a + a^*}{2}\right) + \left(\frac{a - a^*}{2}\right).$$

Um importante exemplo de involução em anéis de grupo é dado a seguir.

Proposição 1.11 ([13], Proposição 3.2.11). *Se R é um anel comutativo, então a função $^*: RG \to RG$ definida por*

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)^* = \sum_{g\in G} a_g g^{-1} \tag{1.1}$$

*é uma involução de RG, chamada a **involução clássica** da álgebra de grupo RG.*

Definição 1.12. *Sejam F um corpo e $F\{x_1, x_2, \ldots\}$ a álgebra livre em indeterminadas não comutantes $x_1, x_2, \ldots$ Uma F-álgebra A satisfaz uma **identidade polinomial** se existe um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\{x_1, x_2, \ldots\} \setminus \{0\}$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$.*

Uma álgebra comutativa A, por exemplo, satisfaz a identidade polinomial

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1.$$

Podemos definir uma involução em $F\{x_1, x_2, \ldots\}$ pondo $x_i^* = x_{i+1}$ para todo i ímpar. Renumeramos de modo a obter a álgebra livre com involução $F\{x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots\}$.

Definição 1.13. *Uma F-álgebra A com involução satisfaz uma $*$-**identidade polinomial** se existe $f(x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^*) \in F\{x_1, x_1^*, \ldots\} \setminus \{0\}$ tal que $f(a_1, a_1^*, \ldots, a_n, a_n^*) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Se A é uma F-álgebra comutativa com involução, então A satisfaz a $*$-identidade polinomial

$$f(x_1, x_1^*) = x_1x_1^* - x_1^*x_1.$$

Proposição 1.14 ([11], Proposição 2.1.2). *Seja A uma F-álgebra com involução. Se A satisfaz uma $*$-identidade polinomial, então A satisfaz uma identidade polinomial. Em particular, se uma álgebra de grupo FG satisfaz uma $*$-identidade polinomial, então FG satisfaz uma identidade polinomial.*

1.2 Conceitos Preliminares em Teoria de Grupos

Seja G um grupo. Definimos o **comutador** de $g, h \in G$ por

$$(g, h) = ghg^{-1}h^{-1} \in G$$

e denotamos por $\zeta = \zeta(G) = \{z \in G \mid (z, g) = 1, \ \forall\, g \in G\}$ o **centro** de G. Lembramos que G é abeliano se, e somente se, $\zeta(G) = G$.

Se H e K são dois subgrupos de G, então (H, K) é o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{(h, k) \mid h \in H, k \in K\}$. Em particular, o subgrupo $(G, G) = G'$ é o **subgrupo dos comutadores** de G.

A sequência de subgrupos de G definida por $\gamma_1(G) = G$ e $\gamma_i(G) = (\gamma_{i-1}(G), G)$, se $i \geq 2$, é chamada a **série central inferior** de G. Em particular, $\gamma_2(G) = G'$.

Definição 1.15. *Um grupo G é **nilpotente** se existe um inteiro $n > 0$ tal que $\gamma_{n+1}(G) = 1$. O menor tal n é a **classe de nilpotência** de G.*

Proposição 1.16. *(a) Seja $\pi : G \to G/\zeta(G)$ o homomorfismo canônico. Então, para todo $i \geq 1$, vale $\pi(\gamma_i(G)) = \gamma_i(\pi(G))$;*

(b) G é nilpotente se, e somente se, $G/\zeta(G)$ é nilpotente.

Demonstração: (a) A prova é por indução em i. Se $i = 1$, então

$$\pi(\gamma_1(G)) = \pi(G) = G/\zeta(G) = \gamma_1(G/\zeta(G)) = \gamma_1(\pi(G)).$$

Suponhamos, como hipótese de indução, que $\pi(\gamma_i(G)) = \gamma_i(\pi(G))$ seja válido para algum inteiro positivo i. Então,

$$\pi(\gamma_{i+1}(G)) = \pi((\gamma_i(G), G)) = (\pi(\gamma_i(G)), \pi(G)) = (\gamma_i(\pi(G)), \pi(G)) = \gamma_{i+1}(\pi(G)).$$

(b) Suponha $\gamma_{n+1}(G) = 1$, para algum n. Então, pelo item (a),

$$\gamma_{n+1}(G/\zeta(G)) = \gamma_{n+1}(\pi(G)) = \pi(\gamma_{n+1}(G)) = \pi(1) = 1,$$

isto é, $G/\zeta(G)$ é nilpotente.

Reciprocamente, suponha $\gamma_{n+1}(G/\zeta(G)) = 1$, para algum n. Pelo item (a), temos

$$\pi(\gamma_{n+1}(G)) = \gamma_{n+1}(\pi(G)) = \gamma_{n+1}(G/\zeta(G)) = 1,$$

isto é, $\gamma_{n+1}(G) \subseteq \zeta(G)$. Então, $\gamma_{n+2}(G) = (\gamma_{n+1}(G), G) \subseteq (\zeta(G), G) = 1$. Portanto, G é nilpotente. □

Definição 1.17. *Um grupo G é p-**abeliano** se seu subgrupo dos comutadores G' é um p-grupo finito e 0-**abeliano** se é abeliano.*

Proposição 1.18 ([11], Proposição 1.1.4). *Sejam F um corpo de característica $p \geq 0$ e G um grupo. Então, FG satisfaz uma identidade polinomial se, e somente se, G tem um subgrupo normal p-abeliano cujo índice é finito.*

Notação: Denotamos por $o(g)$ a ordem de um elemento g, e por $(G : H)$ o índice de um subgrupo H em G.

Definição 1.19. *O **expoente** de um grupo G é o menor inteiro positivo m tal que $g^m = 1$, para todo $g \in G$.*

Proposição 1.20 ([11], Proposição 1.3.7). *Se G é um grupo nilpotente e, para algum primo p, $G/\zeta(G)$ tem expoente p^k, então G' tem expoente p^m, para algum m.*

Proposição 1.21 ([11], Lema 3.2.7). *Sejam $char(F) = p > 0$ e G um p-grupo de expoente limitado tal que FG satisfaz uma identidade polinomial. Então, G é nilpotente.*

Lembramos que o **centralizador** de um elemento $g \in G$ é o subgrupo

$$C_G(g) = \{x \in G \mid (x, g) = 1\}.$$

Definição 1.22. *O **FC subgrupo** de G é o subgrupo*

$$\phi(G) = \{g \in G \mid (G : C_G(g)) < \infty\},$$

ou seja, $\phi(G)$ é o conjunto dos elementos de G que têm um número finito de conjugados em G.

Para quaisquer $g, h \in \phi(G)$ e $x \in G$, temos

$$x^{-1}(gh^{-1})x = (x^{-1}gx)(x^{-1}h^{-1}x) = (x^{-1}gx)(x^{-1}hx)^{-1}.$$

Como g e h têm somente um número finito de conjugados em G, concluímos que gh^{-1} também tem um número finito de conjugados em G e, assim, $gh^{-1} \in \phi(G)$. Isso prova que $\phi(G)$ é, de fato, um subgrupo de G.

Proposição 1.23 ([11], Proposição 1.2.15). *Sejam F um corpo e G um grupo. Se FG satisfaz uma identidade polinomial de grau n, então $(G : \phi(G)) \leq n/2$ e $|(\phi(G))'| < \infty$.*

Capítulo 2

Propriedades de Lie em Anéis de Grupo

Neste capítulo, iniciamos o estudo das propriedades Lie nilpotência e Lie n-Engel em anéis de grupo. Nosso objetivo é investigar a relação destes com o seus subconjuntos de elementos simétricos e antissimétricos sob uma involução clássica orientada, no caso em que G não contém elementos de ordem 2.

2.1 Definições Básicas

Em um anel associativo R, definimos o **colchete de Lie** de dois elementos $a, b \in R$ por

$$[a, b] = ab - ba$$

e, indutivamente, pomos

$$[a_1, \ldots, a_{n+1}] = [[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}].$$

para todos $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in R$.

Se S é um subconjunto de R, então $[S, S]$ denota o subgrupo aditivo gerado por todos os colchetes de Lie $[a, b]$, $a, b \in S$. Para $n > 1$, definimos

$$\underbrace{[S, S, \ldots, S]}_{n} = [\ldots \underbrace{[[S, S], S], \ldots], S}_{n}].$$

Em particular, se R é comutativo, então $[RG, RG]$ é o R-submódulo de RG gerado por todos os colchetes de Lie $[g, h]$, $g, h \in G$. De fato, se $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$ são elementos de RG, então

$$[\alpha, \beta] = [\sum_{g \in G} a_g g, \sum_{g \in G} b_g g] = \sum_{g,h \in G} a_g b_h (gh - hg) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h [g, h].$$

Definição 2.1. *Um subconjunto S de um anel R é* ***Lie nilpotente*** *se, para algum inteiro $n \geq 2$, $[a_1, \ldots, a_n] = 0$, para todo $a_i \in S$. O menor tal n é o* ***índice de nilpotência*** *de S.*

Definição 2.2. *Um subconjunto S de um anel R é* ***Lie n-Engel*** *se, para algum inteiro $n \geq 1$,*

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n \text{ vezes}}] = 0$$

para todos $a, b \in S$.

Exemplos 2.3.

1) Sejam $M_3(\mathbb{R}) = \{\text{matrizes reais } 3 \times 3\}$ e $S = \{A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \ \forall \ i \geq j\}$. Para quaisquer elementos $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_3 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_3 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ em S, temos $[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $[A, B, C] = [[A, B], C] = 0$. Portanto, S é Lie nilpotente com índice de nilpotência 3.

2) Todo conjunto comutativo é Lie nilpotente com índice de nilpotência 2.

3) Todo conjunto Lie nilpotente é Lie n-Engel.

Seja FG a álgebra de grupo de um grupo G sobre um corpo F com $char(F) = p \neq 2$.

Definição 2.4. *Uma* ***orientação*** *σ de G é qualquer homomorfismo $\sigma : G \to \{\pm 1\}$.*

Definição 2.5. *Dada uma orientação de G, uma* ***involução clássica orientada*** *$*$ de FG é uma involução dada por*

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)^* = \sum_{g \in G} a_g \sigma(g) g^{-1}.$$

Observe que a involução clássica é uma involução clássica orientada para σ trivial.

Denotamos por $(FG)^+ = \{\alpha \in FG \mid \alpha^* = \alpha\}$ e $(FG)^- = \{\alpha \in FG \mid \alpha^* = -\alpha\}$ o conjunto dos elementos simétricos e antissimétricos de FG sob $*$, respectivamente.

Se N denota o núcleo de σ, então temos que $*$ coincide na álgebra de grupo FN com a involução clássica.

Notamos que, como um F-módulo, $(FG)^+$ é gerado por

$$\mathcal{S} = \{g \in N \mid g^2 = 1\} \cup \{g + g^{-1} \mid g \in N, g^2 \neq 1\} \cup \{g - g^{-1} \mid g \in G \setminus N, g^2 \neq 1\}.$$

De fato, se $\alpha = \sum\limits_{g \in G} a_g g \in (FG)^+$, então $\alpha = \alpha^*$, isto é,

$$\sum_{\substack{g\in N\\ g^2=1}} a_g g + \sum_{\substack{g\in N\\ g^2\neq1}} a_g g + \sum_{\substack{g\in G\setminus N\\ g^2=1}} a_g g + \sum_{\substack{g\in G\setminus N\\ g^2\neq1}} a_g g = \sum_{\substack{g\in N\\ g^2=1}} a_g g + \sum_{\substack{g\in N\\ g^2\neq1}} a_g g^{-1} + \sum_{\substack{g\in G\setminus N\\ g^2=1}} (-a_g) g + \sum_{\substack{g\in G\setminus N\\ g^2\neq1}} (-a_g) g^{-1}. \tag{2.1}$$

De (2.1) obtemos que $a_g = 0$, para todo $g \in G \setminus N$ tal que $g^2 = 1$, e, além disso,

$$\alpha = \sum_{\substack{g\in N\\ g^2=1}} a_g g + \sum_{\substack{g\in N\\ g^2\neq1}} a_g (g + g^{-1}) + \sum_{\substack{g\in G\setminus N\\ g^2\neq1}} a_g (g - g^{-1}).$$

Semelhantemente, mostra-se que $(FG)^-$ é gerado, como um F-módulo, por

$$\mathcal{L} = \{g \in G \setminus N \mid g^2 = 1\} \cup \{g + g^{-1} \mid g \in G \setminus N, g^2 \neq 1\} \cup \{g - g^{-1} \mid g \in N, g^2 \neq 1\}.$$

Os seguintes resultados caracterizam os anéis de grupo Lie nilpotentes e Lie n-Engel.

Teorema 2.6 ([15], Teorema V.4.4)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \geq 0$ e G um grupo. Então, FG é Lie nilpotente se, e somente se,*

(i) char$(F) = 0$ e G é abeliano; ou

(ii) char$(F) = p > 0$, G é nilpotente e p-abeliano.

Teorema 2.7 ([15], Teorema V.6.1)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \geq 0$ e G um grupo. Então, FG é Lie n-Engel, para algum n, se, e somente se,*

(i) char$(F) = 0$ e G é abeliano; ou

(ii) char$(F) = p > 0$, G é nilpotente e contém um subgrupo normal p-abeliano A tal que G/A é um p-grupo finito.

2.2 Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados técnicos utilizados ao longo deste texto.

Lema 2.8 ([11], Lema 3.1.5)**.** *Sejam F um corpo de característica 0 e G um grupo qualquer. Se $(FG)^+$ é Lie nilpotente (resp., Lie n-Engel), então $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})G)^+$ é Lie nilpotente (resp., Lie n-Engel), para qualquer primo p.*

Demonstração: Como $char(F) = 0$, temos $\mathbb{Z} \subseteq F$ e daí $(\mathbb{Z}G)^+ \subseteq (FG)^+$. Logo, se $(FG)^+$ é Lie nilpotente (resp., Lie n-Engel), então $(\mathbb{Z}G)^+$ é Lie nilpotente (resp., Lie n-Engel).

Mas existe um homomorfismo natural $\varphi : \mathbb{Z}G \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})G$, definido por

$$\sum_{g\in G} a_g g \longmapsto \sum_{g\in G} \overline{a_g} g,$$

tal que $\varphi((\mathbb{Z}G)^+) = ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})G)^+$. Como as propriedades Lie nilpotência e Lie n-Engel são preservadas por homomorfismo, já que envolvem apenas as operações do anel, temos o resultado. □

Lema 2.9 ([11], Lema 3.1.6)**.** *Seja R um anel de característica $p > 0$. Então, para quaisquer $a, b \in R$ e qualquer inteiro positivo n, temos*

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{p^n \text{ vezes}}] = [a, b^{p^n}].$$

Demonstração: Sejam $b \in R$ fixo, $r_b : R \to R$ a função definida por $r_b(c) = cb$, para todo $c \in R$, e $l_b : R \to R$ a função definida por $l_b(c) = bc$, para todo $c \in R$. Então,

$$[c, b] = cb - bc = r_b(c) - l_b(c) = (r_b - l_b)(c),$$

para todo $c \in R$. Assim,

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{p^n \text{ vezes}}] = [[\cdots[[a, b], b], \cdots], b] = (r_b - l_b)^{p^n}(a).$$

Como r_b e l_b comutam como operadores e $char(R) = p$, segue que

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{p^n \text{ vezes}}] = (r_b^{p^n} - l_b^{p^n})(a) = ab^{p^n} - b^{p^n}a = [a, b^{p^n}].$$ □

Lema 2.10 ([6], Lema 2.1). *Se $(FG)^+$ é Lie n-Engel, para algum n, e char$(F) \neq 2$, então todo elemento de ordem 2 de N é central.*

Demonstração: Suponhamos primeiro que a característica de F seja $p > 2$.

Sejam $g \in N$ tal que $g^2 = 1$ e $m > 0$ tal que p^m é maior que n. Queremos provar que $gx = xg$, $\forall\, x \in G$. Para isso, consideramos os seguintes casos.

Caso 1: $x \in N$ e $x^2 = 1$.

Como $g \in (FG)^+$ e $x \in (FG)^+$, temos

$$0 = [g, \underbrace{x, \ldots, x}_{p^m \text{ vezes}}] = [g, x^{p^m}],$$

pelo Lema 2.9. Sendo p ímpar, $x^{p^m} = x$ e, portanto, g comuta com x.

Caso 2: $x \in N$ e $x^2 \neq 1$.

Neste caso, $x + x^{-1} \in (FG)^+$ e, assim, temos

$$0 = [x + x^{-1}, \underbrace{g, \ldots, g}_{p^m \text{ vezes}}] = [x + x^{-1}, g^{p^m}] = [x + x^{-1}, g],$$

onde a segunda igualdade segue do Lema 2.9 e na última igualdade usamos o fato de p ser ímpar e $g^2 = 1$. Então, temos que

$$xg + x^{-1}g = gx + gx^{-1}$$

o que implica $xg = gx$ ou $xg = gx^{-1}$. Se $xg = gx$, não há nada para provar.

Agora, se $xg = gx^{-1}$, então

$$(xg)^2 = xggx^{-1} = xg^2x^{-1} = 1.$$

Como $xg \in N$, pelo caso anterior, temos que $g(xg) = (xg)g$, o que implica $gx = xg$.

Caso 3: $x \in G \setminus N$ e $x^2 \neq 1$.

Neste caso, temos que $x - x^{-1} \in (FG)^+$, logo

$$0 = [x - x^{-1}, \underbrace{g, \ldots, g}_{p^m \text{ vezes}}] = [x - x^{-1}, g^{p^m}] = [x - x^{-1}, g],$$

onde, novamente, a segunda igualdade segue do Lema 2.9. Portanto, analogamente ao caso

2, $xg = gx$ ou $xg = x^{-1}g$. Se $xg = gx$, não há nada para provar.

Por outro lado, se $xg = x^{-1}g$, então $x^2 = 1$, uma contradição. Logo, devemos ter $xg = gx$.

Caso 4: $x \in G \setminus N$ e $x^2 = 1$.

Temos que $xg \in G \setminus N$. Se $(xg)^2 = 1$, então

$$xg = (xg)^{-1} = g^{-1}x^{-1} = gx.$$

Se $(xg)^2 \neq 1$, então, pelo caso anterior, xg comuta com g e, portanto, x e g comutam.

Suponhamos agora que a característica de F seja zero. Então, pelo Lema 2.8, $((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})G)^+$ é Lie n-Engel e, dado que $char(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) > 2$, segue, pelo resultado acima, que todos os elementos de ordem 2 em N são centrais em G. □

Lema 2.11 ([7], Lema 3.1.2)**.** *Sejam g e h elementos de G tais que $g^2 \neq 1$ e $h^2 \neq 1$. Então, valem as seguintes propriedades:*

(i) Se $[g + g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$, então

(a) $gh \in \{hg, h^{-1}g, hg^{-1}\}$ ou

(b) $(g^\alpha h^\beta)^2 = 1$, para todos $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

(ii) Se $[g - g^{-1}, h - h^{-1}] = 0$, então

(a) $gh = hg$ ou

(b) $(g^\alpha h^\beta)^2 = 1$, para todos $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

(iii) Se $[g - g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$, então

(a) $gh \in \{hg, h^{-1}g\}$ ou

(b) $o(g) = 4 = o(h)$ e $g^2 = h^2$.

Demonstração: (i) Dado que $[g + g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$, temos

$$gh + gh^{-1} + g^{-1}h + g^{-1}h^{-1} = hg + hg^{-1} + h^{-1}g + h^{-1}g^{-1}. \tag{2.2}$$

Se $char(F) \neq 3$, então $gh = hg$, $gh = hg^{-1}$, $gh = h^{-1}g$ ou $gh = h^{-1}g^{-1}$. Suponhamos que $gh \notin \{hg, h^{-1}g, hg^{-1}\}$. Logo, $gh = h^{-1}g^{-1}$, isto é, $(gh)^2 = h^{-1}g^{-1}gh = 1$, que é equivalente à $(g^{-1}h^{-1})^2 = 1$. Então, de (2.2), temos

$$gh^{-1} + g^{-1}h = hg^{-1} + h^{-1}g.$$

Daí segue que $gh^{-1} = hg^{-1}$ ou $gh^{-1} = h^{-1}g$. Se $gh^{-1} = h^{-1}g$, então $hg = gh$, o que é uma contradição. Portanto, $gh^{-1} = hg^{-1}$, o que implica $(gh^{-1})^2 = hg^{-1}gh^{-1} = 1$, que é equivalente à $(g^{-1}h)^2 = 1$.

Se $char(F) = 3$, em (2.2) temos outras possibilidades: $gh = gh^{-1}$, $gh = g^{-1}h$ ou $gh^{-1} = g^{-1}h^{-1}$. Porém, todos estes casos contradizem as hipóteses de que $g^2 \neq 2$ e $h^2 \neq 1$.

(ii) De $[g - g^{-1}, h - h^{-1}] = 0$ obtemos

$$gh + g^{-1}h^{-1} + hg^{-1} + h^{-1}g = hg + h^{-1}g^{-1} + gh^{-1} + g^{-1}h. \tag{2.3}$$

Se $char(F) \neq 3$, então $gh = hg$, $gh = h^{-1}g^{-1}$, $gh = gh^{-1}$ ou $gh = g^{-1}h$. Dado que $g^2 \neq 1, h^2 \neq 1$, não podemos ter $gh = gh^{-1}$ nem $gh = g^{-1}h$. Logo, $gh = hg$ ou $(gh)^2 = 1$. Suponha que $(gh)^2 = 1$, o que é equivale à $(g^{-1}h^{-1})^2 = 1$. Assim, de (2.3), temos

$$hg^{-1} + h^{-1}g = gh^{-1} + g^{-1}h.$$

Desta forma, $hg^{-1} = gh^{-1}$ ou $hg^{-1} = g^{-1}h$, o que implica $(gh^{-1})^2 = 1$ ou $gh = hg$ e, portanto, temos o resultado.

Agora, se $char(F) = 3$, em (2.3) temos outras possibilidades: $gh = g^{-1}h^{-1} = hg^{-1}$, $gh = g^{-1}h^{-1} = h^{-1}g$, $gh = hg^{-1} = h^{-1}g$ ou $g^{-1}h^{-1} = hg^{-1} = h^{-1}g$. Analisemos cada uma destas.

Se $gh = g^{-1}h^{-1} = hg^{-1}$, então $h^{-1}g^{-1} = hg = gh^{-1}$. Assim, de (2.3), obtemos que $h^{-1}g = g^{-1}h$, o que implica $gh^{-1} = hg^{-1}$. Então, podemos concluir que $gh = gh^{-1}$. Mas isto é uma contradição, pois $h^2 \neq 1$.

Se $gh = g^{-1}h^{-1} = h^{-1}g$, então $h^{-1}g^{-1} = hg = g^{-1}h$. Logo, de (2.3), $hg^{-1} = gh^{-1}$ e, assim, $g^{-1}h = h^{-1}g$. Esta última igualdade e as relações anteriores implicam $gh = g^{-1}h$, uma contradição, já que $g^2 \neq 1$.

Se $gh = hg^{-1} = h^{-1}g$, então $h^{-1}g^{-1} = gh^{-1} = g^{-1}h$. Assim, de (2.3), $g^{-1}h^{-1} = hg$ e, portanto, $h^{-1}g^{-1} = gh$. Daí segue que $gh = gh^{-1}$, o que é novamente uma contradição.

Finalmente, se $g^{-1}h^{-1} = hg^{-1} = h^{-1}g$, então $hg = gh^{-1} = g^{-1}h$ e, assim, de (2.3), $gh = h^{-1}g^{-1}$. Logo, $hg = g^{-1}h^{-1}$, o que implica $hg = hg^{-1}$, outra contradição, pois $g^2 \neq 1$.

(iii) De $[g - g^{-1}, h + h^{-1}] = 0$ obtemos

$$gh + gh^{-1} + hg^{-1} + h^{-1}g^{-1} = hg + h^{-1}g + g^{-1}h + g^{-1}h^{-1}. \tag{2.4}$$

Se $char(F) \neq 3$, de (2.4) e dado que $g^2 \neq 1$, temos $gh = hg, gh = h^{-1}g$ ou $gh = g^{-1}h^{-1}$. Suponha que $gh = g^{-1}h^{-1}$, isto é, $g^2 = h^{-2}$. De (2.4),

$$gh^{-1} + hg^{-1} = h^{-1}g + g^{-1}h.$$

Logo, $gh^{-1} = h^{-1}g$ ou $gh^{-1} = g^{-1}h$. A segunda opção implica $g^2 = h^2$ e, assim, $o(g) = 4$. A primeira opção implica $gh = hg$, de onde segue o resultado.

Suponha que $char(F) = 3$. Assim, em (2.4), além das possibilidades anteriores, devemos considerar os seguintes casos: $gh = gh^{-1}$ ou $hg^{-1} = h^{-1}g^{-1}$. Como $g^2 \neq 1$ e $h^2 \neq 1$, em qualquer caso obtemos uma contradição. □

Corolário 2.12 ([6], Corolário 2.1)**.** *Suponha que $char(F) = p > 2$ e que $(FG)^+$ seja Lie p^m-Engel, para algum $m \geq 1$. Sejam g e h elementos de G tais que $g^2 \neq 1$ e $h^{2p^m} \neq 1$. Se $\sigma(g) = \sigma(h) = -1$, então $(g, h^{p^m}) = 1$.*

Demonstração: Dado que $(FG)^+$ é Lie p^m-Engel e $g - g^{-1}, h - h^{-1} \in (FG)^+$, temos, pelo Lema 2.9,

$$[g - g^{-1}, \underbrace{h - h^{-1}, \ldots, h - h^{-1}}_{p^m \text{ vezes}}] = [g - g^{-1}, (h - h^{-1})^{p^m}] = [g - g^{-1}, h^{p^m} - h^{-p^m}] = 0.$$

Assim, da parte (ii) do Lema 2.11, segue que

$$gh^{p^m} = h^{p^m}g \text{ ou } (gh^{p^m})^2 = 1.$$

Se $gh^{p^m} = h^{p^m}g$, não há nada a provar. Por outro lado, como $gh^{p^m} \in N$, se $(gh^{p^m})^2 = 1$, então, pelo Lema 2.10, temos que gh^{p^m} é central e, portanto, $(g, h^{p^m}) = 1$ também neste caso. □

Denotamos por

$$Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

o **grupo dos quatérnios de** 8 **elementos**.

Lema 2.13 ([6], Lema 2.3). *Sejam FG uma álgebra de grupo com char$(F) \neq 2$, G um grupo tal que $Q_8 \subseteq G$ e σ uma orientação não trivial de G. Se $(FG)^+$ é Lie n-Engel, para algum n, então $Q_8 \subseteq N$.*

Demonstração: Provaremos a contra-positiva da afirmação, analisando as diferentes possibilidades para uma orientação não trivial σ em Q_8.

Caso 1: $\sigma(x) = 1$ e $\sigma(y) = -1$.

Como $xy \in G \setminus N$, $y \in G \setminus N$, $(xy)^2 \neq 1$ e $y^2 \neq 1$, temos que $xy - (xy)^{-1}$ e $y - y^{-1}$ são elementos simétricos. Por indução, prova-se que

$$[xy - (xy)^{-1}, \underbrace{y - y^{-1}, \ldots, y - y^{-1}}_{k \text{ vezes}}] = \begin{cases} (-1)^{\left(\frac{k+1}{2}\right)} 4^k (x - x^{-1}), & \text{se} \quad k \text{ é ímpar;} \\ (-1)^{\left(\frac{k}{2}\right)} 4^k (xy - (xy)^{-1}), & \text{se} \quad k \text{ é par.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Assim, temos que $(FQ_8)^+$ não é Lie n-Engel, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$.

Caso 2: $\sigma(x) = -1$ e $\sigma(y) = 1$.

É semelhante ao caso anterior. Basta considerar $xy - (xy)^{-1}$ e $x - x^{-1}$. Estes são elementos simétricos, porém, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$ temos $[xy - (xy)^{-1}, \underbrace{x - x^{-1}, \ldots, x - x^{-1}}_{k \text{ vezes}}] \neq 0$.

Caso 3: $\sigma(x) = \sigma(y) = -1$.

Note que $x_0 = xy$ e y geram Q_8, pois $(xy)^2 = yx^{-1}xy = y^2$, $(xy)^4 = y^4 = x^4 = 1$ e $y^{-1}(xy)y = y^{-1}xy^2 = y^{-1}x^3 = y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$. Além disso, $\sigma(x_0) = \sigma(x)\sigma(y) = 1$ e $\sigma(y) = -1$, logo, pelo primeiro caso, o resultado também segue.

Dos casos acima podemos concluir que $(FQ_8)^+$ não é Lie n-Engel, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, e qualquer orientação não trivial σ. $\square$

Dado um subgrupo H de G, lembramos que uma **transversal à direita** de H em G, denotada por $\mathcal{T} = \{x_i\}_{i \in I}$, é um conjunto completo de representantes de classes laterais à direita de H em G. No que segue, consideramos o subgrupo $\zeta(G)^2 = \{z^2 \mid z \in \zeta(G)\}$ de G.

Lema 2.14 ([12], Lema 1.1.3). *Sejam H um subgrupo de G e $\mathcal{T} = \{x_i\}_{i \in I}$ uma transversal à direita de H em G. Então, todo elemento $\alpha \in FG$ pode ser escrito unicamente como uma soma finita da forma*

$$\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$$

com $\alpha_i \in FH$.

Lema 2.15 ([6], Lema 2.4)**.** *Seja G um grupo tal que $|\zeta(G)^2| = \infty$. Se $\alpha \in FG$ é tal que $(\sigma(z)z^2 - 1)\alpha = 0$, para todo $z \in \zeta$, então $\alpha = 0$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{T} = \{x_i\}_{i \in I}$ uma transversal à direita de $\zeta(G)^2$ em G tal que $x_1 = 1$. Então, pelo Lema 2.14, podemos escrever

$$\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i,$$

onde $\alpha_i \in F\zeta(G)^2$. Queremos mostrar que $\alpha_i = 0$ para todo i.

Como $(\sigma(z)z^2 - 1)\alpha = 0$, para todo $z \in \zeta$, temos que

$$(\sigma(z)z^2 - 1)\alpha_1 = 0.$$

Isto significa que

$$\sigma(z)z^2\alpha_1 = \alpha_1$$

para uma infinidade de elementos $z^2 \in \zeta(G)^2$. Logo, devemos ter $\alpha_1 = 0$, já que $\mathrm{supp}(\alpha_1)$ é finito.

Seja agora $i \in I \setminus \{1\}$. Multiplicando α por x_i^{-1}, obtemos

$$\alpha x_i^{-1} = \alpha_2 x_2 x_i^{-1} + \cdots + \alpha_i + \cdots + \alpha_r x_r x_i^{-1}.$$

Dado que $(\sigma(z)z^2 - 1)\alpha x_i^{-1} = 0$, para todo $z \in \zeta$, temos que

$$(\sigma(z)z^2 - 1)\alpha_i = 0,$$

donde concluímos que $\alpha_i = 0$. $\square$

Proposição 2.16 ([6], Proposição 2.1)**.** *Seja G um grupo tal que $|\zeta(G)^2| = \infty$. Então, $(FG)^+$ ou $(FG)^-$ é Lie nilpotente de índice n se, e somente se, FG é Lie nilpotente de índice n.*

Demonstração: Assuma $(FG)^+$ Lie nilpotente de índice n. Então, como $x_i + x_i^* \in (FG)^+$, FG satisfaz a $*$-identidade polinomial

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [x_1 + x_1^*, \ldots, x_n + x_n^*] = 0.$$

Para um índice fixo $i \in \{1, \ldots, n\}$, escreva

$$f = f_1 + f_2,$$

onde f_1 é a soma de todos os monômios de f em que x_i aparece. Logo, se $z_i \in \zeta(G)$,

$$f(x_1, \ldots, z_i x_i, \ldots, x_n) = z_i f_1 + z_i^* f_2$$

é uma $*$-identidade polinomial para FG, assim como

$$z_i^* f = z_i^* f_1 + z_i^* f_2.$$

Daí segue que

$$z_i f_1 - z_i^* f_1$$

também é uma $*$-identidade polinomial para FG.

Agora, como $z_i^* = \sigma(z_i) z_i^{-1}$, multiplicando a identidade acima por $\sigma(z_i) z_i$, obtemos que

$$(\sigma(z_i) z_i^2 - 1) f_1 \tag{2.6}$$

é uma identidade polinomial para FG. Fixando agora um índice $j \neq i$, podemos repetir o processo acima, escrevendo (2.6) como

$$(\sigma(z_i) z_i^2 - 1) f_1 = (\sigma(z_i) z_i^2 - 1)(g_1 + g_2),$$

onde g_1 é a soma de todos os monômios de f_1 em que x_j aparece. Então, usando o mesmo argumento anterior, obtemos que

$$(\sigma(z_i) z_i^2 - 1)(\sigma(z_j) z_j^2 - 1) g_1$$

é uma identidade polinomial para FG. Repetindo o mesmo argumento até se esgotarem todos os índices em $\{1, \ldots, n\}$, obtemos a identidade polinomial para FG

$$(\sigma(z_1) z_1^2 - 1)(\sigma(z_2) z_2^2 - 1) \cdots (\sigma(z_n) z_n^2 - 1) \tau,$$

onde $\tau = [x_1, \ldots, x_n]$. Como $|\zeta(G)^2| = \infty$, pelo Lema 2.15, segue que τ é uma identidade polinomial para FG e, consequentemente, FG é Lie nilpotente de índice n.

Se $(FG)^-$ é Lie nilpotente de índice n, então FG satisfaz a $*$-identidade polinomial

$$h(x_1, \ldots, x_n) = [x_1 - x_1^*, \ldots, x_n - x_n^*] = 0.$$

e a prova segue de modo semelhante. A recíproca é trivial. $\square$

Denotamos por

$$D_k = \langle x, y \mid x^k = 1, y^2 = 1, (xy)^2 = 1\rangle,$$

o **grupo dihedral de ordem** $2k$, e

$$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, (xy)^2 = 1\rangle,$$

o **grupo dihedral infinito**.

Lema 2.17 ([6], Lema 2.5)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$ e $G = \langle a, b\rangle$ um grupo gerado por dois elementos a e b tais que $b^{-1}ab = a^{-1}$. Se $(FG)^+$ é Lie n-Engel, para algum n, então*

(i) $a^2 = 1$ (e G é abeliano), ou

(ii) $\sigma(a) = 1$, $\sigma(b) = -1$, $b^{2p^m} = 1$, para algum $m > 0$, e $\langle a, b^{p^m}\rangle \simeq D_k$, onde $k = o(a)$, se $o(a)$ é finito, ou $k = \infty$ caso contrário.

Demonstração: Se $a^2 = 1$, não há nada a provar. Suponhamos, então, que $a^2 \neq 1$.

Sejam $p > 2$ e $m > 0$ tal que $p^m > n$. Consideramos três casos separados, dependendo dos valores de σ em G.

Caso 1: $\sigma(a) = -1$ e $\sigma(b) = 1$.

Primeiro, assumimos que b tem ordem finita e notamos que

$$b^{-i}ab^i = \begin{cases} a^{-1}, & \text{se } i \text{ é ímpar;} \\ a, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Assim, $b^2 \in \zeta(G)$ e, dado que $b \notin \zeta(G)$, $o(b)$ é da forma $2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}^+$. Como $b \in N$, k também deve ser par, pois se k fosse ímpar, então, pelo Lema 2.10, b^k seria central e, assim, b também seria central, uma contradição. Portanto, a ordem de b é um múltiplo de 4 e podemos escrever $o(b) = 2^r s$, com s um inteiro ímpar e $r \geq 2$.

Como $a - a^{-1} \in (FG)^+$ e $b^s + b^{-s} \in (FG)^+$, temos

$$[a - a^{-1}, b^{p^m s} + b^{-p^m s}] = [a - a^{-1}, (b^s + b^{-s})^{p^m}] = [a - a^{-1}, \underbrace{b^s + b^{-s}, \ldots, b^s + b^{-s}}_{p^m \text{ vezes}}] = 0$$

e, da parte (iii) do Lema 2.11, obtemos

(i) $ab^{p^m s} = b^{p^m s}a$; ou

(ii) $ab^{p^m s} = b^{-p^m s}a$; ou

(iii) $o(a) = 4 = o(b^{p^m s})$ e $a^2 = b^{2p^m s}$.

Se $ab^{p^m s} = b^{p^m s}a$, então $b^{p^m s}a = b^{p^m s}a^{-1}$, o que implica $a^2 = 1$, uma contradição.

Se vale a segunda opção, então $a^{-1} = b^{-p^m}ab^{p^m s} = b^{-2p^m s}a$ e daí obtemos que $a^2 = b^{2p^m s}$. Logo, $a^2 \in \zeta(G)$ e, dado que $b^{-1}a^2b = a^{-2}$, temos $a^4 = 1$.

Deste modo, as últimas duas opções implicam que $o(a) = 4$, $b^{4p^m s} = 1$ e $a^2 = b^{2p^m s}$. Assim, $o(b) = 4s$. Logo, $o(a) = o(b^s) = 4$, $a^2 = b^{2s}$ e $b^{-s}ab^s = a^{-1}$, isto é, $\langle a, b^s \rangle \simeq Q_8$. Mas isto é uma contradição, pois $\sigma(a) = -1$ e, pelo Lema 2.13, $Q_8 \subseteq N$.

Se a ordem de b é infinita, então $b^2 \neq 1$ e, assim, podemos escrever $0 = [a - a^{-1}, b^{p^m} + b^{p^m}]$.

Segue, pela parte (iii) do Lema 2.11, que $ab^{p^m s} = b^{p^m s}a$ ou $ab^{p^m s} = b^{-p^m s}a$.

Como vimos acima, a segunda opção implica que b tem ordem finita e a primeira nos leva à $a^2 = 1$, uma contradição.

Caso 2: $\sigma(a) = 1$ e $\sigma(b) = -1$.

Suponhamos que $b^{2p^m} \neq 1$. Então $(ab)^2 \neq 1$, já que $ab = b^{-1}a^{-1}$ implica $ba^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, donde obtemos $b^2 = 1$, uma contradição. Assim, $[ab - (ab)^{-1}, b^{p^m} - b^{-p^m}] = 0$ e, pelo Corolário 2.12, temos $(ab)b^{p^m} = b^{p^m}(ab)$, o que implica $ab^{p^m} = b^{p^m}a$ e, assim, obtemos que $a^2 = 1$, uma contradição. Logo, devemos ter $b^{2p^m} = 1$ e sendo $(ab^{p^m})^2 = b^{p^m}a^{-1}ab^{p^m} = b^{2p^m} = 1$, concluímos que $\langle a, b^{p^m} \rangle$ é isomorfo à D_k ou D_∞, de acordo com a ordem de a.

Caso 3: $\sigma(a) = \sigma(b) = -1$.

Seja $c = ab$. Então $\sigma(c) = 1$ e $c^{-1}ac = a^{-1}$. Logo, estamos de novo no primeiro caso, o qual já sabemos que não pode ocorrer.

Portanto, provamos que $a^2 = 1$ ou $b^{2p^m} = 1$, para algum $m > 0$. Também, se $a^2 \neq 1$, a única possibilidade para σ é $\sigma(a) = 1$ e $\sigma(b) = -1$.

Se $char(F) = 0$, então, pelo Lema 2.8, $((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})G)^+$ é Lie n-Engel, para qualquer primo ímpar q. Usando o resultado acima, concluímos que $a^2 = 1$ ou $b^{2q^m} = 1$, para algum $m > 0$.

Se $a^2 \neq 1$, então $b^{2q^m} = 1$, para todo primo ímpar q. Assim, se q_1 e q_2 são primos ímpares distintos, temos $b^{2q_1^m} = 1$ e $b^{2q_2^m} = 1$. Logo, $b^2 = 1$, o que implica $a^2 = 1$, uma contradição. Portanto, $a^2 = 1$ e G é abeliano. □

2.3 Grupos sem Elementos de Ordem 2

Sejam G um grupo sem elementos de ordem 2 e F um corpo de característica $p \neq 2$. Nesta seção, veremos que, nesse caso, $(FG)^+$ ou $(FG)^-$ ser Lie n-Engel, para algum n (ou Lie nilpotente), implica em FG ser Lie m-Engel, para algum m (ou Lie nilpotente).

Definição 2.18. *Dado um inteiro primo p, um elemento $x \in G$ é chamado um p-**elemento** se sua ordem é uma potência de p e é chamado um p'-**elemento** se é de ordem finita não divisível por p.*

Teorema 2.19 ([3], Main Theorem)**.** *Sejam $R = FG$ a álgebra de grupo de um grupo G sobre um corpo F e A um subgrupo aditivo de R. Se $[A, \underbrace{R, \ldots, R}_{n \text{ vezes}}] = 0$, para algum n, então $[A, R]R$ é um ideal nilpotente (associativo) de R.*

Lema 2.20. *Se $R = FG$ é a álgebra de grupo de um grupo G sobre um corpo F, então*

$$[R, R]R = \Delta(G, G').$$

Demonstração: Sabemos que $[R, R]R$ é o ideal à esquerda de FG gerado por todos os colchetes de Lie $[g, h]$, com $g, h \in G$ e $\Delta(G, G')$ é o ideal à esquerda de FG gerado por todos os elementos $ghg^{-1}h^{-1} - 1$, com $ghg^{-1}h^{-1} \in G'$.

Se $gh - hg$ é um gerador de $[R, R]R$, então $gh - hg = (ghg^{-1}h^{-1} - 1)hg \in \Delta(G, G')$.

Por outro lado, todo gerador $ghg^{-1}h^{-1} - 1$ de $\Delta(G, G')$ pode ser escrito na forma $ghg^{-1}h^{-1} - 1 = (gh - hg)g^{-1}h^{-1}$ e, portanto, $ghg^{-1}h^{-1} - 1 \in [R, R]R$. □

Lema 2.21 ([7], Lema 3.2.1)**.** *Sejam $char(F) = p > 2$ e G um grupo sem elementos de ordem 2. Assuma que $(FG)^+$ ou $(FG)^-$ seja Lie nilpotente. Se o centro de G contém um elemento de ordem infinita ou um p'-elemento não trivial, então G é p-abeliano.*

Demonstração: Assuma que $(FG)^+$ seja Lie nilpotente. Seja z um elemento central cuja ordem é infinita ou relativamente prima com p. Se $o(z) = \infty$, então $|\zeta(G)^2| = \infty$ e, pela Proposição 2.16, segue que FG é Lie nilpotente. Logo, pelo Teorema 2.6, G é p-abeliano.

Suponhamos que $o(z)$ seja finita. Então, $o(z)$ é ímpar e relativamente prima com p, digamos, $o(z) = 2r + 1$, com $r \in \mathbb{Z}$. Assim, temos que $1 = \sigma(z^{2r+1}) = (\sigma(z))^{2r}\sigma(z)$, o que implica $\sigma(z) = 1$. Como $(FG)^+$ é Lie nilpotente, segue, da prova da Proposição 2.16, que

$$(z^2 - 1)^n \underbrace{[R, R, \ldots, R]}_{n \text{ vezes}} = 0$$

para algum $n > 0$, com $R = FG$. Seja $A = (z^2 - 1)^n R$. Então,

$$[A, R, \ldots, R] = (z^2 - 1)^n [R, R, \ldots, R] = 0$$

e, pelo Teorema 2.19, temos que $[A, R]R = (z^2 - 1)^n [R, R]R$ é um ideal nilpotente de R. Pelo Lema 2.20, $[R, R]R = \Delta(G, G')$, logo $(z^2 - 1)^n \Delta(G, G')$ é um ideal nilpotente. Então, para algum inteiro positivo k, temos

$$(z^2 - 1)^n \alpha_1 (z^2 - 1)^n \alpha_2 \cdots (z^2 - 1)^n \alpha_k = (z^2 - 1)^{nk} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k = 0,$$

para qualquer escolha de elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Delta(G, G')$. Daí, segue que

$$(z^2 - 1)\alpha_1 (z^2 - 1)\alpha_2 \cdots (z^2 - 1)\alpha_{nk} = (z^2 - 1)^{nk} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{nk} = 0,$$

para quaisquer nk elementos $\alpha_i \in \Delta(G, G')$, ou seja, $(z^2 - 1)\Delta(G, G')$ também é um ideal nilpotente de FG. Assim, se $nk = m$, temos $((1 - z^2)\Delta(G, G'))^m = (1 - z^2)^m \Delta(G, G')^m = 0$ e, portanto, para todo $\alpha \in \Delta(G, G')^m$, $(1 - z^2)^m \alpha = 0$.

Seja $H = \langle z^2 \rangle$. Então, para todo $\alpha \in \Delta(G, G')^m$, temos

$$(1 - z^2)^m \alpha = (1 - z^2)(1 - z^2)^{m-1} \alpha = 0$$

e, assim, $(1 - z^2)^{m-1} \alpha \in Ann_r(\Delta(H))$. Pela Proposição 1.7, $Ann_r(\Delta(H)) = F \cdot \widehat{H}$, o que implica $(1 - z^2)^{m-1} \alpha \in F \cdot \widehat{H}$. Além disso, $(1 - z^2)^{m-1} \alpha \in \Delta(H)$, pois $(1 - z^2)^{m-1} \in \Delta(H)$ e $\Delta(H)$ é ideal. Assim, temos que $(1 - z^2)^{m-1} \alpha \in F \cdot \widehat{H} \cap \Delta(H)$. Mas, pela Proposição 1.7, $F \cdot \widehat{H} \cap \Delta(H) = \{a\widehat{H} \mid a \in F, a|H| = 0\}$ e, como z^2 é um p'-elemento, $F \cdot \widehat{H} \cap \Delta(H) = 0$, logo $(1 - z^2)^{m-1} \alpha = 0$. Portanto, $(1 - z^2)^{m-1} \Delta(G, G')^m = 0$.

Usando o mesmo argumento acima, podemos provar que $(1 - z^2)\Delta(G, G')^m = 0$.

Seja, agora, x um elemento qualquer de G'. Vejamos que x é um p-elemento. Como $p^m > m$, temos $(1-z^2)(1-x)^{p^m} = 0$, o que implica $(1-z^2)(1-x^{p^m}) = 0$. Assim, $1 + z^2x^{p^m} = x^{p^m} + z^2$ e daí, obtemos que $x^{p^m} = 1$, isto é, que x é um p-elemento. Portanto, G' é um p-grupo. Resta mostrar que G' é um p-grupo finito.

Afirmamos que $\Delta(G')^m = 0$. De fato, como $\Delta(G') \subset \Delta(G, G')$, temos $(1-z^2)\Delta(G')^m = 0$ e, portanto, $\Delta(G')^m = z^2\Delta(G')^m$. Logo, dado $\alpha \in \Delta(G')^m$ arbitrário, existe $\beta \in \Delta(G')^m$ tal que $\alpha = z^2\beta$. Assim, para cada $x \in \text{supp}(\alpha)$ existe $y \in \text{supp}(\beta)$ tal que $x = z^2y$. Mas, como z^2 é um p'-elemento e G' é um p-grupo, chegamos a uma contradição. Desta forma, $\alpha = 0$, o que implica $\Delta(G')^m = 0$. Portanto, pelo Teorema 1.8, G' é um p-grupo finito, como queríamos demonstrar. □

Lema 2.22 ([6], Lema 3.2). *Seja $H = \langle a, b\rangle$ um grupo gerado por dois elementos a, b satisfazendo $a \neq 1$ e $b^{-1}ab = a^{-1}$. Suponha que H não contenha elementos de ordem 2. Então, nem $(FG)^+$ nem $(FG)^-$ são Lie n-Engel.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel, para algum n. Então, pelo Lema 2.17, segue que $a^2 = 1$ ou $b^{2p^m} = 1$, para algum $m > 0$. Mas isso é uma contradição, pois H não contém elementos de ordem 2. Portanto, $(FG)^+$ não é Lie n-Engel. □

Lema 2.23 ([7], Lema 2.2.3). *Se $G = \langle x\rangle$ é um grupo cíclico infinito, então FG não tem divisores de zero.*

Demonstração: Sejam α e β elementos não nulos em FG. Logo, para $n, m \in \mathbb{Z}$ apropriados $\alpha = \sum_{i \leq n} a_i x^i$ e $\beta = \sum_{j \leq m} b_j x^j$, com $a_n, b_m \neq 0$. Desta forma, o coeficiente de x^{m+n} em $\alpha\beta$ não é zero e, portanto, $\alpha\beta$ também é não nulo em FG. □

Lema 2.24 ([12], Lema 1.1.4). *Sejam H um subgrupo de G e $\alpha \in FH$. Então, α é um divisor de zero à direita (ou à esquerda) em FH se, e somente se, é um divisor de zero à direita (ou à esquerda) em FG.*

Lema 2.25 ([6], Lema 3.3). *Seja $H = \langle g, h\rangle$ com $[g + c_1g^{-1}, h + c_2h^{-1}] = 0$, para certos $c_1, c_2 \in F$. Suponha que H não contenha elementos de ordem 2. Se $(FG)^+$ ou $(FG)^-$ é Lie n-Engel, então H é abeliano.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que H não seja abeliano, isto é, que $[g,h] \neq 0$. Dado que $[g+c_1g^{-1}, h+c_2h^{-1}] = 0$ temos

$$gh + c_1g^{-1}h + c_2gh^{-1} + c_1c_2g^{-1}h^{-1} = hg + c_1hg^{-1} + c_2h^{-1}g + c_1c_2h^{-1}g^{-1}. \tag{2.7}$$

Como $[g,h] \neq 0$ e H não contém elementos de ordem 2, temos que $g, h, gh \neq 1$ e $gh \neq hg, g^{-1}h, gh^{-1}, h^{-1}g^{-1}$. Além disso, $gh \neq hg^{-1}, h^{-1}g$, pois se fosse $gh = hg^{-1}$ ou $gh = h^{-1}g$, então, pelo Lema 2.22, seguiria que nem $(FG)^+$ nem $(FG)^-$ são Lie n-Engel, uma contradição.

De (2.7) obtemos, então, que $gh = g^{-1}h^{-1}$ e, assim, $g^2 = h^{-2}$. Logo, $g^2 \in \zeta(H)$ e como $g \notin \zeta(H)$, g deve ter ordem infinita. Temos também

$$\begin{aligned} 0 = [g+c_1g^{-1}, h+c_2h^{-1}] &= [(1+c_1g^{-2})g, (1+c_2h^{-2}h] \\ &= (1+c_1g^{-2})(1+c_2h^{-2})[g,h], \end{aligned}$$

isto é, $\alpha = (1+c_1g^{-2})(1+c_2h^{-1})$ é um divisor de zero em FH. Mas isso é uma contradição, pois sendo $C = \langle g^2 \rangle$ um grupo cíclico infinito, pelo Lema 2.23, α não é um divisor de zero em FC e, pelo Lema 2.24, também não é um divisor de zero em FH. Portanto, devemos ter $[g,h] = 0$. □

Lema 2.26 ([6], Lema 3.4)**.** *Sejam G um grupo sem elementos de ordem 2 e char$(F) \neq 2$. Suponha que $(FG)^+$ ou $(FG)^-$ seja Lie n-Engel, para algum n. Então,*

(i) se char$(F) = 0$, então G é abeliano;

(ii) se char$(F) = p > 0$, então $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$, para algum $m > 0$.

Demonstração: Assuma que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel, para algum n. Primeiro, suponha que *char*$(F) = p > 2$. Sejam $m > 0$ tal que $p^m \geq n$ e $h \in G$ um elemento fixo. Então, para todo $g \in G$,

$$[g+\sigma(g)g^{-1}, \underbrace{h+\sigma(h)h^{-1}, \ldots, h+\sigma(h)h^{-1}}_{p^m \text{ vezes}}] = 0.$$

Deste modo, $[g+\sigma(g)g^{-1}, h^{p^m} + \sigma(h)h^{-p^m}] = 0$. O Lema 2.25 implica $gh^{p^m} = h^{p^m}g$. Assim, $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$.

Se *char*$(F) = 0$, então $\mathbb{Z}G \subseteq FG$. Logo, $(\mathbb{Z}G)^+$ é Lie n-Engel e, pelo Lema 2.8, $((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})G)^+$ é Lie n-Engel, para qualquer primo ímpar q. Sejam $a, b \in G$ e considere q_1 e q_2

primos ímpares distintos. Como $G^{q^m} \subseteq \zeta(G)$ para todo ímpar q, temos que $a^{q_1^m}$ e $a^{q_2^m}$ são centrais. Assim, existem inteiros r e s tais que $1 = rq_1^m + sq_2^m$ e, portanto, temos

$$ab = a^{rq_1^m + sq_2^m} b = a^{rq_1^m} a^{sq_2^m} b = a^{rq_1^m} b a^{sq_2^m} = b a^{rq_1^m} a^{sq_2^m} = b a^{rq_1^m + sq_2^m} = ba,$$

isto é, G é abeliano.

Se $(FG)^-$ é Lie n-Engel, para algum n, a prova segue de modo semelhante. □

Apresentamos agora os principais resultados desta seção.

Teorema 2.27 ([6], Teorema 3.1)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$, G um grupo sem elementos de ordem 2 e σ uma orientação não trivial de G. Então, $(FG)^+$ (ou $(FG)^-$) é Lie n-Engel, para algum n, se, e somente se, FG é Lie m-Engel, para algum m.*

Demonstração: Assuma que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel, para algum n. Se $char(F) = 0$, então, pelo Lema 2.26, G é abeliano e o resultado segue do Teorema 2.7.

Suponha que $char(F) = p > 2$. Sabemos que

$$[x_1 + x_1^*, \underbrace{x_2 + x_2^*, \ldots, x_2 + x_2^*}_{n \text{ vezes}}] = 0 \tag{2.8}$$

é uma $*$-identidade polinomial para FG, portanto, pela Proposição 1.14, FG satisfaz uma identidade polinomial.

De acordo com o Teorema 2.7, precisamos provar que G é nilpotente. Para tal, pela Proposição 1.16, é suficiente mostrar que $G/\zeta(G)$ é nilpotente. Sabemos, pelo Lema 2.26, que $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$, para algum $m > 0$, logo, para todo $g\zeta \in G/\zeta(G)$, $(g\zeta)^{p^m} = g^{p^m}\zeta = 1$, isto é, $G/\zeta(G)$ é um p-grupo de expoente limitado. Note que $F(G/\zeta(G))$ também satisfaz (2.8), logo, da Proposição 1.21 temos que $G/\zeta(G)$ é nilpotente. Além disso, pela Proposição 1.20, G' é um p-grupo de expoente limitado. Mostraremos que G' é finito.

Como FG satisfaz uma identidade polinomial, pela Proposição 1.23, o FC subgrupo $\phi = \phi(G)$ de G é de índice finito em G e $|\phi'| < \infty$. Mas, $\zeta(G) \subseteq \phi$ e nós sabemos que $G/\zeta(G)$ é um p-grupo. Assim, dado que $G/\phi \simeq \dfrac{G/\zeta(G)}{\phi/\zeta(G)}$, temos que G/ϕ e $\phi' \subset G'$ são ambos p-grupos finitos e, pelo Teorema 2.7, segue que FG é Lie m-Engel, para algum m.

Se $(FG)^-$ é Lie n-Engel, para algum n, então

$$[x_1 - x_1^*, \underbrace{x_2 - x_2^*, \ldots, x_2 - x_2^*}_{n \text{ vezes}}] = 0$$

é uma $*$-identidade polinomial e a prova segue de modo semelhante.

A recíproca é trivial. $\square$

Teorema 2.28 ([6], Teorema 3.2)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$, G um grupo sem elementos de ordem 2 e σ uma orientação não trivial de G. Então, $(FG)^+$ (ou $(FG)^-$) é Lie nilpotente se, e somente se, FG é Lie nilpotente.*

Demonstração: Assuma que $(FG)^+$ seja Lie nilpotente.

Se $char(F) = 0$, então, pelo Lema 2.26, G é abeliano e, do Teorema 2.6, segue que FG é Lie nilpotente.

Suponha que $char(F) = p > 2$. Do Teorema 2.27, sabemos que G é nilpotente.

Se $|\zeta(G)| = \infty$, então, como G não tem elementos de ordem 2, $|\zeta(G)^2| = \infty$. Assim, pela Proposição 2.16, temos que FG é Lie nilpotente.

Assuma, agora, que $|\zeta(G)| < \infty$. Se $\zeta(G)$ contém um p'-elemento, então, pelo Lema 2.21, G é p-abeliano. Portanto, pelo Teorema 2.6, FG é Lie nilpotente também neste caso. Deste modo, podemos assumir que $\zeta(G)$ é um p-grupo finito.

Seja n a classe de nilpotência de G. Mostraremos agora, por indução em n, que G' é um p-grupo finito. Se $n = 1$, então, $G' = 1$, que é um p-grupo finito. Suponhamos, como hipótese de indução, que a afirmação seja válida para todo grupo nilpotente com classe de nilpotência menor que n. Dado que $G/\zeta(G)$ é nilpotente com classe de nilpotência $n - 1$, temos que $(G/\zeta(G))'$ é um p-grupo finito. Mas, $(G/\zeta(G))' = G'/\zeta(G)$ e, portanto, G' é um p-grupo finito. Assim, do Teorema 2.6, obtemos que FG é Lie nilpotente.

O caso em que $(FG)^-$ é Lie nilpotente é semelhante.

A recíproca é trivial. $\square$

Capítulo 3

Propriedades de Lie de Elementos Simétricos

Neste capítulo, estudamos a Lie nilpotência e a propriedade Lie n-Engel nos elementos simétricos sob uma involução clássica orientada de uma álgebra de grupo FG. Vamos considerar duas situações distintas: quando o grupo G contém uma cópia de Q_8 e quando não o contém.

3.1 Grupos que Contêm Q_8

Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$, G um grupo tal que $Q_8 \subseteq G$ e $(FG)^+$ o conjunto dos elementos simétricos de FG sob uma involução clássica orientada. Nesta seção, veremos quando $(FG)^+$ é Lie nilpotente ou Lie n-Engel.

Definição 3.1. *Um grupo G é dito um **produto central** de dois subgrupos normais H e K se $G = HK$, $(H, K) = 1$ e $H \cap K \subseteq \zeta(G)$. Denotamos este fato por $G = H \times_\zeta K$.*

Lema 3.2 ([6], Lema 4.1)**.** *Sejam G um grupo e A um subgrupo de índice 2 em G. Suponha que $A = C \times E$, um produto direto de grupos, com E um grupo abeliano tal que $E^2 = 1$. Se E é central em G, então para todo $g \in G \setminus A$, G é um produto central de $\langle C, g\rangle$ e E.*

Demonstração: Seja $g \in G \setminus A$. Como A é índice 2 em G, temos $G = gA \cup A$. Se $g_1 \in G \setminus A$, então $g_1 = gx$, para algum $x \in A$, e, da hipótese $A = C \times E$, obtemos que $g_1 = (gc_1)e_1 \in \langle C, g\rangle E$. Por outro lado, se $g_1 \in A$, então $g_1 \in \langle C, g\rangle E$ e, assim, $G = \langle C, g\rangle E$.

Dado que E é central em G, temos $(\langle C, g\rangle, E) = 1$ e $\langle C, g\rangle \cap E \subseteq \zeta(G)$. Portanto, $G = \langle C, g\rangle \times_\zeta E$. □

Lema 3.3 ([6], Lema 4.2). *Sejam F um corpo de característica $p > 2$, G um grupo com uma orientação não trivial σ e x, y elementos de G tais que $\langle x, y\rangle \simeq Q_8$. Se $(FG)^+$ é Lie p^m-Engel, para algum $m > 0$, então existe $g \in G \setminus N$ tal que $g^{2p^m} \neq 1$ e $g^2 = x^2$. Além disso, $(h, x) = (h, y) = 1$, para todo $h \in G \setminus N$ tal que $h^{2p^m} \neq 1$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $a^{2p^m} = 1$, para todo $a \in G \setminus N$, e considere $g \in G \setminus N$. Assuma primeiro que $o(g) \neq 2$. Como $(FG)^+$ é Lie p^m-Engel e $o(x) = 4$, temos

$$[g - g^{-1}, \underbrace{x + x^{-1}, \ldots, x + x^{-1}}_{p^m \text{ vezes}}] = [g - g^{-1}, x^{p^m} + x^{-p^m}] = [g - g^{-1}, x + x^{-1}] = 0.$$

Usando a parte (iii) do Lema 2.11, obtemos $gx = xg$, $gx = x^{-1}g$ ou $o(g) = 4$. A última possibilidade é descartada, pois $g^{2p^m} = 1$. Se $gx = xg$, então $(gx)^{2p^m} = g^{2p^m}x^{2p^m} = 1$ e, assim, $x^{2p^m} = 1$, uma contradição. Logo, devemos ter $gx = x^{-1}g$.

Assuma, agora, que $o(g) = 2$. Se tivéssemos $(gx)^2 \neq 1$, então, pelo argumento anterior, $(gx)x = x^{-1}(gx)$ e daí $gx = x^{-1}g$, o que implicaria $(gx)^2 = 1$, uma contradição. Assim, temos $(gx)^2 = 1$ e, consequentemente, $gx = x^{-1}g^{-1} = x^{-1}g$. Concluímos que $gx = x^{-1}g$, para todo $g \in G \setminus N$. Além disso, como $gy \in G \setminus N$, temos $(gy)x = x^{-1}(gy)$, o que implica $(gy)x = (gx)y$. Sendo $xy = yx^{-1}$, desta última igualdade obtemos $x^2 = 1$, uma contradição.

Portanto, existe um $g \in G \setminus N$ tal que $g^{2p^m} \neq 1$.

Seja $h \in G \setminus N$ tal que $h^{2p^m} \neq 1$. Provaremos que $(h, x) = (h, y) = 1$. Como $(FG)^+$ é Lie p^m-Engel e $o(x) = 4$, temos $[h - h^{-1}, x + x^{-1}] = 0$. Aplicando a parte (iii) do Lema 2.11, obtemos:

(1) $hx = xh$ ou

(2) $hx = x^{-1}h$ ou

(3) $x^2 = h^2$ e $o(h) = 4$.

Primeiro mostraremos que (3) leva a uma contradição. De fato, se $hx = x^{-1}h$, então

$$(hx)^k = \begin{cases} h^k, & \text{se } k \text{ é par,} \\ h^k x, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, $(hx)^{2p^m} = h^{2p^m} \neq 1$. Considerando que $[h - h^{-1}, (hx)^{p^m} - (hx)^{-p^m}] = 0$, do Corolário 2.12, temos $h(hx)^{p^m} = (hx)^{p^m}h$ e, assim, $hh^{p^m}x = h^{p^m}xh$, o que implica $hx = xh$. Como $hx = x^{-1}h$, segue que $x^{-1}h = xh$ e daí temos $x^2 = 1$, uma contradição.

De maneira similar, podemos provar a igualdade $[h - h^{-1}, y + y^{-1}] = 0$, que implica

(i) $hy = yh$ ou

(ii) $hy = y^{-1}h$ ou

(iii) $y^2 = h^2$ e $o(h) = 4$

e, novamente, segue que $hy = y^{-1}h$ leva a uma contradição.

Como nossas condições são simétricas em x e y, devemos estudar somente três possibilidades: (1)-(i), (1)-(iii) e (3)-(iii). Se (1) e (i) ocorrem, então não há nada a provar.

Suponha que (1) e (iii) sejam válidas, isto é, que $hx = xh$, $o(h) = 4$ e $h^2 = y^2$. Se $(yh)^2 = 1$, então $yh = h^{-1}y^{-1} = h^3y^{-1} = hy^2y^{-1} = hy$. Assuma $(yh)^2 \neq 1$. Como $o(h) = 4$, temos que $[yh - (yh)^{-1}, h^{p^m} - h^{-p^m}] = 0$, donde segue $[yh - (yh)^{-1}, h - h^{-1}] = 0$. Logo, pelo Corolário 2.12, $(yh, h) = 1$ e, portanto, $(y, h) = 1$.

Se (3) e (iii) são satisfeitas, então $o(h) = 4$ e $x^2 = y^2 = h^2$. Se $(xh)^2 \neq 1$, então $[xh - (xh)^{-1}, h - h^{-1}] = 0$. Do Corolário 2.12, obtemos que $(xh, h) = 1$, o que implica $(x, h) = 1$. Agora, se $(xh)^2 = 1$, então $xh = h^{-1}x^{-1} = h^3x^{-1} = hx^2x^{-1} = hx$. Assim, temos $xh = hx$. Similarmente, podemos mostrar que $yh = hy$.

Portanto, em todos os casos possíveis, temos $(h, x) = (h, y) = 1$.

Finalmente, suponha que $(xh)^2 \neq 1$ e $(yh)^{2p^m} \neq 1$, para todo elemento $h \in G \setminus N$ como acima. Então, $[xh - (xh)^{-1}, (yh)^{p^m} - (yh)^{-p^m}] = 0$ e, pelo Corolário 2.12, $(xh, (yh)^{p^m}) = 1$, isto é, $xhy^{p^m}h^{p^m} = y^{p^m}h^{p^m}xh$, o que implica $xy = yx$, uma contradição. Portanto, existe $g \in G \setminus N$ tal que $g^{2p^m} \neq 1$ e $(xg)^2 = 1$ ou $(yg)^{2p^m} = 1$.

Se $(xg)^2 = 1$, então $x^2g^2 = 1$, o que implica $x^2 = g^2$. Similarmente, $(yg)^{2p^m} = 1$ implica $y^2 = g^{2p^m}$e, neste caso, tomamos $g_1 = g^{p^m}$.

Em qualquer caso, encontramos um elemento $g \in G \setminus N$ como no enunciado do lema. $\square$

Lema 3.4 ([6], Lema 4.3)**.** *Sejam R um anel comutativo, $Q_8 = \langle x, y\rangle$ o grupo dos quatérnios de ordem 8 e $G = \langle Q_8, g\rangle$, com $(g, x) = (g, y) = 1$ e $g^2 = x^2$. Seja σ a orientação de G definida por $\sigma(x) = \sigma(y) = 1$ e $\sigma(g) = -1$. Então, $(RG)^+$ é central em RG.*

Demonstração: Lembramos que $(RG)^+$ é gerado, como um R-módulo, pelo conjunto

$$\mathcal{S} = \{1, x^2\} \cup \{x + x^{-1}, y + y^{-1}, xy + (xy)^{-1}\} \cup \{g - g^{-1}\}.$$

Além disso, notamos que, para qualquer $\gamma \in \mathcal{S}$, temos $[\gamma, x] = [\gamma, y] = [\gamma, g] = 0$. Portanto, $(RG)^+$ é central em RG. $\square$

Os próximos dois resultados fornecem, com respeito à involução clássica, as caracterizações de $(FG)^+$ em que estamos interessados.

Teorema 3.5 ([10], Teorema 2). *Sejam F um corpo de característica diferente de 2 e G um grupo tal que $Q_8 \subseteq G$. Então, $(FG)^+$ é Lie n-Engel, para algum n, se, e somente se, vale uma das seguintes condições*

(i) $char(F) = 0$ e $G \simeq Q_8 \times E$, onde $E^2 = 1$ ou

(ii) $char(F) = p > 2$ e $G \simeq Q_8 \times E \times P$, onde $E^2 = 1$ e P é um p-grupo nilpotente de expoente limitado que contém um subgrupo normal p-abeliano A cujo índice é finito.

Teorema 3.6 ([9], Teorema 2). *Sejam F um corpo de característica diferente de 2 e G um grupo tal que $Q_8 \subseteq G$. Então, $(FG)^+$ é Lie nilpotente se, e somente se,*

(i) $char(F) = 0$ e $G \simeq Q_8 \times E$, onde $E^2 = 1$; ou

(ii) $char(F) = p > 2$ e $G \simeq Q_8 \times E \times P$, onde $E^2 = 1$ e P é um p-grupo finito.

Definição 3.7. *Um anel R é dito **semiprimo** se não possui ideais nilpotentes não-zeros I tais que $I^2 = 0$.*

Teorema 3.8 ([12], Teorema 4.2.12). *Se FG é um anel de grupo sobre um corpo F de característica 0, então FG é semiprimo.*

Lema 3.9 ([6], Lema 2.4). *Seja R um anel semiprimo com involução tal que $2R = R$. Se R^+ é Lie n-Engel, para algum n, então R^+ é comutativo.*

Teorema 3.10 ([1], Teorema 2.3). *Sejam R um anel comutativo com unidade e G um grupo não abeliano com orientação não trivial σ. Então, $(RG)^+$ é um anel comutativo se, e somente se, temos uma das seguintes condições:*

(i) $N = \ker(\sigma)$ é um grupo abeliano e $(G \setminus N)^2 = 1$;

(ii) $N \simeq Q_8 \times E$ e $G \simeq \langle x, y, g \mid x^4 = 1, y^2 = x^2 = g^2, x^y = x^{-1}, x^g = x, y^g = y\rangle \times E$, onde $E^2 = 1$;

(iii) $char(R) = 4$ e $G \simeq Q_8 \times E$, onde $E^2 = 1$.

Definição 3.11. *Um ideal I de um anel R é* ***nil de expoente limitado****, se existe um inteiro positivo n tal que $x^n = 0$ para todo $x \in I$.*

Lema 3.12 ([11], Proposição 1.3.14)**.** *Sejam F um corpo de característica $p > 0$ e G um grupo tal que FG satisfaz uma identidade polinomial. Se N é um p-subgrupo normal de expoente limitado, então $\Delta(G, N)$ é nil de expoente limitado.*

Estamos em condições de enunciar agora os principais resultados desta seção.

Teorema 3.13 ([6], Teorema 4.1)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$, G um grupo com uma orientação não trivial σ e x, y elementos de G tais que $\langle x, y\rangle \simeq Q_8$. Então, $(FG)^+$ é Lie n-Engel, para algum n, se, e somente se,*

(i) $char(F) = 0, N \simeq Q_8 \times E$ e $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E$, onde $E^2 = 1$, e $g \in G \setminus N$ é tal que $(g, x) = (g, y) = 1$ e $g^2 = x^2$; ou,

(ii) $char(F) = p > 2, N \simeq Q_8 \times E \times P$, onde P é um p-grupo nilpotente de expoente limitado que contém um subgrupo p-abeliano A de índice finito e existe $g \in G \setminus N$ tal que $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E \times P, (g, x) = (g, y) = (g, t) = 1$ para todo $t \in P$ e $g^2 = x^2$.

Demonstração: Suponha que $char(F) = 0$ e que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel, para algum n. Do Lema 2.13 temos $Q_8 \subseteq N$ e, do Teorema 3.5, $N \simeq Q_8 \times E$, onde $E^2 = 1$. Além disso, pelo Teorema 3.8, FG é semiprimo, logo, pelo Lema 3.9, $(FG)^+$ é comutativo. Dado que N é não abeliano e $char(F) = 0$, segue do Teorema 3.10 que

$$G \simeq \langle x, y, g \mid x^4 = 1, y^2 = x^2 = g^2, x^y = x^{-1}, x^g = x, y^g = y\rangle \times E.$$

Reciprocamente, temos $(FG)^+ = (F(\langle Q_8, g\rangle \times E))^+ = ((F(E))\langle Q_8, g\rangle)^+$ (veja Observação 1.2.4) e, do Lema 3.4, sabemos que os elementos simétricos comutam. Portanto, $(FG)^+$ é Lie n-Engel.

Assuma agora que $char(F) = p > 2$ e que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel, para algum n. Do Lema 2.13, temos $Q_8 \subseteq N$ e, do Teorema 3.5, $N \simeq Q_8 \times E \times P$, onde $E^2 = 1$ e P é um p-grupo nilpotente de expoente limitado que contém um subgrupo normal p-abeliano A de índice finito. Dado que $E \subseteq N$, pelo Lema 2.10, E é central em G e, assim, o Lema 3.2 implica que $G \simeq \langle Q_8 \times P, g\rangle \times_\zeta E$, onde g é qualquer elemento de $G \setminus N$. Como $(FG)^+$ é Lie n-Engel, existe $m > 0$ tal que $p^m \geq n$ e

$$[\gamma, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{p^m \text{ vezes}}] = [\gamma, \beta^{p^m}] = 0, \text{ para todos } \gamma, \beta \in (FG)^+. \tag{3.1}$$

Do Lema 3.3, sabemos que qualquer elemento $h \in G \setminus N$ tal que $h^{2p^m} \neq 1$ comuta com Q_8 e que, além disso, existe $g \in G \setminus N$ tal que $g^{2p^m} \neq 1$, $g^2 = x^2$, $(g, x) = (g, y) = 1$. Portanto, $o(g) = 4$.

Considere, agora, um elemento arbitrário t de P. Como $t + t^{-1}$ e $g - g^{-1}$ são simétricos, temos

$$0 = [t + t^{-1}, (g - g^{-1})^{p^m}] = [t + t^{-1}, g^{p^m} - g^{-p^m}] = [t + t^{-1}, g - g^{-1}].$$

Da parte (iii) do Lema 2.11, obtemos que $gt = tg$, $gt = t^{-1}g$ ou $o(t) = 4$. Como t é um p-elemento, a última possibilidade não pode acontecer. Agora, se $gt = t^{-1}g$, então $(gt)^2 = g^2 \neq 1$. Logo, $[gt - (gt)^{-1}, g - g^{-1}] = 0$ e, pelo Corolário 2.12, segue que $gt = tg$ e, assim, $t^2 = 1$, o que implica $t = 1$, uma contradição. Portanto, $(g, t) = 1$, para todo $t \in P$.

Sabemos que $G \simeq \langle Q_8 \times P, g\rangle \times_\zeta E$. Como g comuta com todos os elementos $t \in P$, temos $\langle Q_8 \times P, g\rangle = \langle Q_8, g\rangle \times P$. Afirmamos que $\langle Q_8 \times P, g\rangle \times_\zeta E = (\langle Q_8, g\rangle \times P) \times E$. De fato, tome $\ell \in (\langle Q_8, g\rangle \times P) \cap E$. Queremos ver que $\ell = 1$. Se $\ell \in \langle Q_8, g\rangle \times P$, então $\ell = zg^k t$, para certos $k \in \mathbb{Z}$, $z \in Q_8$ e $t \in P$. Por outro lado, temos $E \subseteq N$, logo, k deve ser par e, como $g^2 = x^2$, podemos escrever $\ell = zg^{2r}t = zx^{2r}t$, para certos $r \in \mathbb{Z}$, $z \in Q_8$ e $t \in P$. Assim, $\ell \in Q_8 \times P$. Mas, $(Q_8 \times P) \cap E = \{1\}$, já que $N \simeq Q_8 \times E \times P$, logo $\ell = 1$ e, portanto, $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E \times P$.

Reciprocamente, seja $g \in G \setminus N$ tal que $G = \langle Q_8, g\rangle \times E \times P$, $(g, x) = (g, y) = 1$ e $g^2 = x^2$. Como g é central em G, temos $[g - g^{-1}, \gamma] = 0$, para todo $\gamma \in (FG)^+$. Queremos provar que existe $s > 0$ tal que $[\gamma, \beta^{p^s}] = 0$, para todos $\gamma, \beta \in (FG)^+$.

Primeiro, observamos que $\beta = \beta_1 + \beta_2$, onde $\beta_1 = \sum_{h \in N} b_h h$ e $\beta_2 = \sum_{h \in G \setminus N} b_h h$.

Sendo $\beta_1 \in (FN)^+$, podemos escrevê-lo como uma combinação linear de elementos da forma $a_1c_1 + (a_1c_1)^{-1}$, com $a_1 \in Q_8 \times E$ e $c_1 \in P$. Agora, note que

$$a_1c_1 + (a_1c_1)^{-1} = a_1c_1 + a_1^{-1}c_1^{-1} = a_1 + a_1^{-1} + a_1(c_1 - 1) + a_1^{-1}(c_1^{-1} - 1)$$

e, pelo Lema 3.4, $a_1 + a_1^{-1}$ é central em $F(\langle Q_8, g\rangle \times E)$ e, portanto, em FG. Note, também, que $a_1(c_1 - 1) + a_1^{-1}(c_1^{-1} - 1) \in \Delta(G, P)$. Portanto, $\beta_1 = \alpha_1 + \delta_1$, onde α_1 é central em FG e $\delta_1 \in \Delta(G, P)$.

Por outro lado, podemos escrever β_2 como combinação linear de elementos da forma $ga_2c_2 - (ga_2c_2)^{-1}$, com $a_2 \in Q_8 \times E$ e $c_2 \in P$. Mas, observe que

$$ga_2c_2 - (ga_2c_2)^{-1} = ga_2c_2 - g^{-1}a_2^{-1}c_2^{-1} = ga_2 - (ga_2)^{-1} + ga_2(c_2 - 1) - g^{-1}a_2^{-1}(c_2^{-1} - 1)$$

e, do Lema 3.4, obtemos que $ga_2 - (ga_2)^{-1}$ é central em FG. Além disso, temos que $ga_2(c_2 - 1) - g^{-1}a_2^{-1}(c_2^{-1} - 1) \in \Delta(G, P)$. Desta forma, $\beta_2 = \alpha_2 + \delta_2$, onde α_2 é central em FG e $\delta_2 \in \Delta(G, P)$.

Assim, $\beta = \alpha + \delta$, com α sendo um elemento central em FG e $\delta \in \Delta(G, P)$.

A aplicação $\langle Q_8, g\rangle \times E \times P \to \langle Q_8, g\rangle \times P/A$ definida por $(z, \ell, t) \longmapsto (z, tA)$ é um homomorfismo de grupos, daí

$$\frac{G}{E \times A} = \frac{\langle Q_8, g\rangle \times E \times P}{E \times A} \simeq \langle Q_8, g\rangle \times P/A,$$

o que implica que $E \times A$ é um subgrupo p-abeliano de índice finito em G, pois $o(g) = 4$ e, por hipótese, $|P/A|$ é finito. Da Proposição 1.18 segue, então, que FG satisfaz uma identidade polinomial e, assim, pelo Lema 3.12, $\Delta(G, P)$ é nil de expoente p^r, para algum $r \in \mathbb{N}$. Consequentemente, temos que

$$\beta^{p^r} = (\alpha + \delta)^{p^r} = \alpha^{p^r} + \delta^{p^r} = \alpha^{p^r},$$

donde segue que $[\gamma, \beta^{p^r}] = [\gamma, \alpha^{p^r}] = 0$, para todos $\gamma, \beta \in (FG)^+$ e, portanto, $(FG)^+$ é Lie p^r-Engel. $\square$

Teorema 3.14 ([6], Teorema 4.2)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$, G um grupo com uma orientação não trivial σ e x, y elementos de G tais que $\langle x, y\rangle \simeq Q_8$. Então, $(FG)^+$ é Lie nilpotente se, e somente se,*

(i) $char(F) = 0, N \simeq Q_8 \times E$ e $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E$, onde $E^2 = 1$, e $g \in G \setminus N$ é tal que $(g, x) = (g, y) = 1$ e $g^2 = x^2$; ou,

(ii) $char(F) = p > 2, N \simeq Q_8 \times E \times P$, onde P é um p-grupo finito, e existe $g \in G \setminus N$ tal que $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E \times P$, $(g, x) = (g, y) = (g, t) = 1$ e $g^2 = x^2$.

Demonstração: Assuma que $char(F) = 0$ e que $(FG)^+$ seja Lie nilpotente. Então, $(FG)^+$ é Lie n-Engel e, do Teorema 3.13, temos o resultado. Reciprocamente, do Lema 3.4, obtemos que $(FG)^+$ é comutativo e, portanto, Lie nilpotente.

Agora, suponha que $char(F) = p > 2$ e que $(FG)^+$ seja Lie nilpotente. Do Lema 2.13, temos $Q_8 \subseteq N$ e, do Teorema 3.6, segue que $N \simeq Q_8 \times E \times P$, onde $E^2 = 1$ e P é um p-grupo finito. Assim, do Teorema 3.13, existe $g \in G \setminus N$ tal que $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E \times P$, $(g, x) = (g, y) = 1$ e $g^2 = x^2$.

Reciprocamente, suponha que $|P| = p^n$. Afirmamos que, para quaisquer p^n+1 elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_{p^n+1} \in (FG)^+$, $[\gamma_1, \dots, \gamma_{p^n+1}] = 0$. A prova é por indução sobre n. Se $n = 0$, então $G \simeq \langle Q_8, g\rangle \times E$ e, assim, o Lema 3.4 implica que $(FG)^+$ é comutativo.

Se $n \geq 1$, supomos, como hipótese de indução, que a afirmação vale para todo inteiro positivo menor que n. Queremos mostrar que a afirmação vale também para n.

Seja $z \in \zeta(P)$ tal que $o(z) = p$. Como $\sigma(z) = 1$, podemos considerar a orientação induzida $\overline{\sigma}$ definida em $G/\langle z^2\rangle$. Pela hipótese de indução, trabalhando em $F(G/\langle z^2\rangle)$, $[\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_{p^{n-1}+1}] = 0$, para todo $\overline{\gamma}_i \in (F(G/\langle z^2\rangle))^+$ e, portanto, $[\gamma_1, \dots, \gamma_{p^{n-1}+1}] \in \Delta(G, \langle z^2\rangle)$. Mas, $\Delta(G, \langle z^2\rangle) = (z^2-1)FG = (z-z^{-1})FG$, logo, $[\gamma_1, \dots, \gamma_{p^{n-1}+1}] = (z-z^{-1})w$, para algum $w \in FG$.

Pode-se verificar que $[(FG)^+, (FG)^+] \subseteq (FG)^-$ e $[(FG)^-, (FG)^+] \subseteq (FG)^+$. Consequentemente, como $p^{n-1}+1$ é par, $(z-z^{-1})w = [\gamma_1, \dots, \gamma_{p^{n-1}+1}] \in (FG)^-$ e, assim, $((z-z^{-1})w)^* = -(z-z^{-1})w$. Por outro lado, sendo $z-z^{-1}$ central e antissimétrico, temos também $((z-z^{-1})w)^* = -(z-z^{-1})w^*$. Portanto, $(z-z^{-1})w = (z-z^{-1})w^*$ e segue que

$$[\gamma_1, \dots, \gamma_{p^{n-1}+1}] = (z-z^{-1})w = (z-z^{-1})\beta_1,$$

onde $\beta_1 = \dfrac{w+w^*}{2}$ é simétrico.

Assim, temos

$$[\gamma_1, \dots, \gamma_{2p^{n-1}+1}] = [\gamma_1, \dots, \gamma_{p^{n-1}+1}, \gamma_{p^{n-1}+2}, \dots, \gamma_{2p^{n-1}+1}] = (z-z^{-1})[\beta_1, \gamma_{p^{n-1}+2}, \dots, \gamma_{2p^{n-1}+1}].$$

Dado que $[\beta_1, \gamma_{p^{n-1}+2}, \dots, \gamma_{2p^{n-1}+1}]$ é o colchete de Lie de $p^{n-1}+1$ elementos simétricos, usando o argumento anterior, obtemos $[\beta_1, \gamma_{p^{n-1}+2}, \dots, \gamma_{2p^{n-1}+1}] = (z-z^{-1})\beta_2$, para algum $\beta_2 \in (FG)^+$. Logo,

$$[\gamma_1, \dots, \gamma_{2p^{n-1}+1}] = (z-z^{-1})^2\beta_2, \text{ para algum } \beta_2 \in (FG)^+.$$

Iterando este argumento, obtemos

$$[\gamma_1, \dots, \gamma_{p^n+1}] = (z-z^{-1})^p\beta_p, \text{ para algum } \beta_p \in (FG)^+.$$

Como $(z-z^{-1})^p = 0$, a afirmação está provada. □

3.2 Grupos que não Contêm Q_8

Nesta última seção, estudamos a Lie nilpotência e a propriedade Lie n-Engel em uma álgebra de grupo FG no caso em que $Q_8 \nsubseteq G$.

Lema 3.15 ([9], Lema 5)**.** *Suponha que $Q_8 \nsubseteq G$ e que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel. Então,*

(i) se char$(F) = 0$, então G é abeliano;

(ii) se char$(F) = p > 2$, então $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$, para algum $m > 0$.

No enunciado do resultado anterior na referência [9], supõe-se que $(FG)^+$ é Lie nilpotente. No entanto, na sua demonstração, na mesma referência, usa-se apenas o fato de $(FG)^+$ ser Lie n-Engel.

Lema 3.16 ([6], Lema 5.1)**.** *Sejam G um grupo tal que $Q_8 \nsubseteq G$ com uma orientação não trivial σ e char$(F) \neq 2$. Assuma que $g^2 \neq 1$, para todo $g \in G \setminus N$, e que $(FG)^+$ seja Lie n-Engel, para algum n. Então,*

(i) se char$(F) = 0$, então G é abeliano;

(ii) se char$(F) = p > 0$, então $G^{p^m} \subseteq \zeta(G)$, para algum $m > 0$.

Demonstração: Suponha que *char*$(F) = 0$. Logo, pelo Teorema 3.8, FG é semiprimo e, do Lema 3.9, temos que $(FG)^+$ é comutativo. Assim, se G fosse não abeliano, uma das três condições do Teorema 3.10 deveria ser satisfeita. Mas, pelas hipóteses, isso não ocorre. Portanto, G deve ser abeliano.

Suponha agora que *char*$(F) = p > 2$. Sejam $m > 0$ tal que $p^m \geq n$, $b \in G$ um elemento fixo e $a \in G$ um elemento qualquer. Consideramos os seguintes casos:

Caso 1: $\sigma(a) = \sigma(b) = 1$.

Do Lema 3.15, obtemos que $(a, b^{p^m}) = 1$.

Caso 2: $\sigma(a) = \sigma(b) = -1$.

Pela hipótese, $a^2 \neq 1$ e $b^{2p^m} \neq 1$ e, do Corolário 2.12, segue que $(a, b^{p^m}) = 1$.

Caso 3: $\sigma(a) = 1$ e $\sigma(b) = -1$.

Tome $c = ab$. Dado que $\sigma(c) = -1$, pelo Caso 2, temos que $(c, b^{p^m}) = 1$, o que implica que $(a, b^{p^m}) = 1$.

Caso 4: $\sigma(a) = -1$ e $\sigma(b) = 1$.

Como $\sigma(a^2) = 1$, do primeiro caso, temos $(a^2, b^{p^m}) = 1$ e, pelo Caso 3, $(b, a^{p^m}) = 1$. Assim, temos

$$a^2 = b^{p^m} a^2 b^{-p^m} \quad \text{e} \quad a^{p^m} = ba^{p^m} b^{-1}.$$

Sendo 2 e p relativamente primos, segue que $1 = p^m r + 2s$, para certos $r, s \in \mathbb{Z}$ e, então,

$$ab^{p^m} = a^{p^m r+2s} b^{p^m} = a^{p^m r} a^{2s} b^{p^m} = a^{p^m r} b^{p^m} a^{2s} = b^{p^m} a^{p^m r} a^{2s} = b^{p^m} a,$$

isto é, $(a, b^{p^m}) = 1$. □

Lembramos que um grupo G é **de torção** se todos os seus elementos têm ordem finita.

Lema 3.17 ([14], Teorema 5.2.7)**.** *Seja G um grupo nilpotente. Se G é de torsão, então G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

Teorema 3.18 ([9], Teorema 1)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$, G um grupo tal que $Q_8 \nsubseteq G$ e $(FG)^+$ o conjunto dos elementos simétricos de FG sob a involução clássica. Então, $(FG)^+$ é Lie nilpotente se, e somente se, G é nilpotente e p-abeliano.*

Finalmente, apresentamos a seguir os principais resultados desta seção.

Teorema 3.19 ([6], Teorema 5.1)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$ e G um grupo tal que $Q_8 \nsubseteq G$ com uma orientação não trivial σ. Suponha que $g^2 \neq 1$ para todo $g \in G \setminus N$. Então, $(FG)^+$ é Lie n-Engel, para algum n se, e somente se, FG é Lie m-Engel, para algum m.*

Demonstração: A prova é similar à prova do Teorema 2.27, usando o Lema 3.16 no lugar do Lema 2.26. □

Teorema 3.20 ([6], Teorema 5.2)**.** *Sejam F um corpo de característica $p \neq 2$ e G um grupo tal que $Q_8 \nsubseteq G$ com uma orientação não trivial σ. Suponha que $g^2 \neq 1$ para todo $g \in G \setminus N$. Então, $(FG)^+$ é Lie nilpotente se, e somente se, FG é Lie nilpotente.*

Demonstração: Assuma que $(FG)^+$ seja Lie nilpotente. Se $char(F) = 0$, então, pelo Lema 3.16, G é abeliano e, do Teorema 2.6, segue que FG é Lie nilpotente.

Suponha agora que $char(F) = p > 2$. Do Teorema 3.19 obtemos que G é nilpotente e sabemos, do Lema 3.16, que $G/\zeta(G)$ é um p-grupo de expoente limitado. Segue, então, da Proposição 1.20, que G' é um p-grupo de expoente limitado.

Se G contém um elemento x de ordem infinita, então, pelo Lema 3.16, alguma potência positiva de x é central e, assim, $|\zeta(G)^2| = \infty$. Logo, pela Proposição 2.16, FG é Lie nilpotente.

Agora, se G é de torção, então, pelo Lema 3.17, G é o produto direto $\prod_q P_q$ onde, para cada primo q, P_q é o único q-subgrupo de Sylow de G. Como G' é um p-grupo, $G' = P_p'$ e, dado que $(FP_p)^+$ é Lie nilpotente, do Teorema 3.18, temos que P_p' é finito, isto é, G' é finito.

Sendo G nilpotente e p-abeliano, pelo Teorema 2.6, resulta que FG é Lie nilpotente.

A recíproca é trivial. $\square$

Observamos que a hipótese de que $g^2 \neq 1$, para todo $g \in G \setminus N$, é essencial para os resultados anteriores. Para ver isto, considere $D_k = \langle x, y \rangle$ um grupo Dihedral e F um corpo com $char(F) \neq 2$. Temos que $Q_8 \nsubseteq D_k$. Além disso, a única orientação σ tal que $(FG)^+$ é Lie nilpotente é dada por $\sigma(x) = 1$ e $\sigma(y) = -1$. De fato, se $(FD_k)^+$ é Lie nilpotente e $\sigma(y) = 1$ então, do Lema 2.10, segue que y é um elemento central, o que é uma contradição. Logo, devemos ter $\sigma(y) = -1$. Da mesma forma, se $\sigma(x) = -1$, então, pelo Lema 2.10, xy é central, outra contradição. Assim, $\sigma(x) = 1$. Nesse caso, temos $N = \langle x \rangle$, $G \setminus N = \{x^i y \mid 0 \leq i \leq k-1\}$ e $(G \setminus N)^2 = 1$. Portanto, pelo Teorema 3.10, $(FD_k)^+$ é comutativo, porém, pelo Teorema 2.6, FD_k não é Lie nilpotente, já que D_k é nilpotente se, e só se, é um 2-grupo.

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos a Lie nilpotência e a propriedade Lie n-Engel em anéis de grupo, tendo como base o artigo *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions* de J. Hermes Castillo e C. Polcino Milies.

Vimos, nos Teoremas 2.27 e 2.28 do capítulo 2, que é possível identificar se o anel de grupo FG de um grupo G sem elementos de ordem 2 possui tais propriedades, apenas verificando se as mesmas são satisfeitas por $(FG)^+$ ou $(FG)^-$.

Em seguida, no capítulo 3, investigamos a estrutura do núcleo N de uma involução clássica orientada e de um grupo G contendo Q_8 para o qual $(FG)^+$ é Lie nilpotente ou Lie n-Engel. Este foi o conteúdo dos Teoremas 3.13 e 3.14.

Ainda no capítulo 3, observamos, a partir dos Teoremas 3.19 e 3.20, que as propriedades de Lie consideradas podem ser estendidas de $(FG)^+$ para FG, também no caso em que $Q_8 \nsubseteq G$, desde que $g^2 \neq 1$, para todo $g \in G \setminus N$.

Concluímos esta dissertação, destacando que o assunto aqui apresentado é de interesse e ativo em pesquisa, conforme pode ser visto no artigo *Normal group algebras* de A. Holguín-Villa e J. Hermes Castillo, submetido neste ano ao arXiv [8]. O trabalho analisa condições sob as quais o anel de grupo FG (onde F é um corpo com $char(F) \neq 2$) satisfaz a $\circledast$-identidade $\alpha\alpha^{\circledast} = \alpha^{\circledast}\alpha$, onde $\alpha = \sum a_g g \mapsto \alpha^{\circledast} = \sum a_g \sigma(g) g^{\star}$, sendo $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ uma orientação de grupo e $\star : G \to G$ uma involução de grupo arbitrária (dizemos, nesse caso, que FG é normal). Os autores concluem que FG é normal se, e somente se, o conjunto dos elementos simétricos sob $\circledast$ for comutativo.

Referências Bibliográficas

[1] O. Broche Cristo, C. Polcino Milies, *Symmetric elements under oriented involutions in group rings*, Communications in Algebra **34** (2006), no. 9, 3347-3356.

[2] A. Giambruno, C. Polcino Milies, S. K. Sehgal, *Lie properties of symmetric elements in group rings*, Journal of Algebra **321** (2009), no. 3, 890-902.

[3] A. Giambruno, S. K. Sehgal, *A Lie property in group rings*, Proceedings of the American Mathematical Society **105** (1989), no. 2, 287-292.

[4] A. Giambruno, S. K. Sehgal, *Lie nilpotence of group rings*, Communications in Algebra **21** (1993), no. 11, 4253-4261.

[5] E. G. Goodaire, C. Polcino Milies *Lie and Jordan properties in group algebras*, Contemporary Mathematics **624** (2015), 163-173.

[6] J. Hermes Castillo, C. Polcino Milies, *Lie properties of symmetric elements under oriented involutions*, Communications in Algebra **40** (2012), no. 12, 4404-4419.

[7] J. Hermes Castillo, *Propriedades de Lie de elementos simétricos sob involuções orientadas*. 2012. 68f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2013.

[8] A. Holguín-Villa, J. Hermes Castillo, *Normal group algebras*, arXiv:1902.09620v1.

[9] G. T. Lee, *Group rings whose symmetric elements are Lie nilpotent*, Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), 3153-3159.

[10] G. T. Lee, *The Lie n-Engel property in group rings*, Communications in Algebra **28** (2000), no. 2, 867-881.

[11] G. T. Lee, *Group identities on units and symmetric units of group rings*, Algebra and Applications, vol. 12, Springer-Verlag London Ltd., London, 2010.

[12] D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [Jonh Wiley & Sons], New York, 1977.

[13] C. Polcino Milies, S. K. Sehgal, *An introduction to group rings*, Algebras and Applications, vol. 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[14] D. J. S. Robinson. *A course in the theory of groups*, second ed., Graduate Texts in Mathmatics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.

[15] S. K. Sehgal, *Topics in group rings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 50, Marcel Dekker Inc., New York, 1978.