Franklin da Conceição de Barros

O Teorema de Banach-Necas-Babuska

Volta Redonda, RJ

2019

Franklin da Conceição de Barros

O Teorema de Banach-Necas-Babuska

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Honório Joaquim Fernando

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Curso de Matemática

Volta Redonda, RJ

2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BAVR
Gerada com informações fornecidas pelo autor

B277t Barros, Franklin da Conceição de
O Teorema de Banach-Necas-Babuska / Franklin da Conceição de Barros ; Honório Fernando, orientador. Volta Redonda, 2019.
97 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)- Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, 2019.

1. Análise funcional. 2. Método de elementos finitos. 3. Formulações mistas. 4. Produção intelectual. I. Fernando, Honório, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Ciências Exatas. III. Título.

CDD -

Bibliotecária responsável: Ana Claudia Felipe da Silva - CRB7/4794

Franklin da Conceição de Barros

O Teorema de Banach-Necas-Babuska

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Volta Redonda, RJ, 16 de dezembro de 2019:

Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando
Orientador

Prof. Dr. Alan Prata de Paula
ICEx-UFF

Prof. Dr. Ivan Wilber Aguilar Maron
ICEx-UFF

Volta Redonda, RJ
2019

Este trabalho é dedicado á minha mãe Luciana Teixeira da Conceição e aos meus irmãos Flávio da Conceição e Marcos Vinicius da Conceição

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha mãe Luciana da Conceição pelos cuidados, apoio, pelas conversas e paciência durante toda a graduação e também por todo o carinho e amor dados até hoje. Esta conquista é um mérito da nossa união, incluindo meus irmãos Flávio da Cnoceição e Marcors Vinícios da Conceição. Sem o aopio de vocês nada disso teria acontecido.

Agradeço com imenso carinho ao meu orientador Honório Fernando por, além de orientar e transmitir atenciosamente seus conhecimentos acadêmicos, permitiu que chegássemos numa relação super amigável. Foi muito paciente em explicar de diversas formas o que não estava claro. Teve uma dedicação extraordinária, que muitas vezes foi além do que eu esperava. Certamente este trabalho reflete o fruto da nossa relação de confiança. Agradeço por cada palavra motivadora e reflexiva. Tê-lo como orientador significou mais que um compromisso acadêmico, um verdadeiro companheirismo.

É com muita gratidão que menciono aqui os senhores Professores Doutores que deram muito de si nas salas de aula do ICEX, passando um conhecimento que por muitas vezes exigiu madrugadas de preparação, que se colocaram em plena disposição para tirar dúvidas e, muito além, passaram conhecimentos de vida, me levando a sonhar e acreditar que esse é o caminho. Em especial, expresso minha gratidão aos professores Doutores Ivan Aguilar, Alan Prata e Alessandro Gaio por suas palavras maduras, diretas e motivadoras; muitas vezes refleti sobre suas colocações pontuais e reestruturei meus pensamentos. Espero que essa amizade nunca se acabe e que possamos nos ver nos próximos anos. Agradeço de coração à professora Doutora Vera Caminha, pois além de me passar um conhecimento computacional sólido com muita destreza e empenho, pude contar com seu apoio e dedicação, direcionando-me à pós graduação, o que deixa claro sua boa intenção em ver cada um dos seus alunos seguirem no melhor caminho.

O curso proporcionado pelo Departamentameto de Matemática - ICEX, além de desenvolver o conhecimento matemático, possibilitou o aprimoramento do senso crítico e valores sociais. Dessa forma, esse mérito não teria sido alcançado sem a colaboração dos professores Doutores anteriormente citados e também dos professores Dr. Carlos Nascimento, André Brondani, Edilaine Nobili, Felipe Nobili, Leandro Egea, Marina Sequeiros, Rosemary Pires, Gilmar Garbúgio e Marina Ribeiro; extensivo aos professores Doutores Marcos Veríssimo, Rodrigo Amorim, Adriano Caminha, Thadeu Penna e Aquino Espíndola do Departamento de Física - ICEX.

Aos professores Ladário da Silva e José Huguenin gostaria expressar minhas admiração e gratidão, pois desde quando cheguei no ICEX me deram palavras de motivação, firmes, de prioridade e irmandade. Não fui aluno dos senhores em sala de aula, mas aprendi bastante com nossas conversas e me mantive firme com seus apoios.

Agradeço à Sabrina Cesar por ter sido super companheira, atenciosa e por tornar o último periodo mais especial ao meu lado. Finalmente, agradeço aos colegas de classe, em especial ao Giovani Oliveira, à Mariela Bogonni e ao Baggio Castro pelo privilégio de acompanhá-los nessa jornada. Certamente o fruto da nossa amizade se estenderá continuamente ao longo de nossas vidas.

"A matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade,
mas suprema beleza, uma beleza fria e austera, sem apelo
a qualquer parte de nossa natureza mais fraca, sem as
encantadoras armadilhas da música, mas sublimente pura,
e capaz de uma rigorosa perfeição que somente
a maior das artes pode exibir".
Bertrand A. W. Russel (1872 - 1970)
filósofo e matemático

Resumo

Neste trabalho, estudamos o *teorema de Banach-Necas-Babuska*, que é um dos principais resultados da análise funcional que garante a boa colocação das formulações variacionais mistas e contorna as limitações do teorema de Lax-Milgram. Sua importância reside no fato de tais formulações constituirem pontos de partida das aproximações através do *método de elementos finitos* de diversos problemas de interesse prático. Para tanto, após a introdução, o texto apresenta algumas ferramentas matemáticas básicas que consistem em noções sobre espaços métricos, elementos da teoria de integração e medida de Lebesgue, e espaços vetoriais tendo como foco os espaços de Banach e os espaços de Hilbert. Em seguida, são provados os teoremas da *representação de Riez*, de *Lax-Milgram*, da *imagem fechada* e do *mapeamento aberto*, usados fortemente na demonstração *teorema de Banach-Necas-Babuska*, que é o objetivo central deste trabalho. Embora a abordagem adotada aqui seja puramente abstrata considerando um problema variacional misto abstrato, como motivação, são apresentamos um problema prático que pode ser posto na forma variacional abstrata discutida aqui.

Palavras-chave: O teorema de Banach-Necas-Babuska. Formulações variacionais mistas. Análise funcional. Método de elementos finitos.

Abstract

In this work, we study the *Banach-Necas-Babuska theorem*, which is one of the main results of the functional analysis that ensures the well-posedness of the mixed variational formulations and circumvents the limitations of the *Lax-Milgram theorem*. Its importance lies in the fact such formulations constitute starting points for approximations by the finite elements method of various problems of practical interest. Therefore, after the introduction, the text presents some basic mathematical tools consisting of notions about metric spaces, elements of integration and Lebesgue measure, and vector spaces focusing on the Banach and Hilbert spaces. As support for the demonstration of the *Banach-Necas-Babuska theorem*, core of this work, the following theorems are previously proved: *Riez representation theorem*, *Lax-Milgram theorem*, *closed image theorem* and *open mapping theorem*. Although the approach taken here is purely abstract considering a abstract variational mixed problem, as motivation, one case of concrete problem that can be put into the abstract variational form discussed here are presented.

Keywords: Banach-Necas-Babuska theorem. mixed variational formulation, functional analysis, finite element method

Lista de abreviaturas e siglas

EDP's	Equações Diferenciais Parciais.
MEF	Método de Elementos Finitos.
BNB	Banach-Neas-Babuska.
L.I.	Linearmente independente.
L.D.	Linearmente dependente.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
X	Conjunto não vazio arbitrário.
E	Conjunto não vazio arbitráro ou espaço vetorial arbitrário.
F	Conjunto não vazio arbitráro ou espaço vetorial arbitrário.
M	Espaço métrico arbitrário.
$\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$	Espaço das formas bilineares definidas em $E \times E$ com valores em $\mathbb{R}$.
$\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{R})$	Espaço das formas bilineares definidas em $E \times F$ com valores em $\mathbb{R}$.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espaço das transformações lineares definidas em E com valores em F.
E^*	Espaço dos funcionais lineares definidos em E com valores em $\mathbb{R}$, chamado espaço dual de E.
(X, τ)	Espaço topológico.
$\text{span}(X)$	Subespaço vetorial gerado por um conjunto X .
$(E; \\| \cdot \\|)$	Espaço vetorial normado.
Σ	Álgebra resultante do teorema de Carathéodori.
Ω	Subconjunto do espaço $\mathbb{R}^n$.
$L_P(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis que são p-integráveis em quase toda parte.
(X, Σ)	Espaço mensurável.
$\Sigma(F)$	σ-Álgebra gerada pelo conjunto F.
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta estendida;
(X, Σ, μ)	Espaço de medida.
$\\| \cdot \\|_\infty$	Norma defnida no espaço das funções mensuráveis que são limitadas μ-quase sempre.
$\sup A$	Menor das cotas superiores do conjunto A.

$\inf A$	Maior das cotas inferiores do conjunto A.
$\liminf$	Limite de uma sequência inferior.
$\limsup$	Limite de uma sequência superior.
$B(x, r)$	Bola aberta centrada em x e com raio r.
$Ker(A)$	Núcleo do conjunto A.
$\text{dist}(x, M)$	Distancia do ponto x ao conjunto M.
$A \oplus \mathrm{B}$	Soma direta dos espaços vetoriais A e B.

Sumário

1 Introdução

Diversos processos físicos na natureza, cujo correto entendimento, predição e controle são importantes para o mundo real, são descritos por equações que envolvem quantidades físicas de interesse prático, juntamente com suas taxas de variação espacial e temporal, conhecidas como *derivadas parciais*. Dentre tais processos, estão os ambientais, o escoamento de fluidos, a deformação de corpos sólidos, transferência de calor, reações quimicas, eletromagnéticos, e tantos outros. Equações envolvendo *derivadas parciais* são chamadas de *equações diferenciais parciais (EDP's)*. Ao contrário do que ocorre com as equações algébricas usuais, cujas soluções são números, agora, as soluções para as *EDP's* são funções. Para a esmagadora maioria das *EDP's*, não somos capazes de encontrar suas soluções exatas, e às vezes, nem mesmo sabemos se uma única solução existe. Por essas razões, na maioria dos casos, a única maneira de resolver *EDP's* decorrentes de problemas concretos de engenharia e científicos, consiste em aproximar numericamente suas soluções. Métodos numéricos para *EDP's* constituem uma parte inseparável da engenharia e da ciência modernas. A ferramenta mais geral e eficiente para a solução numérica de *EDP's* é o *Método de Elementos Finitos (MEF)*. Essa supremacia do *MEF* deve-se em grande medida à sólida base matemática subjacente a construção de cada membro de sua grande família de esquemas numéricos. Tal sólida base matemática apoia-se na análise funcional.

Históricamente, a análise funcional abstrata desenvolveu-se inicialmente para responder à questões decorrentes da resolução das *EDP's*, vejamos por exemplo Dieudonné (1972). para maiores referências históricas. Reciprocamente, os progressos da análise funcional abstrata têm estimulado a teoria das *EDP's*. Um dos principais ganhos que a análise funcional abstrata incorporou ao estudo teórico das *EDP's* é o seu tratamento abstrato. Para explicar melhor o que estamos tentando dizer com tratamento abstrato do estudo teórico das *EDP's*, vamos inicialmente lembrar que as *EDP's* podem ser classificadas basicamente em três classes designadas por *EDP's Elípticas*, *EDP's Parabólicas* e *EDP's Hiperbólicas*. Além disso, é importante ressaltar que o carácter elíptico, parabólico ou hiperbólico de uma *EDP* depende essencialmente de seus coeficientes. Isso significa que uma mesma *EDP* pode apresentar os três comportamentos, elíptico, parabólico ou hiperbólico, em diferentes regiões de seu domínio de definição, o que incrementa consideravelmente as dificuldades de seu estudo. Nesse cenário, antes do advento da análise funcional abstrata, até mesmo problemas envolvendo *EDP's* de uma mesma classe, por razões diversas como não-linearidade da equação, grau de complexidade dos coeficientes da equação, do termo de fonte da equação, do domínio de definição do problema e das condições de contorno do problema, eram tratados segundo a filosofia de que cada caso é um caso, ou seja, separadamente. Essa abordagem, que certamente é pouco produtiva, em 1954 sofre forte impacto do trabalho de Lax e Milgram (1954) que de modo sistemático considerando uma estrutura matemática abstrata adequada, estabelece a boa colocação da classe inteira dos problemas elípticos em um resultado matemático de extrema relevância, em especial para as aplicações, que é hoje bastante conhecido como *Teorema de Lax-Milgram*.

Na década de 60, o *Teorema de Lax-Milgram* representou a principal mola propulsora dos avanços e da difusão do *MEF* aplicado à problemas modelados por *EDP's Elípticas*, com especial destaque aos problemas da mecânica de estruturas, viabilizando o projeto de edifícios mais altos, de pontes vencendo vãos mais longo, exemplos citados aqui apenas por mera curiosidade.

Em virtude do grande sucesso do *MEF* na resolução dos problemas da mecânica das estruturas, sustentado teoricamente pelo *Teorema de Lax-Milgram*, conforme frisado no parágrafo anterior, na década de 70 são tomadas as primeiras inicitivas no sentido de estender as formulações de elementos finitos à problemas da dinâmica dos fluidos. No entanto, casos como os de perda de coercividade dos operadores que modelam alguns problemas dessa classe, de formulação do problema em mais de um único campo, de problemas sujeitos à algum tipo de restrição, por exemplo a restrição $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ que aparece em modelos que descrevem o escoamento de fluidos incompressíveis com $\mathbf{u}$ denotando o campo de velocidades, inviabilizaram a aplicação imediata do *Teorema de Lax-Milgram*. A quantidade de razões práticas que não permitem o uso direto do *Teorema de Lax-Milgram* é ampla. As quatro razões apresentadas em seguida constituem uma síntese desse universo.

i) A *primeira razão* pode ser a presença na formulação variacional de uma restrição

ii) A *segunda razão* pode residir no grau de importância das variáveis de campo que aparecem no problema a ser resolvido. Em elasticidade, por exemplo, geralmente é requerido que seja calculado o campo das tensões de forma muito mais precisa do que o campo dos deslocamentos. Considerando sua formulação clássica através do modelo conhecido como problema de equilíbrio, o campo das tensões pode ser recuperado a partir do campo dos deslocamentos usando uma lei constitutiva como a lei de Hook ou outra lei análoga. Contudo, essa recuperação envolve o cálculo de derivadas do campo de deslocamentos. De um ponto de vista numérico, diferenciação implica em perda de precisão. É possível contornar essa questão construindo novas formulações nas quais as restrições são prontamente contempladas.

iii) A *terceira razão* pode ter como origem as dificuldades que emergem da discretização de espaços de funções regulares como o espaço $H_0^2(\Omega)$ do problema biharmônico, apenas para citar um exemplo. A aproximação desse espaço por um método de elementos finitos implica em assegurar a continuidade das derivadas nas interfaces dos elementos. Isso é algo possível de ser feito, porém muito mais complicado do que por exemplo construir aproximações de $H^1(\Omega)$. Uma formulação variacional capaz de decompor um problema de quarta ordem em um sistema de problemas de segunda ordem, evita a construção de elementos complicados a um preço de introduzir outras dificuldades.

iv) *Finalmente, a última razão* é aquela que nos conduz à busca por uma formulação variacional mais enfraquecida, determinada em alguns casos pelo tipo de dados do problema, por exemplo, a presença de cargas pontuais, para as quais as formulações clássicas podem deixar de fazer sentido devido a falta de regularidade da solução.

Para contornar as dificuldades descritas nos itens acima, isto é, para ultrapassar as limitações do *Teorema de Lax-Milgram*, foi proposto o resultado matemático conhecido por *condições* $\inf - \sup$. Essas condições foram popularizadas por Babuska e Aziz (1972) no contexto do *MEF*, e declaradas em um trabalho teórico anterior por Necas (1962). Do ponto de vista da análise funcional, as condições $\inf - \sup$ podem ser vistas como uma reformulação de dois teoremas fundamentais devidos a Banach nomeadamente: o *Teorema da imagem fechada* e o *Teorema do mapeamento aberto*. Por essa razão, nos referimos neste texto aos resultados matemáticos relativos a boa colocação dos problemas variacionais baseados nas condições $\inf - \sup$ como *Teorema de Banach-Necas-Babuska* ou abreviadamente *Teorema BNB*, adotado como título deste trabalho por constituir seu cerne.

Portanto, neste trabalho, apresentamos um estudo sobre o *Teorema de Banach-Necas-Babuska*, que pode ser considerado como uma das principais ferramentas teóricas da análise funcional sobre o qual o *MEF* apoia-se firmemente. Com essa finalidade, organizamos o texto da seguinte maneira: No capítulo 2 introduzimos algumas ferramentas genéricas e resultados básicos da álgebra linear, dos espaços métricos, e da teoria da medida que serão usados nos desenvolvimentos subsequentes. Adicionalmente, constam desse capítulo os espaços de Banach, os espaços de Hilbert, a prova do *teorema da representação de Riez*, a prova do *teorema de Lax-Milgram*, assim como a prova do *teorema do mapeamento aberto*, que apesar de sua extrema relevância para o resultado central deste trabalho que é objeto de estudo do capítulo seguinte, foi colocado de forma antecipada nesse capítulo por conveniência de exposição. Como dissemos no parágrafo anterior, o capítulo 3 constitui o núcleo deste trabalho. É dedicado essencialmente à demonstração do *Teorema de Banach-Necas-Babuska*. Para tanto, provamos inicialmente o *teorema da imagem fechada*, que juntamente com o *teorema da representação de Riez* e o *teorema do mapeamento aberto* provados no capítulo precedente, fornecem os subsídios necessários à prova do *Teorema BNB*. Finalmente no capítulo 4 são apresentadas as conclusões e sugestões de trabalhos futuros como potenciais desdobramentos das discussões tratadas neste texto.

2 Preliminares Matemáticas

Este capítulo apresenta as ferramentas básicas necessárias para a construção do teorema da imagem fechada de Banach e do teorema de Banach-Necas-Babuska (BNB). Introduzimos inicialmente alguns conceitos elementares sobre espaços métricos e espaços vetoriais normados. Em seguida tratamos de aspectos da teoria da medida abordando os teoremas a saber: o teorema da convergência monótona, teorema da convergência dominada e o lema de Fatou. Com esses resultados, tratamos de maneira construtiva os espaços de Banach e os operadores lineares contínuos entre esses espaços, com especial destaque ao teorema do mapeamento aberto, fortemente usado no decorrer deste trabalho. Na sequência, discutimos os conhecidos teoremas da separação de Hahn-Banach e, finalmente, estabelecemos os espaços de Hilbert como arcabouço matemático no qual apresentamos o teorema de Lax-Milgran, que pode ser visto como um caso especial do teorema BNB.

2.1 Espaços métricos

Um espaço métrico é um ambiente no qual a distância entre dois elementos quaisquer está definida. Este conceito é fundamental para os espaços de Banach e Hilbert com os quais iremos trabalhar. Além disso, esta estrutura nos permite definir propriedades topológicas no espaço como veremos a seguir.

Definição 2.1. Uma *métrica* definida num conjuto $M \neq \emptyset$ é uma função

$$\begin{aligned} d : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades: $\forall\, x, y, z \in M$,

M1) $d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$ (positividade);

M2) $d(x, y) = d(y, x),$ (simetria);

M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x),$ (desigualdade triangular).

O número $d(x, y)$ é chamado a **distância** entre x e y e o par (M, d) é chamado **espaço métrico**.

No que se segue nos referiremos ao espaço métrico (M, d) simplesmente por M.

Definição 2.2 (sequência)**.** Uma **sequência** de elementos de M é uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$, que associa a cada número natural n um elemento $v_n \in M$, chamado o *n-ésimo termo da sequência.* Escrevemos $(v_1, v_2, \ldots)$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (v_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é v_n.

Definição 2.3 (convergência de uma sequência)**.** Dizemos que uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ **converge** para $v \in M$ se

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0.$$

Neste caso escrevemos $v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ ou $v_n \to v$.

Definição 2.4 (distância entre ponto e um conjunto)**.** Dados $x \in M$ e $A \subset M$, a **distância** de x ao conjunto A é dada por

$$d(x, A) := \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Definição 2.5 (imersão isométrica)**.** Sejam (M, d_M),(N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$. Se, $\forall\, x, y \in M$,

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),$$

então dizemos que f é uma **imersão isométrica**. Se, além disso, f é sobrejetiva, então f é uma **isometria** entre M e N.

Definição 2.6 (métrica induzida)**.** Dada uma aplicação $f : X \to M$ definida num conjunto arbitrário $X \neq \emptyset$, definimos uma métrica em X por

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = d(f(x), f(y)). \end{aligned}$$

Esta métrica é chamada **métrica induzida** em X pela aplicação f. Relativamente a essa métrica f é uma imersão isométrica.

Definição 2.7 (bola aberta)**.** Dados $x \in M$ e $r > 0$, defininos a **bola aberta** $B_M(x, r)$ em M, de raio r e centrada em x por

$$B_M(x, r) = \{y \in M;\ d(x, y) < r\}.$$

Definição 2.8 (bola fechada)**.** Dados $x \in M$ e $r > 0$, defininos a **bola fechada** $B_M[x, r]$ em M, de raio r e centrada em x por

$$B_M[x, r] = \{y \in M;\ d(x, y) \leq r\}.$$

Definição 2.9 (conjunto limitado)**.** Se $A \subset M$ é tal que $\exists\, r > 0$ e $A \subset B_M(x, r) \subset M$, para algum $x \in M$, então dizemos que A é um conjunto **limitado**.

Definição 2.10 (ponto isolado)**.** Um ponto $x \in M$ é dito **isolado** quando existe $r > 0$ tal que $B_M(x, r) = \{x\}$. Se, $\forall\, x \in M$, x é ponto isolado, então M é um conjnto **discreto**.

Definição 2.11 (diâmetro de um conjunto)**.** Seja $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. O número

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

é chamado o **diâmetro** do conjunto A.

Definição 2.12 (elementos topológicos)**.** Considere M um espaço métrico.

1. Um subconjunto $S \subset M$ é uma **vizinhança** de $x \in M$ se existe $r > 0$ tal que $B_M(x, r) \subset S \subset M$.

2. O **interior** de $A \subset M$ é o conjunto

$$A^\circ := \{x \in M; \exists\, r > 0\ \wedge\ B_M(x, r) \subset A\}.$$

3. O **fecho** de $A \subset M$ é definido por

$$\overline{A} := \{x \in M; A \cap B_M(x, r) \neq \emptyset,\ \forall\, r > 0\}.$$

4. Definimos a **fronteira** ∂A de $A \subset M$ pondo

$$\partial A := \{x \in M\ ;\ \forall\, r > 0, A \cap B_M(x, r) \neq \emptyset \wedge (X \setminus A) \cap B_M(x, r) \neq \emptyset\}.$$

Definição 2.13 (separabilidade e completude)**.**

1. Dizemos que M é **separável** se existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que, para cada $x \in M$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe $n(x, \varepsilon)$ tal que $x_n \in B_M(x, \varepsilon)$. Mais precisamente,

$$\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M; \forall\, x \in M,\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n(x, \varepsilon); x_n \in B_M(x, \varepsilon).$$

2. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ converge para um ponto $x \in M$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Longrightarrow\ x_n \in B_M(x, \varepsilon).$$

3. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ é uma **sequência de Cauchy** se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,; m, n > n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

4. O espaço métrico M é **completo** se toda sequencia de Cauchy de M é convergente.

Teorema 2.1. *Se a sequência de Cauchy $(x_n) \in M$ possui uma subsequência $(x_{n_k}) \in M$ convergente, então (x_n) é convergente.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como (x_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $m, n > n_0$. Suponha que $x_{n_k} \longrightarrow x \in M$. Então existe $k_0 > n_0$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $k > k_0$. Assim,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Definição 2.14. Definimos o espaço métrico das aplicações limitadas definidas num conjunto arbitrário $X \neq \emptyset$ por

$$\mathfrak{B}(X; M) = \{f : X \to M; f(X) \subset M \ \textit{é limitado}\},$$

munido com a métrica

$$\begin{aligned} d : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto d(f, g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Definição 2.15 (função contínua e uniformemente contínua)**.** Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e considere o mapeamento $f : M \to N$. Então,

1. Dizemos que f é **contínua** em $a \in M$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(a, \varepsilon) > 0\ ;\ d_M(x, a) < \delta \Longrightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

ou, equivalentemente,

$$f(B_M(a, \delta)) \subset B_N(f(a), \varepsilon).$$

Se, $\forall\, a \in M, f$ é contínua em a, então dizemos que $f : M \to N$ é **contínua**.

2. Dizemos que f é **uniformemente contínua** se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ ;\ d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \forall x, y \in M.$$

2.2 Espaços topológicos

Definição 2.16 (topologia)**.** Uma *topologia* num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados *conjuntos abertos*, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Qualquer união de elementos de τ é um elemento de τ;
2. Qualquer interseção finita de elementos de τ pertence a τ;
3. X e $\emptyset$ pertencem a τ.

Neste caso dizemos que (X, τ) é um espaço *topológico*

Definição 2.17 (cobertura)**.** Sejam E um espaço topológico e I um conjunto de índices. Diz-se que uma família $(A_j)_{j\in I}$ de partes de E é uma **cobertura** de E se $E = \bigcup\limits_{j\in I} A_j$; uma tal cobertura diz-se *aberta (respectivamente finia)* se, para cada $j \in I$, A_j for um aberto (resp. finito). As subfamílias de uma cobertura que sejam coberturas designam-se por **sub-coberturas**. Diz-se que E é **compacto** se qualquer cobertura aberta de E possui uma sub-cobertura finita.

2.3 Espaços vetoriais normados

Nesta seção definimos as operações de soma e multiplicação por um escalar num conjunto e impomos a condição de linearidade para caracterizar um espaço vetorial. Vimos na seção anterior que em espaços métricos podemos determinar a distância de dois pontos quaisquer. Definiremos uma estrutura onde tudo isso pode ser feito num mesmo ambiente.

2.3.1 Espaço e subespaço vetoriais

Definição 2.18 (Espaço vetorial)**.** Seja E um conjunto não vazio cujos objetos denominamos genericamente de vetores. Definimos nesse conjunto as seguintes operações:

EV1) Adição:

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto +(u, v) = u + v; \end{aligned}$$

EV2) Multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, v) &\longmapsto \cdot(\alpha, v) = \alpha v. \end{aligned}$$

O conjunto E munido com essas operações é um **$\mathbb{R}$-espaço vetorial** se satisfaz as seguintes propriedades:$\forall\, u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

$S1)$ Associatividade da soma: $(u + v) + w = u + (v + w)$;

$S2)$ Comutatividade da soma: $u + v = v + u$;

$S3)$ Vetor neutro aditivo: Existe um elemento $0 \in E$ tal que $0 + v = v + 0 = v$;

$S4)$ Vetor simétrico aditivo: Para cada vetor $u \in E$, existe um único vetor $-u \in E$ tal que $(-u) + u = 0$;

$M1)$ Associatividade do produto: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

$M2)$ $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

$M3)$ $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;

$M4)$ Multiplicação por um: $1v = v1 = v$;

Definição 2.19 (Subespaço vetorial)**.** Seja E um espaço vetorial. Um conjunto $F \subset E$ é chamado de **subespaço vetorial** de E se cumpre as seguintes propriedades:

1. $0 \in F$;
2. $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$;
3. $u \in F, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta u \in F$.

2.3.2 Dependência e independência linear

Definição 2.20 (Combinação linear)**.** Sejam V um espaço vetorial e $X \subset V$ um subconjunto não vazio de V. Um vetor $v \in V$ é uma **combinação linear** dos vetores de X se é representado por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad \text{onde } v_i \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.21 (Subespaço gerado)**.** Sejam V um espaço vetorial e $X \subset V$ um subconjunto. Então, o **subespaço gerado por** X, denotado por $\operatorname{span}(X)$ é o subespaço de V formado por todas as combinações lineares finitas dos elementos de X.

Definição 2.22 (Independência e dependência lineares)**.** Seja E um espaço vetorial e $X \subset E$ um conjunto arbitrário. Dizemos que X é **linearmente independente (L.I.)** se qualquer subconjunto finito F de X é linearmente independente no sentido de que nenhum vetor $w \in F$ pode ser escrito como combinação linear de outros vetores de F.

Um subconjunto X de um espaço vetorial E é **linearmente dependente (L.D.)** quando não é L.I..

Teorema 2.2. *Seja $X = \{v_1, \cdots, v_n\}$ um conjunto L.I. do espaço vetorial E. Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Reciprocamente, se a única combinação linear nula dos vetores de X é aquela cujos coeficientes são iguais a zero, então X é um conjunto L.I.

Demonstração. Suponha por abusrdo que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$, com $v_1, ..., v_n \in X$, com $\alpha_i = 0$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Por simplicidade, suponha que seja α_1. Teríamos então $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$ uma combinação linear do vetores de X.

Reciprocamente, se X fosse fosse linearmente dependente teríamos, por exemplo, $v_1 = \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$; logo $1 v_1 - \alpha_2 v_2 - ... - \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear nula de vetores de X com o primeiro coeficiente diferente de zero. ■

2.3.3 Base e dimensão

Definição 2.23. Seja $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial e I um conjunto enumerável de índices e $J \subset I$ um subconjunto finito. Uma **base de Hamel** em E é uma família $(e_i)_{i \in I}$ de vetores $e_i \in E$ tal que

- $(e_i)_{i \in I}$ é linearmente independente, isto é

$$\forall\, (e_j)_{j \in J} \subset (e_i)_{i \in I}, \exists\, \alpha_j \in \mathbb{R}\,;\, \sum_{j \in J} \alpha_j e_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \forall j \in I.$$

- $\operatorname{span}(e_i)_{i \in I} = E$.

Definição 2.24. O espaço vetorial E possui **dimensão finita (resp. infinita)**, se possui uma base de Hamel finita (respec. infinita) e sua dimensão é denotada por **dim E**.

Definição 2.25. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto T(v) = Tv. \end{aligned}$$

é uma **transformação linear** se cumpre, $\forall\, u, v \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

A tranformação T é **semilinear** se, $\forall\, u, v \in E,\ \lambda > 0$

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= \lambda T(u); \\ T(u + v) &\leq T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Indicamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço vetorial das transformações lineares $T : E \longrightarrow F$. O espaço $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ dos **funcionas lineares** $\gamma : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado **espaço dual** de E e é representado por E^*.

Definição 2.26 (Injetividade e sobrejetividade)**.** Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é **injetiva** se $u \neq v$ em E implica $Tu \neq Tv$ em F. A aplicação T é **sobrejetiva** quando, dado $v \in F$, existe $u \in E$ tal que $Tu = v$. Se T é injetiva e sobrejetiva, então é um **isomorfismo**.

2.3.4 Espaço vetorial normado

Definição 2.27 (Norma)**.** Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Uma **norma** em E é uma função definida por

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|\cdot\|_E(v) = \|v\|_E, \end{aligned}$$

cumprindo as seguintes propriedades: $\forall\, u, v \in E$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\|v\|_E \geq 0 \quad e \quad \|v\|_E = 0 \Leftrightarrow v = 0;$ (Positividade)
2. $\|\alpha v\|_E = |\alpha| \|v\|_E;$ (Homogeneidade positiva)
3. $\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E.$ (Desigualdade triangular)

O par $(E; \|\cdot\|_E)$ é chamado **espaço vetorial normado**.

Observação 2.1. Todo espaço normado é espaço métrico.

Definição 2.28 (Seminorma)**.** Definimos a **seminorma** em E como sendo o mapeamento

$$\begin{aligned} |\cdot|_E : &E \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto |\cdot|_E(v) = |v|_E, \end{aligned}$$

e que satisfaz as seguintes propriedade: $\forall\, u, v \in E,\ \alpha \in \mathbb{R}$,

1. $|v| \geq 0;$
2. $|\alpha v| = |\alpha||v|;$
3. $|u + v| \leq |u| + |v|,$

que difere da definição de norma apenas no fato que $|v| = 0$ não implica necessariamente $v = 0$.

2.4 Noções de medida e integração

Nesta seção apresentamos importantes resultados da Teoria da Medida (Lema de Fatou, Teorema da Convergência Monótona e Teorema da Convergência Dominada). Esses resultados sustentam a identificação dos espaços $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com os chamados espaços de Banach. Tais espaços serão definidos na próxima seção. Mencionamos ainda que os espaços $L_p(\Omega)$ são formados por funções mensuráveis que são p-integráveis no sentido de Lebesgue. Tais conceitos serão formalizados na sequência.

2.4.1 Espaços mensuráveis

Definição 2.29 (σ-álgebra)**.** Seja $X \neq \emptyset$. Uma família Σ de subconjutos de X é uma σ-álgebra em X se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset, X \in \Sigma$;
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c := (X \setminus A) \in \Sigma$;
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

.

O par $(X; \Sigma)$ é chamado **espaço mensurável** e os elementos $A \in \Sigma$ são chamados de **conjuntos mensuráveis**.

Seja $\mathcal{F} \subset X$ uma coleção de subconjuntos de X. A **σ-álgebra** gerada por $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra resultante da interseção de todas as σ-álgebras de X que contém $\mathcal{F}$ e é representada por $\Sigma(\mathcal{F})$.

Quando (X, τ) é um espaço topológico, a σ-álgebra $\Sigma(\tau)$ é chamada de **σ-álgebra de Borel** de X e denotada por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados **conjuntos de borel** ou **borelianos**.

Definição 2.30. O conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ é denominado a **reta estendida**.

Definição 2.31. A topologia usual em $\mathbb{R}$ induz uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$ considerando como abertos os subconjuntos $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ da forma:

1. $A \subset \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$, ou
2. $A = [-\infty, a)$, para algum $a \in \mathbb{R}$, ou
3. $A = (a, \infty]$, para algum $a \in \mathbb{R}$, ou
4. A é a união de conjuntos como os indicados nos itens (1),(2) ou (3).

Consideraremos $\overline{\mathbb{R}}$ como o espaço mensurável com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ relativa a esta topologia.

2.4.2 Funções mensuráveis

Definição 2.32. O conjunto de todas as funções mensuráveis definidas em X é dado por

$$M(X, \Sigma) = \{f : (X, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ f^{-1}(A) \in \Sigma\,,\ \forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}.$$

ou, equivalentemente,

$$M(X, \Sigma) = \{f : (X, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, f^{-1}(\alpha, \infty] \in \Sigma\}.$$

Lema 2.1. *Dados $f \in M(X, \Sigma)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, são equivalentes:*

(a): $A_\alpha = \{x \in X\ ;\ f(x) > \alpha\} \in \Sigma$;

(b): $B_\alpha = \{x \in X\ ;\ f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$;

(c): $C_\alpha = \{x \in X\ ;\ f(x) < \alpha\} \in \Sigma$;

(d): $D_\alpha = \{x \in X\ ;\ f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Basta observar que

$$B_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \Sigma;$$

$(b) \Rightarrow (c)$: Por definição, $B_\alpha = (C_\alpha)^c \in \Sigma$;
$(c) \Rightarrow (d)$: Tem-se

$$D_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \Sigma;$$

$(d) \Rightarrow (a)$: Segue da definição $A_\alpha = (D_\alpha)^c \in \Sigma$. ■

Proposição 2.1. *Se $f, g \in M(X, \Sigma)$, então são também mensuráveis*

1. λf;
2. $f + g$;
3. f^2;
4. fg;
5. $|f|$;
6. $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$.

Demonstração. 1. Caso $\lambda = 0$ a afirmação é verdadeira. Se $\lambda > 0$, obtemos

$$\{x \in X; \lambda f(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\right\} \in \Sigma.$$

Para $\lambda < 0$ temos

$$\{x \in X; \lambda f(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}\right\} \in \Sigma; \tag{2.1}$$

2. Dado $r \in \mathbb{Q}$, considere o conjunto

$$S_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\} = f^{-1}(r, \infty] \cap g^{-1}(\alpha - r, \infty] \subset \Sigma.$$

Assim,

$$\{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$$

3. Caso $\alpha < 0$ temos

$$\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} = X \in \Sigma;$$

Caso contrário,

$$\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \Sigma.$$

4. Pelo que vimos, $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2] \in \Sigma$.

5. Para $\alpha < 0$

$$\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X \in \Sigma;$$

Para $\alpha \geq 0$, temos

$$\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\} \in \Sigma.$$

6. Finalmente, pelos resultados anteriores,

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}[f+g+|f-g|];$$
$$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}[f+g-|f-g|].$$

■

Proposição 2.2. *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis em $M(X,\Sigma)$. Então, são também mensuráveis:*

$$\inf_{n\to\infty} f_n,\ \sup_{n\to\infty} f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n,\ \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

Em particular,

$$\forall x \in X,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Longrightarrow f \in M(\Sigma,\mu).$$

Demonstração. Podemos escrever

$$\{x\in X; \inf f_n(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X; f_n(x)\geq\alpha\} \in \Sigma;$$
$$\{x\in X; \sup f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X; f_n(x)>\alpha\} \in \Sigma.$$

Além disso, observando que $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n} f_n(x)$ e $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n} f_n(x)$, obtemos

$$\{x\in X; \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X; \inf f_n(x)\geq\alpha\} \in \Sigma;$$
$$\{x\in X; \limsup_{n\to\infty} f_n(x) > \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X; \sup f_n(x)>\alpha\} \in \Sigma.$$

Finalmente,

$$f(x) = \lim f_n(x) = \liminf f_n(x) \in \Sigma.$$

■

Sejam (X,Σ) um espaço mensurável e $A\subset X$ um subconjunto. Definimos a **função característica** de A por

$$\begin{aligned} 1_A : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Uma combinação linear finita de funções características é chamada de **função simples mensurável** e possui a seguinte representação canônica:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\},\ A_i \in \Sigma,\ A_i \neq \emptyset,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \alpha_i \neq \alpha_j$.

Consideraremos a representação canônica de uma função simples $\varphi \in M(X, \Sigma)$ daqui em diante.

2.4.3 Medidas

Definição 2.33 (Medida)**.** Uma **medida** num espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ que cumpre as seguintes propriedades:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma;\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i, j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Quando $\mu(X) < \infty$ dizemos que a medida μ é **finita**. Se existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, então a medida μ é chamada σ-finita. O terno (X, Σ, μ) é chamado espaço de medida.

Definição 2.34. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f, g, f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então

(a) $f = g \quad \mu$-quase sempre (μ-q.s.) se $\exists\, A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)\ \forall x \notin A$;

(b) $f_n \longrightarrow f \quad \mu$-quase sempre se $\exists\, A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall x \notin A$.

2.4.4 Integração

Definição 2.35. Considere (X, Σ, μ) um espaço de medida e $M^+(X, \Sigma) = \{f \in M(X, \Sigma); f(x) \geq 0, \forall x \in X\}$. Definimos:

(a) $\forall\, \varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$,

$$\int_X \varphi\, d\mu := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j).$$

(b) $\forall\, f \in M^+(X,\Sigma)$.

$$\int_X f\, d\mu := \sup\left\{\int_X \varphi\, d\mu\ ;\ \varphi \in M^+(M,\Sigma) \text{ é simples e } 0 \le \varphi \le f\right\}.$$

(c) $\forall\, f \in M^+(X,\Sigma),\ A \in \Sigma,$

$$\int_A f\, d\mu := \int_X f 1_A\, d\mu.$$

Lema 2.2. *(a) Se $f, g \in M^+(X,\Sigma)$ e $f \le g$, então*

$$\int_X f(x)\, d\mu \le \int_X g(x) d\mu.$$

(b) Se $f \in M^+(X,\Sigma)$, $E, F \subset X$ e $E \subseteq F$, então

$$\int_E f(x)\, d\mu \le \int_F f(x)\, d\mu.$$

Demonstração.

(a) Basta observar que

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\, d\mu &= \sup\left\{\int_X \varphi(x)\, d\mu;\ \varphi \text{ é simples, } 0 \le \varphi \le f\right\}\\ &\le \sup\left\{\int_X \psi(x)\, d\mu;\ \psi \text{ é simples, } 0 \le \psi \le g\right\} = \int_X g(x)\, d\mu.\end{aligned}$$

(b) Considere $f1_E \le f1_F$ e aplicando o item (a) concluímos a demonstração. ■

Teorema 2.3. *(Convergência Monótona): Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $M^+(X,\Sigma)$ tal que $f_i \le f_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, e $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall x \in X$. Então*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu; \tag{2.2}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.2, $f \in M^+(X,\Sigma)$. Temos ainda, pela monotonicidade da integral, Lema 2.2, que $f_n \le f_{n+1} \le f$ implica

$$\int_X f_n(x) d\mu \le \int_X f(x) d\mu$$

e assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu \le \int_X f(x) d\mu.$$

Por outro lado, dados $\alpha \in]0,1[$ e φ simples com $0 \le \varphi \le f$, considere o conjunto

$$B_n = \{x \in X;\ f_n(x) \ge \alpha\varphi(x)\}.$$

Da monotonicidade de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos $B_n \subset B_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = X$. Novamente, usando a monotonicidadeda integral,

$$\int_{B_n} \alpha\varphi(x)\, d\mu \leq \int_{B_n} f_n(x)\, d\mu.$$

Tomando limites,

$$\alpha \int_X \varphi(x)\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

A desigualdade acima vale para $\alpha \in (0,1)$, assim

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

Pelo item (b) da definição 2.35,

$$\int_X f(x)\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

como queríamos. ■

Teorema 2.4. *(Lema de Fatou):*

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^+(X,\Sigma) \Longrightarrow \int_X \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\, d\mu. \tag{2.3}$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$. Então $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Sendo assim,

$$\int_X g_m\, d\mu \leq \int_X f_n\, d\mu, \quad m \leq n,$$

de modo que

$$\int_X g_m\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Como a sequência (g_m) é não decrescente e converge para $\liminf f_n$, pelo Teorema da Convergência Monótona 2.3 temos

$$\begin{aligned} \int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu &= \lim \int_X g_m\, d\mu \\ &\leq \liminf \int_X f_n\, d\mu. \end{aligned}$$

■

Definição 2.36.

(a) Dada $f \in M^+(X,\Sigma)$, definimos suas partes positiva e negativa como respectivamente

$$\begin{aligned} f^+ : X &\longrightarrow [0,\infty) \\ x &\longmapsto f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^- : X &\longrightarrow [0,\infty) \\ x &\longmapsto f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}. \end{aligned}$$

Além disso, $f \in M(X,\Sigma) \Leftrightarrow f^+, f^- \in M(X,\Sigma)$.

(b) Uma função $f \in M(X,\Sigma)$ é dita **lebesgue-integrável** se $\int_X f^+ \, d\mu < \infty$ e $\int_X f^- \, d\mu < \infty$. Sendo assim, definimos

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Proposição 2.3.

(a) *Uma função mensurável $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso tem-se*

$$\left| \int_X f(x) \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

(b) *Sejam $f, g \in M(X,\Sigma,\mu)$ integráveis e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f+g$ são integráveis e*

$$\int_X \alpha f(x) \, d\mu = \alpha \int_X f(x) \, d\mu \quad e \quad \int_X (f+g)(x) \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu + \int_X g(x) \, d\mu.$$

Demonstração.

Veja a demonstração em Bartle (1995), pg. 43. ■

Corolário 2.1. *Se $f \in M(X,\Sigma)$, $\int_X g \, d\mu < \infty$ e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e*

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X |g| d\mu. \tag{2.4}$$

Demonstração. Veja a demonstração em Bartle (1995), pg. 43. ■

Teorema 2.5. *(Teorema da Convergência Dominada): Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M(X,\Sigma)$ uma sequência de funções integráveis tal que $f_n \longrightarrow f$. Se existe uma função g integrável tal que $|f_n| \leq g$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n, f num conjunto de medida nula, podemos assumir que a convergêcnia ocorre em todos os pontos de X. Assim f é integrável pelo Corolário 2.1. Como $g + f_n \geq 0$, pelo Lema de Fatou temos

$$\begin{aligned}
\int_X g \, d\mu + \int_X f \, d\mu = \int_X (g+f) \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g+f_n) \, d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X g \, d\mu + \int_X f_n \, d\mu \right) \\
&= \int_X g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu. \\
&\Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $g - f_n \geq 0$ e novamente pelo Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned}\int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu = \int_X (g-f)\, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\, d\mu \\ &= \int_X g\, d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \\ &= \int_X g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \\ &\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

■

2.5 Espaços de Banach

Definimos nesta seção os espaços de Banach e, como exemplos, apresentamos os espaços de funções p-integráveis. Veremos alguns resultados preliminares como a desigualdade de Holder e a Desigualdade de Minkowski para integrais. Finalmente daremos foco para os casos onde $p \in \{1, 2\}$ e para o espaço das funções localmente integráveis. Mais a diante introduziremos a estrutura de produto interno num espaço de Banach e a partir daí definiremos os espaços de Hilbert, onde estabelecemos no Teorema de BNB.

Definição 2.37 (Espaço de Banach)**.** Um espaço normado E é um **espaço de Banach** quando é completo na métrica induzida pela norma.

Proposição 2.4. *Sejam E um espaço de Banach e $F \subset E$ um subespaço. Então F é Banach se, e somente se F é fechado em E.*

Demonstração. **($\Rightarrow$):** Suponha F um espaço de Banach e considere $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in F$ tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F e assim é convergente, pois F é completo. Logo $\exists\, y \in F$ tal que $x_n \longrightarrow y$. O resultado segue da unicidade do limite.

($\Leftarrow$): Suponha F fechado e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in F$ uma sequência de Cauchy. Assim $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, logo $\exists\, x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como F é fechado, tem-se $x \in F$ e portanto F é completo. ■

Definição 2.38. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Definimos o conjunto $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ por

$$\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu) := \{f \in M(X, \Sigma); \|f\|_p < \infty\}, \quad \text{onde} \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5}$$

Teorema 2.6 (Desigualdade de Holder para Integrais)**.** *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então*

$$f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu) \text{ e } g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu) \Longrightarrow fg \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu) \text{ e } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. A desigualdade é verdadeira se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. Suponha $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Primeiro vamos verificar a seguinte desigualdade: $\forall\, a, b > 0$,

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{2.6}$$

Considere, $\forall\, \alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} f_\alpha : (0,\infty) : &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f_\alpha(t) = t^\alpha - \alpha t. \end{aligned}$$

Como f_α assume um valor máximo em $t = 1$, tem-se, $\forall\, t > 0$,

$$\begin{aligned} & f_\alpha(t) \leq f_\alpha(1) \\ \Rightarrow\ & t\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha \\ \Rightarrow\ & t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha). \end{aligned}$$

Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, obtem-se a desigualdade (2.6). Tomando

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \text{ e } b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \tag{2.7}$$

em (2.6) o resultado segue. ∎

Teorema 2.7 (Desigualdade de Minkowski para integrais)**.** *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\begin{aligned} f, g \in \mathcal{L}_p(X,\Sigma,\mu) \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}_p(X,\Sigma,\mu) \ \ e& \\ \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.& \end{aligned} \tag{2.8}$$

Demonstração. O resultado vale para $p = 1$ ou $\|f+g\|_p = 0$. Suponha então $p \neq 1$ e $\|f+g\|_p \neq 0$. Observe que, $\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= 2^p(\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

e assim $f+g \in \mathcal{L}_p(X,\Sigma,\mu)$. Agora vamos provar (2.8). Inicialmente veja, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} |\ f(x)+g(x)\ |^p &=|\ f(x)+g(x)\ ||\ f(x)+g(x)\ |^{p-1} \\ &\leq|\ f(x)+g(x)\ |^{p-1} (|\ f(x)\ | + |\ g(x)\ |) \\ &=|\ f(x)\ ||\ f(x)+g(x)\ |^{p-1} + |\ g(x)\ ||\ f(x)+g(x)\ |^{p-1}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos $(p-1)q = p$, e portanto

$$|\ f+g\ |^{p-1} =|\ f+g\ |^{\frac{p}{q}} \in \mathcal{L}_q(X,\Sigma,\mu).$$

Usando a desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned} \int_X |\ f\ ||\ f+g\ |^{p-1}\, d\mu &\leq \left(\int_X |\ f\ |^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |\ f+g\ |^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}; \\ \int_X |\ g\ ||\ f+g\ |^{p-1}\, d\mu &\leq \left(\int_X |\ g\ |^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |\ f+g\ |^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Somando ordenadamente as duas desigualdades acima e combinadno com (2.9), temos

$$\int_X |\, f+g\,|^p \, d\mu \leq \left(\int_X |\, f+g\,|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_X |\, f\,|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |\, g\,|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

e dividindo ambos os membros por $(\int_X |f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{q}}$, obtemos o resultado desejado. ■

Uma vez que pode ocorrer $\|f\|_p = 0$ sem que $f = 0$, $\|\cdot\|_p$ não é, em geral, uma norma em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$. Para contornar esse problema definimos a seguinte relação de equivalência em $(X, \Sigma, \mu) : f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-q.s.. Assim, as operações de soma e multiplicação por um escalar estão bem definidas no conjunto quociente $L_p(X, \Sigma, \mu) = \{[f]; f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)\}$ tornando-o um espaço vetorial. Além disso, considerando a norma no espaço quociente por $\|f\|_p$, $\|\cdot\|_p$ se torna uma norma e $(L_p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado. Comumente usa-se f no lugar de $[f]$ para nos referirmos às classes de equivalência do espaço $L_p(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema 2.8. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

Demonstração. Como $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é normado, resta provar a completude. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ um sequência de Cauchy. Então

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,;\ m, n > n_0 \Rightarrow \int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon^p. \tag{2.11}$$

Seja $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Considere a função

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim $g \in M^+(X, \Sigma)$ e, além disso,

$$|g|^p = \lim_{n\to\infty} \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\right)^p.$$

Pelo Lema de Fatou 2.3, temos

$$\int_X |g|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu.$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$ e usando a desigualdade de Minskowski (2.8), obtemos

$$\left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p\right) \leq \|g_1\|_p + 1. \tag{2.13}$$

Então, definindo $A = \{x \in X \,;\, g(x) < \infty\}$, de (2.13) podemos concluir que $\mu(X \setminus A) = 0$. Logo a série em (2.12) converge exceto talvez num conjunto de medida nula $X \setminus A$, isto é a série converge μ-quase sempre. Segue que a função $g1_A \in L_p(X, \Sigma, \mu)$. Defina

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x) - g_k(x)), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_k - g_{k-1})$, temos

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq |g(x)|,$$

$\forall\, x \in X$ e $g_k(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall\, x \in A$, isto é $g_k \to f$ μ-q.s.. Pelo Teorema da Convergência Dominada 2.5, segue que $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$. Como

$$\begin{aligned} &|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2g)^p 1_A \quad \mu \text{ - q.s. e} \\ &\lim_{k\to\infty} |f - g_k|^p = 0 \quad \mu \text{ - q.s.,} \end{aligned}$$

novamente pelo Teorema da Convergência Dominada 2.5, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f - g_k|^p \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0.$$

Daí concluímos que $g_k \longrightarrow f$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Assim $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para f. Portanto $f_n \longrightarrow f$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$ pelo Teorema 2.1. ■

Consideraremos daqui em diante $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$, μ como sendo a medida de Lebesgue e escreveremos $L_p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu) = L_p(\Omega)$. A seguir apresentamos os espaços $L_1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ e $L_\infty(\Omega)$.

Fazendo $p = 1$ no espaço $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, obtemos

$$L_1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ \|u\|_{L_1(\Omega)} < \infty\}, \quad \text{onde} \quad \|v\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega |v| \, d\mu,\ \forall\, v \in L_1(\Omega).$$

Uma função $f \in M(X, \Sigma)$ é **localmente integrável** se $\forall\, K \subset \Omega$ compacto, $f|_K \in L_1(K)$. Além disso, como

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

onde $U_i \in \tau(\Omega)$ e $\overline{U_i} \in \Omega$, $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$, então f é localmente integrável se, e somente se, para todo aberto $U \subset \Omega$, tal que $\overline{U} \in \Omega$, tem-se $f|_U \in L_1(U)$. O conjunto das funções localmente integráveis é um espaço vetorial, denotado por $\mathcal{L}_{1,loc}(\Omega)$, e consideraremos o conjunto quociente

$$L_{1,loc}(\Omega) := \mathcal{L}_{1,loc}(\Omega)/\mathcal{R}$$

onde $\mathcal{R}$ é a relação de igualdade μ-q.t.p..

No caso $p = 2$ temos

$$L_2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty\}, \quad \text{onde} \quad \|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 2.39. Sejam $N \in \mathcal{B}(\Omega)$, com $\mu(N) = 0$, e $K \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega) := \{f \in M(\Omega, \mathcal{B}(\Omega));\ |f(x)| < K,\ \forall\, x \notin N\}.$$

Além disso, se $f \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)$ e $N \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\mu(N) = 0$, definimos

$$S_f(N) := \sup_{x \notin N} |f(x)| \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty := \inf_{\mu(N)=0} S_f(N).$$

Novamente pode ocorrer $\|f\|_\infty = 0$ sem que f seja a função identicamente nula, logo tomam-se as classes de equivalência $[f] = \{g \in \mathcal{L}_\infty(\Omega);\ f = g\ \mu\text{-q.s.}\}$ e obtem-se assim o espaço normado

$$L_\infty(\Omega) = \{[f];\ f \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)\}, \quad \text{e} \quad \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty. \tag{2.14}$$

Teorema 2.9. *$L_\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Provaremos a completude. Seja $(f_n)_{n=1}^\infty \in L_\infty(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \exists\, M_{m,n} \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\mu(M_{m,n}) = 0$ e

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_\infty, \quad \forall\, x \notin M_{m,n}.$$

Fazendo $M = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} M_{m,n}$, teremos $\mu(M) = 0$, e $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_\infty, \quad \forall\, x \notin M. \tag{2.15}$$

Logo, para cada $x \notin M$, a sequência $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, logo é convergente pois $\overline{\mathbb{R}}$ é um espaço métrico completo. Definindo

$$f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f_n(x), & \text{se } x \notin M \\ 0, & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

Pela Proposição 2.2, f é uma função mensurável. Por (2.15) e como $(f_n)_{n=1}^\infty$ é Cauchy, tem-se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ m, n \ge n_0 \Rightarrow \sup_{x \notin M} |f_m(x) - f_n(x)| \le \varepsilon.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$,

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{2.16}$$

Assim, $f_n \to f$ uniformemente em $X \setminus M$. Por (2.16), resulta $f_n - f \in L_\infty(\Omega)$ para n suficientemente grande. Logo, como $f = f_n - (f_n - f)$, obtemos $f \in L_\infty(\Omega)$, logo, por (2.16),

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Portanto, $(f_n)_{n=1}^\infty \longrightarrow f$ em $L_\infty(\Omega)$. ∎

2.6 Operadores lineares contínuos

Operadores lineares contínuos são mapeamentos entre espaços normados que são simultâneamente lineares e contínuos. Veremos aqui resultados de grande utilidade sobre tais operadores. Também é apresentado aqui o teorema da aplicação aberta que possui um protagonismo especial na última parte do Teorema de BNB.

A fim de caracterizar tais operadores, definimos as seguintes classes de funções:

Definição 2.40. Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos e $f : M \longrightarrow N$. Então dizemos que f é

1. *lipschitziana* se $\exists\, L > 0;\ d(f(x), f(y))_N \leq L\, d(x, y)_M, \quad \forall\, x, y \in M;$
2. *uniformemente contínua* se $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0; (\ x, y \in M \ \wedge\ d(x, y)_M < \delta) \Rightarrow d(f(x), f(y))_N < \varepsilon.$

O próximo teorema apresenta equivalências no contexto de espaços métricos considerando os operadores lineares. Tais equivalências não valem, no geral, na ausência da linearidade.

Teorema 2.10. *Sejam E, F $\mathbb{R}$-espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, com $\mathcal{L}(E, F)$ denotando o espaços das transformações lineares de E em F. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *T é lipschitziano;*

(b) *T é uniformemente contínuo;*

(c) *T é contínuo;*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E;*

(e) *T é contínuo na origem;*

(f) $\sup\{\|T(x)\|_F;\ x \in E\ \wedge\ \|x\|_E \leq 1\} < \infty;$

(g) $\exists\, C \geq 0;\ \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E,\ \forall\, x \in E.$

Demonstração. De fato,

- (a)$\Rightarrow$(b): Basta tomar $\delta = \varepsilon/L$.
- (b)$\Rightarrow$(c): Basta fixar $x \in E$ e usar a arbitrariedade de x.
- (c)$\Rightarrow$(d): Segue diretamente da hipótese.
- (d)$\Rightarrow$(e): Suponha T contínuo em $x_0 \in E$ e fixe $\varepsilon > 0$. Então

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \; x \in E \, \wedge \, \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

Tome $x \in E$, de modo que $\|x\|_E < \delta$. Assim $\|(x - x_0) + x_0\|_E < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(0)\|_F = \|T(x)\|_F &= \|T(x) - T(x_0) + T(x_0)\|_F \\ &= \|T(x - x_0) + T(x_0)\|_F < \varepsilon.\end{aligned}$$

- (e)$\Rightarrow$(f): Temos

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; \|x\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_F < \varepsilon.$$

Se $\|x\|_E \leq 1$ então $\|\frac{\delta}{2}x\|_E < \delta$. Logo

$$\frac{\delta}{2}\|T(x)\|_F = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\|_F < \varepsilon \Rightarrow \|T(x)\|_F < \frac{2\varepsilon}{\delta} < \infty.$$

.

- (f)$\Rightarrow$(g): A desigualdade vale se $x = 0$. Supondo $x \neq 0$ e $C = \sup\{\|T(x)\|_F;\; x \in E \, \wedge \, \|x\|_E \leq 1\}$, tem-se

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_F \leq C \Longrightarrow \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

- (g)$\Rightarrow$(a): $\forall\, x, y \in E$,

$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq C\|x - y\|_E < \frac{C}{2}\|x - y\|_E.$$

Assim, o teorema está provado. ■

O item (f) nos indica como podemos munir de uma normar o espaço $\mathcal{L}(E, F)$:

Proposição 2.5. *Sejam E e F espaços normados. Então*

(a) *A expressão*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F, \tag{2.17}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$;

(b) $\|T(x)\|_F \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E$, $\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$;

(c) *Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ é Banach.*

Demonstração. Temos para cada $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E, \alpha \in \mathbb{R}$,

(a) 1. (Positividade) Como $\|T(x)\|_F \ge 0$, e $\|T(x)\|_F = 0 \Leftrightarrow T(x) = 0$, então

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{\|x\|_E \le 1} \|T(x)\|_F \ge 0 \text{ e } \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

2. (Homogeneidade positiva) $\|\alpha T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\limits_{\|x\|_E \le 1} \|\alpha T(x)\|_F = |\alpha| \sup\limits_{\|x\|_E \le 1} \|T(x)\|_F = |\alpha|\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

3. (Desigualdade triangular)

$$\begin{aligned}
\|T+S\|_{\mathcal{L}(E,F)} &:= \sup_{\|x\|_E \le 1} \|(T+S)(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|T(x)+S(x)\|_F \\
&\le \sup_{\|x\|_E \le 1} \{\|T(x)\|_F + \|S(x)\|_F\} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|T(x)\|_F + \sup_{\|x\|_E \le 1} \|S(x)\|_F \\
&:= \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|S\|_{\mathcal{L}(E,F)}.
\end{aligned}$$

(b) Como $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$, segue do Teorema 2.10 **(g)** que $\exists\, C \ge 0$ tal que

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_F \le C.$$

Tome $C = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

(c) Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Assim, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0 \Rightarrow \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$. Logo, $\forall\, x \in E$, $m, n > n_0$,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \le \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E < \varepsilon\|x\|_E. \tag{2.18}$$

Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, logo convergente, pois F é Banach. Suponha $T : E \to F$, $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$. Usando as propriedades de limites pode-se concluir a linearidade de T. Fazendo $m \to \infty$ em (2.18),

$$\|(T_n - T)(x)\|_F = \|T_n(x) - T(x)\|_F < \varepsilon\|x\|_E, \quad \forall\, x \in E,\ n > n_0. \tag{2.19}$$

Em particular, vale para $n = n_0$ e assim obtemos $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E,F)$. Portanto, $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E,F)$. De (2.19), $\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$, $\forall\, n > n_0$ e assim $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E,F)$.

■

2.6.1 Teorema da aplicação aberta

O teorema da aplicação aberta garante que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é uma aplicação aberta, ou seja, se $A \subset E$ é aberto, então $T(A) \subset F$ é aberto. Para demonstrá-lo precisamos dos resultados seguintes.

Teorema 2.11 (Teorema de Baire)**.** *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ uma família de fechados tais que $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que* $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponha por absurdo que $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Denotando $A_n = (F_n)^c = M \setminus F_n$, cada A_n é aberto e

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = (\operatorname{int}(F_n))^c = \emptyset^c = M, \quad \forall\, n \in N.$$

Em particular cada A_n é não vazio. Escolha $x_1 \in A_1$, logo existe $\delta_1 \in]0, 1[$ tal que $B_M[x_1, \delta_1] \subseteq A_1$. Como $\overline{A_2} = M$, temos $A_2 \cap B_M(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$. Além disso, $A_2 \cap B_M(x_1, \delta_1)$ é aberto, logo existe $(x_2 \in A_2, \delta_2 \in]0, 1[)$ tal que $B_M[x_2, \delta_2] \subseteq A_2 \cap B_M(x_1, \delta_1) \subseteq A_2 \cap B_M[x_1, \delta_1]$. Continuando o processo, construímos sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ e $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$0 < \delta < \frac{1}{n} \text{ e } B_M[x_{n+1}, \delta_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B_M[x_n, \delta_n], \quad \forall : n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Se $m, n \geq n_0$, como

$$B_M[x_n, \delta_n] \cap B_M[x_m, \delta_m] \subseteq B_M[x_{n_0}, \delta_{n_0}],$$

temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq 2\delta_{n_0} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ é uma sequência de Cauchy, logo convergente. Digamos $x_n \to x \in M$. Como $x_m \in B_M[x_m, \delta_m] \subseteq B_M[x_n, \delta_n]$, $\forall\, m \geq n$ e $B_M[x_n, \delta_n]$ é um conjunto fechado, segue que $x \in B_M[x_n, \delta_n] \subseteq A_n$. Portanto,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = M^c = \emptyset,$$

o que é uma contradição. ■

Lema 2.3. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E,F)$ contínuo. Tem-se*

$$\exists\, R, r > 0;\ \overline{T(B_E(0,R))} \supseteq B_F(0,r) \Longrightarrow T(B_E(0,R)) \supseteq B_F\left(0, \frac{r}{2}\right). \tag{2.20}$$

Demonstração. Como, para todo $M \subseteq E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$, segue da hipótese

$$\overline{T(B_E(0,\alpha R)} = \alpha \overline{T(B_E(0,R))} \supseteq \alpha B_F(0,r) = B_F(0,\alpha r), \quad \forall\, \alpha > 0. \tag{2.21}$$

Seja $y \in B_F\left(0, \frac{r}{2}\right)$. Por (2.21), $\exists\, x_1 \in B_E\left(0, \frac{R}{2}\right)$ tal que $\|y - T(x_1)\|_F < \frac{R}{2}$, isto é, $y - T(x_1) \in B_F(0, \frac{r}{4})$. Novamente por (2.21),

$$\exists\, x_2 \in B_E\left(0, \frac{R}{4}\right);\ \|y - T(x_1) - T(x_2)\|_F < \frac{r}{8}.$$

Como (2.21) vale para todo $\alpha > 0$ podemos continuar esse processo indefinidamente de forma a construir uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $x_n \in B\left(0, \frac{R}{2^n}\right)$ e

$$\|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\|_F \leq \frac{r}{2^{n+1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E$ é convergente, pois , pelo teste da comparação, $\|x_n\|_E < \frac{R}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{R}{2^n} \to 0$, logo

$$\left\|\sum_{j=m}^{\infty} x_j\right\|_E \leq \sum_{j=m}^{\infty} \|x_j\|_E \longrightarrow 0,\ \text{quando } m, n \longrightarrow \infty,$$

portanto a sequência $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E. Como E é Banach, existe $x \in E$ para o qual essa sequência converge. Segue então

$$\begin{aligned}\|x\|_E &= \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_j\right\|_E \le \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_E = \|x_1\|_E + \sum_{n=2}^{\infty}\|x_n\|_E \\ &< \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\|x_n\|_E \le \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{2^n} = R,\end{aligned}$$

e portanto $x \in B_E(0, R)$. Fazendo $n \to \infty$ em (2.22) obtemos

$$\|y - T(x)\|_F = \left\|y - T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\right\|_F = \lim_{n\to\infty}\|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\|_F \le \lim_{n\to\infty}\frac{r}{2^{n+1}} = 0,$$

e consequentemente $y = T(x)$. Daí $y \in T(B_E(0, R))$ como queríamos. ■

Teorema 2.12 (Teorema da aplicação aberta)**.** *Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. Considere $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_E(0, n)$ uma cobertura aberta de E. Como T é sobrejetor, temos

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0, n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0, n))}.$$

Pelo Teorema de Baire 2.11, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\overline{T(B_E(0, n_0))}) \neq \emptyset$. Logo, existem $b \in F$ e $r > 0$ tais que $B_F(b, r) \subseteq \overline{T(B_E(0, n_0))}$. Como $\overline{T(B_E(0, n_0))} = -\overline{T(B_E(0, n_0))}$, obtemos

$$B_F(-b, r) = -B_F(b, r) \subseteq -\overline{T(B_E(0; n_0))} = \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Observando que $x = \frac{1}{2}(b + x) + \frac{1}{2}(-b + x)$, então

$$\begin{aligned}B_F(0, r) &\subseteq \frac{1}{2}B_F(b, r) + \frac{1}{2}B_F(-b, r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0, n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0, n_0))} = \overline{T(B_E(0, n_0))},\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da convexidade do conjunto. Pelo Lema 2.3 sabemos que $T(B_E(0, n_0)) \supseteq B_F(0, \rho)$, para $\rho = \frac{r}{2}$, e portanto $T(B_E(0, cn_0)) \supseteq B_F(0, c\rho)$, para todo $c > 0$. Agora, para todo $x \in E$ e $c > 0$, temos $B_E(x, cn_0) = x + B_E(0, cn_o)$. Logo,

$$T(B_E(x, cn_0)) = T(x) + T(B_E(0, cn_0)) \supseteq T(x) + B_F(0, c\rho) = B_F(T(x), c\rho).$$

Provaremos agora que $T(U)$ é aberto em F para cada aberto U em E. Sejam $x \in U$ e $c > 0$ tais que $B_E(x, cn_0) \subseteq U$. Então

$$T(U) \supseteq T(B_E(x, cn_0)) \supseteq B_F(T(x), c\rho)$$

como queríamos demosntrar. ■

2.7 Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn Banach é um resultado muito importante na Análise Funcional devido à grande quantidade de aplicações. Essencialmente, em sua versão para espaços normados, esse teorema garante que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço B de um espaço normado A podem ser estendidos a todo o espaço A preservando a linearidade, continuidade e a norma. Em paralelo, o Lema de Zorn é aplicado como instrumento técnico de indução. Antes de apresentar esse Lema precisamos do conceito de ordenamento, apresentado a seguir.

Definição 2.41 (Ordem parcial e total)**.**

1. Uma **ordem parcial** num conjunto P é uma relação $\leq$ em P que satisfaz, $\forall\, x, y, z \in P$:

   a) $x \leq x$ (reflexividade);

   b) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antissimetria);

   c) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividade).

2. Seja $Q \subset P$. Uma **cota superior** $q \in P$ do subconjunto Q, caso exista, é tal que $p \leq q$, $\forall\, p \in Q$.

3. Um **elemento maximal** $m \in P$, caso exista, é tal que se $p \in P$ e $m \leq p$, então $m = p$.

4. Um subconjunto $Q \subset P$ é **totalmente ordenado** se é parcialmente ordenado e além disso, $\forall\, p, q \in Q$, $p \leq q \vee q \leq p$.

Lema 2.4 (Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado, não vazio, e no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.*

Demonstração. Veja em João e Valdeni (2008), pg 263. ■

Teorema 2.13 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função sublinear, ou seja, que satisfaz, $\forall\, x, y \in E$, $\alpha > 0$:*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x),$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Considere também $G \subset E$ um subespaço vetorial e $\varphi \in G^*$ tal que $\varphi(x) \leq p(x), \forall x \in G$. Então existe $\widehat{\varphi} \in E^*$ tal que $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in G$ e $\widehat{\varphi}(y) \leq p(y)$, $\forall\, y \in E$.

Demonstração. Considere a seguinte família $\mathcal{P}$ de funcionais lineares definidos em subespaços de E que contém G:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \phi :\ D(\phi) \subset E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D(\phi) \text{ é subespaço de } E; \\ \phi \in (D(\phi))^*,\ G \subset D(\phi),\ \phi(x) = \varphi(x),\ \forall\, x \in G; \\ \phi(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in D(\phi). \end{array} \right\}$$

Em $\mathcal{P}$ definimos a relação de ordem parcial

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Longleftrightarrow D(\phi_1) \subset D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1.$$

Como $\varphi \in \mathcal{P}$, então $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Vejamos que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ tem cota superior. De fato, dado $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ totalmente ordenado, defina

$$\begin{aligned} \phi : D(\phi) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta) :& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = \theta(x). \end{aligned}$$

A boa definição de ϕ decorre da ordenação total de $\mathcal{Q}$. Além disso, $\phi \in \mathcal{P}$ e ϕ é cota superior para $\mathcal{Q}$. pelo Lema de Zorn 2.4, $\mathcal{P}$ tem um elemento maximal $\widehat{\varphi}$.

Resta provar que $D(\widehat{\varphi}) = E$. Suponha por absurdo que $D(\widehat{\varphi}) \neq E$. Então, existe $x_0 \in E \setminus D(\widehat{\varphi})$. Defina

$$\begin{aligned} \widehat{\phi} : D(\widehat{\phi}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x + tx_0 &\longmapsto \widehat{\phi}(x + tx_0) = \widehat{\varphi}(x) + t\alpha, \end{aligned}$$

onde $D(\widehat{\phi}) = D(\widehat{\varphi}) + [x_0]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ será escolhida posteriormente de forma a garantir que $\widehat{\phi} \in \mathcal{P}$. Queremos, por enquanto, que α satisfaça as seguintes propriedades: $\forall\, x \in D(\widehat{\varphi})$,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(x) + \alpha &= \widehat{\phi}(x + x_0) \leq p(x + x_0) \\ \widehat{\varphi}(x) - \alpha &= \widehat{\phi}(x - x_0) \leq p(x - x_0) \end{aligned}$$

Para tanto, basta escolher α de modo que

$$\sup_{x \in D(\widehat{\varphi})} \{\widehat{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(\widehat{\varphi})} \{p(x + x_0) - \widehat{\varphi}(x)\}.$$

Felizmente tal escolha é possivel pois, $\forall\, x, y \in D(\widehat{\varphi})$, temos

$$\widehat{\varphi}(x) + \widehat{\varphi}(y) = \widehat{\varphi}(x + y) = p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

e, consequentemente,

$$\widehat{\varphi}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \widehat{\varphi}(x), \quad \forall\, x, y \in D(\widehat{\varphi}).$$

Feito isso, tem-se

- Para $t > 0$,

$$\widehat{\phi}(x + tx_0) = \widehat{\phi}\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = t\widehat{\phi}\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \leq t\,p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).$$

- Para $t < 0$,

$$\widehat{\phi}(x + tx_0) = \widehat{\phi}\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -t\widehat{\phi}\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \leq -t\,p\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0).$$

- Para $t = 0$,

$$\widehat{\phi}(x + tx_0) = \widehat{\phi}(x) = \widehat{\varphi}(x) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Segue então que $\widehat{\phi} \in \mathcal{P}$, $\widehat{\varphi} \leq \widehat{\phi}$ e $\widehat{\varphi} \neq \widehat{\phi}$, o que contradiz a maximalidade de $\widehat{\varphi}$. Portanto $D(\widehat{\varphi}) = E$ e o teorema está provado. ■

A seguir apresentamos a forma do Teorema de Hahn-Banach para espaços normados.

Corolário 2.2 (Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados)**.** *Sejam* $(X, \|\cdot\|_X)$ *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial,* $Y \subset X$ *um subespaço e* $g \in Y^*$ *contínuo. Então existe* $\widehat{g} \in X^*$ *contínuo que satisfaz*

$$\widehat{g}(x) = g(x),\ \forall\, x \in Y \quad e \quad \|\widehat{g}\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*}.$$

Demonstração. Considere a função

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = \|g\|_{Y^*}\|x\|_X \end{aligned}$$

Então p é sublinear e

$$|g(y)| \leq \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y = p(y), \quad \forall\, y \in Y.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach 2.13, existe $\widehat{g} \in X^*$ tal que

- $\widehat{g}(y) = g(y), \quad \forall\, y \in Y$,
- $\widehat{g}(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in X$ e
- $-\widehat{g}(x) = \widehat{g}(-x) \leq p(-x) = \|g\|_{Y^*}\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X$.

Logo

$$|\widehat{g}(x)| \leq \|g\|_{Y^*}\|x\|_X,\ \forall\, x \in X. \tag{2.23}$$

Consequentemente,

$$\|g\|_{Y^*} := \sup_{y\in Y\setminus\{0\}} \frac{|g(y)|}{\|y\|_Y} \leq \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|\widehat{g}(x)|}{\|x\|_X} = \|\widehat{g}\|_{X^*} \leq \|g\|_{Y^*}$$

onde a útima desigualdade decorre de (2.23). Portanto $\|\widehat{g}\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*}$. ■

Corolário 2.3. *Seja $(E, \|\cdot\|_E) \neq \{0\}$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado. Então, $\forall\, x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, $\exists\, \varphi \in E^*$; $\|\varphi\|_{E^*} = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|_E$. Consequentemente, todo elemento de E^* é não nulo.*

Demonstração. Sejam $Y = \operatorname{span}\{x_0\}$ e $\varphi : (\alpha x_0) \in Y \longmapsto \alpha\|x_0\|_E \in \mathbb{R}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Então $\varphi \in Y^*$ é contínuo e

$$\|\varphi\|_{Y^*} := \sup_{\alpha\neq 0} \frac{|\varphi(\alpha x_0)|}{\|\alpha x_0\|_E} = 1.$$

Então, pelo Corolário 2.2, existe $\widehat{\varphi} \in E^*$ que satisfaz

$$\widehat{\varphi}(\alpha x_0) = \varphi(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|_Y,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \|\widehat{\varphi}\|_{E^*} = \|\varphi\|_{Y^*} = 1.$$

Já que $\widehat{\varphi}(x) = \|x\|_E$, então $\widehat{\varphi}$ tem as propriedades desejadas. ■

Corolário 2.4. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $X \neq \{0\}$. Então, para todo $x \in X$,*

$$\|x\|_X = \sup_{\varphi\in X^*\setminus\{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_{X^*}} = \sup_{\varphi\in X^*, \|\varphi\|_{X^*}=1} |\varphi(x)|.$$

Demonstração. Dado $x \in X$, pelo Corolário 2.3 existe $\varphi_x \in X^*$ tal que $\varphi_x(x) = \|x\|_X$ e $\|\varphi_x\|_{X^*} = 1$. Portanto,

$$\|x\|_X = \varphi_x(x) \leq \sup_{\varphi\in X^*, \|\varphi\|_{X^*}=1} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*}\|x\|_X = \|x\|_X.$$

■

Corolário 2.5. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $Y \subset X$ um subconjunto fechado e próprio. Dado $x \in X \setminus Y$, existe $\phi_x \in X^*$ tal que*

$$\phi_x(y) = 0,\ \forall\, y \in Y, \quad \phi_x(x) = \inf_{y\in Y} \|x - y\|_X > 0, \quad e \quad \|\phi_x\|_{X^*} = 1.$$

Demonstração. Considere $Z = \{(\alpha x + y) \in X;\ \alpha \in \mathbb{R},\ y \in Y\} \subset X$ um subspaço e

$$\begin{aligned} \phi : Z &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha x + y) &\longmapsto \phi(\alpha x + y) = \alpha\delta, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ y \in Y, \end{aligned}$$

onde $\delta := \inf_{y\in Y} \|x - y\|_X > 0$. Então $\phi \in Z^*$ e satisfaz $\phi(x) = \delta$ e $\phi(y) = 0$, $\forall\, y \in Y$. Vejamos então que ϕ é contínuo e $\|\phi\|_{Z^*} = 1$. Para tanto, observe pela definição de δ que $\forall\, (\alpha x + y) \in Z$, $\alpha \neq 0$,

$$\|\alpha x + y\|_X = |\alpha|\|x + \alpha^{-1}y\|_X \geq |\alpha|\delta \Longrightarrow |\phi(\alpha x + y)| = |\alpha|\delta \leq \|\alpha x + y\|_X.$$

Observando que a desigualdade acima vale para $\alpha = 0$, temos

$$\|\phi\|_{Z^*} = \sup \frac{|\phi(\alpha x + y)|}{\|\alpha x + y\|_X} \leq 1, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R},\ y \in Y \text{ e } \alpha x + y \neq 0.$$

Novamente pela definição de δ, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, y_\varepsilon \in Y$ tal que $\delta \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq \delta + \varepsilon$. Assim, já que $(x - y_\varepsilon) \in Z$ e $\phi(x - y_\varepsilon) = \phi(x) = \delta$,

$$1 \geq \|\phi\|_{Z^*} = \sup_{z\in Z\setminus\{0\}} \frac{|\phi(z)|}{\|z\|_X} \geq \frac{|\phi(x - y_\varepsilon)|}{\|x - y_\varepsilon\|_X} \geq \frac{\delta}{\delta + \varepsilon}.$$

Portanto, $\|\phi\|_{Z^*} = 1$. Pelo Corolário 2.2, $\exists\, \phi_x \in X^*$ que satisfaz

$$\phi_x(z) = \phi(z),\ \forall\, z \in Z, \quad \text{e} \quad \|\phi_x\|_{X^*} = \|\phi\|_{X^*} = 1.$$

Em particular, $\phi_x(x) = \phi(x) = \delta$ e $\phi_x(y) = \phi(y) = 0$, $\forall\, y \in Y$. ■

2.7.1 Formas geométricas do teorema de Hahn-Banach

Apresentaremos aqui dois grandes teoremas, conhecidos como primeira e segunda formas geométricas do teorema de Hahn-Banach. Esses resultados dizem, essencialmente, que se A e B são subconjuntos do espaço normado E que não são muito ”entrelaçados”, então existe um funcional que os separa. Por isso, são também chamados de *teoremas de separação*. A abordagem desses resultados demanda algumas definições e resultados preliminares.

Definição 2.42. Seja $V \neq \{0\}$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Um subespaço próprio $W \subset V$ tal que, se $W_1 \subset V$ é subespaço de Ve

$$W \subset W_1 \subset V \quad \Longrightarrow \quad W_1 = V \ \vee\ W_1 = W,$$

é chamado **hiperplano** de V.

Na proposição seguinte mostramos que os hiperplanos são exatamente os núcleos dos funcionais lineares.

Proposição 2.6. *Sejam $V \neq \{0\}$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço de V. Então,*

$$W \text{ é hiperplano } \iff \exists\, 0 \neq \varphi \in V^*; \ker(\varphi) = W.$$

Demonstração. **($\Rightarrow$):** Como $W \neq V$, então existe $v_0 \in V \setminus W$. Seja $\widehat{W} = \operatorname{span}(W \cup \{v_0\})$. Como $W \subset \widehat{W}$ e $W \neq \widehat{W}$, logo $\widehat{W} = V$ e assim $\forall\, v \in V$, $\exists\, u \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $v = u + \alpha v_0$. Portanto, o funcional

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u + \alpha v_0 &\longmapsto \varphi(u + \alpha v_0) = \alpha \end{aligned}$$

é não-nulo, linear e $\ker(\varphi) = W$.

($\Leftarrow$): Como $V \neq 0$ e $\varphi \neq 0$, então $Ker(\varphi) \neq V$. Seja $W_1 \subset V$ um subespaço tal que $Ker(\varphi) \subseteq W_1$. Mostraremos que se $W = Ker(\varphi) \neq W_1$, então $W_1 = V$. Tome $v_0 \in W_1 \setminus Ker(\varphi)$. Agora, dado $v \in V$, temos

$$u = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} v_0 \in Ker(\varphi) \subseteq W_1,$$

logo,

$$v = u + \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} v_0 \in W_1.$$

∎

Definição 2.43. Sejam $H \subset V$ um hiperplano e $v_0 \in V$. Então o conjunto

$$v_0 + H = \{v_0 + v;\ v \in H\}$$

é chamado **hiperplano afim** de V. Pela Proposição 2.6, um hiperplano afim tem a forma

$$\{v \in V;\ \varphi(v) = \alpha\}$$

onde $0 \neq \varphi \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. A partir daqui chamaremos os hiperplanos afins simplesmente de hiperplanos.

Proposição 2.7. *Sejam E um $\mathbb{R}$-espaço normado e $H = \{x \in E;\ \varphi(x) = \alpha\} \subset E$ um hiperplano. Então*

$$H = \overline{H} \iff \varphi \text{ é contínuo.} \tag{2.24}$$

Demonstração. **($\Leftarrow$):** Como φ é contínua, então $H = \varphi^{-1}(\{\alpha\})$ é fechado.

($\Rightarrow$): Se H é fechado, então $E \setminus H$ é aberto e não vazio; logo existem $x_0 \in E \setminus H$ e $r > 0$, tais que $B(x_0, r) \subseteq E \setminus H$. Como $\varphi(x_0) \neq \alpha$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varphi(x_0) < \alpha$.
Afirmação: $\varphi(x) < \alpha$, $\forall\, x \in B(x_0, r)$.

De fato, se fosse $x_1 \in B(x_0, r)$ com $\varphi(x_1) > \alpha$, tomando $t = \frac{\varphi_1 - \alpha}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}$, então $0 < t < 1$ e $tx_0 + (1-t)x_1 \in B(x_0, r)$. Além disso,

$$\varphi(tx_0 + (1-t)x_1) = t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(x_1) = \alpha$$

o que contradiz $B(x_0, r) \subseteq E \setminus H$. Portanto, $\varphi(x_0) + r\varphi(z) = \varphi(x_0 + rz) < \alpha$, $\forall\, z \in E$, com $\|z\| < 1$. Como $\|-z\| = \|z\|$, temos

$$\frac{\varphi(x_0) - \alpha}{r} < \varphi(z) < \frac{\alpha - \varphi(x_0)}{r}, \quad \forall\, z \in E,\ \|z\| < 1.$$

Assim, $\|\varphi\| \leq \frac{\alpha - \varphi(x_0)}{r}$, o que implica na continuide de φ. ■

Para a obtenção das formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach introduzimos a seguir o funcional de Minkowski.

Definição 2.44. Um conjunto A é convexo quando, dados $x, y \in A$, tem-se

$$(1-t)x + ty \in A, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Definição 2.45. Seja $C \subset (E, \|\cdot\|)$ um subconjunto convexo, aberto e contendo a origem de E. A aplicação

$$\begin{aligned} p_C : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p_C(x) = \inf \left\{ \beta > 0;\ \frac{x}{\beta} \in C \right\}, \end{aligned}$$

é chamada de **funcional de Minkowski** de C.

Proposição 2.8. *O funcional de Minkowski satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $p_C(\gamma x) = \gamma p_C(x)$, $\forall\, \gamma > 0,\ x \in E$;

(b) $C = \{x \in E;\ p_C(x) < 1\}$;

(c) $\exists\, M > 0;\ 0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|_E$, $\forall\, x \in E$;

(d) $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$, $\forall\, x, y \in E$.

Demonstração.

(a)

$$p_C(\gamma x) = \inf\left\{\alpha > 0;\ \frac{\gamma x}{\alpha} \in C\right\} = \gamma \inf\left\{\alpha > 0;\ \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \gamma p_C(x).$$

(b) Como C é aberto,

$$\forall\, x \in C,\ \exists\, \varepsilon > 0;\ (1+\varepsilon)x \in C,$$

logo,

$$\frac{x}{(1+\varepsilon)^{-1}} \in C \Longrightarrow p_C(x) \leq (1+\varepsilon)^{-1} < 1.$$

Por outro lado, pela definição de ínfimo,

$$\exists\, \alpha \in]0,1[\ ;\ \frac{x}{\alpha} \in C.$$

Como C é convexo,

$$x = \alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)0 \in C.$$

(c) Seja $r > 0$ tal que $B_E(0,r) \subseteq C$. Dado $s \in]0, r[$ tem-se $s\frac{x}{\|x\|} \in C, \forall x \in E, x \neq 0$. Pelos itens (a) e (b),

$$p_C(x) \leq \frac{s}{\|x\|} < 1 \Longrightarrow p_C(x) < \frac{1}{s}\|x\|, \quad \forall\, x \in E,\ x \neq 0$$

A última desigualdade vale ainda para $x = 0$, logo basta considerar $M = \frac{1}{s}$.

(d) Dados $x, y \in E$ e $\varepsilon > 0$, vejamos que $\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} \in C$. De fato, pelos itens (a) e (b), temos

$$p_C\left(\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{p_C(x)+\varepsilon} p_C(x) < 1 \Longrightarrow \frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} \in C.$$

Da mesma forma, $\frac{y}{P_C(y)+\varepsilon} \in C$. Considere $t := \frac{p_C(x)+\varepsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} \in]0,1[$. Então

$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} = t\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C.$$

Sendo assim, por (a) e (b)

$$\frac{1}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} p_C(x+y) = p_C\left(\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon}\right) < 1$$

$$\Longrightarrow p_C(x+y) < p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon.$$

Basta fazer $\varepsilon \longrightarrow 0$. ■

Da Proposição 2.8 concluímos que o funcional de Minkowski é semilinear, de modo que podemos usa-lo no lugar do funcional p no Teorema de Hahn-Banach.

Lema 2.5. *Sejam C um subconjunto convexo, aberto, próprio e não-vazio do espaço normado E e $x_0 \in E \setminus C$. Então*

$$\exists\, \varphi \in E^*;\ \varphi(x) < \varphi(x_0), \quad \forall\, x \in C.$$

Demonstração. Suponha que $0 \notin C$. Escolha $z_0 \in C$, considere $D = \{x - z_0;\ x \in C\}$ e seja $y_0 := x_0 - z_0$. Então $y_0 \notin D$, $0 \in D$ e D é convexo e aberto. Podemos então considerar o funcional de Minkowski p_D de D. Definindo $G = \operatorname{span}\{y_0\}$ e

$$\begin{aligned} g : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ty_0 &\longmapsto g(ty_0) := tp_D(y_0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

temos $g(x) \leq p_D(x)$, $\forall\, x \in D$. De fato, para $t > 0$,

$$g(ty_0) = tp_D(y_0) = p_D(ty_0),$$

pela Proposição 2.8(a). Para $t \leq 0$,

$$g(ty_0) = tp_D(y_0) \leq 0 \leq p_D(ty_0),$$

pois $p_D(x) \geq 0$, $\forall x \in E$. Pelo Teorema de Hahn-Banach 2.13, $\exists \varphi \in E^*$; $\varphi(x) = g(x)$, $\forall x \in G$ e $\varphi(x) \leq p_D(x)$, $\forall x \in E$. Pela Proposição 2.8(c), $\exists\, M > 0$; $\varphi(x) \leq p_D(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$, logo φ é contínua. Da Proposição 2.8(b), $\varphi(y) \leq p_D(y) < 1$, $\forall\, y \in D$. Como $p_D(y_0) \geq 1$, pois $y_0 \notin D$,

$$\varphi(y) < 1 \leq p_D(y_0) = g(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(x_0 - y_0), \quad \forall\, y \in D. \tag{2.25}$$

Pela definição de D e pela relação (2.25) temos

$$\varphi(x) = \varphi(x - z_0) + \varphi(z_0) < \varphi(x_0 - z_0) + \varphi(z_0) = \varphi(x_0), \quad \forall\, x \in C.$$

Se $0 \in C$, basta tomar $z_0 = 0$. ■

O último resultado que precisamos fornece uma propriedade interessante dos funcionais lineares contínuos em espaços normados:

Lema 2.6. *Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial, $\varphi \in E^*$ não nulo e $A \subset E$ um subconjunto convexo, aberto e não vazio. Então $\varphi(A)$ é um intervalo aberto (não necessariamente limitado).*

Demonstração. Primeiro observe que $\varphi \neq 0$ implica φ sobrejetora. Como φ é linear e A é convexo, então $\varphi(A) \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. No caso em que $\varphi(A)$ é limitado superiormente, chamemos α sua extremidade superior. Suponha que $\alpha \in \varphi(A)$. Então $\exists\, x \in A$; $\varphi(x) = \alpha$ e $\varphi(y) \leq \alpha$, $\forall\, y \in A$. Como A é aberto, $\exists\, \varepsilon > 0$; $B(x, \varepsilon) \subset A$. Seja $z \in E$ não nulo. Então

$$\left\| x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} z - x \right\|_E = \frac{\varepsilon}{2\|z\|_E} \|z\|_E = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Longrightarrow x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|_E} z \in A.$$

Nesse caso,

$$\alpha \geq \varphi\left(x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|_E} z\right) = \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2\|z\|_E}\varphi(z) = \alpha + \frac{\varepsilon}{2\|z\|_E}\varphi(z) \Longrightarrow \varphi(z) \leq 0.$$

Como $z \neq 0$ é arbitrário em E, então φ não é sobrejetivo, o que é uma contradição. Portanto $\alpha \notin \varphi(A)$. Analogamente prova-se que se $\varphi(A)$ for limitado inferiormente então $\varphi(A)$ não contém sua extremidade inferior. Portanto $\varphi(A)$ é um intervalo aberto. ■

Teorema 2.14 (1ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam $(E, \| \cdot \|_E)$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existem $\varphi \in E^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) < \beta \leq \varphi(y), \quad \forall\, x \in A,\ y \in B. \tag{2.26}$$

Demonstração. Considere $C = \{a - b;\ a \in A \ \wedge\ b \in B\}$. Então

- C é aberto, pois $C = \bigcup\limits_{b \in B} (\{a - b;\ a \in A\})$;
- C é convexo, pois $\forall\, x_1,\ x_2 \in A,\ y_1,\ y_2 \in B,\ t \in]0, 1[$,

$$t(x_1 - y_1) + (1 - t)(x_2 - y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2) - (ty_1 + (1 - t)y_2) \in C;$$

- $\emptyset \neq C \neq E$, pois $A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,\ A \cap B = \emptyset$;

Como $0 \notin C$, então, pelo Lema 2.5, $\exists\, \varphi \in E^*$; $\varphi(z) < \varphi(0)$, $\forall\, z \in C$. Assim

$$\varphi(x) = \varphi(x - y) + \varphi(y) < \varphi(y), \quad \forall\, x \in A,\ y \in B. \tag{2.27}$$

Como $B \neq \emptyset$, $\alpha = \sup_{x \in A} \varphi(x) \in \mathbb{R}$. É verdade que $\varphi(A) \subseteq (-\infty, \alpha]$ e de (2.27) tem-se $\alpha \leq \varphi(y)$, $\forall\, y \in B$. Pelo Lema 2.6, $\varphi(A)$ é um intervalo aberto, logo $\varphi(A) \subseteq (-\infty, \alpha)$, isto é, $\varphi(x) < \alpha$, $\forall\, x \in A$. ■

Para simplificar a notação denotaremos um hiperplano $H = \{x \in X;\ \varphi(x) = \alpha\}$ por $[\varphi = \alpha]$.

Teorema 2.15 (2ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E)$ *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial normado,* $A, B \subset E$ *subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se* A *é fechado e* B *é compacto, então existem* $\varphi \in E^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\varphi(x) \leq \alpha < \beta \leq \varphi(y), \quad \forall\, x \in A,\ y \in B.$$

Para $c \in (\alpha, \beta)$ *diz-se que o hiperplano fechado* $[\varphi = c]$ *separa* A *e* B *estritamente.*

Demonstração. Aqui, indicamos por $C = A + B$ o conjunto definido por $C = \{c = a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$. Vejamos que é possível escolher um $\varepsilon > 0$ de modo que $A + B_E(0, \varepsilon)$ e $B + B_E(0, \varepsilon)$ sejam abertos, convexos e disjuntos:

(a) Dado $\varepsilon > 0$, $A + B_E(0, \varepsilon)$ e $B + B_E(0, \varepsilon)$ são abertos. De fato,

$$A + B_E(0, \varepsilon) = \bigcup_{\alpha \in A} (\alpha + B_E(0, \varepsilon)) = \bigcup_{\alpha \in A} B_E(\alpha, \varepsilon),$$

e o mesmo vale para $B + B_E(0, \varepsilon)$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, como A, B, $B_E(0, \varepsilon)$ são convexos, então $A + B_E(0, \varepsilon)$ e $B + B_E(0, \varepsilon)$ são convexos;

(c) Basta então provar que é possível escolher um $\varepsilon > 0$, tal que $A + B_E(0, \varepsilon)$ e $B + B_E(0, \varepsilon)$ sejam disjuntos. Suponha que isso não seja possivel. Então, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\left(A + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \bigcap \left(B + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Logo existem $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B$ e $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $(w_n)_{n=1}^{\infty} \in B_E(0, \frac{1}{n})$ tais que $x_n + z_n = y_n + w_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|x_n - y_n\|_E = \|z_n - w_n\|_E < \frac{2}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Como B é compacto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em B, digamos $y_{n_k} \longrightarrow \beta \in B$. Por (2.28) segue que $x_n \longrightarrow \beta$. Como A é fechado, então $\beta \in A$, logo $\beta \in A \cap B$ o que uma contradição. .

Fixemos então $\varepsilon > 0$ tal que $A + B_E(0, \varepsilon)$ e $B + B_E(0, \varepsilon)$ sejam disjuntos. Pelo Teorema 2.14 existe um hiperplano fechado $[\varphi = c]$ que separa $A + B_E(0, \varepsilon)$ e $B + B_E(0, \varepsilon)$. Logo, para $x \in A$ e $y \in B$,

$$\varphi(x) + \sup_{\|z_1\|_E < \varepsilon} \varphi(z_1) \leq c \leq \varphi(y) + \inf_{\|z_2\|_E < \varepsilon} \varphi(z_2),$$

e, da linearidade de φ,

$$\varphi(x) + \varepsilon \sup_{\left\|\frac{z_1}{\varepsilon}\right\|_E < 1} \varphi\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right) \leq c \leq \varphi(y) + \varepsilon \inf_{\left\|\frac{z_2}{\varepsilon}\right\|_E < 1} \varphi\left(\frac{z_2}{\varepsilon}\right).$$

Logo,

$$\varphi(x) + \varepsilon\|\varphi\|_E \leq c \leq \varphi(y) - \varepsilon\|\varphi\|_E, \quad \forall\, x \in A,\ y \in B.$$

Basta então tomar $\alpha = c - \frac{\varepsilon\|\varphi\|_E}{2}$ e $\beta = c + \frac{\varepsilon\|\varphi\|_E}{2}$. ■

2.8 Espaços de Hilbert

2.8.1 Espaços com produto interno

O produto interno é uma ferramenta bastante útil, pois nos permite ”geometrizar” o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares. Apresentamos aqui os espaços com produto interno que são completos na norma induzida pelo produto interno. Estes são os espaços de Hilbert.

Definição 2.46. Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Um **produto interno** em E é uma forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E :&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

e satisfaz as seguintes propriedades: $\forall\, u, v, w \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

P1: $\langle \lambda u + v, w \rangle_E = \lambda \langle u, w \rangle_E + \langle v, w \rangle_E$, (linearidade);

P2: $\langle u, v \rangle_E = \langle v, u \rangle_E$ (simetria);

P3: $\langle w, w \rangle_E > 0, \quad \forall\, w \neq 0$ e $\langle w, w \rangle_E = 0 \Leftrightarrow w = 0$, (*positividade*).

O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ é chamado **espaço com produto interno**.

O próximo resultado nos ajudará a provar que o produto interno induz uma norma no espaço. Antes de apresentá-lo considere a função

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_E : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\|_E := \sqrt{\langle v, v \rangle_E}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Proposição 2.9. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz): Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$. Então*

$$|\langle u, v \rangle_E| \leq \|u\|_E \, \|v\|_E, \quad \forall\, u, v \in E. \tag{2.30}$$

Demonstração. A desigualdade vale se $u = 0$ ou $v = 0$. Suponha então $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Defina

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto P(t) := \langle u + tv, u + tv \rangle_E. \end{aligned}$$

Observe que $p(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e tome $t = -\frac{\langle u,v\rangle_E}{\|v\|_E^2}$ para concluir. ■

Corolário 2.6. *A função apresentada em (2.29) define uma norma em E.*

Demonstração. De fato, as condições 1 e 2 da definição 2.27 são imediatas. Vejamos que a condição 3 é satisfeita:

$$\begin{aligned}\|u+v\|_E^2 &= \langle u+v, u+v\rangle_E \\ &= \|u\|_E^2 + 2\langle u,v\rangle_E + \|v\|_E^2 \\ &\leq \|u\|_E^2 + 2\|u\|_E\|v\|_E + \|v\|_E^2 = (\|u\|_E + \|v\|_E)^2.\end{aligned}$$ ■

Sempre que nos referirmos a um espaço com produto interno E, estaremos considerando em E a norma induzida e a consequente estrutura topológica. A próxima proposição é uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz e mostra que o produto interno convive bem com a estrutura topológica.

Proposição 2.10. *Sejam $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ e $y \in E$ fixado. Então a função*

$$x \in E \longrightarrow \langle x, y\rangle_E \in \mathbb{R}$$

é contínua.

Demonstração. Seja $x_0 \in E$. Então, pela Proposição 2.9,

$$|\langle x,y\rangle_E - \langle x_0,y\rangle_E| = |\langle x-x_0, y\rangle_E| \leq \|x-x_0\|_E\|y\|_E.$$ ■

Definição 2.47. Um espaço $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado **espaço de Hilbert**. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

Os próximos resultados relacionam o produto interno com a norma por ele induzida.

Proposição 2.11. *Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ sobre $\mathbb{R}$. Então, $\forall\, x, y \in E$,*

1. *(Lei do paralelogramo):*

$$\|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2); \tag{2.31}$$

2. *(Fórmula de polarização):*

$$\langle x, y\rangle_E = \frac{1}{4}(\|x+y\|_E^2 - \|x-y\|_E^2). \tag{2.32}$$

Demonstração. Considere as seguintes igualdades:

$$\|x+y\|_E^2 = \|x\|_E^2 + 2\langle x, y\rangle_E + \|y\|_E^2$$
$$\|x-y\|_E^2 = \|x\|_E^2 - 2\langle x, y\rangle_E + \|y\|_E^2.$$

Somando-as ordenadamente obtemos 2.31, e subtraindo-as, obtemos 2.32. ■

2.8.2 Teorema da projeção

Estando o espaço munido com o produto interno, podemos agora definir o conceito de vetores ortogonais. Esta definição nos remete à visão geométrica de que dois vetores são ortogonais se são perpendiculares entre si, ou seja, se o produto interno entre eles vale zero.

Definição 2.48. Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ um espaço com produto interno. Dizemos que $x, y \in E$ são *ortogonais* se $\langle x, y \rangle_E = 0$ e, neste caso, representamos por $x \perp y$.

O próximo teorema é central no estudo dos espaços com produto interno.

Teorema 2.16 (Teorema da Projeção)**.** *Sejam $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ um espaço vetorial normado e $M \subset E$ um subespaço completo de E. Então*

$$\forall\, x \in E,\ \exists!\, p \in M;\ \|x - p\|_E = \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|_E.$$

Demonstração. Denote $d = dist(x, M)$. Então existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de M tal que

$$d \leq \|x - y_n\|_E \leq d + \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Aplicando a lei do paralelogramo, teorema 2.11, para os vetores $x - y_n$ e $x - y_m$, obtemos

$$\|(x - y_m) + (x - y_n)\|_E^2 + \|(x - y_m) - (x + y_n)\|_E^2 = 2(\|x - y_m\|_E^2 + \|x - y_n\|_E^2) \tag{2.34}$$

Usando (2.33), (2.34) e o fato de $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$, resulta

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|_E^2 &= 2(\|x - y_m\|_E^2 + \|x - y_n\|_E^2) - \|2x - (y_n + y_m)\|_E^2 \\
&= 2(\|x - y_m\|_E^2 + \|x - y_n\|_E^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|_E^2 \\
&\leq 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \longrightarrow 0,\ \text{quando } m, n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em M. Supondo $y_n \longrightarrow p$ e fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (2.33), concluímos que $\|x - p\|_E = d$.

Para provar a unicidade, considere $q \in M$ tal que $\|x-q\|_E = d$. Aplicando a lei do paralelogramo, proposição 2.11, aos vetores $x-p$ e $x-q$, segue

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2d^2 + 2d^2 = 2\|x-p\|_E^2 + 2\|x-q\|_E^2 \\ &= \|x-p+x-q\|_E^2 + \|x-p-x+q\|_E^2 \\ &= \|2x-p-q\|_E^2 + \|p-q\|_E^2 = 4\left\|x - \frac{p+q}{2}\right\|^2 + \|p-q\|_E^2. \\ \text{Então} \quad 0 \le \|p-q\|_E^2 &= 4d^2 - 4\left\|x-\frac{p+q}{2}\right\|_E^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

Portanto, $p = q$. ■

Definição 2.49 (complemento ortogonal)**.** Sejam $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ e $A \subset E$ um subconjunto. Definimos o **complemento ortogonal** $A^\perp$ de A como o subespaço vetorial de E

$$A^\perp := \{x \in E;\ \langle y, x\rangle_E = 0,\ \forall\, y \in A\} \tag{2.35}$$

Teorema 2.17 (Decomposição do espaço em soma direta de subespaços)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Então*

$$H = M \oplus M^\perp \quad e \quad \forall\, x \in H,\ \exists!\, p \in M;\ \|x-p\|_H = \operatorname{dist}(x, M).$$

*O vetor p é chamado de **projeção ortogonal** de x sobre M.*

Demonstração. Dado $x \in H$, o teorema da Projeção 2.16 garante que $\exists!\, p \in M$ tal que

$$\|x-p\|_H = \operatorname{dist}(x, M). \tag{2.36}$$

Resta provar que $q = x - p \in M^\perp$. Assim, $\forall\, y \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $p + \lambda y \in M$, logo

$$\begin{aligned} \|q\|_H^2 &= \|x-p\|_H^2 = dist(x,M)^2 \le \|x-(p+\lambda y)\|_H^2 = \|q-\lambda y\|_H^2 \\ &= \langle q-\lambda y, q-\lambda y\rangle_H = \|q\|_H^2 - 2\lambda\langle q, y\rangle_H + \lambda^2\|y\|_H^2. \\ \text{Então,} \quad 0 &\le \lambda^2\|y\|_H^2 - 2\lambda\langle q,y\rangle_H, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $0 \ge \Delta = 4|\langle p,q\rangle_H|^2 \Rightarrow \langle p,q\rangle_H = 0$, e portanto $q \in M^\perp$. Finalmente, suponha que $x = p + q = p_1 + q_1$, com $p, p_1 \in M$, $q, q_1 \in M^\perp$. Como M e $M^\perp$ são subespaços,

$$p - p_1 = q_1 - q \in M \cap M^\perp = \{0\} \Longrightarrow (p = p_1)\ \wedge\ (q_1 = q).$$

■

Teorema 2.18. *Seja* $\emptyset \neq Z \subset (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$*. Então,*

- $Z^\perp = \overline{Z^\perp}$*;*
- $(\overline{Z})^\perp = Z^\perp$*;*
- $Z \cap Z^\perp = \{0\}$ *se* $0 \in Z$*;*
- $Z \cap Z^\perp = \emptyset$ *se* $0 \notin Z$*.*

Demonstração. Pela continuidade do produto interno, $Z^\perp$ é fechado. Segue da definição do complemento ortogonal que $(\overline{Z})^\perp \subset Z^\perp$. Por outro lado, seja $x \in Z^\perp$; como $\langle x, z \rangle_X = 0,\ \forall\, z \in Z$, a continuidade do produto interno com respeito a segunda coordenada implica $\langle x, z \rangle_X = 0,\ \forall\, z \in \overline{Z}$ e assim $x \in (\overline{Z})^\perp$. ■

2.8.3 Teorema da representação de Riez

O próximo resultado exibe uma caracterização para todos os funcionas lineares contínuos em um espaço de Hilbert.

Teorema 2.19 (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional linear contínuo. Então*

$$\exists!\, y_0 \in H;\ \varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle_H, \quad \forall x \in H.$$

Alem disso, $\|\varphi\|_{H^*} = \|y_0\|_H$*.*

Demonstração. Caso $\varphi = 0$, basta tomar $y_0 = 0$. Caso contrário, o núcleo $M = \ker(\varphi) := \{x \in H;\ \varphi(x) = 0\} \subset H$ é um subespaço próprio e fechado em H, pois φ é contínua (Proposição 2.10). Pelo Teorema 2.17, temos $M^\perp \neq \{0\}$, logo $\exists\, x_0 \in M^\perp$, $\|x_0\|_H = 1$. Vejamos que $y_0 := \varphi(x_0)x_0$ é o vetor procurado. Dado $x \in H$,

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0,$$

onde $\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right) \in M$ e $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \in M^\perp$. Como $y_0 \in M^\perp$ e $\|x_0\|_H = 1$,

$$\begin{aligned} \langle x, y_0 \rangle_H &= \left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0, y_0 \right\rangle_H + \left\langle \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0, y_0 \right\rangle_H \\ &= 0 + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \langle x_0, y_0 \rangle_H = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \langle x_0, \varphi(x_0) x_0 \rangle_H = \varphi(x). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{H^*} &= \sup_{\|x\|_H\leq 1}\{|\varphi(x)|\}\\ &= \sup_{\|x\|_H\leq 1}\{\langle x, y_0\rangle_H\}\\ &\leq \sup_{\|x\|_H\leq 1}\{\|x\|_H\|y_0\|_H\}\\ &= \|y_0\|_H \sup_{\|x\|_H\leq 1}\{\|x\|_H\} = \|y_0\|_H.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\|y_0\|_H^2 = \langle y_0, y_0\rangle_H = \varphi(y_0) \leq \|\varphi\|_H\|y_0\|_H \Rightarrow \|y_0\|_H \leq \|\varphi\|_H.$$

Finalmente, suponha que $\exists\, y_1 \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y_1\rangle_H, \forall\, x \in H$. Então

$$\langle x, y_0\rangle_H = \varphi(x) = \langle x, y_1\rangle_H, \quad \forall\, x \in H.$$

Portanto, $y_0 = y_1$. ■

Considere H um $\mathbb{R}$-espaço de Hilbert. Dado $y \in H$, o funcional

$$\begin{aligned}\varphi_y : H &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi(x) = \langle x, y\rangle_H\end{aligned}$$

é linear e, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz 2.9,

$$|\varphi_y(x)| = |\langle x, y\rangle_H| \leq \|x\|_H\|y\|_H.$$

Logo, φ_y é contínua para todo $y \in H$. Além disso, $\|\varphi_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H$. Caso $y = 0$, temos $\|\varphi_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. Se $y \neq 0$, então

$$\left|\varphi_y\left(\frac{y}{\|y\|_H}\right)\right| = \frac{|\varphi_y(y)|}{\|y\|_H} = \|y\|_H \Longrightarrow \|\varphi_y\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

Considerando a observação acima e o teorema da representação de Riesz-Fréchet 2.19, a correspondência

$$y \in H \longleftrightarrow \varphi_y \in H^* \tag{2.37}$$

é linear, bijetora e isométria. Com isso provamos o seguinte corolário:

Corolário 2.7. *Todo espaço de Hilbert real é isometricamente isomorfo ao seu dual por meio da correspondência* (2.37).

Seguimos com mais uma consequência interessante do Teorema de Riesz-Fréchet.

Proposição 2.12. *Seja H um $\mathbb{R}$-espaço de Hilbert. Então H^* é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Segue do item (c) da proposição 2.5 que $H^* = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ é completo. Provaremos então que a norma em H^* é induzida pelo produto interno. Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in H^*$, pelo Teorema 2.19 existem $y_1, y_2 \in H$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \langle x, y_1 \rangle, \quad \forall\, x \in H \quad \text{e} \quad \|\varphi_1\|_{H^*} = \|y_1\|_H, \\ \varphi_2(x) &= \langle x, y_2 \rangle, \quad \forall\, x \in H \quad \text{e} \quad \|\varphi_2\|_{H^*} = \|y_2\|_H. \end{aligned}$$

A expressão

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_H := \langle y_1, y_2 \rangle_H$$

define um produto interno em H^* e

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_H = \langle y_1, y_1 \rangle_H = \|y_1\|_H^2 = \|\varphi_1\|_H^2$$

como queríamos. ■

Teorema 2.20. *Sejam X e Y $\mathbb{R}$-espaços de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então*

(a) $\exists!\ A^* \in \mathcal{L}(Y, X);\ \langle Ax, y \rangle_Y = \langle x, A^* y \rangle_X, \quad \forall\, x \in X,\ y \in Y.$

*O mapeamento A^* é chamado o **adjunto** da transformação A. Além disso, A^* é linear e*

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

(b) *Valem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im}(A))^{\perp} = \ker(A^*) \quad &e \quad (\operatorname{Im}(A^*))^{\perp} = \ker(A); \\ Y = \ker(A^*) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A)} \quad &e \quad X = \ker(A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A^*)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Para cada $y \in Y$, o mapeamento $x \in X \mapsto \langle Ax, y \rangle_Y \in \mathbb{R}$ é um funcional linear e contínuo, pois

$$|\langle Ax, y \rangle_Y| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \|y\|_Y,\ \forall\, x \in X.$$

Então, pelo teorema da representação de Riesz-Fréchet 2.19 aplicado no espaço de Hilbert X,

$$\exists!\ A^* y \in X;\ \langle Ax, y \rangle_Y = \langle x, A^* y \rangle_X, \quad \forall\, x \in X.$$

O mapeamento A^* é linear. De fato, $\forall\,\beta \in \mathbb{R},\ x \in X,\ y, z \in Y$,

$$\begin{aligned}\langle x, A^*(\beta y + z)\rangle_X &= \langle Ax, \beta y + z\rangle_Y = \beta\langle Ax, y\rangle_Y + \langle Ax, z\rangle_Y \\ &= \beta\langle x, A^* y\rangle_X + \langle x, A^* z\rangle_X = \langle x, \beta A^* y + A^* z\rangle_X.\end{aligned}$$

De forma análoga podemos verificar que $(A + \beta B)^* = A^* + \beta B^*$, $\forall\, A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Para verificar a continuidade de A^* fazemos

$$\|A^* y\|_X^2 = \langle A^* y, A^* y\rangle_X = \langle AA^* y, y\rangle_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|A^* y\|_X\|y\|_Y, \quad \forall\, y \in Y,$$

de modo que

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \sup_{y \neq 0}\frac{\|A^* y\|_X}{\|y\|_Y} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Por outro lado

$$\|Ax\|_Y^2 = \langle Ax, Ax\rangle_Y = \langle x, A^* Ax\rangle_X \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|Ax\|_Y\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X,$$

logo,

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Portanto $\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, o que prova o item **(a)**.

Para provar o item **(b)** observe que

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}(A))^\perp &= \{y \in Y;\ \langle y, z\rangle_Y = 0,\ \forall\, z \in Im(A)\}, \\ &= \{y \in Y;\ \langle y, Ax\rangle_Y = 0,\ \forall\, x \in X\} \\ &= \{y \in Y;\ \langle A^* y, x\rangle_X = 0,\ \forall\, x \in X\} = \ker(A^*).\end{aligned}$$

como $\overline{\mathrm{Im}(A)}^\perp = (\mathrm{Im}(A))^\perp$, pelo Teorema 2.18, segue então, do Teorema 2.17,

$$Y = \overline{(\mathrm{Im}(A))} \oplus \overline{\mathrm{Im}(A)}^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)} \oplus (\mathrm{Im}(A))^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)} \oplus \ker(A^*).$$

A outra relação obtem-se de forma análoga. ■

2.8.4 O Teorema de Lax-Milgran

O Teorema de Lax-Milgran é uma ferramenta importante na teoria de EDP's e na solução de problemas variacionais. É análogo ao Teorema de Riesz-Frechet substituindo os produtos internos por formas bilineares.

Definição 2.50. Sejam E, F espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{R})$ uma forma bilinear contínua. Então $\mathbb{B}$ é

1. *Coerciva* se $E = F$ e $\exists\, \beta > 0$ tal que $\mathbb{B}(x, x) \geq \beta \|x\|_E^2$, $\forall\, x \in E$.
2. *Simétrica* se $E = F$ e $\mathbb{B}(x, y) = \mathbb{B}(y, x)$, $\forall\, x, y \in E$.
3. *Não-degenerada* se cumpre $\mathbb{B}(x, y) = 0$, $\forall\, y \in F \Rightarrow x = 0$.

A proposição abaixo é um tipo de Teorema de Riesz-Fréchet para formas bilineres simétricas, contínuas e coercivas em espaços de Hilbert.

Proposição 2.13. *Sejam $(H, \|\cdot\|_H)$ um $\mathbb{R}$-espaço de Hilbert e $\mathbb{B} \in \mathcal{L}_2(H, \mathbb{R})$ simétrica, contínua e coerciva. Então,*

$$\forall\, \varphi \in H^*,\ \exists!\, x_0 \in H;\ \varphi(x) = \mathbb{B}(x, x_0),\ \forall\, x \in H.$$

Demonstração. Observando que $\mathbb{B}$ é um produto interno em H, definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbb{B}} : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_{\mathbb{B}} = \sqrt{\mathbb{B}(x, x)}. \end{aligned}$$

Provaremos que $(H, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ é completo. Para isso, considere $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy de $(H, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$. Pela coercividade de $\mathbb{B}$,

$$\exists\, \beta > 0;\ \|x_n - x_m\|_{\mathbb{B}}^2 = \mathbb{B}(x_n - x_m, x_n - x_m) \geq \beta \|x_n - x_m\|_H^2,$$

logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy no espaço completo $(H, \|\cdot\|_H)$. Suponha que $x_n \longrightarrow y$ na norma $\|\cdot\|_H$. Como $\mathbb{B}$ é contínuo,

$$\exists\, C > 0;\ \|x_n - y\|_{\mathbb{B}} = \sqrt{\mathbb{B}(x_n - y, x_n - y)} \leq \sqrt{C \|x_n - y\|_H^2} = \sqrt{C} \|x_n - y\|_H,$$

e assim $x_n \longrightarrow y$ segundo a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$. Portanto, $(H, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ é completo e pelo teorema da representação de Riesz-Fréchet 2.19,

$$\exists!\, x_0 \in H;\ \varphi(x) = \mathbb{B}(x, x_0),\ \forall\, x \in H.$$

■

O Teorema de Lax-Milgran é o resultado anterior sem a hipótese de que a forma bilinear seja simétrica.

Teorema 2.21 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam H um $\mathbb{R}$-espaço de Hilbert e $\mathbb{B} \in \mathcal{L}_2(H, \mathbb{R})$ contínua e coerciva. Então para todo funcional linear contínuo $\varphi \in H^*$, existe um único $x_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \mathbb{B}(x, x_0),\ \forall x \in H.$$

Demonstração. Para cada $x \in H$ temos pela Proposição 2.10 que a aplicação

$$\begin{aligned} T_x : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto T_x(y) = \mathbb{B}(y, x) \end{aligned}$$

é linear e contínua em H. Pelo teorema de Riez-Fréchet 2.19,

$$\exists!\, w_x \in H;\ \mathbb{B}(y, x) = T_x(y) = \langle y, w_x \rangle,\ \forall\, y \in H.$$

Afirmamos que o operador

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto A(x) = w_x \end{aligned}$$

é linear. De fato, $\forall\, x, y, z \in H,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle z, A(\lambda x + y) \rangle_H &= \langle z, w_{\lambda x + y} \rangle_H = \mathbb{B}(z, \lambda x + y) \\ &= \lambda \mathbb{B}(z, x) + \mathbb{B}(z, y) = \lambda T_x(z) + T_y(z) \\ &= \lambda \langle z, w_x \rangle_H + \langle z, w_y \rangle_H = \langle z, \lambda w_x + w_y \rangle_H \\ &= \langle z, \lambda A(x) + A(y) \rangle_H. \end{aligned}$$

Além disso, da continuidade de $\mathbb{B}$, $\exists\, C > 0$ tal que

$$\|A(x)\|_H^2 = \langle w_x, w_x \rangle_H = \langle A(x), w_x \rangle_H = \mathbb{B}(A(x), x) \leq C \|A(x)\|_H \|x\|_H, \quad \forall x \in H.$$

Logo $\|A(x)\|_H \leq C\|x\|_H$, $\forall\, x \in H$. O que prova a continuidade do operador A. Pela coercividade de T, existe $\beta > 0$ tal que

$$\beta \|x\|^2 \leq T(x, x) = \langle x, w_x \rangle \leq \|x\| \|w_x\| = \|x\| \|A(x)\|,$$

portanto, $\beta\|x\| \leq \|A(x)\|$, $\forall x \in H$ e assim A é injetiva. Consequentemente, A é um isomorfismo sobre sua imagem. Como H é completo e $\mathrm{Im}(A) \subset H$, é um subespaço isomorfo a H, segue da proposição 2.4 que $\mathrm{Im}(A)$ é subespaço fechado de H. Vejamos que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$. Com efeito, se $y \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$, então

$$\beta\|y\|^2 \leq \mathbb{B}(y,y) = \langle y, w_y\rangle_H = \langle y, A(y)\rangle_H = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

Pelo Teorema 2.17, segue que $H = \mathrm{Im}(A)$, ou seja, A é sobrejetora, e portanto é bijetor. Pelo teorema da representação de Riesz-Fréchet 2.19, $\exists! z \in H; \varphi(x) = \langle x, z\rangle_H, \forall x \in H$. Como A é bijetora, $\exists\, x_0 \in H;\ z = A(x_0)$. Portanto,

$$\varphi(x) = \langle x, A(x_0)\rangle_H = \langle x, w_{x_0}\rangle_H = \mathbb{B}(x, x_0), \quad \forall\, x \in H.$$

Para provar a unicidade suponha que exista $x_1 \in H$ tal que $\varphi(x) = \mathbb{B}(x, x_1)$, $\forall\, x \in H$. Então, pela coercividade de $\mathbb{B}$, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{B}(x, x_0) = \varphi(x) = \mathbb{B}(x, x_1) \\
&\Rightarrow 0 = \mathbb{B}(x, x_0 - x_1) \geq \beta\|x_0 - x_1\|_H \\
&\Rightarrow x_0 = x_1.
\end{aligned}$$

■

No próximo capítulo apresentamos uma generalização do teorema de Lax-Milgram, denominado teorema de Banach-Necas-Babuska que constitui o resultado central deste trabalho.

3 O teorema de Banach-Necas-Babuska

Apresentamos neste capítulo o *teorema de Banach-Necas-Babuska*, que é um dos principais resultados da análise funcional que garante a boa colocação das formulações variacionais mistas e contorna as limitações do teorema de Lax-Milgram. A demonstração desse teorema apoia-se essencialmente em três resutados a saber: o teorema de Lax-Milgram, o teorema da aplicação aberta e o teorema da imagem fechada. Por conveniência de apresentação, os teoremas de Lax-Milgram e da aplicação aberta foram provados no capítulo anterior, e colocamos a prova do teorema da imagem fechada neste capítulo antecedendo a prova do teorema de BNB.

Embora a abordagem adotada aqui seja puramente abstrata considerando um problema variacional misto abstrato, como motivação, são apresentados na seção seguinte alguns exemplos de problemas práticos que podem ser postos na forma variacional abstrata discutida aqui.

3.1 Exemplo de uma formulação variacional mista

3.1.1 Problema de Poisson

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^d$, com $d \in \{2, 3\}$, de fronteira $\partial\Omega$. Considere o problema elíptico linear que consiste em encontrar o campo escalar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(K(x)\nabla u) = f(x) & \text{em } \Omega. \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é uma função dada e $K \in L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ é uma matriz simétrica uniformemente elíptica em Ω. Mais precisamente assumimos que existem constantes positivas $k_{\min}$ e $K_{\max}$ tais que

$$K_{\min}|z|^2 \leq x^T K(x) z \leq K_{\max}|z|^2, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^d,\, \forall\, x \in \Omega, \tag{3.2}$$

onde $|\cdot|$ indica a norma euclidiana em $\mathbb{R}^d$.

3.1.2 Formulação variacional mista

Com o objetivo de colocar o problema (3.1) numa forma passível de ser analisado através do teorema BNB, consideramos o sistema equivalente associado formulado da seguinte maneira: dada a função f e o tensor K, encontrar o par (u, σ) tal que

$$\begin{cases} \text{div}\sigma = f & \text{em} \quad \Omega \\ \sigma = -K\nabla u & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

Visando obter a formuação variacional mista associada a (3.3), definimos os seguintes espaços de Hilbert

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \nabla u \in L^2(\Omega)\} \tag{3.4}$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \text{div}(u) \in L^2(\Omega)\} \tag{3.5}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ u|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{3.6}$$

Antes de fornecermos a formulação variacional mista de (3.3), gostaríamos de lembrar que a formulação variacional clássica de (3.1), conhecida na literatura de elementos finitos por formulação variacional primal pode ser declarada como segue: encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v)_\Omega\,, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.7}$$

onde $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ é a forma bilinear dada por

$$a(u, v) = (K\nabla u, \nabla v)_\Omega, \tag{3.8}$$

com $(\cdot, \cdot)_\Omega$ indicando o produto interno em $L^2(\Omega)$. Análise da boa colocação desta formulação variacional primal pode ser feita através do teorema de $Lax - Milgram$ provado no capítulo precedente.

A eurística de obtenção da formulação variacional mista, também conhecida no contexto do método de elementos finitos como formulação variacional mista dual, consiste em multiplicar a segunda equação de (3.3) por uma função teste $v \in H_0^1(\Omega)$ e subsequente integração por partes, e multiplicar a primiera equação de (3.3) por uma função teste $q \in L^2(\Omega)$. Essa sequência de procedimentos resulta na seguinte formulação variacional mista: Encontrar o par $(u, \sigma) \in L^2(\Omega) \times H(\text{div}, \Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a_1(\sigma, v) + b_1(u, v) & = 0, \quad \forall\, v \in H(\text{div}, \Omega) \\ \qquad\qquad b_2(\sigma, q) & = (f, q)_\Omega, \quad \forall\, q \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.9}$$

onde

$$a_1(\sigma, v) = (K^{-1}\sigma, v)_\Omega, \quad b_1(u, v) = (u, \text{div}(v))_\Omega \quad \text{e} \quad b_2(\sigma, q) = (\text{div}(\sigma), q)_\Omega. \tag{3.10}$$

3.2 Operadores duais e o teorema da imagem fechada de Banach

Dados os espaços normados X, Y de dimensão infinita e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, desejamos saber se, dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $Ax = y$. Embora a questão da singularidade seja geralmente facil de resolver, o mesmo não ocorre com a existência, ou seja, decidir se $\mathrm{Im}(A) = Y$ ou caracterizá-lo quando é subespaço próprio de Y. Acontece que condições simples, úteis, necessárias e suficientes garantem que a igualdade $\mathrm{Im}(A) = Y$ ou uma caracterização de $\mathrm{Im}(A)$ possa ser encontrado não em termos de A, mas sim em termos do dual A' apresentado neste capítulo.

Esse operador é a generalização natural, para espaços vetoriais normads arbitrários, do operador adjunto de um operador linear contínuo entre dois espaços de Hilbert: Sejam X, Y espaços de Hilbert e $\sigma : X^* \longrightarrow X$, $\tau : Y^* \longrightarrow Y$ as correspondentes isometrias de Riez (2.37). Então podemos verificar que o operador adjunto $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$, Teorema 2.20, e o operador dual $A' \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ (definido a seguir) de $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ são relacionados por

$$A' = \sigma^{-1} A^* \tau, \tag{3.11}$$

assumindo que $\mathrm{Im}(A)$ é fechado (teorema da imagem fechada). Essa caracterização será a chave para a demonstração do teorema de Banach-Necas-Babuska.

Teorema 3.1 (Operador Dual). *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ $\mathbb{R}$-espaços vetoriais. Então, para todo operador $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, existe um único operador $A' \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ tal que*

$$A'y'(x) = y'(Ax), \quad \forall\, x \in X,\ y' \in Y^*.$$

Além disso

$$\|A'\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

O operador A' é chamado o ***operador dual*** *de A.*

Demonstração. **(i)** Dado $y' \in Y^*$, o mapeamento

$$\begin{aligned} A'y' : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto A'y'(x) = y'(Ax) \end{aligned}$$

é linear e contínuo devido à composição $y'A$.

(ii) O operador A' é linear. De fato, $\forall\, y', z' \in Y^*, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$A'(\alpha y' + z')(x) = (\alpha y' + z')(Ax) = \alpha y'(Ax) + z'(Ax) = \alpha A'y'(x) + A'z'(x), \quad \forall x \in X.$$

(iii) A' é contínuo. Com efeito,

$$\|A'y'\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|A'y'(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \frac{|y'(Ax)|}{\|x\|_X} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|y'\|_{Y^*}, \quad \forall\, y' \in Y^*. \tag{3.12}$$

(iv) Por **(iii)**, $\|A'\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Pelo Corolário 2.4 do Teorema de Hahn-Banach,

$$\|Ax\|_Y = \sup_{y' \neq 0} \frac{|y'(Ax)|}{\|y'\|_{Y^*}} = \sup_{y' \neq 0} \frac{|A'y'(x)|}{\|y'\|_{Y^*}} \leq \left(\sup_{y' \neq 0} \frac{\|A'y'\|_{X^*}}{\|y'\|_{Y^*}} \right) \|x\|_X = \|A'\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Logo, $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A'\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$, e portanto, $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A'\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$. ∎

Como primeiro passo para encontrar condições necessárias e suficientes que garantam que $\mathrm{Im}(A) = Y$, veremos que uma simples condição envolvendo o dual A' de A é equivalente a $\overline{\mathrm{Im}(A)} = Y$. Note que, se X e Y são espaços de Hilbert, esta condição segue imediatamente da relação $Y = \ker(A^*) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A)}$ estabelecido no teorema 2.20. Precisamos primeiro do torema:

Teorema 3.2. *Sejam X um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado e $Y \subset X$ subespaço. Então*

$$\overline{Y} = X \iff \{\psi \in X^*;\ \psi(y) = 0,\ \forall\, y \in Y\} = \{0\}.$$

Demonstração.

$(\Rightarrow)$: Como $\psi(y) = 0$, $\forall\, y \in Y$, então $\psi(y) = 0$, $\forall\, y \in \overline{Y} = X$, pois ψ é contínuo. Portanto $\psi = 0$.
$(\Leftarrow)$: Suponha por absurdo que $\overline{Y} \neq X$. Pelo Corolário 2.5, $\exists\, \phi \in X^*$, $\phi \neq 0$, tal que $\phi(y) = 0$, $\forall\, y \in \overline{Y}$, logo, $y \in Y$. Temos então

$$F =: \{\psi \in X^*;\ \psi(y) = 0,\ \forall\, y \in Y\} \supset \{0\} \quad \text{e} \quad F \neq \{0\},$$

o que é uma contradição. ∎

Teorema 3.3. *Sejam X e Y $\mathbb{R}$-espaços vetoriais normados e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Então,*

$$\overline{\mathrm{Im}(A)} = Y \iff \ker(A') = \{0\}.$$

Demonstração. Pelo teorema 3.2,

$$\overline{\mathrm{Im}\ (A)} = Y \iff \{\phi \in Y^*;\ \phi(z) = 0,\ \forall\, z \in \mathrm{Im}(A)\} = \{0\}.$$

Sendo assim, a aquivalência segue da relação

$$\begin{aligned}
\{\phi \in Y^*;\ \phi(z) = 0,\ \forall\, z \in \mathrm{Im}(A)\} &= \{\phi \in Y^*;\ \phi(Ax) = 0,\ \forall\, x \in X\} \\
&= \{\phi \in Y^*;\ A'\phi(x) = 0,\ \forall\, x \in X\} \\
&= \{\phi \in Y^*;\ A'\phi = 0\} \\
&= \ker(A').
\end{aligned}$$

∎

Apresentamos agora a primeira condição necessária e suficiente para um operador $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ satisfazer $\mathrm{Im}(A) = Y$, respondendo então a primeira pergunta sobre a existência de solução para $Ax = b$.

Teorema 3.4. *Sejam X, Y $\mathbb{R}$-espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ contínua. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathrm{Im}(A) = Y$*;*

(b) $\exists\, C > 0;\ \|\varphi\|_{Y^*} \leq C\|A'\varphi\|_{X^*},\ \forall\, \varphi \in Y^*$.

Demonstração.

$(a) \Rightarrow (b)$**:** Pelo teorema da aplicação aberta 2.12, A é uma aplicação aberta. Em particular, $\exists\, s > 0;\ B_Y(0,s) \subset A(B_X(0,1))$. Consequentemente, $\forall\, \phi \in Y^*$,

$$\begin{aligned}
\|A'\phi\|_{X^*} &= \sup_{x\in B_X(0,1)} |A'\phi(x)| \\
&= \sup_{x\in B_X(0,1)} |\phi(Ax)| \\
&= \sup_{y\in A(B_X(0,1))} |\phi(y)| \\
&\geq \sup_{y\in B_Y(0,s)} |\phi(y)| \\
&= s\|\phi\|_{Y^*},
\end{aligned}$$

como queríamos.

$(b) \Rightarrow (a)$**:** Afirmamos que $B_Y(0,C^{-1}) \subset \overline{A(B_X(0,1))}$. De fato, considere $y_0 \in Y \setminus Z$, onde $Z := \overline{A(B_X(0;1))} \subset Y$. Como Z é fechado e convexo, $\{y_0\}$ é compacto e convexo, e $Z \cap \{y_0\} = \emptyset$, a segunda forma geométrica do teorema de Hahn-Banach 2.15 garante que Z e $\{y_0\}$ são separados por um hiperplano. Isto significa que $\exists\, \phi \in Y^*$ $(\phi \neq 0)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que

$$\phi(y) \leq \gamma - \delta < \gamma + \delta \leq \phi(y_0), \quad \forall\, y \in Z,$$

e $\phi(y_0) > 0$, pois $0 \in Z$ e $\phi(0) = 0$. Da desigualdade acima temos

$$\sup_{y\in Z} \phi(y) \leq \gamma - \delta < \phi(y_0).$$

Observando que, se $y \in A(B_X(0,1))$, então $-y \in A(B_x(0,1))$, obtemos

$$\sup_{y\in Z} |\phi(y)| = \sup_{y\in Z} \phi(y) \leq \gamma - \delta < \phi(y_0).$$

Fazendo

$$\widehat{\phi} := \begin{cases} \left(\sup_{y\in Z}|\phi(y)|\right)^{-1}\phi, & \text{se } \sup_{y\in Z}|\phi(y)| > 0, \\ \frac{\delta}{\phi(y_0)}\phi, \ \forall\, \delta > 1, & \text{se } \sup_{y\in Z}|\phi(y)| = 0. \end{cases}$$

Assim, obtemos $\widehat{\phi} \in Y^*$ não nulo, tal que

$$|\widehat{\phi}(y)| \leq 1, \ \forall\, y \in Z, \quad \text{e} \quad \widehat{\phi}(y_0) > 1.$$

Consequentemente,

$$\|A'\widehat{\phi}\|_{X^*} = \sup_{x\in B_X(0,1)} |A'\widehat{\phi}(x)| = \sup_{x\in B_X(0,1)} |\widehat{\phi}(Ax)| \leq \sup_{y\in Z}|\widehat{\phi}(y)| \leq 1. \tag{3.13}$$

O que implica

$$1 < \widehat{\phi}(y_0) \leq \|\widehat{\phi}\|_{Y^*}\|y_0\|_Y \leq C\|A'\widehat{\phi}\|_{X^*}\|y_0\|_Y \leq C\|y_0\|_Y.$$

Em outras palavras, $y_0 \notin \overline{A(B_X(0,1))} \Rightarrow \|y_0\|_Y \geq C^{-1}$ e isso significa que

$$B_Y(0, C^{-1}) \subset \overline{A(B_X(0,1))}.$$

Pelo Lema 2.3,

$$B_Y\left(0, \frac{C^{-1}}{2}\right) \subset A(B_X(0,1)),$$

e portanto a aplicação A é aberta, logo sobrejetora.

■

O próximo resultado fornece uma caracterização para a $\mathrm{Im}(A)$.

Teorema 3.5 (Teorema da Imagem Fechada de Banach - 1ª Parte)**.** *Sejam X e Y $\mathbb{R}$-espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Então,*

$$\mathrm{Im}(A) = \overline{\mathrm{Im}(A)} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(A') = \overline{\mathrm{Im}(A')}.$$

Demonstração. **(⇒):** Considere $\widehat{Y} = \mathrm{Im}(A) \subset Y$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{A} : X &\longrightarrow \widehat{Y} \\ x &\longmapsto \widehat{A}(x) := Ax. \end{aligned}$$

Então $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\widehat{A}) = \widehat{Y}$ é fechado por hipótese.

Dado $\varphi \in Y^*$, a relação $|\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|y\|_Y$, $\forall\, y \in Y$ combinada com a inclusão $\widehat{Y} \subset Y$ define um funcional $\widehat{\varphi} \in \widehat{Y}^*$ tal que $\widehat{\varphi}(y) := \varphi(y)$, $\forall\, y \in \widehat{Y}$. Logo,

$$A'\varphi(x) = \varphi(Ax) = \widehat{\varphi}(Ax) = \widehat{\varphi}(\widehat{A}x) = \widehat{A}'\widehat{\varphi}(x), \quad \forall\, x \in X. \tag{3.14}$$

Portaanto o funcional $\widehat{\varphi} \in \widehat{Y}^*$ satisfaz $\widehat{A}'\widehat{\varphi} = A'\varphi$. Por outro lado, pelo teorema de Hanh-Banach em espaço vetorial normado 2.2,

$$\forall\, \widehat{\varphi} \in \widehat{Y}^* \text{ contínuo, } \exists\, \varphi \in Y' \text{ contínuo; } \varphi(y) = \widehat{\varphi}(y),\ \forall\, y \in \widehat{Y}.$$

Consequentemente,

$$A'\varphi(x) = \varphi(Ax) = \widehat{\varphi}(Ax) = \widehat{\varphi}(\widehat{A}x) = \widehat{A}'\widehat{\varphi}(x), \quad \forall\, x \in X. \tag{3.15}$$

Encontramos assim $\varphi \in Y^*$ tal que $A'\varphi = \widehat{A}'\widehat{\varphi}$. Combinando (3.14) e (3.15) concluímos que

$$\mathrm{Im}(A') = \mathrm{Im}(\widehat{A}') \tag{3.16}$$

em X^*.

Como $\widehat{A}$ é sobrejetivo e $\widehat{Y}$ é completo, pois é um subconjunto fechado de um espaço de Banach (teorema 2.4), pelo teorema da aplicação aberta 2.12 a aplicação A é aberta. Em particular $\exists\, \delta > 0$; $B_{\widehat{Y}}(0, 2\delta) \subset \widehat{A}(B_X(0,1)) = A(B_X(0,1))$. Esta inclusão implica que para todo $y \in \widehat{Y}$, com $\|y\|_{\widehat{Y}} = \delta$ existe $x \in X$ tal que $Ax = y$ e $\|x\|_X < 1 = \frac{\|Ax\|_Y}{\delta}$. Consequentemente, para algum $\widehat{\varphi} \in \widehat{Y}^*$,

$$\|\widehat{\varphi}\|_{\widehat{Y}^*} = \frac{1}{\delta}\sup_{\|y\|_Y=\delta}|\widehat{\varphi}(y)| \leq \frac{1}{\delta}\sup_{\|x\|_X<1}|\widehat{\varphi}(\widehat{A}(x))| = \frac{1}{\delta}\sup_{\|x\|_X<1}|\widehat{A}'\widehat{\varphi}(x)| = \frac{1}{\delta}\|\widehat{A}'\widehat{\varphi}\|_{X^*}.$$

Isto mostra que a aplicação inversa

$$(\widehat{A}')^{-1} : \mathrm{Im}(\widehat{A}') \subset X^* \longrightarrow \widehat{Y}^*$$

está bem definido e que

$$\widehat{A}' : \widehat{Y}^* \longrightarrow \mathrm{Im}(\widehat{A}')$$

é um operador contínuo e bijetivo com inversa contínua. Logo $\mathrm{Im}(\widehat{A}')$ é fechada em X^*. Seja $(\widehat{\beta}_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Im}(\widehat{A}')$ tal que $\widehat{\beta}_n \longrightarrow \beta$ em X^*. Então $\left[(\widehat{A}')^{-1}\widehat{\beta}_n\right]_{n=1}^{\infty}$ converge em Y^*. Suponha $(\widehat{A}')^{-1}\widehat{\beta}_n \longrightarrow \widehat{\varphi}$. Então,

$$\widehat{\beta}_n = [\widehat{A}'(\widehat{A}')^{-1}]\widehat{\beta}_n \longrightarrow \widehat{A}'\widehat{\varphi} \in \mathrm{Im}(\widehat{A}') \tag{3.17}$$

por definição.

Consequentemente, $\mathrm{Im}(A') = \mathrm{Im}(\widehat{A}')$ é fechado em X^* como queríamos.

($\Leftarrow$): Considere

$$\begin{aligned} \widehat{A} : X &\longrightarrow \widehat{Y} := \overline{\mathrm{Im}(A)} \subset Y \\ x &\longmapsto \widehat{A}(x) \end{aligned}$$

Então $\widehat{Y}$ é fechado. Como, por construção, $\mathrm{Im}(\widehat{A}) = \mathrm{Im}(A)$ é denso em $\widehat{Y}$, então pelo teorema 3.3, $\widehat{A}' : \widehat{Y}^* \longrightarrow X^*$ é injetora. Considerando um argumento similar ao usado para chegar na igualdade (3.16), obtemos

$$\mathrm{Im}(A') = \mathrm{Im}(\widehat{A}')$$

em X^*. Mas $\mathrm{Im}(A')$ é fechado por hipótese. Então $\mathrm{Im}(A')$ é completo, pois X^* é completo pela proposição 2.5(c), e assim $\mathrm{Im}(\widehat{A}')$ é também completo.

Como a aplicação injetora $\widehat{A}'$ é sobrejetora, por construção, então, pelo teorema da aplicação aberta 2.12, $(\widehat{A}^*)^{-1}$ é contínuo. Assim,

$$\exists\, C > 0;\ \|\phi\|_{\widehat{Y}^*} \leq C\|\widehat{A}'\phi\|_{X^*}, \quad \forall\, \phi \in \widehat{Y}^*.$$

Então, do teorema 3.4, $\widehat{A}$ é sobrejetora, ou seja

$$\mathrm{Im}(\widehat{A}) = \widehat{Y} = \overline{\mathrm{Im}(A)}.$$

Mas $\mathrm{Im}(\widehat{A}) = \mathrm{Im}(A)$; portanto A é fechado. ∎

Estamos agora em condições de fornecer uma segunda condição fundamental, necessária e suficiente para que um operador A seja sobrejetivo.

Teorema 3.6 (Teorema da imagem fechada de Banach - 2ª parte)**.** *Sejam X e Y $\mathbb{R}$-espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathrm{Im}(A) = Y$*;*

(b) $\exists\, C > 0;\ \|\varphi\|_{Y^*} \leq C\|A'\varphi\|_{X^*},\ \forall\, \varphi \in Y^*$*;*

(c) $\ker(A') = \{0\} \wedge \mathrm{Im}(A') = \overline{\mathrm{Im}(A')}$.

Demonstração. A equivalência entre **(a)** e **(b)** é dada pelo Teorema 3.4.

Suponha que vale **(a)**. Então $\mathrm{Im}(A) = \overline{\mathrm{Im}(A)} = Y$, e então A' é injetor pelo teorema 3.3 e $\mathrm{Im}(A')$ é fechada pelo teorema 3.5. Portanto **(a)** implica **(c)**.

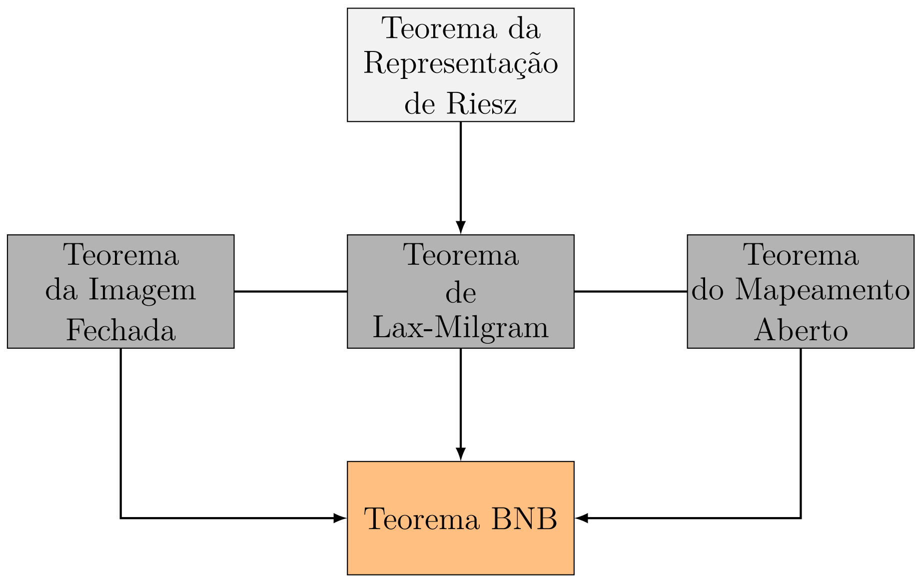
Suponha que vale **(c)**. Então a aplicação $A' : Y^* \longrightarrow \mathrm{Im}(A')$ é bijetora e $\mathrm{Im}(A')$ é completo, pois é subespaço fechado de X^* pelas proposições 2.4 e 2.5(c). Então, pelo teorema da aplicação aberta 2.12 aplicado a esse operador, tem-se $(A')^{-1}$ contínua, logo, pelo teorema 2.10(g), $\exists\, C > 0;\ \|\varphi\|_{Y^*} \leq C\|A'\varphi\|_{X^*},\ \forall\, \varphi \in Y^*$. Portanto **(c)** implica **(b)**. ∎

Sejam X e Y espaços de funções e $A : X \longrightarrow Y$. O item (b) do teorema 3.6 afirma que para garantir a existência de uma solução $x \in X$ para $Ax = b$, onde $b \in Y$, é suficiente que haja um limite a priori em alguma solução y' da equação dual $A'y' = x'$, na forma $\|y'\|_{Y^*} \leq C\|x'\|_{X^*}$, para alguma constate C independente de x'. É importante ressaltar que não é necessário verificar a existência de solução para a equação dual.

3.3 Teorema de Banach-Necas-Banuska

A formulação variacional abstrata tratada no teorema de Lax Milgran 2.21 (a saber: Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = l(v)$ para todo $v \in V$) considera apenas uma forma bilinear $a \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{R})$ contínua e coerciva, e um espaço V onde tomamos as funções tentativas v, e as função solução u. No entanto, existem problemas nos quais a sulução e as funções tentativas são tomadas em espaços distintos. Portanto surge a necessidade de tratar uma outra classe de formulações variacionais abstratos incluindo um segundo espaço de funções e uma segunda forma bilinear. O teorema de Banach-Necas-Babuska garante a existência e unicidade de solução para esse caso.

Apresentamos o diagrama abaixo ilustra a estrutura dos resultados preliminares necessários para a demonstração do teorema de BNB e, em seguida, o enunciado e a demonstração do teorema de BNB .



Teorema 3.7 (Teorema de Banach-Necas-Babuska)**.** *: Sejam V e M espaços de Hilbert, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{L}(V \times M, \mathbb{R})$ contínuas com as seguintes propriedades:*

1. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\boldsymbol{a}(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \ \forall\, v \in U_0, \tag{3.18}$$
onde $U_0 := \{v \in V;\ \boldsymbol{b}(v, \mu) = 0,\ \forall\, \mu \in M\}$;

2. *Existe $\beta > 0$ tal que*
$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in V} \frac{|\boldsymbol{b}(v, \mu)|}{\|v\|_V \|\mu\|_M} \geq \beta, \quad \text{com} \quad \mu, v \neq 0. \tag{3.19}$$

Considere também $\boldsymbol{g} \in V^*$ e $\boldsymbol{f} \in M^*$ contínuas.

Então $\exists!\ (u, \lambda) \in V \times M$;

$$\boldsymbol{a}(u,v) + \boldsymbol{b}(v,\lambda) = \boldsymbol{g}(v), \quad \forall\, v \in V, \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{b}(u,\mu) = \boldsymbol{f}(\mu), \quad \forall\, \mu \in M. \tag{3.21}$$

Além disso, a função

$$\begin{aligned} \gamma : V^* \times M^* &\longrightarrow V \times M \\ (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}) &\longmapsto \gamma(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}) = (u, \lambda) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. Dado $u \in V$, segue da continuidade de $\mathbf{a}$ que a aplicação $v \in V \longrightarrow \mathbf{a}(u,v)$ é contíua. Portanto, como V e V^* são isomorfos,

$$\forall\, u \in V,\ \exists!\ Au \in V^*;\ \mathbf{a}(u,v) = Au(v),\ \forall\, v \in V.$$

Além disso,

$$\|Au\|_{V^*} = \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\mathbf{a}(u,v)|}{\|v\|_V} \leq \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{L}_2(V,\mathbb{R})} \|u\|_V.$$

Logo $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ é contínua e $\|A\|_{\mathcal{L}(V,V^*)} \leq \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{L}_2(V,\mathbb{R})}$.

De forma análoga, existe $B \in \mathcal{L}(V, M^*)$ e, consequentemente, pelo teorema 3.1, existe o operador dual $B' \in \mathcal{L}(M; V^*)$ que cumpre

$$\mathbf{b}(v,\mu) = Bv(\mu) = B'\mu(v), \quad \forall\, (v,\mu) \in V \times M.$$

Sendo assim, resolver (3.20) equivale a encontrar um par (u, λ) que satisfaz o seguinte sistema de equações de operadores:

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= \mathbf{g} \quad \text{em } V^* \\ Bu &= \mathbf{f} \quad \text{em } M^*. \end{aligned}$$

Expressando em termos de B', a condição (3.19) equivale a

$$\|B'\mu\|_{V^*} = \sup_{v \neq 0} \frac{|B'\mu(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\mathbf{b}(v,\mu)|}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu\|_M, \quad \forall\, \mu \in M.$$

Pelo teorema da imagem fechada de Banach - 2ª parte 3.6 concluímos que $B \in \mathcal{L}(V, M^*)$ é sobrejetora, $B' \in \mathcal{L}(M, V^*)$ é injetora e $\mathrm{Im}(B')$ é fechado em V^*.

Já que B é sobrejetor e $\mathbf{f} \in M^*$, existe $u_0 \in V$ tal que $Bu_0 = \mathbf{f}$. Temos ainda,

$$\begin{aligned} U_0 &= \{v \in V;\ \mathbf{b}(v,\mu) = 0,\ \forall\, \mu \in M\} \\ &= \{v \in V;\ Bv(\mu) = 0,\ \forall\, \mu \in M\} \\ &= \{v \in V;\ Bv = 0 \text{ em } M^*\} = \ker(B), \end{aligned}$$

e assim a forma bilinear $\mathbf{a}$ é B-coerciva. Como a aplicação $v \mapsto \mathbf{g}(v) - \mathbf{a}(u_0, v)$, $\forall\, v \in V$, é continua, então, pelo teorema de Lax-Milgram 2.21,

$$\exists!\ u_1 \in \ker(B);\ \mathbf{a}(u_1, v) = \mathbf{g}(v) - \mathbf{a}(u_0, v), \quad \forall\, v \in Ker(B). \tag{3.22}$$

O elemento $u := (u_0 + u_1) \in V$ portanto satisfaz

$$\langle \sigma(Au - \mathbf{g}), v\rangle_V = (Au - \mathbf{g})(v) = \mathbf{a}(u,v) - \mathbf{g}(v) = 0, \quad \forall\, v \in \ker(B),$$

onde $\sigma : V^* \longrightarrow V$ é a isometria de Riesz apresentada na relação (2.37). Em outras palavras,

$$\sigma(Au - \mathbf{g}) \in (\ker(B))^{\perp}. \tag{3.23}$$

Seja $\tau : M^* \longrightarrow M$ uma isometria de Riesz. Então

$$\langle (\tau B)v, \mu\rangle_M = Bv(\mu) = B'\mu(v) = \langle (\sigma B')\mu, v\rangle_V, \quad \forall\, v \in V,\ \mu \in M,$$

logo $\sigma B'$ é o adjunto de τB no sentido do espaço de Hilbert. Ou seja, conforme definido no Ttorema 2.20. Assim, pela parte (b) do mesmo teorema,

$$V = \ker(\tau B)\ \oplus\ \overline{\mathrm{Im}(\sigma B')}.$$

Mas $\mathrm{Im}(\sigma B') \subset V$ é fechado, pois $\mathrm{Im}(B') \subset V^*$ é fechado e σ é uma isometria. Logo

$$Im(\sigma B') = (Ker(\tau B))^{\perp} = (Ker(B))^{\perp}.$$

Como $\sigma(Au - \mathbf{g}) \in (\ker(B))^{\perp}$ (veja (3.23)), existe $\lambda \in M$ tal que $-\sigma B'(\lambda) = \sigma(Au - \mathbf{g})$, ou, equivalentemente, tal que

$$Au + B'\lambda = \mathbf{g},.$$

Como $u_1 \in \ker(B)$,

$$Bu = B(u_0 + u_1) = B(u_0) = \mathbf{f},$$

e assim provamos a existência de solução $(u, \lambda) \in V \times M$.

Para provar a unicidade veremos que se $(u, \lambda) \in V \times M$ satisfaz

$$\mathbf{a}(u,v) + \mathbf{b}(v,\lambda) = 0, \quad \forall\, v \in V, \tag{3.24}$$

$$\mathbf{b}(u,\mu) = 0, \quad \forall\, \mu \in M, \tag{3.25}$$

então $(u, \lambda) = (0, 0)$. Tomando $v = u$ na equação (3.24), segue da equação (3.25),

$$\mathbf{a}(u, u) + \mathbf{b}(u, \lambda) = \mathbf{a}(u, u) = 0,$$

Pela equação 3.25, $u \in \ker(B)$ e $\mathbf{a}$ é B-coerciva por hipótese, sendo assim existe $\alpha > 0$ tal que

$$0 = \mathbf{a}(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

e portanto, $u = 0$. A primeira equação (3.24) se reduz a $\mathbf{b}(v, \lambda) = 0$, $\forall\, v \in V$, ou, equivalentemente,

$$Bv(\lambda) = B'\lambda(v) = 0, \quad \forall\, v \in V,$$

logo, $B'\lambda = 0$. Da injetividade de B' temos $\ker(B') = \{0\}$, portanto $\lambda = 0$ como queríamos.

Finalmente, a aplicação

$$\mathcal{K} : V \times M \longrightarrow V^* \times M^* \tag{3.26}$$

$$(v, \mu) \longmapsto \mathcal{K}(v, \mu) = (Av + B'\mu, Bv) \tag{3.27}$$

é contínuo, pois suas funções coordenadas são contínuas, e, pela existência e unicidade verificadas, é bijetora. Pelo teorema da aplicação aberta 2.12, $\mathcal{K}$ leva abertos de $V \times M$ em aberto de $V^* \times M^*$, logo a função inversa $\gamma = \mathcal{K}^{-1} : V^* \times M^* \longrightarrow V \times M$ é continua. ∎

3.4 Conclusão

Os teoremas da representação de Riesz, de Lax-Milgram, da aplicação aberta e da imagem fechada, foram fundamentais para a demonstração do teorema de Banach-Necas-Babuska. Como aplicação do teorema BNB, vimos o exemplo 3.1, onde o problema de Poisson inicialmente apresentado via formulação variacional primal, sendo assim resolvido com o teorema de Lax-Milgram, foi posteriormente exibido em sua formulação variacional dual a fim de obter um par de resultados e que, neste caso, a resolução foi dada por meio do teorema BNB .

Dentre os possíveis desdobramentos deste trabalho, destacamos:

1. extensão do teorema BNB à problemas não lineares;
2. conexão do teorema BNB com problemas de otimização; aplicação do teorema BNB e seus efeitos sobre o MEF.

Referências

BABUSKA; AZIZ. *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method whit Applications to Partial Differential Equations*. Academic Press, New York: SIAM, 1972. Citado na página 23.

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Eastern Michigan University and University of Illinois: SIAM, 1995. Citado na página 41.

DIEUDONNÉ, J. *History of Functional Analysis*. Academic Press, New York: SIAM, 1972. Citado na página 21.

JOãO, G.; VALDENI, F. *Fundamentos de Matemática*. Editora da Universidade Estadual de Maringá: SIAM, 2008. Citado na página 56.

LAX, P. D.; MILGRAM, A. N. Parabolic equations. *Annals of Mathematical Studies*, n. 33, p. 167–190, 1954. Citado na página 22.

NECAS, J. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivés partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, n. 16, p. 305–326, 1962. Citado na página 23.