INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDERSON GOMES DA SILVA

COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA NO ENSINO MÉDIO

NITERÓI
2016

ANDERSON GOMES DA SILVA

COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Coordenação do Curso Graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para aprovação na disciplina Monografia (GGT 00013) .

Orientador: Simone Dantas

Niterói
2016

ANDERSON GOMES DA SILVA

COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Coordenação do Curso Graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para aprovação na disciplina Monografia (GGT 00013) .

Aprovada em: 27/07/2016

Banca Examinadora

Simone Dantas

Prof. Simone Dantas - Orientadora

D. Sc. – Universidade Federal Fluminense

Diana Sasaki

Prof. Diana Sasaki Nobrega - Membro

D. Sc. – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Moisés Telés Carvalho Junior - Membro

D. Sc. – Instituto Benjamin Constant

Dedico esta monografia a minha mãe, Ruth,
por seu amor incondicional e ao meu amigo
Fabiano por ser tão inspirador para mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, que até aqui me ajudou e sustentou. Sou grato a Deus por tudo o que Ele me permitiu viver durante a graduação, pelas portas abertas e fechadas. Estou certo de que todas as coisas cooperaram para o meu bem. A Deus toda honra e toda glória!

Agradeço a minha mãe pelo seu amor e apoio e por ser tão incansável na valorização da minha educação, ainda que isso tenha significado, em alguns momentos, que ela tivesse que fazer sacrifícios por mim.

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação e àqueles com quem estreitei os laços de amizade durante este tempo por terem compartilhado comigo tantos momentos de alegria e também por estarem presentes nos momentos de dificuldade. Em especial, agradeço aos amigos de intercâmbio com quem experimentei as novidades de estar imerso em outra cultura e com quem conheci os desafios de estar em um país diferente. Agradeço também à família Pritchett por ter sido minha família estendida fora do Brasil, por ter me acolhido de maneira tão carinhosa e por me proporcionar conhecer mais da cultura norte-americana.

Agradeço à professora Simone Dantas por ter acompanhado meu desenvolvimento acadêmico no final da graduação, quando participei de projeto de iniciação científica sob sua orientação. Agradeço também à professora Diana Sasaki pela colaboração e por aceitar compor, juntamente com o professor Moisés Teles de Carvalho Junior, a quem também sou grato, a banca examinadora da minha monografia.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo problematizar a ausência do tema teoria dos grafos no ensino médio. Para tanto, adotou-se como metodologia uma proposta de atividades envolvendo conceitos básicos de coloração total equilibrada de grafos bipartidos completos balanceados. A teoria dos grafos é uma área da matemática discreta que lida com a relação entre objetos de um determinado conjunto. O que fundamenta teoricamente este trabalho é a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Segundo tal metodologia, ensino, aprendizagem e avaliação são elementos que devem ocorrer simultaneamente nas aulas de Matemática. As questões propostas foram contextualizadas de acordo com situações que podem ser vivenciadas por alunos do ensino médio ou qualquer outro cidadão comum que não seja necessariamente matemático. Tais questões envolvem distribuição de tarefas e agendamento de atividades. As conclusões obtidas foram de que o trabalho contribuiu tanto para a educação matemática, pela proposta inovadora para o ensino médio, quanto para o desenvolvimento científico do tema, pela submissão de artigo sobre o tema para congresso.
Palavras-chave: Coloração total equilibrada. Grafos Bipartidos Completos Balanceados. Educação Matemática. Proposta de Atividades. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This study aims to problematize the absence of the subject graph theory in high school. For this purpose, a proposal of activities involving basic concepts of equitable total coloring of complete balanced bipartite graphs was adopted as methodology. Graph theory is a field of discrete mathematics that deals with the relationship among the objects of a given set. The methodology of teaching-learning-evaluation of mathematics through problem solving substantiates theoretically this study. According to this methodology, teaching, learning and evaluation are elements that must occur simultaneously in Mathematics classes. The questions posed were contextualized according to situations that may be experienced by high school students as well as any other ordinary citizen who is not necessarily a mathematician. Such questions involve distribution of tasks and scheduling of activities. The conclusions were that the work contributed not only for mathematics education, for the innovative proposal for high school, but also for the scientific development of the theme due to the submission of a peper on the subject to a conference.
Keywords: Equitable Total Coloring. Bipartite Complete Balanced Graphs. Mathematics Education. Proposal of activities. Problem Solving.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS E QUADROS

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, nota-se que o desenvolvimento da matemática geralmente ocorre quando há um problema real que precisa ser resolvido para o qual não há uma solução conhecida. Isso ocorreu em diversos ramos desta área do conhecimento e a teoria dos grafos[1] é um deles.

Em 1736, o matemático Leonhard Euler[2] solucionou o problema considerado o precursor da teoria dos grafos: o problema das sete pontes. A cidade de Königsberg era composta por quatro partes divididas pelo rio Pregel e havia sete pontes ligando as diferentes partes da cidade. O problema consistia em determinar a possibilidade ou não de atravessar as sete pontes uma única vez durante um passeio por Königsberg. A ideia de Euler foi modelar o problema com pontos representando as partes da cidade e linhas representando cada uma das pontes, de modo que se dois pontos estivessem ligados por uma linha, então havia uma ponte ligando tais partes da cidade, conforme ilustra a figura abaixo. Euler concluiu que não era possível realizar o trajeto atravessando uma única vez cada ponte (BONDY; MURTY, 2008)

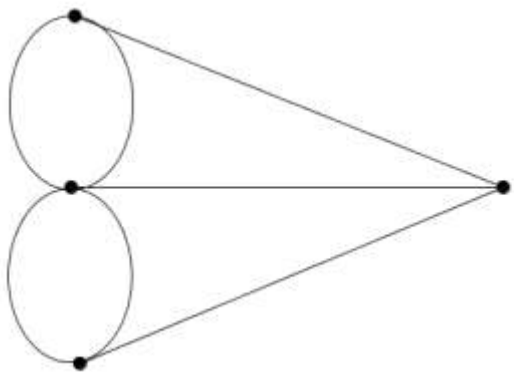


Figura 1 - Modelagem de Euler para pensar o problema

A relação da resolução deste problema com a educação matemática é uma relação de oposição, pois o que tende a ocorrer em sala de aula é que os professores apresentem os

[1] Teoria dos grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os elementos de um dado conjunto, usando, para isso, uma estrutura chamada de grafo, que consiste basicamente de um par ordenado composto por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, conforme será detalhado posteriormente.

[2] Leonhard Euler (1707 – 1783) foi um eminente matemático do século XVIII. Nascido na cidade suíça de Basel, influenciou fortemente a matemática moderna. O matemático foi aluno de Jean Bernoulli e teve seu talento reconhecido pelo mesmo. "Em 1727 Euler se transferiu para São Petersburgo, capital russa, onde assumiu um posto na Academia de Ciências Imperial. Em 1741, a convite de Frederico da Prússia, aceitou um emprego na academia de Berlim. Viveu e trabalhou em Berlim até 1766, quando voltou para São Petersburgo" (MOL, 2013).

resultados de matemática já solucionados e consolidados por outros, sem proporcionar aos seus alunos a percepção de que resolver um problema em matemática que ainda não tenha sido solucionado é uma tarefa árdua. Aspectos históricos, por exemplo, de como se chegou às conclusões expostas em sala tendem a ser ignoradas ou pouco abordadas.

Indo de encontro a este tipo de prática, Onuchic e Allevato (2011) defendem uma metodologia de ensino de Matemática que não seja pautada na exposição de conteúdos, e sim na resolução de problemas pelos próprios discentes para que os mesmos se apropriem dos conteúdos de forma significativa. Esta metodologia será aqui utilizada como fundamentação teórica para a atividade que será proposta para apresentar conteúdos de teoria dos grafos a alunos do ensino médio.

Conforme foi afirmado, resolver um problema de matemática para o qual não haja solução conhecida pode ser uma tarefa bastante desafiadora. Um problema em teoria dos grafos que revela isso é aquele cuja solução é conhecida como Teorema das Quatro Cores. A solução para o problema foi concluída apenas no ano de 1976, mais de um século após a sua formulação, que data do ano de 1852 e após algumas provas erradas terem sido publicadas. O aspecto positivo de o problema ter levado mais de cem anos para ser resolvido é que técnicas e ideias para solucioná-lo foram desenvolvidas, contribuindo para o avanço da matemática.

Como as definições de teoria dos grafos ainda não foram apresentadas, enunciaremos o problema de maneira contextualizada e equivalente ao problema original. Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de modo que regiões que façam fronteira sejam coloridos com cores diferentes? Observe o seguinte mapa da América do Sul.

Figura 2 - Mapa da América do Sul colorido com quatro cores[3]

A resposta à pergunta é quatro, justificando o nome dado ao teorema. A convenção de usar o nome cores deve-se, de fato, à coloração de mapas. Entretanto, qualquer conjunto finito pode ser o conjunto de cores a serem usadas na coloração. Como será exposto posteriormente, o conjunto que utilizaremos para colorir grafos é o conjunto dos primeiros números inteiros positivos.

Apesar de haver situações do cotidiano em que a teoria dos grafos pode ser aplicada, o tema não figura nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006). Este documento não apresenta o tema como um conteúdo de matemática a ser trabalhado neste nível de ensino. Tal conteúdo aparece, no entanto, na parte de temas complementares, quando se afirma que

> No ensino médio, o termo 'combinatória' está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver (...) Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade (BRASIL, 2006, p. 94).

Diante do contexto apresentado, propomos atividades para serem trabalhadas com alunos do ensino médio que os permita desenvolver habilidades matemáticas como

[3] Disponível em: http://www.uff.br/sintoniamatematica/grandestemaseproblemas/grandestemaseproblemas-html/audio-4-cores-br.html. Acesso em: 12 jul 2016.

percepção de padrões, generalização, descrição de algoritmos. As atividades envolverão problemas contextualizados e que possam fazer parte de fato do cotidiano dos alunos. Procurou-se também integrar outros conteúdos de matemática para que os alunos percebam que os conteúdos não são estanque, mas estão interligados.

O objetivo geral desta pesquisa é problematizar a ausência da teoria dos grafos na educação básica, sobretudo no ensino médio. Para tanto, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: (a) apresentar algumas definições importantes em teoria dos grafos para o problema que se pretende explorar com alunos da educação básica, a saber: coloração total equilibrada de grafos; (b) descrever e demonstrar um algoritmo para obter uma coloração total equilibrada de grafos bipartidos completos balanceados; (c) propor um roteiro de atividades para apresentar a teoria dos grafos a alunos de ensino médio, levando em consideração o que dizem os textos legais nacionais sobre o ensino de matemática e a resolução de problemas como metodologia para nortear a elaboração das atividades.

Com a finalidade de nortear o trabalho, elaborou-se a seguinte questão: como apresentar conteúdos de teoria dos grafos para alunos do ensino médio através de situações contextualizadas que contribuam com o desenvolvimento de habilidades matemáticas por parte dos discentes?

Além das *Considerações finais*, este trabalho possui quatro capítulos. No presente capítulo, *Introdução*, há uma exposição do tema, dos objetivos, da metodologia e da fundamentação teórica, assim como há a definição de uma questão norteadora para o trabalho.

No segundo capítulo, *Definições*, são apresentadas algumas definições importantes em teoria dos grafos que dizem respeito à coloração total equilibrada de grafos bipartidos completos balanceados. O propósito é familiarizar o leitor com conceitos que serão importantes no capítulo seguinte.

O terceiro capítulo, *Coloração total equilibrada de grafos bipartidos completos balanceados*, por sua vez, traz um algoritmo para obter coloração total equilibrada dos grafos referidos no título do capítulo por meio de uma matriz, cujos valores das entradas estão diretamente relacionados ao resto da divisão por um dado número, cuja escolha será devidamente explicada em detalhes.

No quarto capítulo, *Proposta de atividades*, propomos dois roteiros de atividades contextualizadas envolvendo coloração total equilibrada de grafos bipartidos completos balanceados que podem ser aplicados a alunos do ensino médio. Além disso, serão apontadas possíveis soluções para os problemas apresentados. Nesse capítulo será feita também uma exposição da metodologia de resolução de problemas e dos PCN, cujas características foram levadas em consideração quando a atividade foi elaborada.

No último capítulo, *Considerações finais*, a questão norteadora da pesquisa será retomada com a expectativa de ter colaborado com a discussão sobre a possibilidade de incluir teoria dos grafos no ensino médio para contribuir com o desenvolvimento de habilidades de matemática nos alunos que se encontrem nesta etapa do ensino.

2 DEFINIÇÕES

Um *grafo* $G=(V(G), E(G))$ é um par ordenado composto por um conjunto de vértices $V(G)$, ou simplesmente V e um conjunto de arestas $E(G)$, ou E. Serão aqui abordados somente *grafos finitos*, isto é, grafos em que o conjunto V é finito. Grafos são assim denominados pela possibilidade de representar seus vértices graficamente por pontos e suas arestas por linhas ligando alguns vértices. Um vértice e uma aresta são ditos *incidentes* se tal vértice é extremidade da aresta dada. Arestas que possuem um vértice incidente em comum são chamadas *adjacentes*, bem como dois vértices que incidem em uma mesma aresta são adjacentes. Para nós, o importante em um grafo são as relações entre vértices e arestas, isto é, dados dois vértices, nos interessa saber se há arestas ligando tais vértices ou não. Por isso, o diagrama que representa um grafo pode não ser único, como no exemplo que expomos a seguir (BONDY; MURTY, 2008).

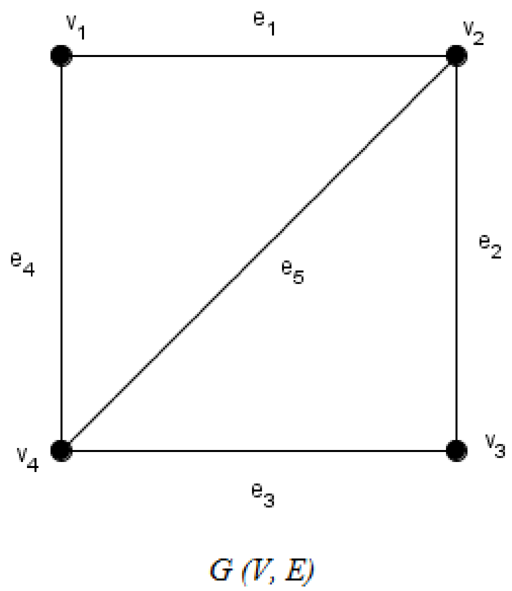
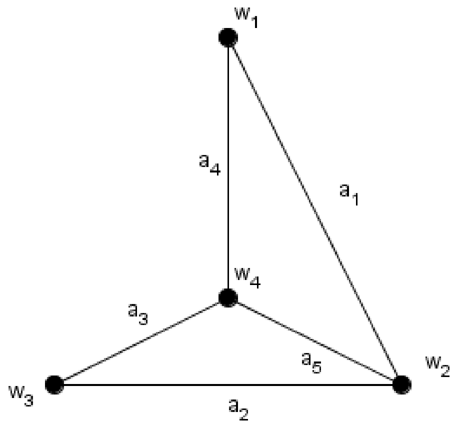


Figura 3 – Grafo *G (V, E)*

Note que os vértices v_1 e v_2 e a aresta e_1 são incidentes, por exemplo, bem como os vértices v_2 e v_3 e a aresta e_2. Tem-se que as arestas e_5 e e_4 são adjacentes por possuírem o vértice v_4 em comum, enquanto que as arestas e_1 e e_3 não possuem vértice em comum, não sendo, portanto, adjacentes. Observe esta outra representação diagramática de um grafo:



H (V', E')

Figura 4 – Mesmo grafo da figura anterior sendo representado por diagrama diferente

Observe que apesar de o desenho do grafo da Figura 4 ser diferente do que foi apresentado na Figura 3, a relação de incidência e adjacência entre os elementos é a mesma. Portanto, ambos os diagramas representam o mesmo grafo.

Alguns grafos, por possuírem determinadas características, formam famílias e recebem nomenclatura apropriada para classificá-los. Um *grafo simples*, por exemplo, é um grafo cujo conjunto de vértices é não-vazio e que não contém *arestas paralelas* ou *laços*, sendo arestas paralelas duas ou mais arestas que possuem os mesmos vértices como extremidades, e laço, uma aresta que tem como extremidades o mesmo vértice, conforme ilustra a figura a seguir nas partes (a) e (b), respectivamente.

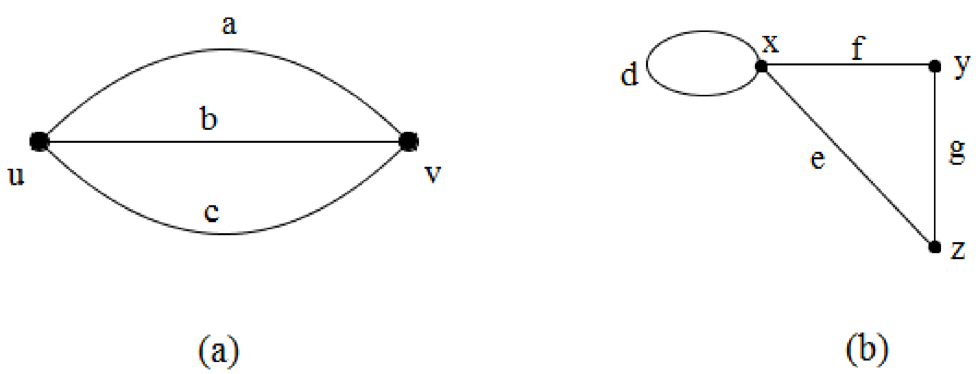


Figura 5 – (a) Grafo com arestas paralelas; e (b) Grafo com laço

Como pode ser notado, no grafo à esquerda, as arestas *a*, *b* e *c* possuem como extremidades os mesmos vértices (*u* e *v*), sendo, portanto, paralelas. Já a aresta *d* do grafo à direita (b), possui como extremidades o vértice *x*, logo, trata-se de um laço.

Apenas alguns grafos simples serão aqui analisados, a saber, os *grafos bipartidos*. Mais precisamente, os *grafos bipartidos completos balanceados*. Um grafo é dito bipartido se existe uma partição do seu conjunto de vértices em dois conjuntos *X* e *Y* tais que dados dois vértices quaisquer na mesma parte, estes não são adjacentes. Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido em que existem todas as arestas entre vértices que estão em partes diferentes da partição. Um grafo bipartido é dito balanceado se a cardinalidade de *X* é igual à cardinalidade de *Y*. Se há *p* elementos em cada parte da partição, dizemos que o grafo é bipartido *p*-balanceado. Neste caso, denotamos o grafo por $K_{2\ x\ p}$. Apresentamos abaixo uma representação diagramática para o grafo $K_{2\ x\ 3}$. Note que apenas os vértices foram devidamente nomeados, enquanto as arestas aparecem sem rótulos. Isso se deve ao fato de que, usualmente, uma aresta que possui como extremidades os vértices *x* e *y* é denotada por *xy* ou *yx*.

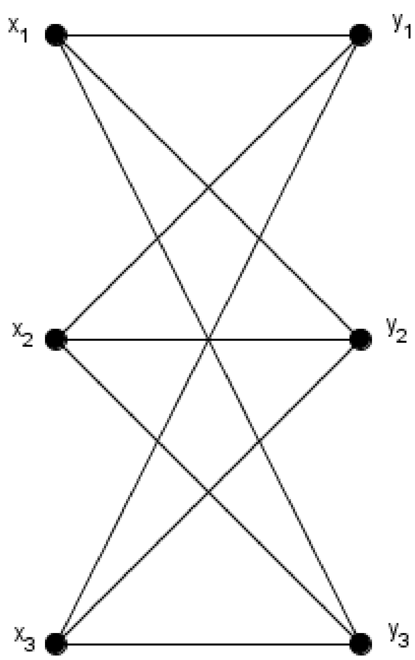


Figura 6 – Grafo bipartido completo 3-balanceado

Como os grafos aqui analisados serão bipartidos e as partes serão denotadas por X e Y, sendo os vértices das partes representados por x_i e y_j, respectivamente, adotaremos a convenção de que se uma aresta tiver como extremidades os vértices x_i e y_j, então, tal aresta será denotada por x_iy_j para todo $i = 1, 2, ..., p$ e para todo $j = 1, 2, ..., p$. Note que, conforme foi dito anteriormente, os grafos podem ter mais de uma representação gráfica. Entretanto, a disposição da maneira como foi apresentada auxilia a compreensão do algoritmo para coloração total equilibrada de tais grafos.

O *grau de um vértice* é o número de arestas que nele incidem, sendo que cada laço deve ser contado duas vezes na contagem do grau. O *grau máximo* dos vértices de um grafo G é referido como grau máximo do grafo e denotado por $\Delta(G)$. Observe que nos grafos aos quais nos ateremos, como cada vértice é adjacente a todos os vértices da outra parte e cada parte tem p vértices, concluímos que o grau de cada vértice é p. Logo, $\Delta(K_{2 \times p}) = p$.

Em teoria dos grafos, *coloração total* é a atribuição de cores a todos os vértices e arestas de um grafo. Se a coloração respeita às propriedades listadas na sequência, então ela é dita uma *coloração própria*. Dois vértices adjacentes devem receber cores diferentes, assim como duas arestas adjacentes. Além disso, uma aresta deve receber cor distinta das cores dos vértices que nela incidem. Resumidamente, pode-se afirmar que coloração total própria é a atribuição de cores aos elementos de um grafo de modo que elementos adjacentes e incidentes sejam atribuídos a cores diferentes. Em outras palavras, uma coloração total própria é uma aplicação $C: V \cup E \rightarrow S$ que respeita às propriedades citadas acima e em que V é o conjunto de vértices, E é o conjunto de arestas e S é um conjunto de k cores, que são chamadas de *classes de cor*.

Se a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor for igual a 0 ou 1, então a coloração total é dita k-equilibrada. O *número cromático total equilibrado* do grafo G, denotado por χ''_e, é o menor inteiro k para o qual G possui uma k-coloração total equilibrada. Neste caso, a coloração é dita simplesmente *coloração total equilibrada* do grafo. Ao longo do presente trabalho, serão consideradas apenas colorações totais equilibradas dos grafos bipartidos completos p-balanceados, cuja definição foi apresentada acima.

Em 1974, Bermond investigou a coloração total de todos os grafos completos *r*-partidos[4] *p*-balanceados. Posteriormente, Wang (2002) conjecturou que o número cromático total equilibrado de qualquer grafo é, no máximo, $\Delta + 2$, em que Δ é o grau máximo de um grafo. Motivado por estes resultados, determinamos um algoritmo para obter o número cromático total equilibrado dos grafos bipartidos *p*-balanceados completos, que possuem coloração total equilibrada com, no mínimo, $\Delta + 2$ cores.

[4] A definição de grafos *r*-partidos é análoga à definição de grafos bipartidos, pois tais grafos são aqueles que podem ter seus conjuntos de vértices particionados em *r* partes independentes, de modo que vértices na mesma parte não sejam adjacentes. Grafos *r*-partidos são, na verdade, uma generalização dos bipartidos.

3 COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA DE GRAFOS BIPARTIDOS COMPLETOS BALANCEADOS

Seja $K_{2\,x\,p}$ um grafo bipartido completo balanceado em que X e Y são as partes da partição do conjunto de vértices do grafo e sejam $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$. O algoritmo para obter coloração total equilibrada de tais grafos consiste na execução dos seguintes passos:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

uma matriz de ordem p em que a entrada a_{ij} é a cor atribuída à aresta que tem x_i e y_j como suas extremidades. A entrada a_{ij} deverá receber cor p, se $i + j - 1 \equiv 0$ mod(p) ou a cor $i + j - 1$ mod(p), caso contrário. Os vértices da parte X devem receber cor $p+1$ e os da parte Y, cor $p+2$.

Observe o exemplo a seguir, em que o grafo é o $K_{2\,x\,4}$:

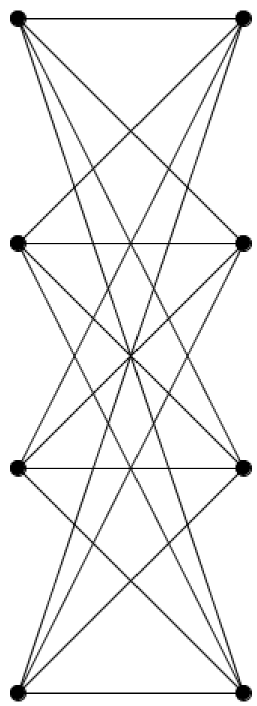


Figura 7 - Grafo $K_{2\,x\,4}$

Aplicando o algoritmo, obtemos a seguinte matriz de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, o grafo colorido total e equilibradamente é apresentado a seguir.

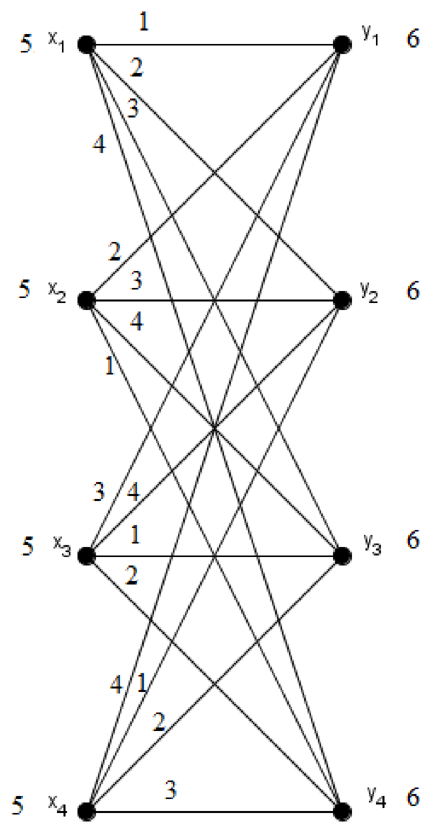


Figura 8 – Coloração total equilibrada de $K_{2 \times 4}$

Apesar de termos afirmado anteriormente que a representação gráfica de um grafo não é única, é conveniente, no caso de grafos r-partidos, dispor os vértices de cada parte em r colunas em que os índices de cada vértice fiquem em ordem crescente quando vistos de cima para baixo, como verifica-se na Figura 8.

Note que, como cada parte possui p vértices e, de cada vértice saem p arestas, temos, pelo princípio multiplicativo, que o total de arestas em tais grafos é dado por

$$\frac{p.2.p}{2} = p^2$$

Como há $2p$ vértices nos grafos sob análise, obtém-se que o número de elementos a serem coloridos é dado por $2p + p^2$.

Afirmação: Afirmamos que um grafo bipartido completo p-balanceado não possui coloração total equilibrada com $\Delta + 1$ (= p + 1) cores.

Demonstração: De fato, suponha, por contradição, que tais grafos possuem coloração total equilibrada com $\Delta + 1$ cores. Como o grau de cada vértice é p, é necessário usar p cores distintas para colorir as arestas que saem de tal vértice e uma ($p+1$)-ésima cor para colorir o vértice em questão. Como estamos supondo que há coloração com $\Delta + 1$ cores, isso implica que cada cor deve ser representada em todos os vértices, isto é, cada cor deve colorir ou um certo vértice ou uma aresta que tenha tal vértice como extremidade.

Se $p = 1$, então o grafo é composto por dois vértices ligados por uma aresta. Como os elementos tomados dois a dois são adjacentes ou incidentes neste caso, é necessário usar 3 cores diferentes para fazer a coloração total do grafo. Sendo assim, cada cor é usada uma vez e a coloração é equilibrada. Como $\Delta = 1$, então foram usadas $\Delta + 2$ cores.

Assuma, agora, que $p > 1$. Dividiremos a prova da afirmação em dois casos, de acordo com a paridade de p.

Caso 1: p é ímpar.

Suponha que existe uma cor que seja usada na coloração de uma quantidade ímpar de vértices, digamos, c. Então, sobrariam $2p – c$ vértices em que também precisam ser representados por tal cor. Entretanto, como a cor já foi utilizada em vértices, ela só pode ser usada em arestas. Como $2p – c$ é ímpar e cada aresta possui duas extremidades, se usássemos a cor em questão na coloração de arestas, pelo menos um vértice ficaria sem representação de tal cor. Logo, concluímos que a cor deve ser usada uma quantidade par de vezes em vértices. Suponha que existam cores $d_1, d_2, ..., d_e$ que sejam usadas, respectivamente, $b_1, b_2, ..., b_f$ vezes em X (sem perda de generalidade), em que b_i é par para todo i. Sobrariam, portanto, $p – (b_1 + b_2 + ... + b_f)$ vértices em X. Como esse número é ímpar e não há cor que seja usada em uma quantidade ímpar de vértices, concluímos que não há cor que seja usada em uma quantidade ímpar ou par de vértices, o que é um absurdo. Portanto, grafos bipartidos completos p-balanceados com p sendo ímpar, não possuem coloração total equilibrada com $\Delta + 1$ cores.

Caso 2: p é par

Seja p par e suponha, por contradição, que há coloração total equilibrada com $\Delta + 1$ cores. Se uma determinada cor fosse usada na coloração de uma quantidade ímpar (digamos, g) de vértices da parte X, sem perda de generalidade, sobrariam $2p - g$ vértices no grafo. Como a cor em questão só poderia ser usada agora em arestas, como cada aresta tem duas extremidades e $2p - g$ é ímpar, pelo menos um vértice ficaria sem representação da cor dada. Concluímos, portanto, que se há coloração total equilibrada com $\Delta + 1$ cores, as cores usadas em vértices colorem uma quantidade par de vértices.

Se uma certa cor for usada nos p vértices de X, sem perda de generalidade, ela não poderia ser representada nos vértices de Y, pois todas as arestas do grafo possuem uma extremidade na parte cujos vértices já teriam sido coloridos (pelo fato de o grafo ser bipartido) e pois os vértices de Y são adjacentes aos de X. Então, supondo que uma cor seja usada uma quantidade par, digamos h, de vezes nos vértices da parte X, sem perda de generalidade, temos que $h < p$. Sendo assim, sobrariam $p - h$ vértices em X e p vértices em Y para serem representados pela dada cor. Como cada aresta tem uma extremidade em X e outra em Y, conseguiríamos colorir $p - h$ arestas que ligam os vértices que sobraram em X a outros $p - h$ vértices em Y. Sobrariam, portanto, $p - (p - h) = h$ vértices em Y sem serem representados pela cor em questão, o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que todo grafo bipartido completo p-balanceado não possui coloração total equilibrada com $\Delta + 1$ cores, como desejado.

■

Afirmação: Afirmamos que o algoritmo apresentado no início do capítulo descreve uma coloração total equilibrada de $K_{2 \times p}$.

Demonstração: A fim de provar a afirmação, precisamos mostrar que elementos adjacentes e incidentes são atribuídos a cores diferentes e que a diferença entre as cardinalidades de duas classes de cor distintas é no máximo 1.

De fato, os vértices de X são não adjacentes entre si, assim como os vértices de Y, já que o grafo é bipartido. Como a cardinalidade de cada um destes conjuntos é p, isso significa que as cores $p + 1$ e $p + 2$ são usadas exatamente p vezes cada. Já que tais cores não são usadas na coloração de arestas, conclui-se que nenhuma aresta recebe a mesma cor que as suas extremidades.

Note que duas arestas $x_r y_s$ e $x_t y_u$ são adjacentes se $r = t$ ou se $s = u$, o que implica que suas entradas na matriz A estão na mesma linha ou na mesma coluna.

Sejam $x_r y_s$ e $x_t y_u$ duas arestas adjacentes e assuma, sem perda de generalidade, que $r = t$. Temos, portanto, que $s \neq u$ (caso contrário, as arestas seriam a mesma). Afirmamos que estas arestas recebem cores diferentes. Note que $1 \leq r = t \leq p$, $1 \leq s \leq p$ e $1 \leq u \leq p$, pois $x_r \in \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ e $y_s, y_u \in \{y_1, y_2, ..., y_p\}$. Portanto,

$$1 \leq s \leq p \text{ e } -p \leq -u \leq -1 \Rightarrow 1-p \leq s-u \leq p-1 \text{ (I)}$$

- Se $r + s - 1 \equiv 0 \text{ mod}(p)$ e $r + t \equiv 0 \text{ mod}(p)$, então $r + s - 1 \equiv r + u - 1 \text{ mod}(p)$, implicando que $s \equiv u \text{ mod}(p)$. A prova deste caso será concluída posteriormente pois outro caso requer a mesma argumentação.
- Assuma, agora, sem perda de generalidade, que $r + s - 1 \equiv 0 \text{ mod}(p)$ e que $r + u - 1 \not\equiv 0 \text{ mod}(p)$ (o caso em que $r + s - 1 \not\equiv 0 \text{ mod}(p)$ e $r + u - 1 \equiv 0 \text{ mod}(p)$ é análogo). Então $x_r y_s$ é atribuído à cor p e $x_r y_u$ é atribuído à cor $r + u - 1 \text{ mod}(p)$, que não é p, uma vez que o resto da divisão de um inteiro por p é estritamente menor que p. Logo, neste caso, as arestas (que são adjacentes) recebem cor diferente.
- Se $r + s - 1 \not\equiv 0 \text{ mod}(p)$ e $r + u - 1 \not\equiv 0 \text{ mod}(p)$, então as arestas são atribuídas respectivamente às cores $r + s - 1 \text{ mod}(p)$ e $r + u - 1 \text{ mod}(p)$. A continuação da argumentação aqui feita também é válida para o caso que não havíamos concluído. Suponha, por contradição, que as arestas recebem a mesma cor, isto é, suponha que $r + s - 1 \equiv r + u - 1 \text{ mod}(p)$. Teríamos, então

$$r + s - 1 \equiv r + u - 1 \text{ mod}(p) \Rightarrow s \equiv u \Rightarrow s - u \equiv 0 \text{ mod}(p)$$

Isto implica que $s - u = qp$ para algum $q \in \mathbb{Z}$ (II). Por (I) e (II), obtemos que $1 - p \leq qp \leq p - 1$. Temos:

$$qp \leq p-1 \Rightarrow q \leq 1 - \frac{1}{p} \text{ (já que } p \neq 0)$$

$$\Rightarrow q \leq 1 - \frac{1}{p} < 1 \text{ (já que } \frac{-1}{p} < 0)$$

$$\Rightarrow q < 1$$

Também,

$$qp \geq 1-p \Rightarrow q \geq \frac{1}{p} - 1 \text{ (já que } p \neq 0)$$

$$\Rightarrow q \geq \frac{1}{p} - 1 > -1 \text{ (já que } \frac{1}{p} > 0)$$

$$\Rightarrow q > -1$$

Concluímos, portanto, que $q = 0$. Assim, $s - u = 0$, ou seja, $s = u$, o que contradiz nossa suposição inicial que $s \neq u$.

O resto da divisão de $i + j - 1$ por p é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, ..., p - 1\}$. Cada entrada da matriz A representa a cor que uma aresta de $K_{2 \times p}$ recebe e está associada ao resto da divisão de $i + j - 1$ por p, exceto se o resto for 0, em cujo caso atribui-se a cor p à respectiva aresta. Portanto, o algoritmo descrito no início deste capítulo usa as cores do conjunto $\{1, 2, 3, ..., p\}$ para colorir as arestas de $K_{2 \times p}$. O que provamos acima mostra que cada cor aparece no máximo uma vez em uma dada linha ou coluna de A.

Suponha que haja uma cor do conjunto $\{1, 2, 3, ..., p\}$ que não aparece em uma dada linha (ou coluna, respectivamente). Isto significa que haveria $p - 1$ elementos em tal linha (coluna), o que não é verdade, uma vez que cada linha (coluna) tem tantas entradas quantos elementos há no conjunto $\{1, 2, 3, ..., p\}$ (e $p - 1 < p$). Logo, cada elemento de $\{1, 2, 3, ..., p\}$ aparece precisamente uma vez em cada linha (coluna). Como A tem p linhas e cada cor do conjunto de cores aparece exatamente uma vez por coluna, concluímos que cada uma destas p cores são usadas p vezes na coloração de arestas de $K_{p \times 2}$. As cores $p + 1$ e $p + 2$ são usadas exatamente p vezes cada na coloração dos vértices do grafo. Isto prova que a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor é igual a 0 e conclui a prova de que a coloração total apresentada no início do capítulo é, de fato, equilibrada, como desejado.

$\blacksquare$

4 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Antes de passarmos às atividades propriamente, é importante apontar aspectos metodológicos que foram levados em consideração quando as mesmas foram elaboradas, bem como destacar o respaldo legal para a elaboração da atividade, isto é, trazer elementos dos documentos oficiais regentes da educação nacional que corroborem a possibilidade de se realizar uma atividade sobre teoria dos grafos no ensino médio.

4.1 Metodologia de resolução de problemas

O ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas é uma metodologia segundo a qual os três elementos ocorrem simultaneamente, pois à medida em que o aluno aprende, o professor ensina e ambos avaliam o processo, de acordo com Onuuchic e Allevato (2011). Consideramos que o papel do professor é o de orientar os alunos na construção e apropriação dos conteúdos. Neste sentido, o professor deve apresentar um problema para a turma e permitir que os alunos trabalhem em grupo na resolução da pergunta. Em seguida, ele deve usar as considerações feitas pelos alunos para chegarem à resposta para formalizar os conceitos que ele pretendia apresentar aos mesmos. O termo problema aqui é entendido como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

É importante destacar que procura-se com esta metodologia ensinar matemática *através* da resolução de problemas. Isso significa que o foco está no ensino da disciplina e a apresentação de situações problema para que os alunos as resolvam. Onuchic e Allevato (2011) relatam a existência de grupos que defendem a metodologia da resolução de problemas com abordagens diferentes desta, a saber: ensinar *sobre* resolução de problemas e ensinar matemática *para* resolver problemas. Em ambos os casos o foco está nos problemas em si. Uma pergunta que se faz relevante no momento é: uma vez que a matemática será ensinada *através* da resolução de problemas, como resolvê-los? Para tal pergunta, o matemático George Polya propõe uma resposta em seu livro traduzido para o português com o título de "A arte de resolver problemas" (1995).

O autor apresenta quatro passos que devem ser aplicados na resolução de problemas. A princípio, pode-se pensar que a instrumentalização do processo é castradora assim como é a mera exposição do conhecimento mencionada anteriormente. Entretanto, os passos são genéricos e servem para nortear o aluno. Os passos consistem em:

(1) compreender o problema;

(2) estabelecer relações entre diferentes itens para definir um plano;

(3) execução do plano proposto e; por fim,

(4) analisar a resposta a fim de identificar se ela atende satisfatoriamente o que foi perguntado (POLYA, 1995).

Onuchic e Allevato (2011) propõem um roteiro a ser adotado quando da utilização da metodologia ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas. Tal roteiro consiste em:

(1) preparar o problema;

(2) ler individualmente;

(3) leitura coletiva;

(4) observar e incentivar;

(5) registrar as respostas dos alunos;

(6) realizar uma plenária;

(7) buscar um consenso.

Um aspecto interessante desta proposta é que ora a responsabilidade é do professor (momento de escolha da situação problema, por exemplo), ora os alunos são responsáveis pela sua própria aprendizagem e dos colegas (etapa em que os discentes compartilham suas soluções com a turma). Assim, a idéia do professor que transmite conhecimento é combatida e os alunos deixam de ser meramente passivos no seu próprio processo de aprendizagem. Por outro lado, a limitação de ambas as propostas é que uma vez proposto um problema, os alunos podem não possuir conhecimentos prévios necessários para responder a questão. Em um processo complexo como a educação há variáveis sobre as quais o professor não tem controle (falta de interesse dos alunos ou de cooperação por parte dos mesmos), o que poderia dificultar a adoção da Resolução de Problemas como metodologia em aula. Apesar das limitações, deve-se levar em conta o esforço louvável de dar aos alunos mais autonomia.

A metodologia aqui exposta é corroborada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), pois este documento produzido pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) aborda de maneira geral os conteúdos que devem ser trabalhados na educação básica (ensinos Fundamental e Médio) e a forma como os mesmos devem ser trabalhados, afirmando que a resolução de problemas é de grande relevância especialmente na matemática.

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p. 52).

A Resolução de Problemas visa mostrar ao aluno a importância da construção do conhecimento matemático através de contextos práticos do dia-a-dia sempre que possível. Logo, as fórmulas e algoritmos devem ser enxergadas como ferramentas para agilizar o processo de obtenção de resposta e fruto de um processo de generalização.

4.2 Uma abordagem discreta sobre grafos nos textos legais brasileiros sobre educação

A Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (LDB) estabelece, quanto à educação básica, as finalidades de "desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores" (BRASIL, Lei nº 9394, art. 22). Os demais documentos produzidos pelo governo que abordam a educação são mais direcionados para aspectos metodológicos e de conteúdo específicos de cada disciplina, pois tratam das mesmas em si e das relações que podem e devem ser estabelecidas entre as mesmas, ficando a critério do professor determinar quais relações estabelecer.

Apesar de haver indicação para um trabalho inter e intradisciplinar, os documentos limitam os professores em relação aos temas que devem ser trabalhados, conforme corrobora a seguinte tabela:

Quadro 1 – Organização dos temas de matemática a serem trabalhados no ensino médio

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: *PCN + Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

Os números 1, 2 e 3 no quadro indicam, respectivamente, álgebra (números e funções), geometria e medidas, e análise de dados, temas centrais que devem ser trabalhados no ensino médio nas aulas de Matemática, de acordo com o os PCN +. A proposição deste quadro retira do professor parte de sua autonomia de, no contato com cada turma, determinar quais conteúdos trariam mais benefícios aos alunos se fossem trabalhados. Apesar disso, é dito nos PCN + que "essa distribuição dos temas pode variar em função do número de aulas e do projeto da escola para aprofundamento de temas ou inclusão de outros" (BRASIL, 2002, p. 128). Esta última afirmação torna possível o desenvolvimento de um trabalho sobre teoria dos grafos no ensino médio.

De modo geral, os documentos educacionais brasileiros aqui tratados dão pouca ênfase na matemática discreta. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirma-se que

> A maior parte dos conteúdos de Matemática do ensino médio está vinculada a modelos matemáticos de natureza contínua: os números reais e os espaços geométricos (reta, plano e espaço tridimensional). O estudo da geometria e das funções de variável real inserem-se nesse contexto, refletindo o papel fundamental do Cálculo (esse assunto é objeto de estudo na universidade) no desenvolvimento das aplicações da Matemática nas Ciências. No entanto, no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores – que têm uma Matemática Discreta no seu funcionamento – provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos (BRASIL 2006, p 94).

Isso revela que há uma demora da educação em acompanhar os avanços tecnológicos com inclusão de conteúdos demandados pelos computadores, já que como é reconhecido nas próprias Orientações Curriculares, a ênfase recai sobre conteúdos de matemática contínua. Por isso, uma proposta para o ensino médio que envolva um trabalho com grafos é inovadora e necessária.

4.3 Uma proposta de atividades envolvendo grafos para o ensino médio

Diante do que foi exposto até aqui, elaboramos uma roteiro de atividades para ser aplicado no ensino médio. Recomenda-se que a atividade seja aplicada em uma turma que já tenha aprendido matrizes e análise combinatória, pois, como uma das características propostas pelos textos legais brasileiros sobre educação é a intradisciplinaridade, duas questões requerem a utilização dos conhecimentos dos conteúdos acima citados. Nosso objetivo com isso é que os alunos percebam que conteúdos de uma mesma área do conhecimento possuem ligações. Recomenda-se ainda que as atividades sejam aplicadas na ordem em que são apresentadas, isto é, a ficha contendo o problema intitulado “Arrumando a casa” (cf. apêndice B) deve ser proposta antes da ficha que contém o problema “Vista de prova” (cf. apêndice C), porque as atividades foram elaboradas pensando-se em um nível de dificuldade crescente. Sendo assim, apresentar um problema com questões mais difíceis aos alunos primeiro poderia desestimulá-los caso eles apresentassem dificuldades. Uma última recomendação é que o docente utilize o plano de aula aqui apresentado (cf. apêndice A). De acordo com tal plano de aula, os alunos devem ser divididos em trios, pois pensamos que alunos com mais facilidade podem auxiliar os demais colegas, sem, no entanto, dar a resposta diretamente. Isso contribui para que o professor foque nos alunos com mais dificuldade e permite que os discentes com mais facilidade no assunto fixem os conceitos e procedimentos ao compartilhar o conhecimento que possuem com os demais.

A atividade deve ser aplicada após uma aula em que o professor apresente as definições básicas de grafos que constam no capítulo 2 do presente texto. Nesta aula que antecede a aplicação das atividades, o docente deve ainda explicar o algoritmo para obter uma coloração total equilibrada dos grafos bipartidos completos balanceados, exposto no capítulo 3 deste texto. Em ambos os casos (explicação dos conceitos de teoria dos grafos e da coloração), o professor deve priorizar o entendimento dos alunos, e não se preocupar tanto com rigor matemático mais próprio do nível superior de ensino. Sempre que possível, devem ser utilizadas imagens de grafos diferentes para explicar as definições ou para exemplificá-las.

A ficha de atividades 1 apresenta a seguinte situação-problema: os pais de Ana, Bruno e Carla sempre dividem as tarefas domésticas entre os filhos para que eles tenham consciência da importância de manter a casa limpa e organizada. Como algumas tarefas são mais complicadas do que outras, eles se organizam de modo que todos os dias, cada um deles faça exatamente uma tarefa delegada pelos pais. O pai deles, que é matemático, teve a ideia de modelar a distribuição de tarefas segundo o grafo bipartido abaixo:

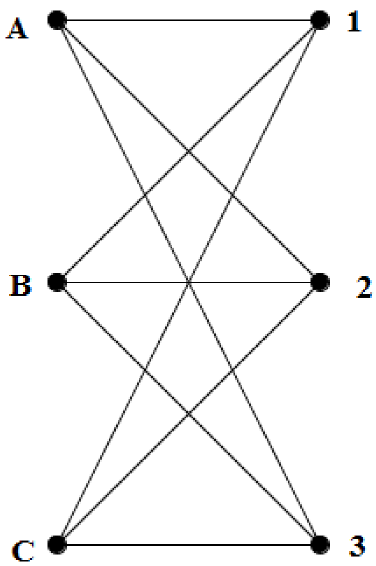


Figura 9 – Modelo para a atividade 1

O objetivo principal deste problema é que os alunos forneçam uma coloração total equilibrada do grafo apresentado na Figura 9. Entretanto, considerou-se que elaborar perguntas um pouco mais simples levaria os alunos a construir o entendimento desta questão que poderia ser considerada mais complexa por eles. Por isso, a respeito do grafo da Figura 9, demos as seguintes explicações: os vértices A, B e C representam a letra inicial do nome das crianças e os vértices 1, 2 e 3 representam as tarefas a serem realizadas, que são, respectivamente: lavar o banheiro, lavar louça e arrumar a sala.

A partir disso, solicitamos que os alunos respondam às seguintes questões a fim de ajudar as crianças do problema, Ana, Bruno e Carla, a se organizarem pelos próximos três dias na divisão de tarefas:

a. Forneça uma coloração com o menor número de cores possível somente para os vértices.

Com essa questão, esperamos que os alunos percebam que os vértices da mesma parte não são adjacentes e, por isso, podem receber a mesma cor. Assim, pode-se utilizar somente uma cor para os vértices A, B e C e uma cor para os vértices 1, 2 e 3, totalizando o número mínimo de duas cores.

b. Forneça uma coloração com o menor número de cores possível somente para as arestas.

Pretende-se que os educandos percebam que o grau de cada vértice é 3, sendo este o número com o qual eles devem tentar colorir as arestas do grafo. Como este é um grafo pequeno, ainda que os alunos possam apresentar alguma dificuldade inicial, eles devem ser capazes de obter êxito ao final de algumas poucas tentativas.

c. Forneça uma coloração total equilibrada para o grafo com o menor número de cores possível.

Aqui o objetivo é que os alunos apliquem o conhecimento adquirido em aula anterior sobre algoritmo para coloração de grafos bipartidos completos balanceados e sejam capazes de reproduzir o raciocínio para o grafo apresentado na Figura 9.

d. Com base na sua resposta para o item (c), determine uma maneira como as crianças podem dividir as tarefas pelos próximos três dias respeitando a regra de que cada uma delas faça exatamente uma atividade em cada dia.

Os discentes devem ser capazes de perceber que a resposta dada ao item (c) serve de base para responder a esta questão, no sentido de que as crianças são identificadas por uma cor e as tarefas por outra. Com relação à coloração das arestas, observamos o seguinte: de acordo com o algoritmo apresentado no capítulo 3, uma cor colore as arestas que ligam os vértices *A* e 1, *B* e 3, *C* e 2. Isso significa que no primeiro dia, por exemplo, Ana deve lavar o banheiro, Bruno deve arrumar a sala e Carla deve lavar a louça. Outra cor liga os vértices *A* e 2, *B* e 1, *C* e 3. Por fim, uma terceira cor liga os vértices *A* e 3, *B* e 2, *C* e 1. Para obter a distribuição de tarefas entre as crianças no segundo e terceiro dias deve-se proceder de maneira análoga ao que foi feito para o primeiro dia.

A situação-problema da ficha de atividades 2 é a seguinte: em uma escola, após as avaliações bimestrais, os alunos tem o direito de solicitar vista de provas, que devem ser agendadas com os professores. Suponha que quatro alunos tenham solicitado vista de prova a quatro professores. Como cada professor só pode receber um aluno por vez, todas as reuniões foram agendadas pelo professor de matemática, que modelou a situação usando um grafo, apresentado abaixo. Dito isto, pede-se que os alunos respondam às perguntas que seguem com base nessas informações e em seus conhecimentos sobre teoria dos grafos.

Novamente espera-se que os alunos sejam capazes de aplicar seus conhecimentos sobre coloração total equilibrada do seguinte grafo:

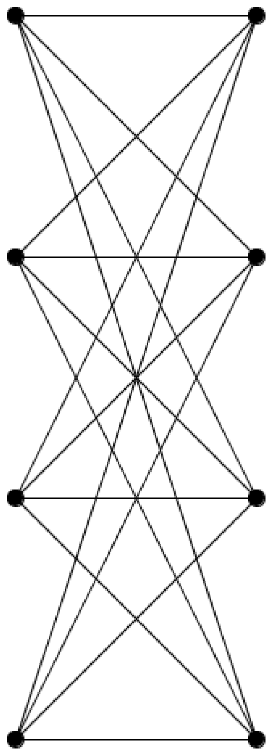


Figura 10 - Modelo para a atividade 2

a. Explique o que representam os vértices de cada parte, o que representam as arestas e o significado de duas arestas adjacentes no problema.

Como foi dito anteriormente, o nível de dificuldade dos itens é crescente. Dessa vez, não rotulamos os vértices do grafo, mas esperamos que os alunos percebam que os vértices de uma parte representam os professores, os vértices de outra parte representam os alunos e a ligação de vértices por meio de arestas indica que o professor e o aluno devem encontrar-se para realização de vista de prova.

b. Utilizando seus conhecimentos de análise combinatória, determine o número de arestas que o grafo possui.

Os documentos legais brasileiros sobre educação reforçam que o conhecimento não é estanque, devendo o professor ser o responsável por estabelecer conexões entre conteúdos diferentes da disciplina que leciona. No caso deste item, o aluno deve perceber que o grau de cada vértice é igual a 4 e, como há 8 vértices, pelo princípio multiplicativo teríamos, a princípio, 32 arestas. Entretanto, como cada aresta possui duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes, devendo o resultado parcial ser dividido por dois para obter o resultado final. Sendo assim, o grafo possui 16 arestas.

c. Apresente a coloração total equilibrada do grafo do item (a) de acordo com o algoritmo visto em aula, indicando a matriz usada. Baseado nisso, determine o modo como os encontros entre alunos e professores podem ocorrer.

De acordo com o algoritmo apresentado no capítulo 3, utiliza-se uma matriz para determinar a cor dos vértices e das arestas. A matriz será usada no item (f). Portanto, o foco desta questão era que o aluno fosse capaz de solucionar o problema da marcação de vistas de provas através da coloração do grafo da Figura 10.

d. Quantos elementos foram coloridos ao todo? Qual o número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo? Qual o resto da divisão do número de elementos coloridos pelo número mínimo de cores necessárias?

e. O grafo que modela este problema é bipartido completo p-balanceado com $p = 4$. Refaça o item (d) para alguns valores diferentes de p. A que conclusão você chegou sobre o resto da divisão do número de elementos a serem coloridos no grafo pelo número mínimo de cores necessárias?

Os itens (d) e (e) estão relacionados. No primeiro, pede-se que seja realizada uma divisão com valor específico de p. No outro, pede-se uma generalização a partir da observação de alguns casos particulares. Uma habilidade importante a ser desenvolvida nos alunos através da matemática é a capacidade de conjecturar. Pelo fato de os alunos a quem estas atividades se destinam estarem no ensino médio, não se espera que os mesmos tenham conhecimento sobre indução. Apesar disso, essa questão pode se transformar em uma oportunidade para o professor explicar que este tipo de questão se resolve por um procedimento chamado de indução e explicar, em linhas gerais, o passo a passo.

f. Mostre que a matriz do item (c) é simétrica.

Na aula anterior sobre conceitos básicos de teoria dos grafos e sobre o algoritmo para coloração o professor deve explicar que a entrada a_{ij} na matriz A está relacionada com o resto da divisão de $i + j - 1$ por p. O aluno deve perceber que se A é simétrica, então A é igual a sua transposta ($A = A^t$). Então, devemos ter $a_{ij} = a_{ji}$, o que de fato ocorre, pois $i + j - 1 = j + i - 1$ pela comutatividade da soma.

Desafio: Pense em uma outra coloração total equilibrada para o grafo que modela matematicamente esta questão. Neste caso, temos que $p = 4$. Tente generalizar a coloração que você encontrou para o caso em que p é qualquer inteiro positivo.

Esta questão foi justamente proposta como desafio por ser a que consideramos mais difícil. Não se espera que uma aluno do ensino médio seja capaz de demonstrar com riqueza de detalhes e com rigor uma coloração para um grafo. No entanto, como o grafo desta questão possui um número pequeno de elementos a ser coloridos, acreditamos que haja alunos capazes de, ao menos, fornecer uma coloração diferente da que usa o algoritmo apresentado no capítulo 3. Mostramos, a seguir, um exemplo de coloração alternativa em que o grafo foi reproduzido quatro vezes e, em cada vez, foram desenhadas apenas as arestas que recebem mesma cor, conforme o número indicado abaixo de cada reprodução de parte do grafo. Para que a coloração seja total, é necessário ainda que os vértices da parte à esquerda recebam cor 5, por exemplo, e os da direita recebam cor 6. É fácil verificar que cada uma das seis cores é usada exatamente quatro vezes.

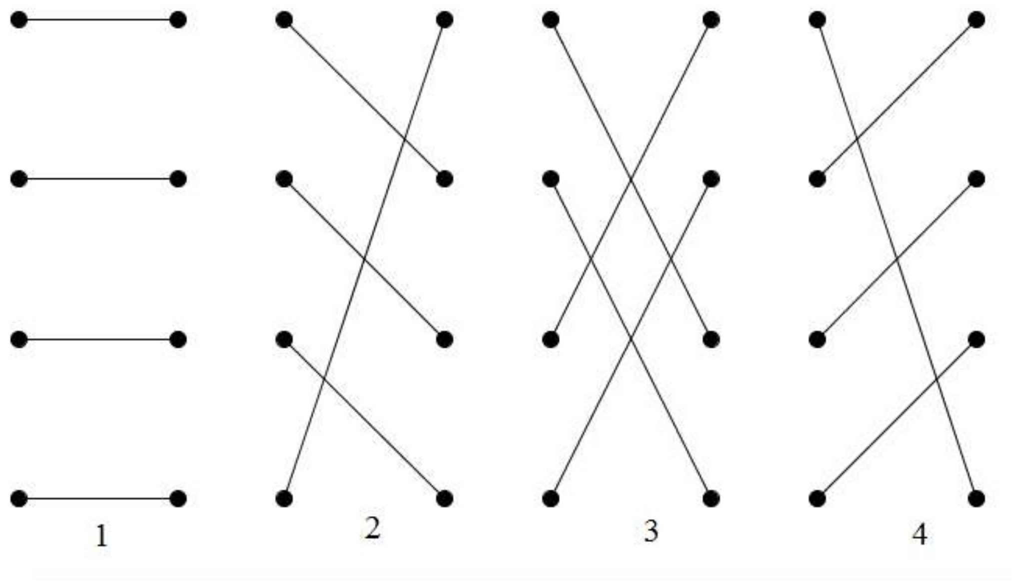


Figura 11 - Esquema alternativo de coloração

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema teoria dos grafos não figura nos documentos oficiais brasileiros sobre educação como conteúdo que deve necessariamente ser trabalhado, mas apenas como tema complementar. No entanto, as atividades aqui apresentadas são contextualizadas e podem ser usadas pelos alunos do ensino médio na distribuição de tarefas e no agendamento de reuniões. Além disso, as atividades contribuem para o desenvolvimento de habilidades matemáticas como a capacidade de conjecturar, testar possibilidades, validar ou refutar hipóteses, por exemplo. Acrescente-se o fato de que a intradisciplinaridade, tema preconizado pelos PCN, também foi abordada, pois conteúdos de análise combinatória e matrizes foram citados. Isso contribui para que o aluno perceba que uma melhor apropriação dos conceitos aprendidos na escola ocorre quando ele é capaz de relacionar assuntos da mesma área do conhecimento (intradisciplinaridade) ou de áreas do conhecimento distintas (interdisciplinaridade).

O presente trabalho trouxe algumas contribuições para a área da educação matemática por apresentar um conteúdo diferente para o ensino médio, mas também contribuiu com o desenvolvimento científico do tema, uma vez que um artigo, desenvolvido em colaboração com a Profa. Dra. Diana Sasaki (Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ), contendo coloração total equilibrada de grafos multipartidos (isto é, grafos em que o conjunto de vértices pode ser particionado em vários conjuntos independentes de vértices) completos (alguns balanceados e outros não) foi submetido para avaliação e posterior publicação no evento tradicional na área de grafos VII *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs* (VII Workshop Latino-Americano sobre Cliques em Grafos), a ser realizado em La Plata, Argentina, em 2016.

Deste modo, espera-se que o trabalho tenha contribuído para a discussão sobre a possibilidade de incluir teoria dos grafos no ensino médio, suscitando o desenvolvimento de novas pesquisas com novas propostas de atividades e relatos de aplicação das mesmas.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. Boletim de Educação Matemática, vol. 25, núm. 41, dezembro, 2011, pp. 73-98 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

BERMOND, Jean-Claude. *Nombre chromatique total du graphe r-parti complet*. J. London Math Soc. (1974) s2-9 (2): 279-285.

BONDY, John Adrian; MURTY, Uppaluri Siva Ramachandra. *Graduate texts in Mathematics Graph Theory*. New York: Springer, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), *Orientações Curriculares do Ensino Médio*: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, volume 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 10 jul 2016.

_______. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). *PCN + Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 10 jul 2016.

_______. Lei, n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

MOL, Rogério Santos. *Introdução à história da matemática.* Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

POLYA, George. Parte 1 – Em aula. In: *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

UFF. *O teorema das quatro cores*. Disponível em: http://www.uff.br/sintoniamatematica/grandestemaseproblemas/grandestemaseproblemas-html/audio-4-cores-br.html. Acesso em: 13 jul 2016.

WANG, Wei-Fan. *Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3*. Graphs Combin. 18 (2002), pp. 677-685.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PLANO DE AULA

Tema: Coloração total equilibrada de grafos bipartidos completos balanceados

Objetivos:

- Resolver problemas do cotidiano utilizando conceitos de teoria dos grafos;
- Popularizar a teoria dos grafos no ensino médio;
- Verificar a aprendizagem de alguns conceitos de teoria dos grafos.

Conteúdos:

- Grafos;
- Coloração total equilibrada de grafos;
- Grafos bipartidos completos balanceados.

Duração: Duas horas-aula (100 minutos).

Procedimentos:

- Dividir a turma em trios;
- Distribuir as fichas de atividades 1 e 2 para os alunos;
- Solicitar que os alunos leiam individualmente as questões propostas;
- Realizar leitura coletiva para sanar possíveis dúvidas que os alunos possam ter apresentado na etapa anterior;
- Solicitar aos alunos que os mesmos respondam às questões, observando-os e incentivando-os;
- Registrar as respostas dos alunos de maneira organizada no quadro branco;
- Realizar uma plenária para identificar erros e acertos registrados no quadro;
- Buscar um consenso.

Recursos:

- Quadro branco;
- Marcador para quadro branco;
- Ficha de atividades 1 e 2, que encontram-se disponíveis nos apêndices B e C do presente trabalho; e
- Lápis e borracha.

Verificação da aprendizagem: A verificação da aprendizagem dos alunos se dará por meio das conclusões a que os alunos exporão durante as etapas 5, 6 e 7 do roteiro indicado por Onuchic e Allevato, que consistem, respectivamente, no registro das respostas dos alunos, na realização de uma plenária e na busca por um consenso. Possíveis dificuldades e facilidades dos alunos na etapa final da atividade (consenso) servirão de base para a avaliação do desempenho do docente que ministrar a aula e indicarão necessidades de adaptações ou reformulações para uma aplicação posterior da atividade.

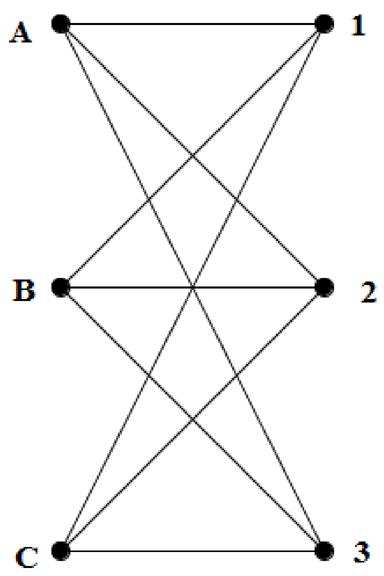
Bibliografia:

- BONDY, John Adrian; MURTY, Uppaluri Siva Ramachandra. *Graduate texts in Mathematics Graph Theory*. New York: Springer, 2008.

APÊNDICE B – FICHA DE ATIVIDADES 1

ARRUMANDO A CASA

1. Os pais de Ana, Bruno e Carla sempre dividem as tarefas domésticas entre os filhos para que eles tenham consciência da importância de manter a casa limpa e organizada. Como algumas tarefas são mais complicadas do que outras, eles se organizam de modo que todos os dias, cada um deles faça exatamente uma tarefa delegada pelos pais. O pai deles, que é matemático, teve a ideia de modelar a distribuição de tarefas segundo o grafo bipartido abaixo:



Os vértices A, B e C representam a letra inicial do nome das crianças e os vértices 1, 2 e 3 representam as tarefas a serem realizadas, que são, respectivamente: lavar o banheiro, lavar louça e arrumar a sala. Ajude Ana, Bruno e Carla a se organizarem pelos próximos três dias, respondendo às seguintes questões:

a. Forneça uma coloração com o menor número de cores possível somente para os vértices.

b. Forneça uma coloração com o menor número de cores possível somente para as arestas.

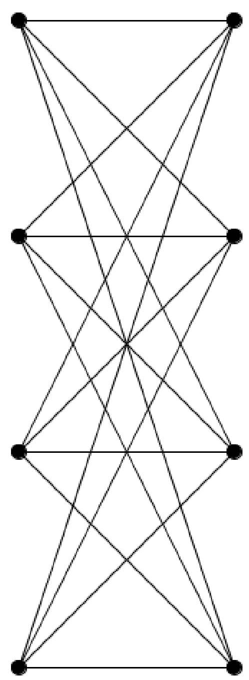
c. Forneça uma coloração total equilibrada para o grafo com o menor número de cores possível.

d. Com base na sua resposta para o item (c), determine uma maneira como as crianças podem dividir as tarefas pelos próximos três dias respeitando a regra de que cada uma delas faça exatamente uma atividade em cada dia.

APÊNDICE C – FICHA DE ATIVIDADES 2

VISTA DE PROVA

1. Em uma escola, após as avaliações bimestrais, os alunos tem o direito de solicitar vista de provas, que devem ser agendadas com os professores. Suponha que quatro alunos tenham solicitado vista de prova a quatro professores. Como cada professor só pode receber um aluno por vez, todas as reuniões foram agendadas pelo professor de matemática, que modelou a situação usando um grafo, apresentado abaixo. Com base nessas informações e em seus conhecimentos em teoria dos grafos, responda às perguntas que seguem:



a. Explique o que representam os vértices de cada parte, o que representam as arestas e o significado de duas arestas adjacentes no problema.

b. Utilizando seus conhecimentos de análise combinatória, determine o número de arestas que o grafo possui.

c. Apresente a coloração total equilibrada do grafo do item (a) de acordo com o algoritmo visto em aula, indicando a matriz usada. Baseado nisso, determine o modo como os encontros entre alunos e professores podem ocorrer.

d. Quantos elementos foram coloridos ao todo? Qual o número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo? Qual o resto da divisão do número de elementos coloridos pelo número mínimo de cores necessárias?

e. O grafo que modela este problema é bipartido completo p-balanceado com $p = 4$. Refaça o item (d) para alguns valores diferentes de p. A que conclusão você chegou sobre o resto da divisão do número de elementos a serem coloridos no grafo pelo número mínimo de cores necessárias?

f. Mostre que a matriz do item (c) é simétrica.

Desafio: Pense em uma outra coloração total equilibrada para o grafo que modela matematicamente esta questão. Neste caso, temos que $p = 4$. Tente generalizar a coloração que você encontrou para o caso em que p é qualquer inteiro positivo.