INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RODRIGO MARINHO DE SOUZA

O ESMAGADOR SOLITÁRIO NO ENSINO DA CONECTIVIDADE DE GRAFOS

NITERÓI
2017

RODRIGO MARINHO DE SOUZA

O ESMAGADOR SOLITÁRIO NO ENSINO DA CONECTIVIDADE DE GRAFOS

Monografia apresentada à Coordenação do Curso Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para aprovação na disciplina Monografia (GGT 00013).

Orientadora: Simone Dantas

Niterói

2017

RODRIGO MARINHO DE SOUZA

O ESMAGADOR SOLITÁRIO NO ENSINO DA CONECTIVIDADE DE GRAFOS

Monografia apresentada à Coordenação do Curso Graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para aprovação na disciplina Monografia (GGT 00013).

.

Aprovada em: / / .

Banca Examinadora

____

Prof. Simone Dantas - Orientadora

D.Sc. – Universidade Federal Fluminense

____

Prof. Diego de Souza Nicodemos - Membro

D.Sc. – Colégio Pedro II

____

Prof. Slobodan Tanushevski - Membro

D.Sc. – Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS:

Primeiramente, agradeço a Deus, não apenas pela oportunidade de obter este título, mas por todas as bênçãos que derrama sobre mim, tanto na vida acadêmica quanto na vida pessoal.

Agradeço à minha família, principalmente à minha irmã Rita Marinho pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos da UFF, pelo apoio, incentivo e pelas conversas no bloco H e nas escadas do antigo prédio no Valonguinho.

Agradeço também aos professores e demais funcionários. Em particular, aos professores Dirce, Freddy, Luiz, Maycol e Miriam.

Ofereço minha eterna gratidão à minha orientadora Simone Dantas, pela oportunidade de trabalhar na teoria de grafos, pelo meu primeiro artigo científico e por reconhecer minha dedicação ao projeto. Também ao professor Slobodan Tanushevski, pela fundamental colaboração no trabalho, por suas ideias, seus conselhos e suas conversas à beira da praia.

Por último, porém não menos importante, agradeço à CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

RESUMO:

Esta monografia tem o objetivo de propor atividades que envolvam o conceito de conectividade de grafos através do Clobber, que é um jogo sobre um grafo. Através deste jogo, os alunos são induzidos a chegarem a casos particulares de grandes resultados conhecidos no estudo do jogo, despertando o interesse investigativo e o poder de argumentação para justificar ideias próprias. Os resultados apresentados são inéditos, uma vez que atribuímos ao jogo um objetivo jamais pensado antes por pesquisadores ou educadores.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS:

1 – INTRODUÇÃO

A teoria de grafos iniciou-se em 1736, quando o matemático suíço Leonhard Euler modelou e resolveu o problema das “sete pontes de Königsberg”. Como o próprio nome diz, na antiga cidade prussiana de Königsberg, hoje a cidade russa de Kaliningrado, havia sete pontes que ligavam quatro bairros separados pelo rio Pregel, como na figura:

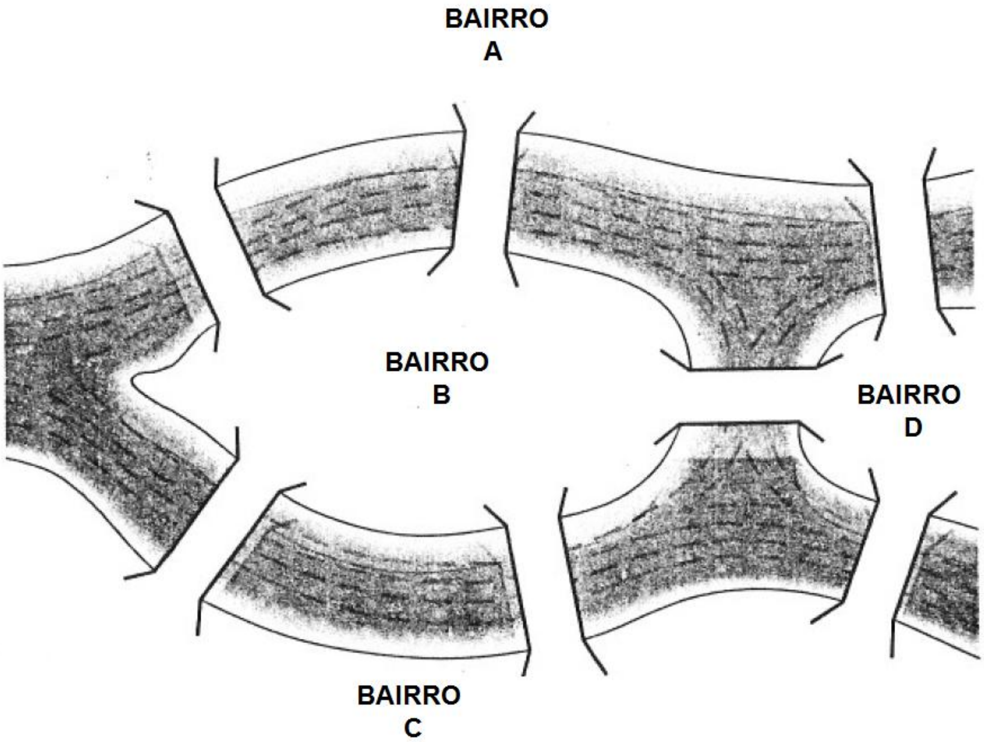


Figura 1: O rio Pregel dividindo a cidade de Königsberg em quatro bairros separados, A, B, C e D, ligados pelas sete pontes.

Alguns moradores, muito curiosos, perguntavam-se sobre a possibilidade de realizar um passeio, atravessando as sete pontes, sem ter que passar duas vezes por uma mesma ponte.

Os cidadãos de Königsberg tentaram traçar diversas rotas e nunca obtiveram sucesso. Euler também não conseguiu encontrar uma rota, mas mostrou que era impossível realizar tal feito.

Percebendo que os caminhos feitos nos interiores dos bairros eram irrelevantes, Euler produziu uma representação simplificada da planta da cidade, onde os bairros eram reduzidos a pontos e as pontes eram substituídas por linhas que ligavam alguns destes pontos, como na Figura 2.

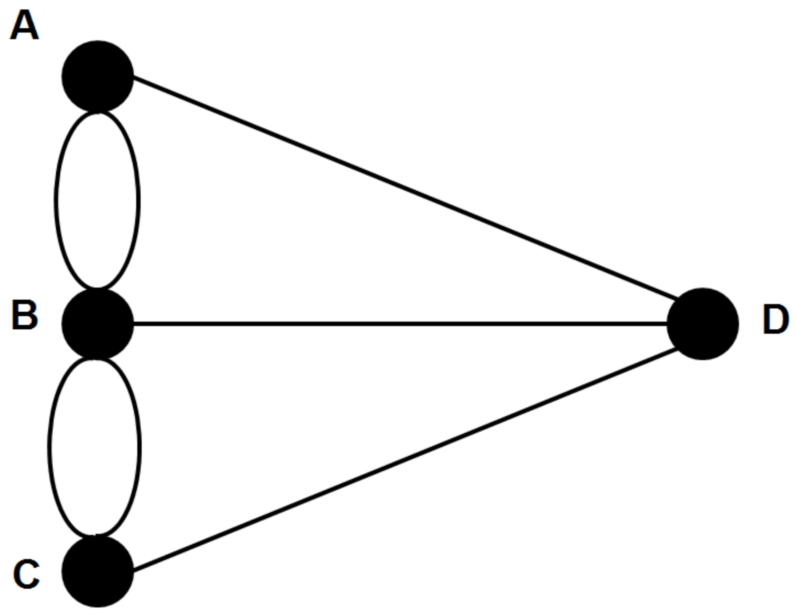


Figura 2: Representação simplificada da planta da cidade, feita por Euler.

A justificativa de Euler era a seguinte: para realizarmos tal jornada, um ponto deveria ser ligado por um número par de linhas, pois no meio da jornada, ao passar por um bairro, o passeante deve chegar por uma ponte e sair por outra, exceto quando o passeante começa ou termina sua jornada. Ao iniciar o passeio, o passeante deixa um bairro, precisando apenas de uma ponte para sair, e no final, chega a um bairro, precisando apenas de uma ponte para entrar. Se o passeio começa e termina em bairros diferentes, então esses dois bairros só podem ter um número ímpar de pontes. Porém, se o passeio começa e termina no mesmo bairro, tanto esse como todos os outros bairros devem possuir um número par de pontes.

Generalizando este argumento, Euler pôde concluir que para uma rede de pontes arbitrária, só é possível fazer um passeio deste tipo, atravessando uma única vez cada ponte, se todos os bairros tiverem um número par de pontes, ou exatamente dois bairros tiverem um número ímpar de pontes.

A representação simplificada da planta da cidade feita por Euler ficou conhecida como o primeiro grafo da história. Aos pontos (bairros), damos o nome de vértices, e às linhas, damos o nome de arestas. Assim, *grosso modo*, podemos dizer que um grafo é um conjunto de vértices e arestas. Além disso, em homenagem a Euler, um caminho (uma sequência de vértices adjacentes) que visita cada aresta uma única vez é chamado de *caminho euleriano*. Se um caminho euleriano começa e termina no mesmo vértice, este caminho é chamado *circuito euleriano*, e quando um grafo contém um circuito euleriano, dizemos que este grafo é um *grafo euleriano*.

Mais tarde em 1857, o matemático, físico e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton inventou um jogo que consistia em encontrar um percurso fechado que passasse por todos os vértices de um dodecaedro regular, de maneira que cada um deles fosse visitado uma única vez, o *jogo Icosiano*. Um caminho com tal propriedade é chamado de *caminho hamiltoniano*. Um caminho que começa e termina em um mesmo vértice, passando exatamente uma vez por cada vértice no interior do caminho, é chamado de *ciclo*. Se um ciclo contém todos os vértices do grafo, é chamado de *ciclo hamiltoniano*, e quando um grafo contém um ciclo hamiltoniano, dizemos que este grafo é um *grafo hamiltoniano*.

O ensino da teoria dos grafos na escola tem sido muito sugerido nas últimas décadas por pesquisadores na área de Educação Matemática. Muitas dessas pesquisas têm sido feitas com a proposta do ensino de grafos na escola, até mesmo através da modelagem de problemas cotidianos (veja [6, 8 e 14]).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, elaborados pela Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação (MEC), o ensino da matemática não deve ficar concentrado apenas na formalidade:

> [A Matemática] deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (Brasil, 1998, p. 40)

Tendo isso em mente, introduzimos o Clobber, ou Solitaire Clobber (Esmagador Solitário), que será formalizado mais a frente. O Clobber é um jogo jogado por apenas uma pessoa sobre um grafo, em que cada vértice possui uma pedra, preta ou branca, e em cada jogada uma pedra esmaga outra, de cor diferente, localizada em um vértice vizinho. A pedra esmagada é removida e substituída pela pedra que foi movida. O jogo acaba quando não há mais movimentos possíveis a serem feitos, isto é, quando nenhum dos vértices possui um vizinho com pedra de cor diferente.

Nos últimos anos, Dantas, Gravier e Pará têm realizado oficinas com o objetivo de apresentar conceitos e exemplos básicos da teoria de grafos através do Clobber. As atividades propostas nestas oficinas buscam despertar o raciocínio do público para a criação de estratégias que o leve ao menor número de pedras quando o jogo chega ao fim.

Nesta monografia, propomos atividades que abordam o conceito de conectividade de grafos através deste jogo, com o objetivo de induzir os alunos a chegarem a casos particulares de grandes resultados conhecidos no estudo do jogo, que não necessariamente buscam minimizar o número de pedras restantes. Essa investigação é feita colocando-os no lugar de um jogador e analisando as consequências das jogadas realizadas.

As atividades propostas são feitas de maneira a construir as ideias das demonstrações dos resultados na cabeça do jogador, tendo um caráter investigativo.

2 – GRAFOS E CONECTIVIDADE: O QUE SÃO E PARA QUÊ SERVEM?

Agora, vamos formalizar a definição de grafo, que foi apresentada na introdução. Um grafo $G = (V, E)$, ou simplesmente G, é um par onde $V := V(G)$ é um conjunto de vértices e $E = E(G)$ um conjunto de arestas, onde os elementos de E são pares de vértices não ordenados, isto é, $E = \{\{x, y\}: x, y \in V, x \neq y\}$. Podemos pensar que V é um conjunto de pontos e dois pontos x e y são ligados por uma linha se, e somente se, $\{x, y\} \in E$. Quando $\{x, y\}$ é uma aresta, dizemos que x e y são vizinhos e para isso, escrevemos $x \sim y$.

O conceito em que daremos maior foco será a conectividade de grafos. Dizemos que um grafo G é conexo quando dados dois vértices quaisquer x e y de G, existe uma sequência de vértices $x_0, x_1, \dots, x_k$ tal que $x_0 = x, x_k = y$, e $x_i \sim x_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq k - 1$, ou seja, quando existe um caminho de vértices vizinhos que liga x até y.

Estendendo este conceito e lembrando que $|A|$ representa a cardinalidade de um conjunto A, dizemos que um grafo é k-conexo quando $|G| > k$ e $G - X$ é conexo para qualquer $X \subseteq V(G)$ com $|X| < k$. Em outras palavras, um grafo é k-conexo quando permanece conexo ao tirarmos quaisquer $k - 1$ vértices desse. Uma outra maneira de definir este conceito é dizendo que um grafo é k-conexo quando dados dois vértices quaisquer x e y, existem k caminhos entre x e y que não se intersectam. A conectividade de um grafo G é definida por $k(G) = max\{k | G \text{ é } k\text{-conexo}\}$, isto é, o maior inteiro tal que G é k-conexo.

O conceito de conectividade está fortemente relacionado com a teoria dos problemas de fluxo de redes, podendo ser vista como uma importante medida da robustez de uma rede.

A teoria de grafos nos ajuda a modelar diversos problemas cotidianos. Um exemplo interessante é enxergar a internet como um grafo. Podemos pensar nas páginas da internet como vértices, e nos links entre elas como arestas. Como o conjunto de páginas é finito (mesmo que extremamente grande), podemos “ver” a internet toda por um grafo.

Uma maravilhosa aplicação desta modelagem é o *Page Rank* do Google, que avalia quantitativamente a importância de cada página da *web e as ordena* através do vetor estacionário de uma matriz estocástica. Essa matriz, que é chamada matriz de transição, atribui uma estatística de transição à cada aresta do grafo da internet. O *Page Rank* ordena os sites de maneira a priorizar páginas mais visitadas e com maior número de links que levam a elas, sendo essas relacionadas às palavras chaves submetidas quando alguém realiza uma pesquisa.

3 – O CLOBBER E A CORREDUTIBILIDADE

O jogo Clobber, ou Solitaire Clobber, introduzido por Demaine et al. em [9], é um jogo combinatório para apenas uma pessoa que é jogado em um grafo. Uma pedra, preta ou branca, é colocada em cada vértice do grafo. Um movimento no jogo consiste em pegar uma pedra e esmagar outra, de cor diferente, localizada em um vértice vizinho. A pedra esmagada é removida e substituída pela pedra que foi movida. Veja a figura:

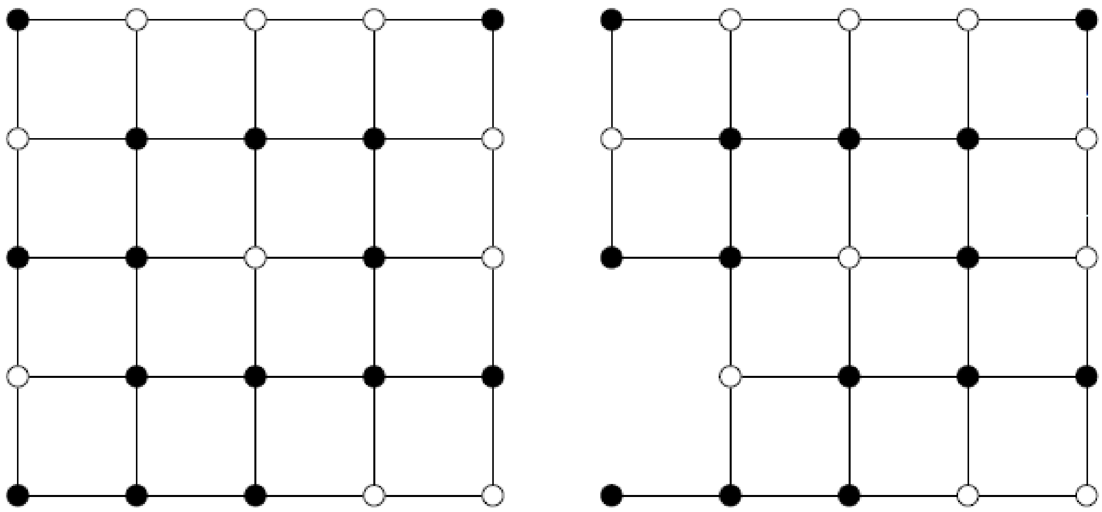


Figura 3: Um movimento do jogo feito na grade $\{0,1,2,3,4\}^2$.

O jogo tem sido intensamente investigado em relação ao problema de minimizar o número de pedras restantes no grafo quando não houver mais movimentos possíveis no jogo (veja [1, 2, 7, 10, 11, 12 e 13]). Dantas, Marinho e Tanushevski, em um artigo aceito no IX LAGOS (*IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*), fazem uma investigação sobre um aspecto diferente no jogo. Dados um grafo G, uma configuração não-monocromática de pedras em G, e um subconjunto $S \subseteq V(G)$, procura-se saber se é possível esvaziar S fazendo movimentos no jogo. Para isso, a seguinte definição é feita: Dizemos que um grafo G é k-corredutível se para qualquer configuração não monocromática de pedras em G, e para todo subconjunto $S \subseteq V(G)$, de cardinalidade no máximo k, existe um jogo do Clobber que esvazia S.

Além disso, definimos a corredutibilidade de um grafo G como sendo o maior inteiro k tal que G é k-corredutível.

É importante notar a forte relação do jogo com a definição de caminhos hamiltonianos. Quando jogamos o Clobber, a cada movimento, nosso grafo tem um vértice removido. Logo, se pensarmos nos caminhos que fazemos no grafo ao jogar, podemos perceber que nunca passamos pelo mesmo vértice mais de uma vez, assim como num caminho hamiltoniano.

Para esvaziarmos um subconjunto $S \subseteq V(G)$, por exemplo, muitas vezes buscamos caminhos hamiltonianos em S como estratégia para alcançarmos nosso objetivo, como na Figura 4, em que para esvaziarmos $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, basta notarmos que existe um caminho hamiltoniano entre v (vértice branco mais próximo de S) e w (vértice preto, fora de S, mais distante de v e mais próximo de S).

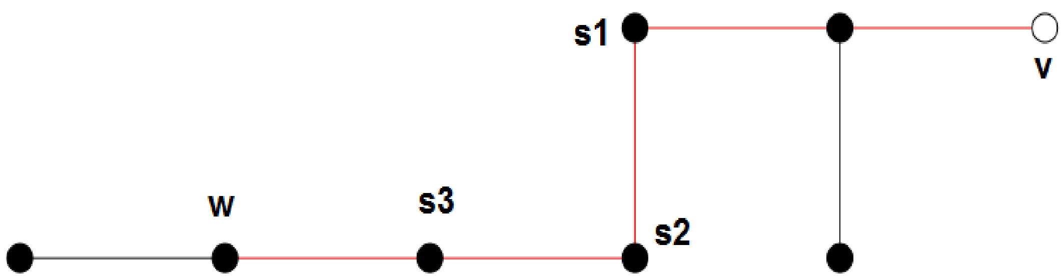


Figura 4: Caminho hamiltoniano entre v e w destacado em vermelho.

Dantas, Marinho e Tanushevski argumentam que a corredutibilidade de um grafo completo com n vértices é igual a $n - 2$. Ademais, é feito um estudo entre conectividade e corredutibilidade. Sem dificuldades, podemos ver que se um grafo é 1-corredutível então ele é 1-conexo. Sem surpresas, a recíproca também é verdadeira. Eles também mostram que se $k = 2$ e $|G| \geq k + 2$ então k-conectividade e k-corredutibilidade são equivalentes, enquanto para $k > 2$, k-corredutibilidade não implica k-conectividade.

4 – ATIVIDADES PROPOSTAS

Propomos duas atividades, nas quais o aluno, ao colocar-se no lugar do jogador, realiza tarefas investigativas alcançando alguns dos resultados obtidos por Dantas, Marinho e Tanushevski.

A primeira atividade tem o objetivo de fazer com que o aluno acredite que a corredutibilidade de um grafo completo com n vértices é igual a $n - 2$. Fazemos uma sequência de tarefas que tem o objetivo de induzir o aluno a concluir este fato quando n é igual a 4, isto é, a corredutibilidade do grafo completo com quatro vértices é igual a dois.

Na segunda atividade, queremos que o aluno acredite que se um grafo 2-conexo tem no mínimo quatro vértices, então ele é 2-corredutível, que é um caso particular do principal teorema provado no artigo.

4.3 – Plano de Aula

Tema: Entendendo a conectividade de grafos através do Clobber.

Objetivos:

- Introduzir grafos aos alunos;
- Introduzir o jogo Clobber;
- Apresentar a definição de conectividade de grafos;
- Obter resultados analíticos do jogo Clobber.

Conteúdos:

- Grafos;
- Conectividade;
- Jogo Clobber.

Duração: Quatro tempos de 50 minutos (Dois tempos para cada atividade).

Recursos: Lápis, borracha, folha de atividades, quadro, caneta (ou giz).

Metodologia:

- Primeiro momento: Introdução aos grafos e ao Clobber. (15 minutos)

  O professor deve, de maneira simples e informal, introduzir o conceito de grafos aos alunos, falar de sua importância e dar exemplos de aplicações no cotidiano. Em seguida, o professor deve apresentar o Clobber aos alunos e realizar algumas jogadas como exemplo, fazendo um desenho para cada etapa (cada movimento) no jogo.

- Segundo momento: Aplicação da primeira atividade. (85 minutos)

  O professor deve distribuir as folhas com a primeira atividade aos alunos, que sentarão em grupos, porém cada um escreverá sua própria resposta. Em seguida, o professor explicará a atividade e deixará os alunos respondendo as perguntas, escrevendo suas respostas através de desenhos, como nos exemplos feitos. Faltando 25 minutos, o professor discutirá no quadro os exercícios feitos, resolvendo-os junto com os alunos.

- Terceiro momento (provavelmente em outro dia): Apresentação dos grafos conexos e 2-conexos. (10minutos)

Neste momento, o professor deve explicar o que são grafos conexos através de exemplos e generalizar este conceito, apresentando grafos 2-conexos.

- Quarto momento: Aplicação da segunda atividade. (80 minutos)

O professor deve distribuir as folhas com a atividade aos alunos, que sentarão em grupos, porém cada um escreverá sua própria resposta. Em seguida, o professor explicará a atividade e deixará os alunos respondendo as perguntas, escrevendo suas respostas como na primeira atividade. Faltando 20 minutos, o professor discutirá no quadro os exercícios feitos, resolvendo-os junto com os alunos.

- Quinto momento: Conclusão. (10 minutos)

Agora, o professor deve ter uma conversa com os alunos, buscando saber o que acharam da atividade, do jogo e da teoria de grafos.

- Sexto momento: Avaliação.

O professor deve avaliar a atividade, buscando analisar o que funcionou bem, e o que não funcionou. Além disso, deve refletir sobre as dúvidas obtidas pelos alunos e também as facilidades, buscando melhorar a atividade e contribuindo com a educação matemática de forma experimental.

4.1 – Atividade 1: Encontrando a corredutibilidade de um grafo completo com 4 vértices

O jogo Clobber é jogado por uma pessoa em um grafo. Uma pedra, preta ou branca, é colocada em cada vértice do grafo. Um movimento no jogo consiste em pegar uma pedra e esmagar outra, de cor diferente, localizada em um vértice vizinho. A pedra esmagada é removida e substituída pela pedra que foi movida.

Um grafo completo é um grafo em que todos os vértices são vizinhos dois a dois. Para cada configuração de pedras dada, pedimos que o aluno responda algumas séries de perguntas.

- Primeira configuração de pedras:

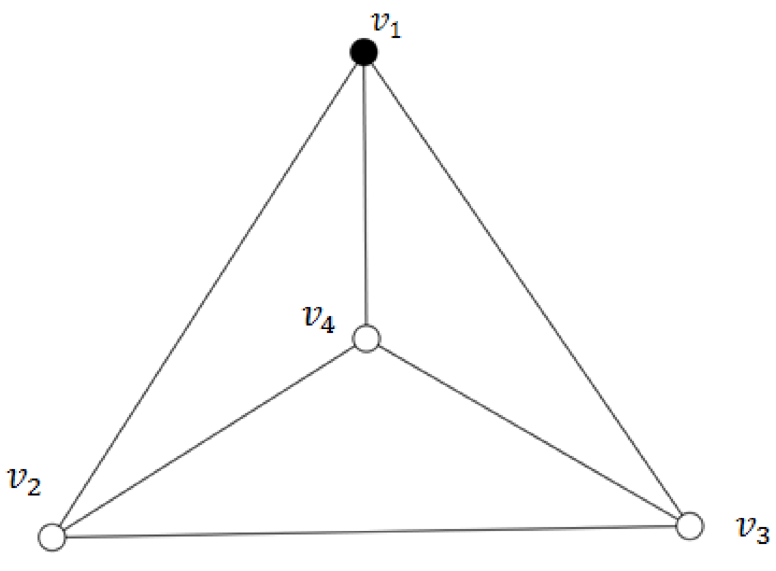


Figura 5: Configuração com uma pedra preta no grafo completo com 4 vértices.

Primeira série de perguntas:

1. Este grafo é completo?

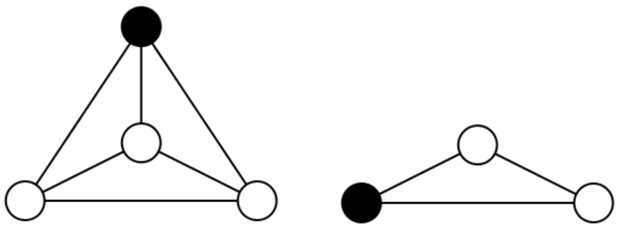
Resposta: Sim, pois para todo $i \in \{1,2,3,4\}$ e $j \neq i$, temos que v_i e v_j são vizinhos.

A primeira série é composta por uma única questão, e tem o objetivo de verificar se o aluno realmente entendeu a definição de grafo completo, pois sem isso o resto da atividade não faria sentido.

Segunda série de perguntas:

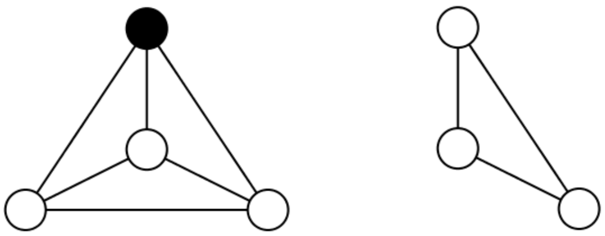
2. É possível esvaziar o vértice v_1 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.

Resposta: Sim, basta mover a pedra preta em v_1 para v_2 (ou para v_3, ou para v_4). Veja:



3. É possível esvaziar o vértice v_2 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.

Resposta: Sim, basta mover a pedra branca em v_2 para v_1. Veja:



4. Utilizando o item anterior, você consegue explicar se é possível esvaziar o vértice v_3 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique. E quanto ao vértice v_4?

Resposta: Sim, para esvaziar v_3 basta mover a pedra branca em v_3 para v_1. Para esvaziar v_4 basta mover a pedra branca em v_4 para v_1. Basta vermos que v_2, v_3, e v_4 como iguais perante a simetria da configuração e do grafo.

5. O que se pode concluir quando queremos esvaziar um vértice qualquer do grafo acima quando há apenas uma pedra preta?

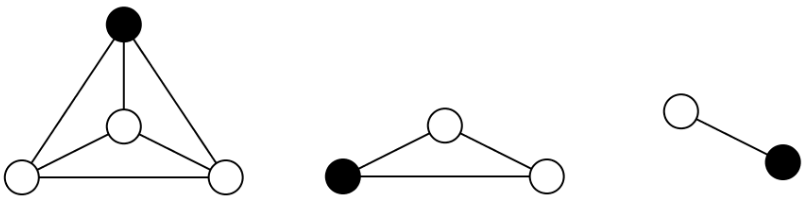
Resposta: Como vimos, podemos esvaziar qualquer conjunto de um vértice no grafo com a configuração de pedras dada.

Este conjunto de perguntas separa em casos todos os conjuntos de apenas um vértice do grafo, e tem o objetivo de mostrar ao aluno que é possível esvaziar todos esses. A pergunta 4 busca fazer com que o aluno perceba uma simetria na configuração de pedras sobre o grafo e veja que as estratégias para esvaziar ou v_2, ou v_3 ou v_4 são as mesmas, uma vez que todos possuem pedras da mesma cor e v_1 não.

Terceira série de perguntas:

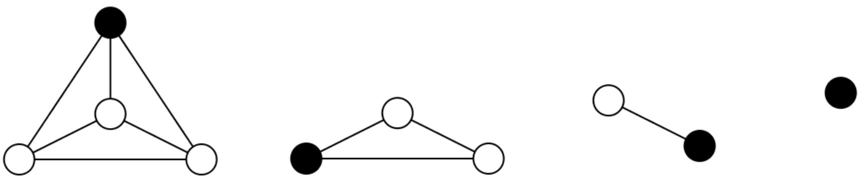
6. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_2, e depois mova mesma pedra, agora em v_2, para v_3 (ou para v_4). Veja:



7. É possível esvaziar os vértices v_2 e v_3 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_2, e depois mova mesma pedra preta, agora em v_2, para v_3. Novamente, mova a mesma pedra preta, agora em v_3, para v_4. Veja:



8. O que pode-se concluir quando queremos esvaziar dois vértices quaisquer do grafo acima quando há apenas pedra preta?

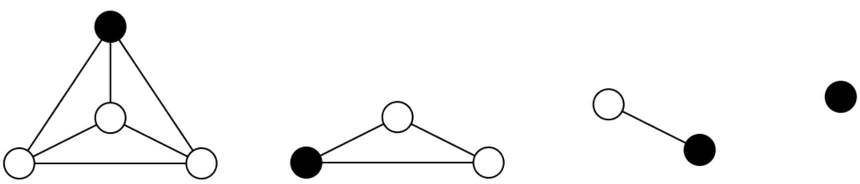
Resposta: Como as pedras brancas nesta configuração podem ser vistas como iguais, a estratégia usada para esvaziar duas pedras brancas, é a mesma para qualquer par de pedras brancas, que vimos como fazer na pergunta 7. Do mesmo modo, a estratégia usada para esvaziar a preta e uma branca é a mesma para qualquer uma das pedras brancas. Assim, podemos esvaziar qualquer par de pedras no grafo com esta configuração de pedras.

Esta série de questionamentos separa em casos todos os conjuntos com exatamente dois vértices do grafo, e tem o objetivo de mostrar ao aluno que é possível esvaziar todos esses. Além disso, percebendo a simetria no grafo, como na série anterior, o aluno percebe que os $6 = C_2^4$ casos são reduzidos a apenas dois.

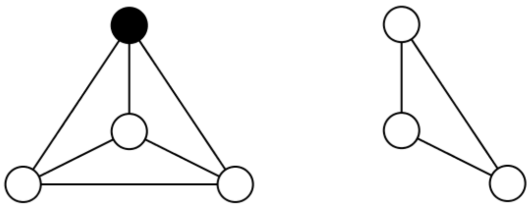
Quarta série de perguntas:

9. É possível esvaziar os vértices v_2, v_3 e v_4 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

Resposta: Não. Se começarmos movendo a pedra preta, que está em v_1, então nosso jogo termina em um dos vértices v_i que queremos esvaziar. Porém, esvaziar v_i é uma tarefa impossível. Veja:



Do mesmo modo, se começarmos movendo uma pedra branca, somos obrigados a movê-la para v_1, e assim ficamos sem mais jogadas possíveis, restando dois dos vértices que queremos esvaziar. Veja:



De qualquer maneira, nunca conseguimos esvaziar esses três vértices.

A quarta, e última série, faz com que o aluno perceba que existe um conjunto de três vértices que não podemos esvaziar. Assim, este pode concluir que para a configuração de pedras dada (que só tem uma pedra preta), podemos esvaziar qualquer conjunto com um ou dois vértices, mas nem todos com três vértices, através do Clobber.

- Segunda configuração de pedras:

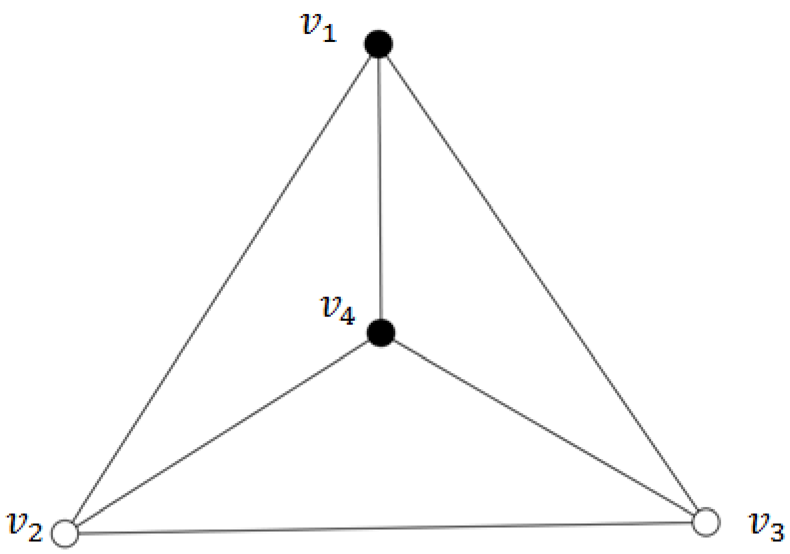
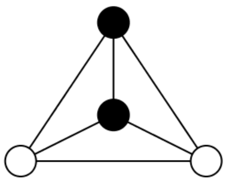


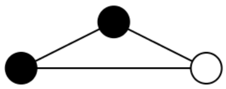
Figura 6: Configuração com duas pedras pretas no grafo completo com 4 vértices.

Primeira série de perguntas:

10. É possível esvaziar o vértice v_1 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.

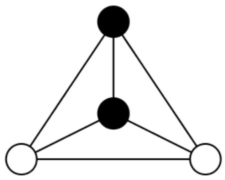
    Resposta: Sim, basta mover a pedra preta em v_1 para v_2 (ou para v_3). Veja:

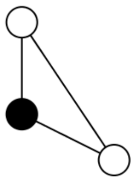




11. É possível esvaziar o vértice v_2 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.

    Resposta: Sim, basta mover a pedra branca em v_2 para v_1. Veja:





12. Utilizando o item anterior, você consegue explicar se é possível esvaziar o vértice v_3 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique. E quanto ao vértice v_4?

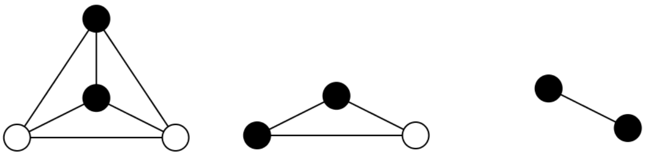
    Resposta: Sim, para esvaziar v_3 basta mover a pedra branca em v_3 para v_1. Para esvaziar v_4 basta mover a pedra preta em v_4 para v_3. Basta vermos as pedras pretas como iguais perante a simetria da configuração e do grafo, e o mesmo com as brancas.

13. O que se pode concluir quando queremos esvaziar um vértice qualquer do grafo acima quando há duas pedras pretas?

    Resposta: Como vimos, podemos esvaziar qualquer conjunto de um vértice no grafo com a configuração de pedras dada.

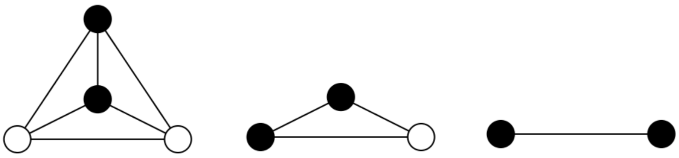
14. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

    Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_2, e depois mova mesma pedra, agora em v_2, para v_3. Veja:



15. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_4 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_2. Em seguida, mova a pedra preta em v_4 para v_3. Veja:



16. O que se pode concluir quando queremos esvaziar dois vértices quaisquer do grafo acima quando há duas pedras pretas?

Resposta: Pela simetria do grafo, a estratégia para esvaziar um par de vértices de mesma cor é a mesma para qualquer um deles. O mesmo ocorre para pares de vértices de cores distintas. Como vimos que ambos os casos são possíveis (perguntas 14 e 15), concluímos que sempre podemos esvaziar um par de vértices através do clobber nesta configuração.

A primeira série de perguntas para a segunda configuração de pedras tem o mesmo objetivo que as quatro séries de perguntas para a primeira configuração, que é mostrar que podemos esvaziar qualquer conjunto com um ou dois vértices, através do Clobber, em uma configuração com duas pedras pretas.

Segunda série de perguntas:

17. O que podemos concluir em relação ao número máximo de vértices que podemos esvaziar no grafo completo com 4 vértices, através do Clobber, independente da configuração inicial de pedras?

Resposta: Como o grafo tem 4 vértices, uma configuração não monocromática de pedras tem exatamente uma ou duas pedras pretas. E pela simetria do grafo, qualquer configuração com uma pedra preta pode ser vista da mesma forma. O mesmo vale para as configurações com duas pedras pretas. Assim, concluímos das duas configurações analisadas que podemos sempre esvaziar dois vértices (consequentemente também esvaziamos conjuntos de apenas um vértice). Porém, na pergunta 9, vimos que há uma configuração em que não podemos esvaziar três vértices quaisquer, portanto, concluímos que o número máximo de vértices que podemos esvaziar no grafo completo com 4 vértices, através do Clobber, independente da configuração inicial de pedras, é 2.

Aqui, o aluno percebe que dada uma configuração de pedras não monocromática, há uma, duas ou três pedras pretas, mas por simetria, o caso em que há três pedras pretas é equivalente ao caso em que há apenas uma (basta trocar as cores das pedras).

Conclui-se desta análise que, para qualquer configuração não monocromática de pedras, é possível esvaziar qualquer conjunto de vértices de tamanho no máximo dois, mas nem sempre se pode esvaziar um conjunto de três vértices, ou seja, o aluno, jogando, mostra que o grafo completo com quatro vértices é 2-corredutível.

4.2 – Atividade 2: A relação conectividade x corredutibilidade

O jogo Clobber é jogado por uma pessoa em um grafo. Uma pedra, preta ou branca, é colocada em cada vértice do grafo. Um movimento no jogo consiste em pegar uma pedra e esmagar outra, de cor diferente, localizada em um vértice vizinho. A pedra esmagada é removida e substituída pela pedra que foi movida.

Considere o seguinte gráfico com sua respectiva configuração de pedras:

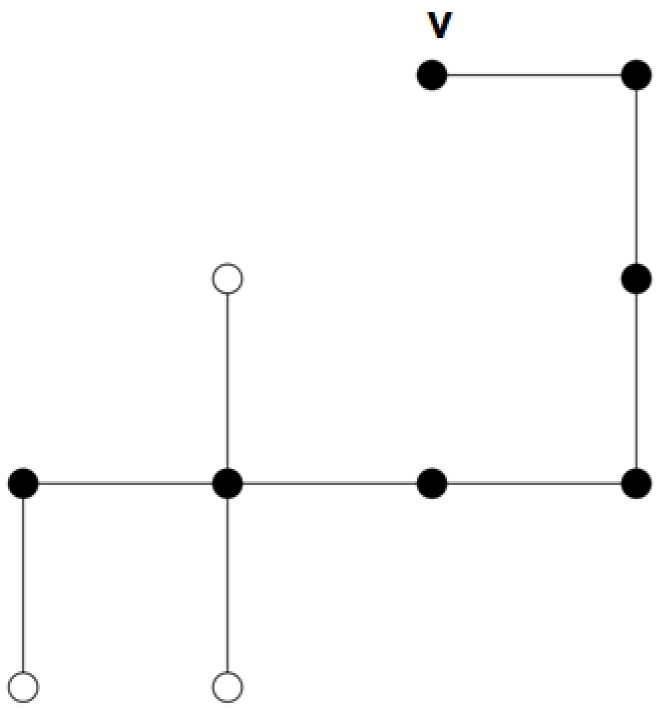
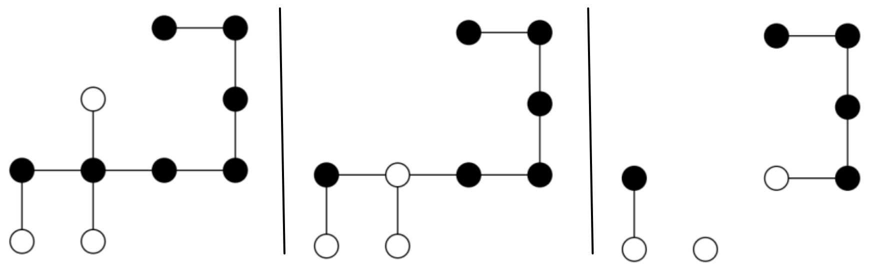


Figura 7: Configuração não monocromática de pedras em um grafo conexo.

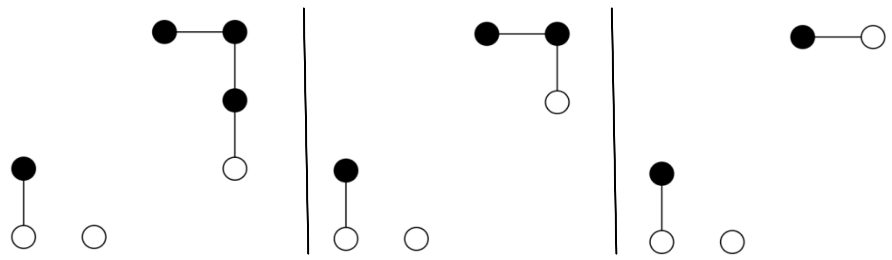
Pedimos ao aluno para mostrar que é possível encontrar uma sequência de jogadas do Clobber que esvazie o vértice v. Além disso, perguntamos:

1. É possível generalizar essa ideia para esvaziar qualquer vértice em um grafo conexo com configuração de pedras não monocromática?

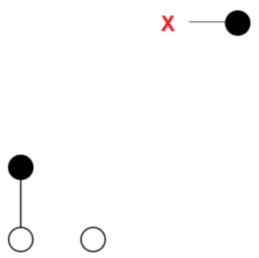
Resposta: Para esvaziarmos o vértice v, basta fazermos as seguintes jogadas:



E continuamos com:



Até finalmente fazermos o último movimento:



Generalizando esta ideia, para esvaziarmos um vértice v num grafo conexo, basta encontrarmos o vértice mais próximo de v, cuja pedra tem cor distinta da cor da pedra em v. Depois, levamos essa pedra de cor diferente até um vizinho de v.

Neste exercício, queremos que o aluno perceba que para esvaziar um vértice qualquer em um grafo conexo com configuração não monocromática de pedras, basta encontrar o vértice mais próximo cuja pedra tem cor diferente. Em seguida, é suficiente encontrar um caminho hamiltoniano entre estes dois vértices.

Agora mostramos as seguintes configurações de pedras para o seguinte grafo 2-conexo (dados dois vértices, existem dois caminhos entre eles que não se intersectam) e pedimos aos alunos que respondam as perguntas:

CONFIGURAÇÃO 1

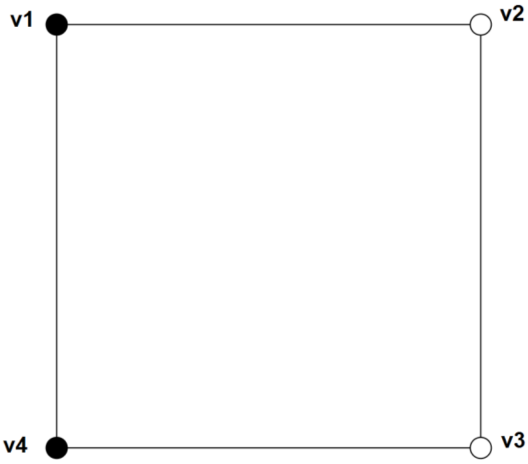
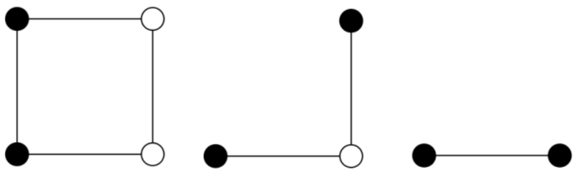


Figura 8: Configuração de pedras num grafo 2-conexo com 4 vértices cujos vértices de mesma cor são vizinhos.

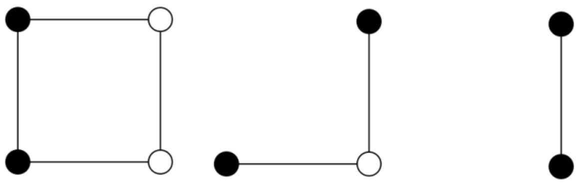
2. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

   Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_2, e depois mova mesma pedra, agora em v_2, para v_3. Veja:

3. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_4 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

   Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_2. Em seguida, mova a pedra preta em v_4 para v_3. Veja:

CONFIGURAÇÃO 2

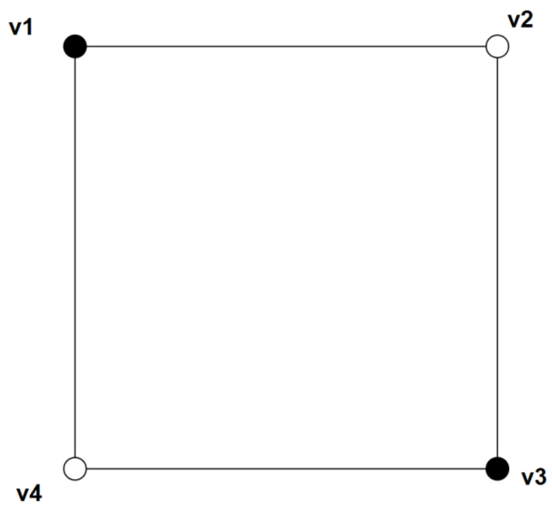
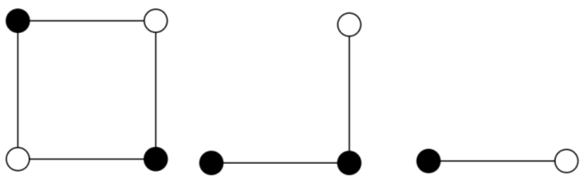


Figura 9: Configuração de pedras num grafo 2-conexo com 4 vértices cujos vértices de mesma cor não são vizinhos.

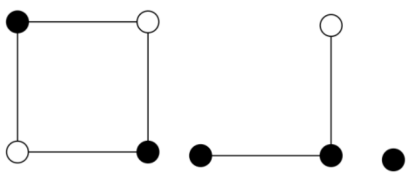
4. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

   Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_4. Em seguida, mova a pedra branca em v_2 para v_3. Veja:



5. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_3 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

   Resposta: Sim. Mova a pedra preta em v_1 para v_4. Em seguida, mova a pedra preta em v_3 para v_2. Veja:

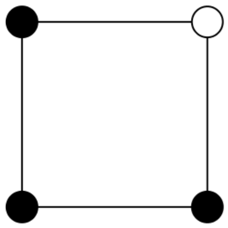


6. O que se pode concluir quando queremos esvaziar dois vértices quaisquer do grafo acima, independente da configuração inicial de pedras?(Lembre que não analisamos o caso em que há apenas uma pedra preta)

Resposta: Quando há apenas uma pedra preta, podemos sempre esvaziar dois vértices escolhendo a orientação correta no ciclo e andando sobre ela. As duas configurações possíveis com duas pedras pretas, a menos de simetria, são as analisadas na atividade. Podemos concluir que sempre é possível esvaziar dois vértices do grafo através do Clobber.

7. Você pode encontrar uma configuração de pedras para o grafo acima de modo que exista um conjunto de três vértices que não pode ser esvaziado por uma sequência de jogadas no Clobber?

   Resposta: Veja a configuração abaixo. Tente esvaziar v_1,v_3 e v_4!



8. O que podemos concluir em relação ao número máximo de vértices que podemos esvaziar num grafo 2-conexo com pelo menos 4 vértices, através do Clobber, independente da configuração inicial de pedras?

Resposta: Acreditamos, das duas configurações analisadas, que podemos sempre esvaziar dois vértices (consequentemente também esvaziamos conjuntos de apenas um vértice). Além disso, utilizando a pergunta 7, vimos que nem sempre podemos esvaziar três vértices (depende da configuração de pedras). Portanto, podemos deduzir que para um grafo 2-conexo com pelo menos 4 vértices, o número máximo de vértices que podemos esvaziar através do Clobber é maior ou igual a 2.

O objetivo destes questionamentos é fazer com que o aluno acredite que podemos esvaziar qualquer conjunto com dois vértices de grafos 2-conexos (com pelo menos 4 vértices), ou seja, o aluno conclui, jogando, que grafos 2-conexos com pelo menos 4 vértices são 2-corredutíveis, que é um caso particular do teorema de Dantas, Marinho e Tanushevski.

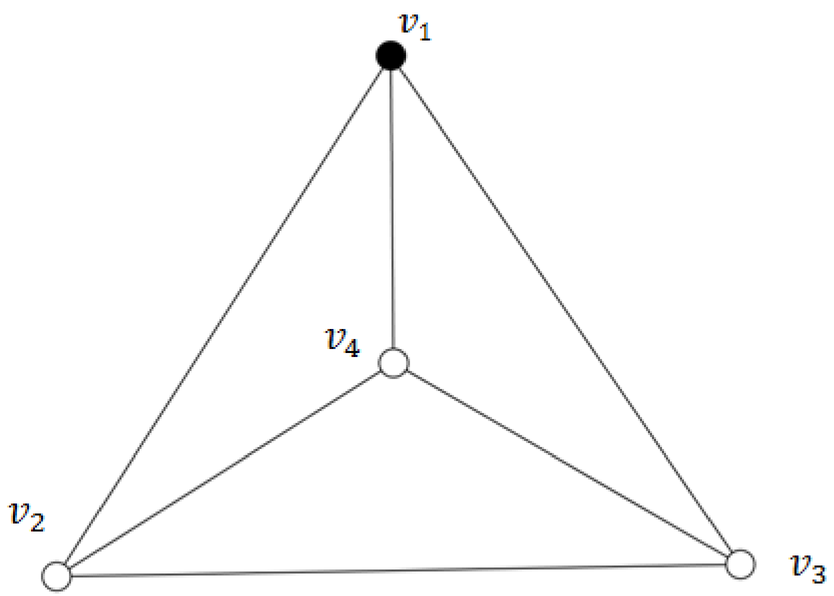
4.4 – Folhas de Atividades (Versão dos alunos)

4.4.1 – Atividade 1: Encontrando a corredutibilidade de um grafo completo com 4 vértices

O jogo Clobber é jogado por uma pessoa em um grafo. Uma pedra, preta ou branca, é colocada em cada vértice do grafo. Um movimento no jogo consiste em pegar uma pedra e esmagar outra, de cor diferente, localizada em um vértice vizinho. A pedra esmagada é removida e substituída pela pedra que foi movida.

Um grafo completo é um grafo em que todos os vértices são vizinhos dois a dois. Para cada configuração de pedras dada, faça o que se pede:

- Primeira configuração de pedras:



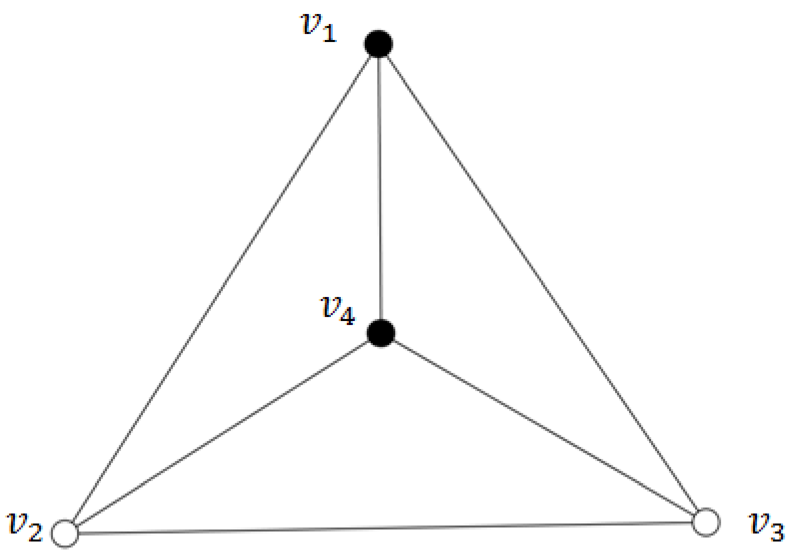
1. Este grafo é completo?

2. É possível esvaziar o vértice v_1 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.

3. É possível esvaziar o vértice v_2 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.
4. Utilizando o item anterior, você consegue explicar se é possível esvaziar o vértice v_3 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique. E quanto ao vértice v_4?
5. O que se pode concluir quando queremos esvaziar um vértice qualquer do grafo acima quando há apenas uma pedra preta?
6. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.
7. É possível esvaziar os vértices v_2 e v_3 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.
8. O que se pode concluir quando queremos esvaziar dois vértices quaisquer do grafo acima quando há apenas pedra preta?

9. É possível esvaziar os vértices v_2, v_3 e v_4 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

- Segunda configuração de pedras:



10. É possível esvaziar o vértice v_1 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.

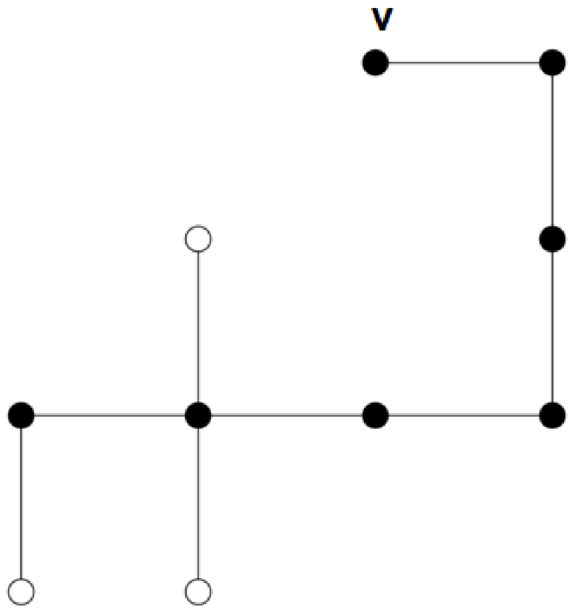
11. É possível esvaziar o vértice v_2 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique.
12. Utilizando o item anterior, você consegue explicar se é possível esvaziar o vértice v_3 através de uma sequência de jogadas no Clobber? Explique. E quanto ao vértice v_4?
13. O que se pode concluir quando queremos esvaziar um vértice qualquer do grafo acima quando há duas pedras pretas?
14. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.
15. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_4 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.
16. O que se pode concluir quando queremos esvaziar dois vértices quaisquer do grafo acima quando há duas pedras pretas?

17. O que podemos concluir em relação ao número máximo de vértices que podemos esvaziar no grafo completo com 4 vértices, através do Clobber, independente da configuração inicial de pedras?

4.4.2 – Atividade 2: A relação conectividade x corredutibilidade

O jogo Clobber é jogado por uma pessoa em um grafo. Uma pedra, preta ou branca, é colocada em cada vértice do grafo. Um movimento no jogo consiste em pegar uma pedra e esmagar outra, de cor diferente, localizada em um vértice vizinho. A pedra esmagada é removida e substituída pela pedra que foi movida.

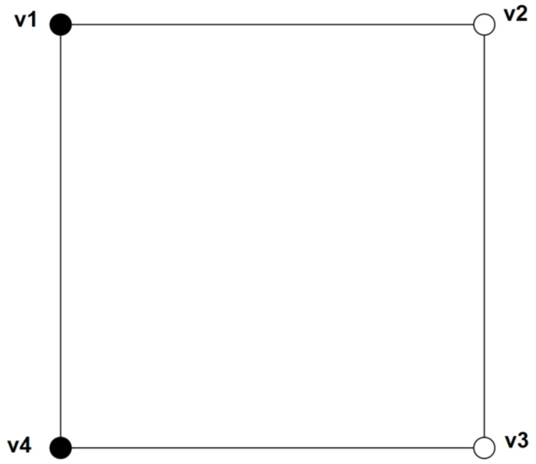
Considere o seguinte gráfico com sua respectiva configuração de pedras:



1. Mostre que é possível encontrar uma sequência de jogadas do Clobber que esvazie o vértice v. É possível generalizar essa idéia para esvaziar qualquer vértice em um grafo conexo com configuração de pedras não monocromática?

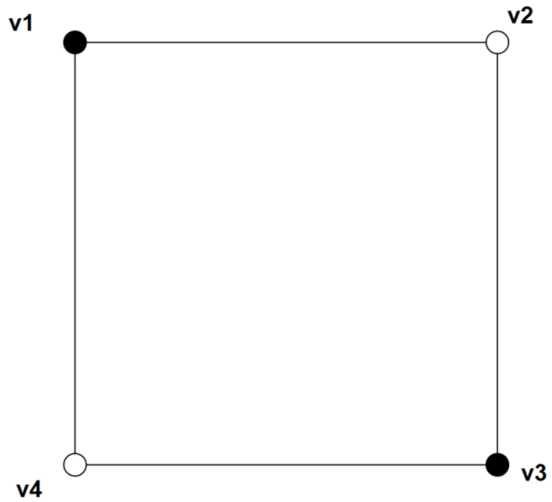
Agora considere as seguintes configurações de pedras para o seguinte grafo 2-conexo (dados dois vértices, existem dois caminhos distintos que ligam estes vértices) e faça o que se pede:

CONFIGURAÇÃO 1



2. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.
3. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_4 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

CONFIGURAÇÃO 2



4. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_2 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.
5. É possível esvaziar os vértices v_1 e v_3 através de uma única sequência de jogadas no Clobber? Explique.

6. O que se pode concluir quando queremos esvaziar dois vértices quaisquer do grafo acima, independente da configuração inicial de pedras? (Lembre que não analisamos o caso em que há apenas uma pedra preta)
7. Você pode encontrar uma configuração de pedras para o grafo acima de modo que exista um conjunto de três vértices que não pode ser esvaziado por uma sequência de jogadas no Clobber?
8. O que podemos concluir em relação ao número máximo de vértices que podemos esvaziar num grafo 2-conexo com pelo menos 4 vértices, através do Clobber, independente da configuração inicial de pedras?

5 – CONCLUSÕES

A teoria de grafos modela inúmeras situações de nosso cotidiano. Introduzir a teoria de grafos junto aos alunos é uma maneira de desenvolver o raciocínio lógico e o interesse pela pesquisa, contribuindo para o desenvolvimento da educação. Isso torna a matemática uma disciplina mais acessível e real para os alunos.

Esperamos que o conceito de grafo e suas propriedades possam ser facilmente introduzidos, seja no ensino básico ou no superior, através do Clobber. Nesta monografia, exploramos o conceito de conectividade, mas podemos pensar na elaboração de outros jogos ou atividades que explorem outros conceitos importantes.

A importância das atividades aqui propostas está no ato de fazer com que o aluno aprenda, saindo da rotina cansativa de quadro e caderno, interagindo com os amigos, comparando suas ideias com esses, e o mais importante, se divertindo.

6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALBERT, M. H., GROSSMAN, J. P., NOWAKOWSKY, R. J., WOLFE, D. *An Introduction to Clobber.* Integers, J. of Comb. Number Theory, 2005, v. 5(2) p. 1-12.

[2] BEAUDOU, L., DUCHÊNE, E., GRAVIER, S. *A survey about Solitaire Clobber.* Games of No Chance 4, MSRI Publ. (R.J. Nowakowski, ed.), v. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[3] BLONDEL, V. D., KERCHOVE, C. de, HENDRICKX, J. M., JUNGERS, R. *Solitaire Clobber as an Optimization Problem on Words.* Integers, Journal of Combinatorial Number Theory, 8(1), G04, p. 1–12, 2008.

[4] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications.* New York: Springer (2008).

[5] DANTAS, S., GRAVIER, S., PARÁ, T. *Solitaire Clobber played on Cartesian product of graphs.* Discrete Applied Mathematics, 2015, v. 182. p. 84-90.

[6] DA SILVA, L.F., DE RODRIGUES, M.A.R. *Introdução ao estudo da teoria dos grafos: Uma proposta de sequência didática para o ensino médio*. 2015. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134082/000984432.pdf?sequence=1. Acessado em 06/05/2017.

[7] DEMAINE, E. D., DEMAINE, M. L., FLEISCHER, R. *Solitaire Clobber.* Theoret. Comput. Sci., 2004, v. 313 p. 325-38.

[8] DORBEC, P., DUCHÊNE, E., GRAVIER, S. *Solitaire Clobber played on Hamming graphs.* Integers, J. of Combinatorial Number Theory, 2008, v. 8(1), p. 1-21.

[9] PARÁ, T., DANTAS, S., GRAVIER, S. *Solitaire clobber on circulant graphs.* Discrete Mathematics, 2014, v. 329 p. 33-41.

[10] PARÁ, T. S., DANTAS, S., GRAVIER, S. *Strong reducibility of powers of paths and powers of cycles on Impartial Solitaire Clobber.* In: VI LAGOS, 2011, Bariloche, Argentina. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2011. v. 37. p. 177-182.

[11] PARÁ, T., GRAVIER, S., DANTAS, S. *Impartial Solitaire Clobber played on Powers of Paths.* In: V LAGOS, 2009, Gramado, Brazil. Electronic Notes in Discrete Mathematics. v. 35. p. 257-262.

[12] SÁ, L. C., SILVA, S. A. F. *Teoria dos Grafos: história, problemas e aplicações. Primeiro Encontro de Educação Matemática.* 2013. Disponível em: http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/encontrodematematica/article/view/4861/2956. Acessado em 13/04/2017.

[13] SINGH, S. *O último teorema de Fermat*. Editorial Norma, 1999.

[14] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais.* Rio de Janeiro: Campus (1986).

[15] WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory.* Second edition, Prentice Hall, 2001.