

Robson Carlos de Moura Junior

O Teorema da Matriz-Árvore e Aplicações

Volta Redonda, RJ

2019

Robson Carlos de Moura Junior

O Teorema da Matriz-Árvore e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Curso de Matemática

Orientador: Francisca Andrea Macedo França

Coorientador: André Ebling Brondani

Volta Redonda, RJ

2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BAVR
Gerada com informações fornecidas pelo autor

M929t Moura junior, Robson Carlos de
O Teorema da Matriz-Árvore e Aplicações : O Teorema da
Matriz-Árvore / Robson Carlos de Moura junior ; Francisca
Andrea Macedo França, orientadora ; André Ebling Brondani,
coorientador. Volta Redonda, 2019.
75 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências
Exatas, Volta Redonda, 2019.

1. Teorema da Matriz-Árvore. 2. Árvores Geradoras. 3. Grafos
Matrogênicos. 4. Produção intelectual. I. França,
Francisca Andrea Macedo, orientadora. II. Brondani, André
Ebling, coorientador. III. Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Ciências Exatas. IV. Título.

CDD -

Robson Carlos de Moura Junior

O Teorema da Matriz-Árvore e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Volta Redonda, RJ, 16 de Dezembro de 2019:

Prof. Dra. Francisca Andrea Macedo França – UFF
Orientador

Prof. Dr. André Ebling Brondani – UFF
Coorientador

Prof. Dr. Átila Arueira Jones – IF Sudeste MG

Prof. Dr. Carlos Henrique Pereira do Nascimento – UFF

Volta Redonda, RJ
2019

Aos meus pais, Robson e Mary.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Jesus Cristo, meu Senhor e Salvador por ter me colocado e me sustentado nesta caminhada.

Aos meus pais, Robson e Mary por serem minhas fontes de inspiração e estarem comigo em todos os momentos da minha vida acadêmica, desde o ensino fundamental até a graduação, sempre fornecendo tudo o que precisava para meus estudos, em especial pelas conversas motivacionais sempre melhorando meu estado emocional, sem estas não chegaria até aqui. A toda minha família, que sempre me apoiou neste sonho de me tornar um cientista.

À minha orientadora Francisca, que acreditou no meu potencial independente de notas, e me ajudou a encontrar o caminho certo na graduação. Pelas aulas de álgebra linear que despertaram ainda mais meu interesse por matemática, em especial por esta área. Por todas as reuniões rodeadas de conhecimento e por todos os conselhos, estes que levarei por toda minha vida acadêmica. Ao meu coorientador André que aceitou se juntar a nós neste projeto, contribuindo com seus conselhos, correções e resolvendo dúvidas, sempre que solicitado.

À professora Marina Ribeiro, por suas aulas de Fundamentos de Matemática e Cálculo 1, que formaram minha base para o restante do curso. Ao professor Ivan por suas aulas de análise sempre em alto nível matemático. A todos os demais professores do ICEX, todos estes com excelentes qualidades acadêmicas e didáticas, mas com a qualidade especial de estarem sempre em prontidão para auxiliar os alunos.

Aos meus amigos Victor, Beatriz, João Marcelo, Saroka, William e todos meus amigos do ICEX, por sempre estarem ao meu lado não só nas horas livres mas também nas horas de estudo, tornando sempre o ambiente agradável e colocando matemática em quase todas nossas conversas. Amigos que levarei por toda minha vida.

Aos membros dessa banca que aceitaram prontamente o convite.

*“Porque os detalhes, como se sabe,
conduzem a virtude e a felicidade;
as generalidades são males intelectualmente necessários.
(Admirável Mundo Novo, Aldous Huxley)*

Resumo

O Teorema da Matriz-Árvore é um dos teoremas clássicos da Teoria Algébrica de Grafos. Este provê um método de contagem das árvores geradoras de um grafo conexo em termo dos autovalores ou determinantes de matrizes associadas a tais grafos. O teorema foi provado pela primeira vez em 1847, pelo físico alemão Gustav Kirchhof em seu estudo sobre redes elétricas, e demonstra uma relação entre árvores geradoras e matrizes. Várias provas diferentes, generalizações e também algumas aplicações são conhecidas, como a Fórmula de Cayley, que nos diz que o número de árvores geradoras de um grafo completo K_n é dado por n^{n-2} . Nosso objetivo é entender o Teorema da Matriz-Árvore na visão da Teoria Espectral de Grafos, esta que estuda o espectro de algumas matrizes associadas a tais grafos a fim de obter propriedades sobre estes. Finalmente, aplicaremos o Teorema da Matriz-Árvore em algumas classes de grafos, em especial, a classe dos grafos matrogênicos.

Palavras-chave: Teorema da Matriz-Árvore. Árvores Geradoras. Grafos Matrogênicos.

Abstract

The Matrix-Tree Theorem is one of the classic theorems of Algebraic Graph Theory. This provides a counting method for spanning trees of a connected graph in terms of eigenvalues or determinants of matrices associated with such graphs. The theorem was first proved in 1847, by the physicist Gustav Kirchhof, in his study about electrical flows, and shows a relationship between spanning trees and matrices. Several different proves, generalizations and some applications are know, like Cayley's Formula, wich say the number of spanning trees of a complete graph K_n is given by n^{n-2} . Our goal is understand the Matrix-Tree Theorem in the Spectral Graph Theory view, wich studies the spectrum of some matrices associated wich such graphs, in order to obtain properties on them. Finally, we will aply the Matrix-Tree Theorem in some graph classes, in special the class of matrogenic graphs.

Keywords: Matrix-Tree Theorem. Spanning Trees. Matrogenic Graphs.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo G	13
Figura 2 – Grafos G , G' e G''	15
Figura 3 – Grafo G e seu complementar \overline{G}	15
Figura 4 – Grafos G e H	15
Figura 5 – Grafos Isomorfos.	16
Figura 6 – Ciclo C_5	16
Figura 7 – Grafo completo K_4	17
Figura 8 – Árvore G_1 e o grafo G_2 que não é uma árvore	17
Figura 9 – Grafo H	18
Figura 10 – Grafo $K_{2,4}$	18
Figura 11 – Roda W_{11}	18
Figura 12 – Leque F_6	18
Figura 13 – Estrela S_6	19
Figura 14 – Caminho \mathcal{P}_4	19
Figura 15 – Grafo G e $CS(3, 4)$, respectivamente.	19
Figura 16 – Emparelhamento perfeito $3K_2$	20
Figura 17 – Árvores geradoras de K_4	22
Figura 18 – Vértices gêmeos em G	22
Figura 19 – Vértices dominantes e incomparáveis em G	23
Figura 20 – Grafo Threshold.	23
Figura 21 – Um 4-ciclo alternado.	24
Figura 22 – Construção de um grafo threshold.	25
Figura 23 – Grafos $3K_2$ e $CP(3)$	27
Figura 24 – Exemplo de grafos do item (ii) do Teorema 2.74.	27
Figura 25 – Grafo Matrogênico H	28
Figura 26 – Configuração proibida \mathcal{F}	28
Figura 27 – Relações de inclusão na classe dos unigrafos.	29
Figura 28 – Grafo G com orientação fixada.	31
Figura 29 – Grafo Threshold G	55
Figura 30 – Grafo Threshold.	55

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	PRELIMINARES	2
2.1	Teoria de Matrizes	2
2.2	Teoria de Grafos	12
2.2.1	Algumas Classes de Grafos	16
2.2.2	Árvores	21
2.2.3	Grafos Threshold	22
2.2.4	Grafos Matrogênicos	26
2.3	Teoria Espectral de Grafos	29
2.3.1	Matriz de Adjacência e de Incidência de um Grafo	30
2.3.2	Matriz Laplaciana de um Grafo	31
3	TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE	36
4	APLICAÇÕES DO TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE	41
4.1	Caminhos	42
4.2	Ciclos	43
4.3	Grafo Completo	44
4.4	Grafos Bipartidos Completos	45
4.5	Rodas	46
4.6	Leques	50
4.7	Estrelas	53
4.8	Algumas Subclasses de Matrogênicos	54
4.8.1	Grafos Threshold	54
4.8.2	Grafos Matrogênicos Obtidos do Grafo Split Completo	56
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	64

1 Introdução

Como citado em [1], a teoria de grafos foi redescoberta diversas vezes. Desde a demonstração apresentada por Euler na resolução do problema das pontes de Königsberg (1736) e a última década do século XIX – mais de 150 anos – houve apenas um pequeno número de trabalhos. Em 1847, Kirchhoff utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos e, ao fazê-lo, criou a teoria das árvores – uma classe de grafos conexos e acíclicos – para caracterizar conjuntos de ciclos independentes. Dez anos mais tarde, Cayley seguiria a mesma trilha, embora tendo em mente outras aplicações, dentre as quais se destacava a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alicíclicos saturados (que tem estrutura de árvores), em química orgânica. Enfim, Jordan (1869) se ocupou também das árvores, de um ponto de vista estritamente matemático.

O estudo das árvores geradoras de um grafo, isto é, subgrafos constituídos por todos os vértices do grafo e que são árvores, foram levadas por várias frentes em separado, dentre as quais podemos citar Cayley que, em 1889, determinou o número de árvores geradoras dos grafos completos, para maiores detalhes ver [2]. Vale ressaltar que, posteriormente, vários matemáticos apresentaram diferentes demonstrações para este mesmo resultado, ver [3]. Quando Kirchhoff criou a teoria das árvores durante os estudos de redes elétricas, apresentou o Teorema da Matriz-Árvore, que diz que o número de árvores geradoras de um grafo é igual a qualquer cofator de seu laplaciano, e mesmo sendo anterior ao de Cayley, ele não foi logo associado a Teoria de Grafos pois foi aplicado em outro contexto. Nesta monografia propõe-se o estudo de tal teorema e as suas aplicações na Teoria de Grafos, e também aplica-lo em algumas famílias de grafos ainda não analisadas.

A monografia está organizada do seguinte modo: O Capítulo 2 contém os conhecimentos básicos sobre a Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e da Teoria Espectral de Grafos necessários; O Capítulo 3 faz o estudo da arte sobre o Teorema da Matriz-Árvore; O Capítulo 4 apresenta grande parte das aplicações existentes na literatura e novos resultados obtidos da aplicação do mesmo em algumas subclasses dos grafos matrogênicos e por fim, no Capítulo 5 apresentamos as Considerações Finais com sugestões para trabalhos futuros.

2 Preliminares

Neste capítulo serão apresentados resultados sobre Teoria de Grafos, Teoria de Matrizes, Álgebra Linear e Teoria Espectral de Grafos como requisitos básicos para os capítulos posteriores. Para um estudo mais aprofundado o leitor pode consultar as referências [4] e [5] para Teoria de Matrizes e Álgebra Linear, [6] e [7] para Teoria de Grafos e [7] para Teoria Espectral de Grafos.

2.1 Teoria de Matrizes

Definição 2.1. Seja \mathbb{K} um corpo. Se m e n são números naturais, uma *matriz de ordem* $m \times n$ sobre \mathbb{K} é uma aplicação de $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ em \mathbb{K} .

É representada como um arranjo de m linhas e n colunas com $m \times n$ elementos, onde os elementos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ da matriz, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são chamados de *entradas*.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

O conjunto formado por todas as matrizes de ordem $m \times n$ com coeficientes em \mathbb{K} é denotado por $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, quando não há necessidade de se explicitar o corpo \mathbb{K} , denotamos simplesmente por $\mathbb{M}_{m,n}$. Uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ é dita *quadrada* quando $m = n$, e neste caso escrevemos simplesmente $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, analogamente, quando não se têm necessidade de explicitar o corpo \mathbb{K} , denotamos simplesmente por \mathbb{M}_n .

Seja $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Uma *submatriz* de A é uma matriz obtida pela exclusão de alguma linha ou coluna de A . A submatriz de A , obtida pela exclusão da i -ésima linha e da j -ésima coluna é denotada por A_{ij} .

Exemplo 2.2. Considere as matrizes A e $A_{2,3}$ dadas a seguir. A matriz $A_{2,3}$ é uma submatriz de A , pois é obtida a partir da exclusão das linha 2 e da coluna 3 da matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

A *transposta* de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m,n}$, é a matriz $A^T = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{n,m}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Uma matriz é dita *simétrica* quando $A = A^T$.

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita *triangular inferior* quando $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, e *triangular superior* quando $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é dita *diagonal* quando $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

A *matriz identidade* $I_n = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n$ é definida por,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Quando não é necessário explicitar a ordem, a matriz identidade é denotada simplesmente por I .

Definição 2.3 (Matrizes em blocos e submatrizes indexadas [4]). Sejam $A \in \mathbb{M}_{m,n}$. Para conjuntos indexados $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\}$ e $\beta \subseteq \{1, \dots, n\}$, denotamos por $A[\alpha, \beta]$ a submatriz que contém as linhas de A indexadas por α , e as colunas de A indexadas por β . Como exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} [\{1, 3\}, \{2, 3\}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = \beta$, a submatriz $A[\alpha] = A[\alpha, \alpha]$ é a submatriz principal de A .

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ constitui uma partição de $\{1, \dots, m\}$ e β_1, \dots, β_s constitui uma partição de $\{1, \dots, n\}$, então as matrizes $A[\alpha_i, \beta_j]$ formam uma partição da matriz $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ com $1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s$.

Se uma matriz é particionada por partições sequenciais de linhas e colunas, o resultado é uma matriz particionada chamada de *matriz em blocos*. Por exemplo, se $A \in \mathbb{M}_n$ é particionada pela partição sequencial $\alpha_1 = \{1, \dots, k\}, \alpha_2 = \{k, k+1, \dots, n\}$, o resultado é a matriz em blocos

$$A = \begin{bmatrix} A[\alpha_1, \alpha_1] & A[\alpha_1, \alpha_2] \\ A[\alpha_2, \alpha_1] & A[\alpha_2, \alpha_2] \end{bmatrix}.$$

Como exemplo, temos que a matriz abaixo é uma matriz em blocos,

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 & 13 \end{array} \right].$$

Definição 2.4. Seja $A \in \mathbb{M}_n$. O *determinante* de A , denotado por $\det(A)$, é o número definido indutivamente da seguinte forma.

Se $n = 1$, então $\det[a_{11}] = a_{11}$.

Se $n = 2$, então

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Suponhamos agora que $n > 2$, e que $\det B$ esteja definido para todo $m < n$, com $B \in \mathbb{M}_m$. Retirando-se a i -ésima linha, e a j -ésima coluna de A , obtemos a matriz $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n-1}$, e desta forma está definido o determinante de A_{ij} . Vamos definir o determinante de A escolhendo $1 \leq i \leq n$ como,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

A expressão anterior é conhecida como *expansão de Laplace*. É um método para calcular o determinante de uma matriz quadrada A pela escolha de uma linha ou coluna de A utilizando determinantes de submatrizes a partir desta linha ou coluna.

O determinante de uma matriz A pode ser simplesmente denotado por $|A|$, por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

A definição de determinante também pode ser feita a partir de permutações.

Definição 2.5. Toda aplicação bijetora $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ chama-se *permutação* do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Indicaremos uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Agora, consideremos uma permutação σ de $\{1, 2, \dots, n\}$. Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se *signal da permutação* σ o número inteiro $\text{sgn}(\sigma)$, onde

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \text{ é par,} \\ -1, & \text{se } r \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Definição 2.6. Seja $A \in \mathbb{M}_n$, $A = [a_{ij}]$.

Consideremos um produto da forma

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

onde σ é uma permutação do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Nesse produto aparece apenas um elemento de cada linha de A e apenas um elemento de cada coluna de A . Multiplicando este produto pelo sinal de σ , obtemos:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Finalmente, somemos todos os números assim obtidos de maneira que σ percorre o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$. Definimos o *determinante* de A como o número

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Proposição 2.7 ([5]). *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n$. Então o determinante têm as seguintes propriedades:*

- (i) *Se todas entradas de uma linha de A são nulos então $\det(A) = 0$;*
- (ii) $\det(A) = \det(A^T)$;
- (iii) *Se multiplicarmos uma linha de A por uma constante, então o determinante de A fica multiplicado por esta constante;*
- (iv) *Se duas linhas são trocadas em A , o determinante é multiplicado por -1 ;*
- (v) *Se A tem duas linhas iguais então $\det(A) = 0$;*
- (vi) *O determinante não muda quando somamos uma linha a outra multiplicada por uma constante;*
- (vii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
- (viii) *Se A é uma matriz triangular então o determinante é o produto das entradas da diagonal principal.*

Definição 2.8. Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ é dita *inversível* se, existe uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$, neste caso B é dita a matriz inversa de A , e a denotamos por A^{-1} . Uma matriz que não é inversível é dita *singular*.

Vale destacar que na Proposição 2.7 todas as propriedades referente as linhas também são válidas para as colunas, pelo fato de que $\det(A) = \det(A^T)$. Os itens (iii), (iv) e (vi) são conhecidos como *operações elementares* sobre linhas ou colunas de uma matriz. Uma *matriz elementar* é uma matriz que difere da matriz identidade por uma única operação elementar de linha ou coluna. As matrizes elementares geram o grupo linear geral das matrizes inversíveis. A multiplicação á esquerda por uma matriz elementar

representa as operações elementares de linha, enquanto a multiplicação á direita representa as operações elementares de coluna.

Definição 2.9. Seja $A \in \mathbb{M}_n$. Chamamos de um *cofator* de A o número

$$\Delta(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Quando não se têm necessidade de explicitar a matriz, é denotado somente como Δ_{ij} . A *matriz adjunta clássica* de A , denotada por $\text{adj}(A)$, é a matriz $\text{adj}(A) = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n$ onde $b_{ij} = \Delta_{ij}$, isto é,

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.10. *Seja $A \in \mathbb{M}_n$, então $\text{adj}(A^T) = \text{adj}(A)^T$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um escalar então $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{adj}(A)$.*

A proposição abaixo é conhecida como *Teorema Fundamental da Adjunta Clássica*.

Proposição 2.11. *Seja $A \in \mathbb{M}_n$, então*

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I.$$

Proposição 2.12. *Seja $A \in \mathbb{M}_n$. Se $\det(A) \neq 0$, então A é inversível e sua inversa é dada por*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \quad .$$

Exemplo 2.13. *Seja $A \in \mathbb{M}_3$ a matriz do exemplo abaixo, então $\text{adj}(A)$ e A^{-1} são dadas por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 10 \\ 6 & -2 & -12 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & 5/4 \\ 3/4 & -1/4 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.14. *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n$. Dizemos que A é *semelhante* a B se existe uma matriz inversível $P \in \mathbb{M}_n$ tal que*

$$A = P^{-1}BP.$$

Seja $A \in \mathbb{M}_n$. Se A é semelhante a uma matriz diagonal D , isto é

$$A = P^{-1}DP,$$

dizemos que A é *diagonalizável*.

Definição 2.15. Seja $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, chamamos de *posto* de A , denotado por $r(A)$, é o número de linhas linearmente independentes de A . A *nulidade* de A , denotada por $nul(A)$, é o número $nul(A) = n - r(A)$.

Proposição 2.16. Seja $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, então $r(A) = r(A^T)$ e $r(A) = r(AA^T)$.

Proposição 2.17 ([8]). Sejam $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ e $B \in \mathbb{M}_{l,k}$. Então o posto da matriz formada por blocos

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad M \in \mathbb{M}_{m+l, n+k}.$$

é igual á

$$r(M) = r(A) + r(B).$$

Exemplo 2.18. Seja $A \in \mathbb{M}_4$ a matriz abaixo

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & & \\ c & d & & \\ \hline & & e & f \\ & & g & h \end{array} \right],$$

então

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + r\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right).$$

Definição 2.19. Um *espaço vetorial* \mathbb{E} sobre um corpo \mathbb{K} , é um conjunto não vazio, onde sobre seus elementos, ditos *vetores*, estão definidas duas operações: a *adição*, que a cada par $u, v \in \mathbb{E}$, faz corresponder um elemento $u + v \in \mathbb{E}$, e a multiplicação por escalar, que a cada par $u \in \mathbb{E}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, faz corresponder um elemento $\lambda u \in \mathbb{E}$. Para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{E}$ e $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, tais operações devem satisfazer as seguintes propriedades:

- (i) comutatividade da soma: $u + v = v + u$;
- (ii) associatividade da soma: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- (iii) elemento neutro da soma: Existe um vetor $0 \in V$ tal que, $v + 0 = 0 + v = v$, para todo $v \in V$;
- (iv) inverso aditivo: Para todo $v \in V$, existe um vetor $w \in V$ tal que, $v + w = w + v = 0$, denotamos w como $-v$, isto é, $w = -v$;
- (v) associatividade: $(\lambda\beta)v = \lambda(\beta v)$;
- (vi) elemento neutro da multiplicação: $1 \cdot v = v$, onde 1 é o elemento neutro da multiplicação do corpo \mathbb{K} ;

- (vii) distributividade entre os escalares: $(\lambda + \beta)v = \lambda v + \beta v$;
- (viii) distributividade entre os vetores: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Alguns exemplos clássicos de espaços vetoriais são o espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, os espaços euclidianos \mathbb{R}^n onde $n \in \mathbb{N}$ e o conjunto dos polinômios com grau menor ou igual a n denotado por \mathcal{P}_n munido com as operações usuais de soma e multiplicação.

Seja \mathbb{E} um espaço vetorial. Um *subespaço vetorial* de \mathbb{E} é um subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ com as seguintes propriedades:

- (i) $0 \in \mathbb{F}$;
- (ii) Se $u, v \in \mathbb{F}$, então $u + v \in \mathbb{F}$;
- (iii) Se $v \in \mathbb{F}$, então $\lambda v \in \mathbb{F}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Definição 2.20. Seja \mathbb{E} um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $\mathcal{X} \subset E$ é *linearmente independente* quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de \mathcal{X} . Um conjunto \mathcal{X} é um *conjunto de geradores* de \mathbb{E} quando todo vetor $w \in \mathbb{E}$ pode exprimir-se como combinação linear de vetores pertencentes a \mathcal{X} . Uma *base* de \mathbb{E} é um conjunto linearmente independente e gerador de \mathbb{E} . Diz-se que o espaço vetorial \mathbb{E} tem *dimensão finita* quando admite uma base com um número finito de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de \mathbb{E} , chama-se a dimensão do espaço vetorial \mathbb{E} , e é denotada por $\dim(\mathbb{E})$.

Um espaço vetorial \mathbb{E} é dito *finitamente gerado* por uma base β quando todos elementos de \mathbb{E} são gerados por uma combinação linear dos elementos de β .

Definição 2.21 ([5]). Dada $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, temos:

- (i) O *espaço coluna* de A , denotado por $\mathcal{R}(A)$, é o subespaço gerado pelas colunas de A .
- (ii) O *espaço nulo* de A , denotado por $\mathcal{N}(A)$, é o subespaço gerado pelos vetores v tais que $Av = 0$.
- (iii) O *espaço linha* de A , denotado por $\mathcal{R}(A^T)$, é o espaço coluna da matriz A^T .
- (iv) O *espaço nulo a esquerda* de A , denotado por $\mathcal{N}(A^T)$, é o espaço nulo da matriz A^T .

O teorema a seguir, conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra Linear, relaciona as noções de posto e nulidade de uma matriz com o espaço linha e o espaço coluna desta mesma matriz.

Teorema 2.22 ([5]). *Seja $A \in \mathbb{M}_{m,n}$. Então*

- (i) $\dim \mathcal{R}(A) = r(A)$.
- (ii) $\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A) = n - r(A)$.
- (iii) $\dim \mathcal{R}(A^T) = r(A^T) = r(A)$.
- (iv) $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r(A)$.

Definição 2.23. Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um *autovalor* de A se existe um vetor não nulo v tal que $Av = \lambda v$. Qualquer vetor que satisfaz esta propriedade é dito um *autovetor* de A , *associado* ao autovalor λ .

Chamamos de *autoespaço* associado ao autovalor λ o subespaço vetorial gerado pelos autovetores associados a λ unido ao vetor nulo. É importante observar que o vetor nulo nunca é autovetor mas pertence a qualquer espaço vetorial.

Exemplo 2.24. Seja $A \in \mathbb{M}_2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Observe que $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Então 1 e 2 são autovalores de A com respectivos autovetores associados $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Neste caso, o autoespaço associado ao autovalor 2 é o subespaço vetorial gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Definição 2.25. Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. O *polinômio característico* de A é definido como o polinômio mônico de grau n dado por

$$p_A(t) = \det(tI - A).$$

Proposição 2.26. *Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ é raiz do polinômio característico $p_A(t)$.*

Demonstração. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A associado a v , então

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I)v = 0$$

Para isto, é necessário e suficiente que $A - \lambda I$ seja singular, e isto acontece se, e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Definição 2.27. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A , a *multiplicidade algébrica* de λ é a multiplicidade de λ como raiz de $p_A(t)$. A *multiplicidade geométrica* de λ é a dimensão do autoespaço associado a λ .

O multiconjunto formado pelos autovalores de A é denominado *espectro* de A e é denotado por $\text{Spec}(A)$.

Exemplo 2.28. Seja $A \in \mathbb{M}_3$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}, \text{ então } p_A(t) = -(t-1)(t+3)^2.$$

Logo $\text{Spec}(A) = \{-3, -3, 1\}$.

Proposição 2.29 ([4]). *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n$ matrizes diagonalizáveis e que comutam. Sejam μ_1, \dots, μ_n os autovalores de A e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de B . Então os autovalores de $A + B$ são $\mu_1 + \lambda_1, \mu_2 + \lambda_2, \dots, \mu_n + \lambda_n$.*

Definição 2.30. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. A *matriz conjugada* de A é a matriz $\bar{A} = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$ é o conjugado complexo de a_{ij} .

A *matriz adjunta* de A é a matriz $A^* = \bar{A}^T$. Se $AA^* = I$ então dizemos que A é *unitária*, além disto, se A é uma matriz real unitária, A é dita *ortogonal*.

Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é dita *hermitiana* quando $A = A^*$. Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ então A é dita *simétrica*.

Exemplo 2.31. Seja $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2-i & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2+i & -3 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ -i & -3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.32 ([4]). *Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é uma matriz hermitiana então todos seus autovalores são reais.*

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz hermitiana e λ um autovalor de A associado ao autovetor x , então $Ax = \lambda x$. Daí temos as seguintes equações

$$Ax = \lambda x \iff \bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x = \lambda \|x\|^2$$

Aplicando a transposição de matrizes

$$\bar{x}^T (Ax) = (Ax)^T \bar{x} = x^T A^T \bar{x}$$

Daí

$$x^T A^T \bar{x} = \lambda \|x\|^2$$

Tomando o conjugado complexo

$$\bar{x}^T A^* x = \bar{\lambda} \|x\|$$

Como $A = A^*$

$$\bar{x}^T Ax = \bar{\lambda} \|x\|$$

assim $\lambda = \bar{\lambda}$, isto é, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

O teorema a seguir nos diz que toda matriz hermitiana é semelhante a uma matriz diagonal.

Teorema 2.33 ([4]). *Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é hermitiana se, e somente se, existe uma matriz unitária $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e uma matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = U\Lambda U^*$. Além disto, A é simétrica se, e somente se, existe uma matriz ortogonal $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P\Lambda P^T$.*

Em outras palavras este teorema nos diz que toda matriz hermitiana é diagonalizável.

Corolário 2.34. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz hermitiana. Então*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

onde λ_i , $1 \leq i \leq n$, são os n distintos autovalores de A .

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz hermitiana. Então pelo Teorema 2.33, $A = U\Lambda U^*$, onde Λ é uma matriz diagonal, assim

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(U\Lambda U^*) \\ &= \det(U) \det(\Lambda) \det(U^*) \\ &= \det(\Lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.35 ([4]). *Seja M uma matriz quadrada de ordem n , e da forma*

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,k} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,k} \end{bmatrix}$$

onde $M_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$, é uma submatriz de ordem $n_i \times n_j$ tal que suas linhas têm somas constantes e iguais a c_{ij} . Se $\bar{M} = [c_{ij}]_{k \times k}$ então os autovalores de \bar{M} são também autovalores de M .

Exemplo 2.36. Seja $M \in \mathbb{M}_5$,

$$M = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \text{ então } \overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como $\text{Spec}(\overline{M}) = \{-i\sqrt{2} + 2, i\sqrt{2} + 2\}$, temos pela Proposição 2.35 que $\{-i\sqrt{2} + 2, i\sqrt{2} + 2\} \subset \text{Spec}(M)$.

O resultado a seguir, conhecido por Fórmula de Binet-Cauchy, é uma generalização do fato de que se A e $B \in \mathbb{M}_n$ então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Queremos estender este resultado para quando A e B não são quadradas mas o produto AB é uma matriz quadrada.

Teorema 2.37 ([4]). *Sejam $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ e $B \in \mathbb{M}_{n,m}$ e $C = AB$, onde $C \in \mathbb{M}_{m,m}$. Se $m > n$, então $\det(AB) = 0$. Se $m \leq n$, então tomando $\beta = \{1, 2, \dots, m\}$ temos*

$$\det(AB) = \sum_{\gamma} \det A[\beta, \gamma] \det B[\gamma, \beta],$$

onde o somatório é tomado sobre todos os conjuntos de índices $\gamma \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ com cardinalidade m .

Exemplo 2.38. Sejam $A \in \mathbb{M}_{2,3}$, $B \in \mathbb{M}_{3,2}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det(AB) = \sum_{\gamma} \det A[\gamma, \beta] \det B[\beta, \gamma]$$

onde $\beta = \{1, 2\}$, e γ varia entre os conjuntos $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$. Daí

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

2.2 Teoria de Grafos

Definição 2.39. Um grafo $G = G(V, E)$ é uma estrutura constituída por um conjunto finito e não-vazio de vértices denominado V , e um conjunto E de arestas formada por subconjuntos de dois a dois elementos de V .

Dizemos que dois vértices v_i e v_j são *adjacentes* quando existe uma aresta $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$, desta forma, dizemos que a aresta e_{ij} é incidente aos vértices v_i e v_j . O *grau de um vértice* v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes á v . Os graus mínimo e máximo de G são denotados respectivamente como $\delta(G) = \min\{d(v_i); v_i \in V\}$ e $\Delta(G) = \max\{d(v_i); v_i \in V\}$.

Dado um grafo G , a *ordem* de G é a cardinalidade do seu conjunto de vértices, e o seu *tamanho* é a cardinalidade do seu conjunto de arestas.

Neste trabalho, trataremos apenas de grafos simples, isto é, grafos sem orientação, sem “loops” (arestas que partem e chegam num mesmo vértice), e sem arestas múltiplas (mais de uma aresta incidindo no mesmo par de vértices).

Exemplo 2.40. Seja G o grafo ilustrado na Figura 1, então

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\},$$

onde podemos observar que v_1 e v_2 são vértices adjacentes e que $d(v_1) = 2$ e $d(v_2) = 3$. Além disso, temos que G é um grafo de ordem 4 e tamanho 5 tal que $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.

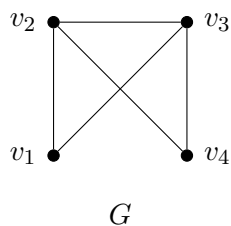


Figura 1: Grafo G

Definição 2.41. Seja G um grafo de ordem n . A *sequência de graus* de G , é uma n -upla cujas coordenadas dadas em ordem não crescente correspondem aos graus dos vértices de G . Denotamos a sequência de graus de G por $D(G)$.

No Capítulo 4, será necessário indicar os graus distintos dos vértices de um grafo G em ordem crescente, $d_1 < \dots < d_s$, e consideraremos o rearranjo da sequência de graus $D^*(G) = (d_1^{(n_1)}, d_2^{(n_2)}, \dots, d_s^{(n_s)})$, onde n_i é o número de vezes em que d_i é o grau de algum vértice em G , com $1 \leq i \leq s$. Claramente, $n_i \geq 1$ e $\sum_{i=1}^s n_i = n$. Por exemplo, no grafo da Figura 1, temos $D(G) = (3, 3, 2, 2)$ e $D^* = (2^{(2)}, 3^{(2)})$.

Teorema 2.42 ([6]). *Se G é um grafo de ordem n e tamanho m então,*

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

Definição 2.43. Um *caminho de comprimento k em um grafo G* é formado por uma sequência finita de vértices distintos $[v_1, \dots, v_k]$, tais que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k$. Um *ciclo em um grafo* é um caminho $[v_1, \dots, v_k]$ onde $v_1 = v_k$.

Definição 2.44. Sejam $G(V, E)$ e $G'(V', E')$ dois grafos. Se $V' \subset V$ e $E' \subset E$, então dizemos que G' é um *subgrafo* de G , e escrevemos $G' \subset G$. O subgrafo G' é chamado de *subgrafo induzido* quando dois vértices são adjacentes em G' se, e somente se, são adjacentes em G .

Exemplo 2.45. Na Figura 2, vemos um grafo G , um subgrafo G' de G , e um subgrafo induzido, G'' , de G .

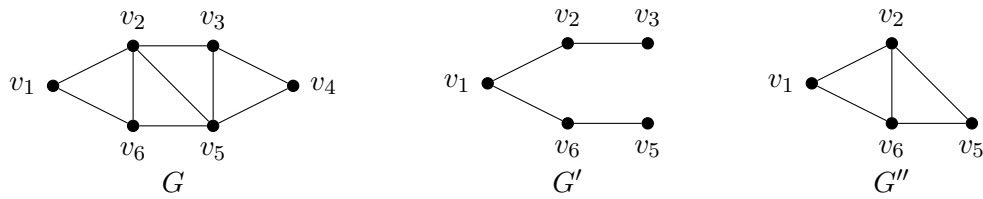


Figura 2: Grafos G , G' e G'' .

Definição 2.46. Seja $G(V, E)$ um grafo, o *grafo complementar de G* é dado por $\overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$, onde $\overline{V} = V$ e $\{v_i, v_j\} \in \overline{E}$, se e somente se, $\{v_i, v_j\} \notin E$.

Exemplo 2.47. Na Figura 3, exibimos o grafo G e seu complementar \overline{G} .

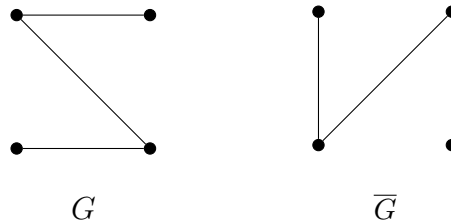


Figura 3: Grafo G e seu complementar \overline{G} .

Definição 2.48. Um grafo G é dito *conexo* se tem ordem 1 ou se existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices. Um grafo que não é conexo é dito *desconexo*. Dizemos que $G' \subset G$ é uma *componente conexa* de G quando G' é um grafo conexo e não existe um grafo conexo $H \subset G$, tal que $G' \subset H$ e $G' \neq H$.

Exemplo 2.49. A figura 4 ilustra um grafo conexo G , e um grafo desconexo H com 3 componentes conexas.

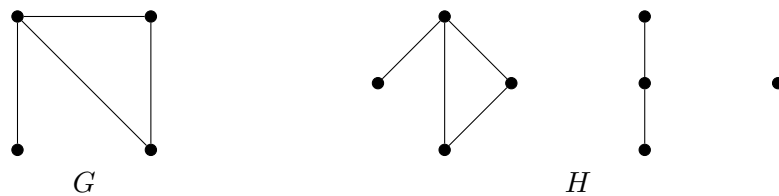


Figura 4: Grafos G e H .

Definição 2.50. Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são ditos *isomorfos* quando existe um bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ entre os conjuntos de vértices tal que $\{v_i, v_j\} \in E_1$ se, e somente se $\{f(v_i), f(v_j)\} \in E_2$. Se tal função existe, é chamada de um *isomorfismo* entre os grafos G_1 e G_2 .

Exemplo 2.51. Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ os grafos da Figura 5. A função $f : V_1 \rightarrow V_2$, dada por $f(v_1) = a$, $f(v_2) = d$, $f(v_3) = b$, $f(v_4) = e$ e $f(v_5) = c$ é um isomorfismo entre os grafos G_1 e G_2 .

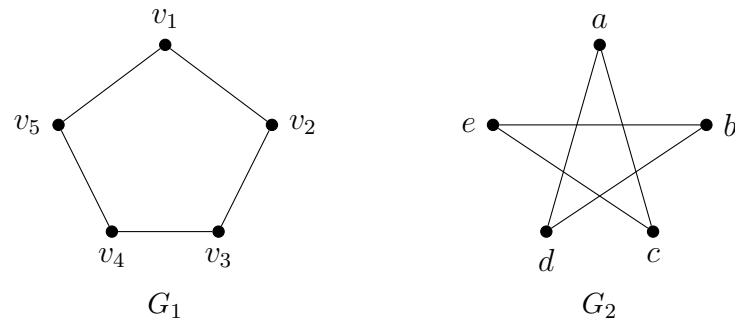


Figura 5: Grafos Isomorfos.

2.2.1 Algumas Classes de Grafos

Uma *classe* (*família*) de grafos é uma coleção de grafos definidos por uma propriedade \mathcal{P} específica. Quando isto acontece, diz-se que os grafos de tal classe têm a propriedade \mathcal{P} . Nesta seção, iremos definir e exemplificar algumas classes de grafos mais comuns encontradas na literatura, e que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

Diz-se que um grafo $G(V, E)$ é o *grafo trivial* quando o conjunto E é vazio, e V é unitário.

Um grafo G é dito *k-regular* quando todos seus vértices tem o mesmo grau k .

Um *ciclo* C_n é um grafo *2-regular* e conexo de ordem n . A Figura 6 ilustra o grafo C_5 .

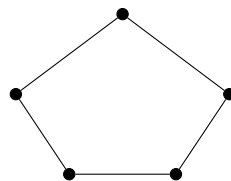


Figura 6: Ciclo C_5 .

O grafo completo K_n é um grafo conexo de ordem n em que quaisquer dois de seus vértice são adjacentes. O grafo K_n é um exemplo de grafo regular, já que todos os seus vértices tem grau $n - 1$. A Figura 7 ilustra o grafo K_4 .

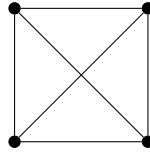


Figura 7: Grafo completo K_4 .

Um grafo conexo e sem subgrafos que são ciclos é chamado de *árvore*, enquanto um grafo desconexo e sem ciclos é uma *floresta*, ou seja, um conjunto de árvores.

Na Figura 2.2.1, ilustramos o grafo G_1 que é uma árvore e o grafo G_2 que não é uma árvore pois contém ciclos.

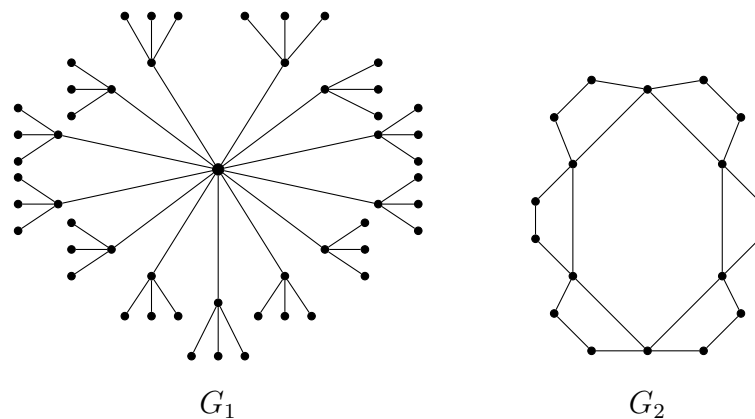


Figura 8: Árvore G_1 e o grafo G_2 que não é uma árvore

Os vértices de grau 1 de um grafo são chamados *vértices pendentes*. Os vértices adjacentes aos vértices pendentes são chamados *quase pendentes*. No caso de árvores, os vértices pendentes são chamados de *folhas*.

Uma *partição* de um conjunto não vazio S é uma coleção constituída por r subconjuntos não vazios dois a dois disjuntos de S cuja união é igual a S . Os subconjuntos dessa partição são chamados de *células*.

Um grafo é dito *k-partido* quando existe uma partição do seu conjunto de vértices em k subconjuntos, denominados *células*, não vazios e disjuntos dois a dois, onde as arestas são sempre formadas por vértices pertencentes a subconjuntos distintos. Portanto, não há vértices adjacentes na mesma célula. Um grafo *k-partido completo* é um grafo *k-partido* em que dois vértices quaisquer são adjacentes se, e somente se, pertencem a células distintas. Se $k = 2$, o grafo é dito *bipartido*. Um grafo *bipartido completo* é um grafo 2-partido

completo que é denotado por $K_{m,n}$ cujas células possuem m e n vértices. Nas Figuras 9 e 10 ilustramos o grafo bipartido H e o grafo bipartido completo $K_{2,4}$.

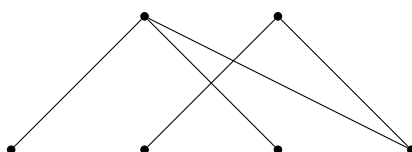


Figura 9: Grafo H .

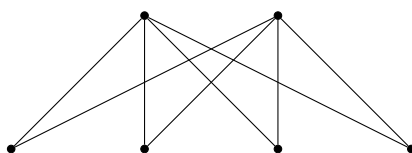


Figura 10: Grafo $K_{2,4}$.

Uma *roda* W_n é um grafo de ordem n obtido a partir de um ciclo de ordem $n - 1$ adicionando um vértice que é adjacente a todos os vértice do ciclo.

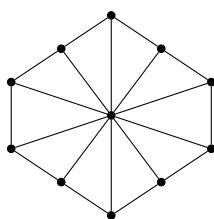


Figura 11: Roda W_{11} .

Um *leque* F_p com p vértices, $p > 2$, é um grafo obtido de um caminho com $p - 1$ vértices adicionando um vértice universal.

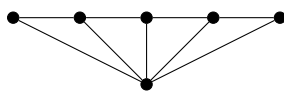


Figura 12: Leque F_6 .

Uma *estrela* S_n é uma árvore de ordem n com $n - 1$ folhas.

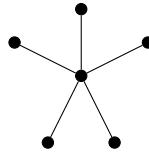


Figura 13: Estrela S_6 .

O grafo caminho \mathcal{P}_n é uma árvore de ordem $n \geq 2$ com exatamente dois vértices pendentos e os demais de grau 2.



Figura 14: Caminho \mathcal{P}_4 .

Uma *clique* de tamanho n em um grafo é um subgrafo completo com n vértices. Um *conjunto estável* de vértices S em um grafo G é um subconjunto do conjunto de vértices de G com a propriedade de que os vértices de S não possuem aresta entre si.

Um *grafo split* G é um grafo cujos vértices podem ser particionados em uma clique K , e um conjunto estável de vértices S , onde os vértices do conjunto estável não possuem arestas entre si. A notação utilizada para grafos split é $G(K, S)$.

Um grafo *split completo* é um grafo split em que todo vértice do conjunto *estável* é adjacente a todos os vértices da clique. Denotamos um grafo split completo por $CS(k, s)$, onde k é o tamanho da clique, e s é a cardinalidade do conjunto estável de vértices.

Exemplo 2.52. Na Figura 15, ilustramos um grafo split G com conjunto estável $S = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $K = \{v_1, v_2, v_3\}$, e o grafo split completo $CS(3, 4)$ com $S = \{w_4, w_5, w_6, w_7\}$ e $K = \{w_1, w_2, w_3\}$.

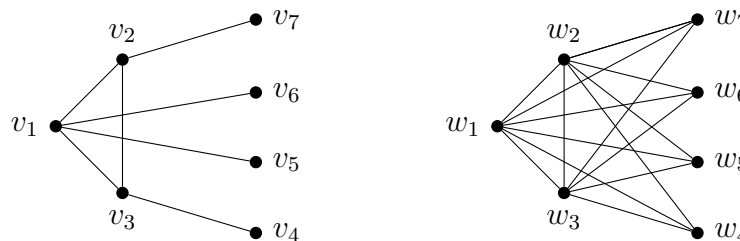


Figura 15: Grafo G e $CS(3, 4)$, respectivamente.

Seja G um grafo. Um *emparelhamento* M é um subgrafo no qual o conjunto de arestas é formado por pares de arestas não adjacentes entre si, nenhuma delas são loops, isto é, não há duas arestas compartilhando um vértice em comum. Um *emparelhamento máximo* é um emparelhamento M que, dado qualquer aresta e que não esta em M , quando esta for

adicionada a M fará com que M não seja mais um emparelhamento, ou seja, M será um emparelhamento máximo se não for um subconjunto de qualquer outro emparelhamento em G . Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento que corresponde a todos os vértices do grafo, isto é, todo vértice do grafo é está ligado a apenas uma aresta do grafo. A *ordem de um emparelhamento* é determinada pela quantidade de arestas nele contidas. Podemos notar que um emparelhamento perfeito é a união de grafos K_2 , podendo ser denotado por tK_2 , onde t é a quantidade de grafos K_2 na união.

A Figura ?? ilustra o emparelhamento perfeito $3K_2$.

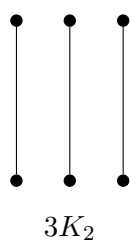


Figura 16: Emparelhamento perfeito $3K_2$.

2.2.2 Árvores

Proposição 2.53. *Toda árvore de ordem n possui ao menos 2 folhas, isto é 2 vértices de grau 1.*

Teorema 2.54 ([6]). *Toda árvore de ordem n possui $m = n - 1$ arestas.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n .

Seja T uma árvore de ordem n . Se $n = 1$, então T possui somente um vértice, e consequentemente $m = 1 - 1 = 0$.

Suponhamos que o resultado seja válido para toda árvore de ordem $n_0 < n$.

Como T tem ordem n , retirando-se uma aresta de T obtemos duas componentes conexas de ordem $n_1 < n$ e $n_2 < n$ e tamanho m_1 e m_2 respectivamente, que também são árvores, logo, por hipótese de indução

$$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1.$$

□

Teorema 2.55 ([6]). *Se u, v são dois vértices em uma árvore T , então existe um único caminho entre u e v .*

Demonstração. Seja T uma árvore, u e v vértices de T e $[u = w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, w_k = v]$ um caminho ligando u a v . Suponhamos que exista outro caminho diferente $[u = w_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k = v]$ ligando u a v . Então $[u = w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, w_k = v, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, u = w_1]$ é um ciclo em T , o que contradiz o fato de T ser uma árvore. □

Definição 2.56. Seja G um grafo. Uma *árvore geradora* de G é um subgrafo de G que contém todos os vértices de G e é uma árvore.

É importante observar que todo grafo conexo possui uma árvore geradora mas se o grafo é desconexo, então seu número de árvores geradoras é igual a zero.

Exemplo 2.57. A figura abaixo mostra todas as árvores geradoras do grafo completo K_4 .

Observe que os grafos de cada linha da figura á esquerda são isomorfos. Para o nosso propósito, estes grafos serão considerados árvores geradoras diferentes.

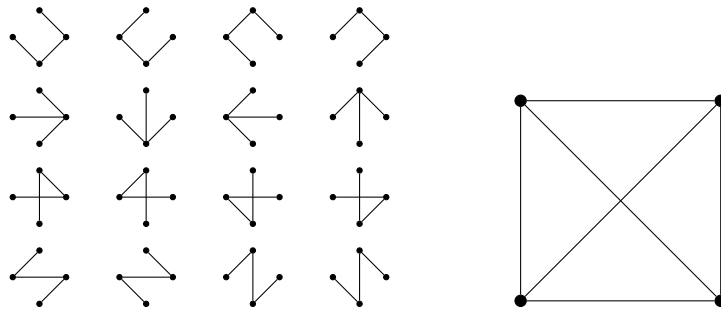


Figura 17: Árvores geradoras de K_4 .

2.2.3 Grafos Threshold

Os *grafos threshold* são uma classe interessante de grafos, eles possuem aplicações em várias áreas como na psicologia, ciência da computação etc. Chvátal e Hammer [9] deram o nome “threshold graphs” e estudaram estes grafos para aplicação em problemas de empacotamento de conjuntos. Ao mesmo tempo, Henderson e Zalcstein [10] descobriram os mesmos grafos e deram a eles o nome de “PV-chunk definable graphs”. A descoberta deles foi motivada pela aplicação destes grafos em programação em paralelo. Para um estudo mais aprofundado sobre os grafos threshold o leitor pode consultar a referência [11].

Definição 2.58. Seja $G(V, E)$ um grafo e $v \in V$. Definimos a *vizinhança aberta* de v como o conjunto de todos os vértices adjacentes a v , e é denotada por $N_G(v)$. A *vizinhança fechada* de v é o conjunto $N_G[v]$, dado por $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Dois vértices distintos $u, v \in V$ são ditos *gêmeos falsos* quando $N_G(u) = N_G(v)$ e $\{u, v\} \notin E$, e são ditos *gêmeos verdadeiros* quando $N_G[u] = N_G[v]$.

Exemplo 2.59. No grafo G da Figura 18, temos que $N_G(v_4) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $N_G[v_4] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $N_G(v_5) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $N_G[v_5] = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, ou seja, v_4 e v_5 são vértices gêmeos falsos, mas não são vértices gêmeos verdadeiros pois $N_G[v_4] \neq N_G[v_5]$.

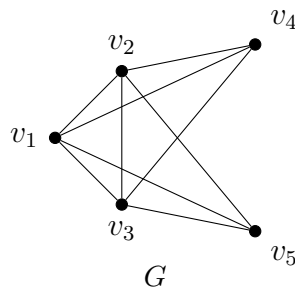


Figura 18: Vértices gêmeos em G

Definição 2.60. Dizemos que u domina v quando, $N_G(v) - \{u\} \subseteq N_G(u) - \{v\}$. Quando nem u domina v , nem v domina u , dizemos que os vértices u e v são incomparáveis.

Exemplo 2.61. No grafo G da Figura 19, temos que $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, $N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$ e $N_G(v_4) = \{v_1\}$. Então $N_G(v_4) - \{v_1\} = \emptyset$ e $N_G(v_1) - \{v_4\} = \{v_2, v_3\}$, isto é,

$$N_G(v_4) - \{v_1\} \subseteq N_G(v_1) - \{v_4\},$$

e assim v_1 domina o vértice v_4 .

Temos também que $N_G(v_1) - \{v_2\} = \{v_3, v_4\}$ e $N_G(v_2) - \{v_1\} = \{v_3, v_5\}$. Então $N_G(v_2) - \{v_1\} \not\subseteq N_G(v_1) - \{v_2\}$ e $N_G(v_1) - \{v_2\} \not\subseteq N_G(v_2) - \{v_1\}$, ou seja, os vértices v_1 e v_2 são incomparáveis.

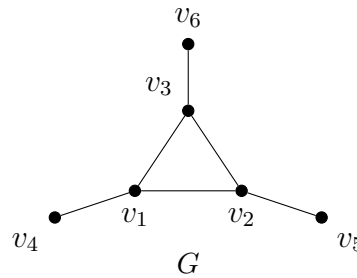


Figura 19: Vértices dominantes e incomparáveis em G

Definição 2.62. Um grafo G é *threshold* quando dados quaisquer dois vértices u, v em G , ou u domina v , ou v domina u , isto é, G não possui vértices incomparáveis.

Exemplo 2.63. Na Figura 20, o grafo G é um grafo threshold.

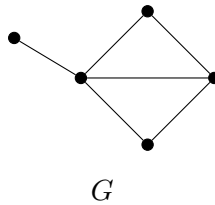


Figura 20: Grafo Threshold.

Teorema 2.64 ([12]). *Seja G um grafo threshold com sequência de graus $D(G)$. Então G é unicamente definido por $D(G)$, isto é, qualquer outro grafo com sequência de graus $D(G)$ é isomorfo a G .*

Definição 2.65. Um *4-ciclo alternado* em um grafo $G = (V, E)$ é uma configuração constituída de vértices distintos a, b, c e d tal que $\{a, b\}, \{c, d\} \in E$ e $\{a, c\}, \{b, d\} \notin E$. Considerando a presença ou ausência das arestas $\{a, d\}$ e $\{b, c\}$ em G , vemos que os vértices de um 4-ciclo alternado induzem o caminho P_4 , o ciclo C_4 ou o emparelhamento perfeito $2K_2$.

Na Figura 21 vemos um 4-ciclo e seus possíveis subgrafos induzidos. As linhas sólidas representam as arestas presentes, e as linhas pontilhadas as arestas ausentes.

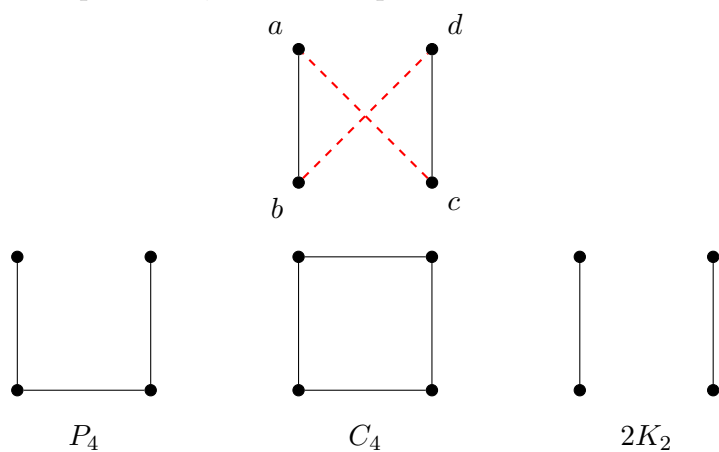


Figura 21: Um 4-ciclo alternado.

Uma coleção \mathcal{C} é *aninhada* se para quaisquer 2 conjuntos em \mathcal{C} , um é subconjunto do outro. Algumas caracterizações básicas dos grafos threshold são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 2.66 ([11]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é um grafo threshold;
- (ii) G não possui um 4-ciclo alternado;
- (iii) G é um grafo split $G(K, S)$, onde a coleção formada pelas vizinhanças abertas dos vértices de S é aninhada;
- (iv) G pode ser construído de um grafo com um vértice adicionando repetidas vezes vértices isolados, isto é, vértices que não são adjacentes a ninguém, ou vértices dominantes, ou seja, vértices que são adjacentes a todos os outros.

Exemplo 2.67. Neste exemplo, vamos construir o grafo ilustrado na Figura 20 utilizando o item (iv) do Teorema 2.66. Todo grafo threshold é definido unicamente por uma n -upla d formada por zeros e uns. Esta n -upla é construída da seguinte forma, se é adicionado um vértice isolado no grafo, então é adicionado 0 em d , se é adicionado um vértice dominante no grafo, então é adicionado 1 em d . No grafo da Figura 20 temos $d = (0, 0, 1, 0, 1)$.

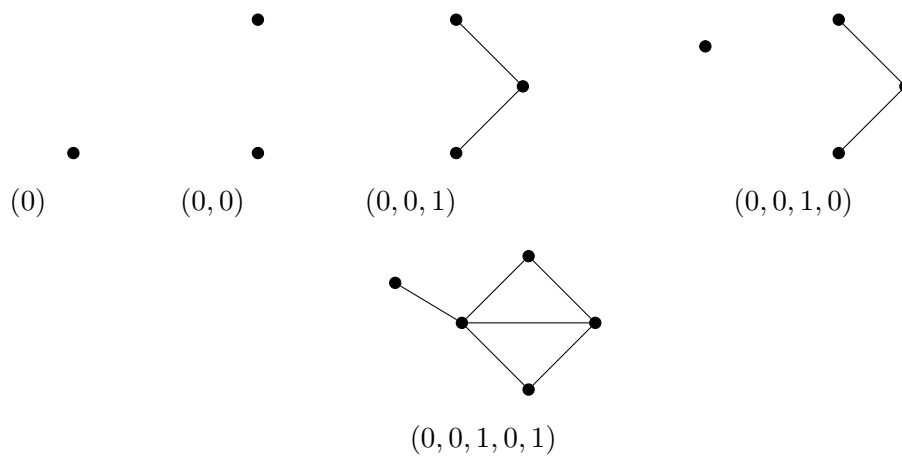


Figura 22: Construção de um grafo threshold.

2.2.4 Grafos Matrogênicos

Um grafo é dito *unigrafo* quando é unicamente determinado pela sua sequência de graus, isto é, se G é um unigrafo e H têm a mesma sequência de graus de G , então H é isomorfo á G . A classe dos grafos matrogênicos está contida nos unigrafos. Foram introduzidos por Foldes e Hammer [13] como uma variação dos grafos *matroidais*, que também serão introduzidos nesta subseção.

Definição 2.68. A diferença simétrica de dois conjuntos X, Y é dada por

$$X \oplus Y = (X \cup Y) - (X \cap Y).$$

Definição 2.69. Um grafo G é dito *matrogênico* quando dados quaisquer vértices u, v incomparáveis em G , tivermos

$$|(N_G(u) - \{v\}) \oplus (N_G(v) - \{u\})| = 2.$$

Vale destacar que todo grafo *threshold* é matrogênico, pois não possui vértices incomparáveis.

Definição 2.70. Um grafo é *matrogênico split* quando é *split* e é matrogênico.

Verificar se um grafo é *split matrogênico* não é uma tarefa fácil. Veremos no Teorema 2.74 que a caracterização dos grafos matrogênicos se reduz a caracterização dos grafos *split matrogênicos*.

Proposição 2.71 ([14]). *O grafo split completo $CS(k, s)$ é split matrogênico.*

Demonstração. Considere o grafo *split completo* $G(K, S)$, sendo K uma clique de tamanho n e S um conjunto estável de tamanho m . Por definição, os vértices de S tem grau n e os vértices de K tem grau $n + m - 1$, comparando o dominante entre todos os vértices de G , se considerarmos dois vértices quaisquer $v_1, v_2 \in G$ temos os seguintes 3 casos:

- (i) Se $v_1, v_2 \in K$, então $N_G(v_1) = N_G(v_2)$, assim $N_G(v_1) - \{v_2\} \subseteq N_G(v_2) - \{v_1\}$, ou seja, tanto v_1 domina v_2 quanto v_2 domina v_1 .
- (ii) Se $v_1, v_2 \in S$ então $N(v_1) = N(v_2)$, assim $N_G(v_1) - \{v_2\} \subseteq N_G(v_2) - \{v_1\}$, ou seja, tanto v_1 domina v_2 quanto v_2 domina v_1 .
- (iii) Sejam $v_1 \in S$ e $v_2 \in K$. Então v_1 é adjacente á todos os vértices de K . Assim $N(v_1) - \{v_2\} \subseteq N(v_2) - \{v_1\}$ e portanto, v_1 domina v_2 .

Então para quaisquer dois vértices $v_1, v_2 \in G$, v_1 domina v_2 ou v_2 domina v_1 , logo o grafo G é *threshold*, e conseqüentemente matrogênico. Assim, provamos que todo grafo *split completo* é matrogênico.

□

Na Figura 15, podemos ver a ilustração de um grafo split completo.

Definição 2.72. Um *hiperoctaedro*, ou *cocktail-party* com $2t$ vértices $CP(2t)$, é o complementar de um emparelhamento perfeito tK_2 .

Exemplo 2.73. Na Figura 23, temos um emparelhamento perfeito com 3 vértices $3K_2$ e um cocktail-party com 3 vértices.

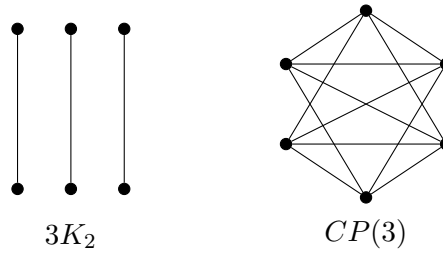


Figura 23: Grafos $3K_2$ e $CP(3)$.

O teorema a seguir nos ajudará a saber como identificar os grafos matrogênicos.

Teorema 2.74 ([13]). *Um grafo é matrogênico se, e somente se, seu conjunto de vértices V pode ser particionado em três conjuntos disjuntos K, S e C , de tal modo que*

- (i) $K \cup S$ induz um grafo matrogênico split no qual K é uma clique e S é um conjunto estável;
- (ii) C induz um emparelhamento perfeito, um hiperoctaedro de ordem n ou um C_5 ;
- (iii) Todo vértice em C é adjacente a todo vértice em K , e a nenhum vértice em S .

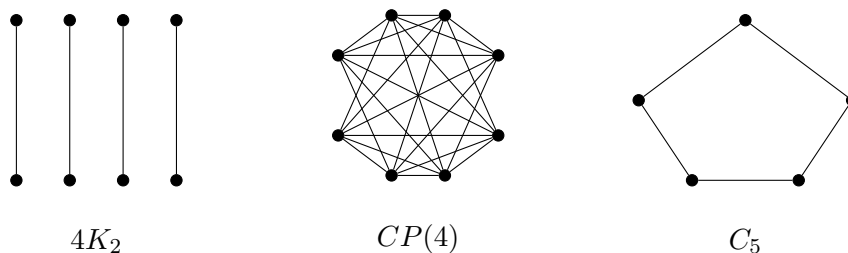


Figura 24: Exemplo de grafos do item (ii) do Teorema 2.74.

Exemplo 2.75. Na Figura 25, vemos o grafo H , onde K é formado pelos vértices em vermelho, S pelos vértices em verde e K_2 pelos vértices em azul. Como $K \cup S$ induz um grafo split completo, que pela Proposição 2.71 é matrogênico, e todo vértice em K_2 é adjacente a todo vértice em K , e a nenhum vértice em S , temos pelo Teorema 2.74 que o grafo H é matrogênico.

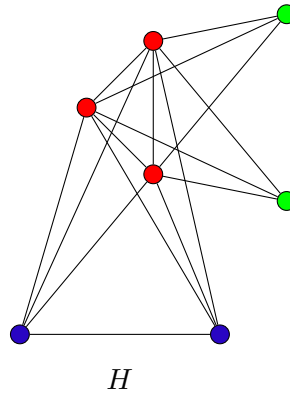


Figura 25: Grafo Matrogênico H .

Definição 2.76 ([11]). Seja $G(V, E)$ um grafo tal que $a, b, c, d, e \in V$. A *configuração proibida* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, d, e)$ é dada pelos vértices a, b, c, d e e , onde $\{a, b\}, \{a, c\} \in E$ mas $\{a, d\} \notin E$, e também $\{e, d\} \in E$ mas $\{e, b\} \notin E$ e $\{e, c\} \notin E$. As arestas não especificadas entre os vértices a, b, c, d e e podem ou não existir. Dizemos que G contém a configuração proibida \mathcal{F} se existe $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, d, e)$.

As linhas sólidas representam as arestas presentes, e as linhas pontilhadas as arestas ausentes.

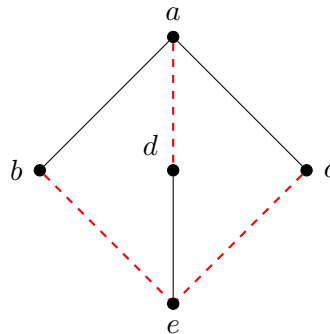


Figura 26: Configuração proibida \mathcal{F} .

Teorema 2.77 ([11]). *Um grafo é matrogênico se, e somente se, ele não contém a configuração proibida \mathcal{F} .*

Definição 2.78 ([11]). Seja G um grafo. Dizemos que G é *matroidal* se G não contém nem a configuração proibida \mathcal{F} , nem tem o grafo C_5 como subgrafo induzido.

A diferença entre os grafos matroidais e os matrogênicos é que a classe dos matroidais proíbe C_5 como C no Teorema 2.74.

Podemos observar que um grafo threshold também é um grafo matrogênico por vacuidade, pois não possui vértices incomparáveis, e é um grafo split, logo a classe dos grafos threshold está contida na classe dos grafos split matrogênicos, que por sua vez está

contida na classe dos grafos matroidais e na classe dos matrogênicos. A Figura 27 ilustra as relações de inclusão dentro da classe dos unigrafos.

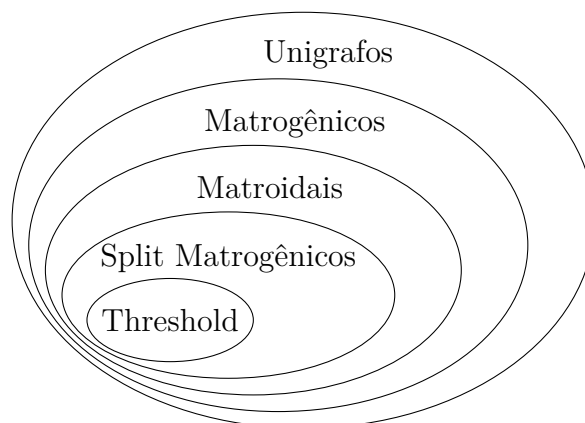


Figura 27: Relações de inclusão na classe dos unigrafos.

2.3 Teoria Espectral de Grafos

A Teoria Espectral de Grafos estuda os grafos usando Álgebra Linear e Teoria de Matrizes, obtendo assim o espectro de algumas matrizes especiais para cada grafo.

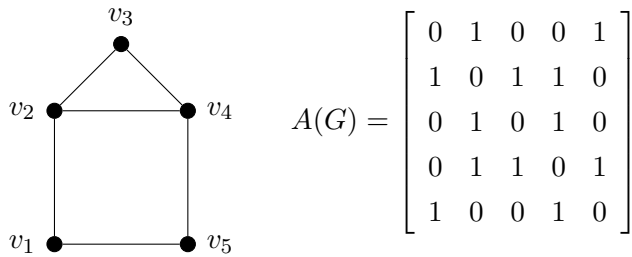
2.3.1 Matriz de Adjacência e de Incidência de um Grafo

Definição 2.79. Seja G um grafo de ordem n . Chamamos de $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n$ a *matriz de adjacência* do grafo G , cujas entradas são

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \text{ para } v_i, v_j \in V; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A *matriz de adjacência* de um grafo é simétrica, então pelo Teorema 2.32, todos seus autovalores são reais. A matriz de adjacência é muito útil para representar grafos.

Exemplo 2.80. No grafo a seguir, temos que a matriz de adjacência é dada por:



Definição 2.81. Seja G um grafo de ordem n e tamanho m . A *matriz de incidência* do grafo G é a matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{n,m}$ cujas entradas são,

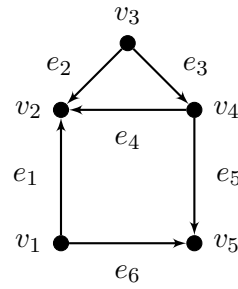
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ é uma aresta incidente no vértice } v_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.82. A *matriz de incidência com respeito a uma orientação dada* de um grafo G , de ordem e tamanho m , denotada por \mathcal{B} , é a matriz de ordem $n \times m$ cujas entradas são,

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é uma terminação positiva de } e_j; \\ -1, & \text{se } v_i \text{ é uma terminação negativa de } e_j; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Dizemos que um vértice u é uma terminação negativa de uma aresta orientada $e = \{u, v\}$ se e sai de u e chega em v . Observe que as colunas de \mathcal{B} estão relacionadas com as arestas do grafo, e as linhas relacionadas com os vértices.

Exemplo 2.83. Fixemos uma orientação no grafo do Exemplo 2.80.

Figura 28: Grafo G com orientação fixada.

Fazendo com que \mathcal{B}_{ij} de G seja dada por:

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ chega em } v_i; \\ -1, & \text{se } e_j \text{ sai de } v_i; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Deste modo,

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Matriz Laplaciana de um Grafo

Definição 2.84. Seja G um grafo de ordem n e matriz de adjacência A . Seja D uma matriz diagonal formada pelo grau dos vértices, isto é, $D_{ii} = d(v_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Chamamos de *matriz laplaciana* de G a matriz L , que é dada pela equação

$$L = D - A.$$

Ou seja, para $L = [l_{ij}]$, temos

$$l_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & \text{se } i = j. \\ -1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E. \\ 0, & \text{caso nenhuma das outras alternativas.} \end{cases}$$

Observe que L é uma matriz simétrica, então pelo Teorema 2.32, todos autovalores de L são reais.

Definição 2.85. O *espectro laplaciano* de um grafo G , denotado por $\text{Spec}_L(G)$, é o multiconjunto formado pelos autovalores de L ordenados de forma não crescente, isto é, se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ são os distintos autovalores de L , então

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r$$

e $\text{Spec}_L(G) = \{\mu_1^{(s_1)}, \dots, \mu_r^{(s_r)}\}$, onde (s_j) é a multiplicidade algébrica do autovalor μ_j , para $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.86. Matriz Laplaciana do grafo no Exemplo 2.80.

$$\text{Temos } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ e portanto, } L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A e L são chamados respectivamente de A -autovalores e L -autovalores. Neste caso $\text{Spec}_L(G) = \{4.618, 3.618, 2.382, 1.382, 0\}$.

Proposição 2.87. *Seja G um grafo com matriz laplaciana L e matriz de incidência com uma orientação qualquer dada \mathcal{B} , então $L = \mathcal{B}\mathcal{B}^T$.*

A proposição anterior implica em todos os autovalores de L serem reais não negativos.

Proposição 2.88. *A matriz laplaciana L de um grafo G é semipositiva definida, isto é,*

$$x^T Lx \geq 0,$$

para todo vetor x .

Lema 2.89. *Seja G um grafo de ordem n e seja \mathcal{B} a matriz de incidência de G com respeito a uma orientação dada. Então $r(\mathcal{B}) = n - \omega$, onde ω é o número de componentes conexas de G .*

Demonstração. Sejam G_1, \dots, G_ω as componentes conexas do grafo G , onde cada G_i tem ordem n_i . Então \mathcal{B} tem uma decomposição em blocos de modo que, para cada i , $1 \leq i \leq \omega$, $\mathcal{B}^{(i)}$ é a matriz de incidência com respeito a uma orientação dada da i -ésima componente conexa de G . Assim

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \mathcal{B}^{(\omega-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{B}^{(\omega)} \end{bmatrix}$$

Basta rotular cada componente conexa do grafo de cada vez. Pela Proposição 2.17

$$r(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{\omega} r(\mathcal{B}^{(i)}).$$

Para cada i , $1 \leq i \leq \omega$, como a soma dos elementos de cada coluna $\mathcal{B}^{(i)}$ é nula, o conjunto formado pelas linhas de $\mathcal{B}^{(i)}$ é linearmente dependente, com isto $r(\mathcal{B}^{(i)}) \leq n_i - 1$. Assim $r(\mathcal{B}) \leq n - \omega$. Para concluirmos que $r(\mathcal{B}) = n - \omega$, basta mostrarmos que $r(\mathcal{B}^{(i)}) = n_i - 1$, para cada i , $1 \leq i \leq \omega$. Para este fim, fixado i , mostremos que $r(\mathcal{B}^{(i)}) \geq n_i - 1$.

Usaremos os conceitos de subespaços fundamentais referenciados em 2.21.

Seja $x \in \mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)T})$, ou seja, x pertence ao subespaço nulo á esquerda de $\mathcal{B}^{(i)}$. Então

$$\mathcal{B}^{(i)T}x = 0 \iff x^T\mathcal{B}^{(i)} = 0.$$

Assim, para $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, $j, k \in \{1, 2, \dots, n_i\}$ e $j \neq k$, temos $x_j - x_k = 0$ sempre que v_j é adjacente a v_k . Como G_i é conexo, todas as entradas de x são iguais, logo $\mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)T})$ é no máximo unidimensional, assim sendo $\dim \mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)T}) \leq 1$. Pelo Teorema 2.21, temos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)T}) &= n_i - r(\mathcal{B}^{(i)}) \\ \dim \mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)T}) &\leq 1 \\ r(\mathcal{B}^{(i)}) &\geq n_i - 1. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.90. *Seja G um grafo e L sua matriz laplaciana. Então $r(L) = n - \omega$, onde ω é o número de componentes conexas de G .*

Demonstração. Vimos que $r(\mathcal{B}) = n - \omega$ e $\mathcal{B}\mathcal{B}^T = L$. Pela Proposição 2.16

$$r(\mathcal{B}) = r(\mathcal{B}\mathcal{B}^T) = r(L).$$

□

Proposição 2.91. *Sejam $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ os autovalores de L . Então*

- (i) $\mu_n = 0$, e o vetor $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ é o seu autovetor associado;
- (ii) G é conexo se, e somente se, $\mu_{n-1} > 0$.

Demonstração. (i) Como a soma dos elementos de uma linha qualquer de L é zero, temos que $L \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot L$.

- (ii) Se G é um grafo conexo, então G tem uma componente conexa. Pela Proposição 2.90, G é conexo se, e somente se, $r(L) = n - 1$. Se $r(L) = n - 1$ então a multiplicidade algébrica de 0 como autovalor é 1, logo $\mu_{n-1} \neq \mu_n$. Como $\mu_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que $\mu_{n-1} > \mu_n = 0$.

□

Lema 2.92. *Seja G um grafo conexo e L a matriz laplaciana associada á G . Então*

$$\text{adj}(L) = \lambda J,$$

onde $J \in \mathbb{M}_n$ é a matriz com todas entradas iguais a 1 e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um escalar.

Demonstração.

Como 0 é um autovalor de L e L é uma matriz simétrica, pelo Teorema 2.33

$$\det(L) = 0.$$

Como G é um grafo conexo, pela Proposição 2.91, $r(L) = 1$ e assim $\dim \ker(L) = 1$. Além disso, $\ker(L)$ é igual ao subespaço gerado pelo vetor $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Pela Proposição 2.11,

$$L \cdot \text{adj}(L) = \det(L) \cdot I.$$

Mas $\det(L) = 0$, isto implica $L \cdot \text{adj}(L) = 0$. Assim cada coluna de $\text{adj}(L)$ pertence á $\ker(L)$ e são múltiplas de $\mathbf{1}^T$. O fato de L ser simétrica implica em $\text{adj}(L)$ também ser simétrica. Como todas as colunas de $\text{adj}(L)$ são múltiplas de $\mathbf{1}^T$ e $\text{adj}(L)$ é simétrica, todas as entradas de $\text{adj}(L)$ são iguais, isto é, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{adj}(L) = \lambda J.$$

□

Lema 2.93. *Qualquer submatriz quadrada de \mathcal{B} tem determinante 0, 1 ou -1 .*

Demonstração. Seja S uma submatriz quadrada de \mathcal{B} . Se cada coluna de S tem duas entradas não nulas, então estas entradas são 1 e -1 , portanto, cada coluna tem soma igual á zero. Então as linhas de S são linearmente dependentes e assim S é singular e $\det(S) = 0$.

Suponhamos agora que pelo menos uma coluna de S tenha exatamente uma entrada não nula. Neste caso, expandimos o determinante de S em termos desta coluna e obtemos $\det(S) = \pm \det(S')$, onde S' é a submatriz obtida pela retirada da coluna e da linha correspondente a entrada não nula de S .

Analisamos agora a matriz S' nos casos anteriores. Seguindo este processo indutivo, chegaremos em $\det(S) = 0$, ou restará apenas uma submatriz de \mathcal{B} com ordem 1, que tem como determinante 0, 1 ou -1 .

□

Proposição 2.94. *Seja G um grafo e suponha que i, j são vértices gêmeos falsos em G . Nós definimos o vetor (de Faria) v como*

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = i; \\ -1, & \text{se } k = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

- (i) $\lambda = 0$ é um autovalor da matriz adjacência com autovalor v ;
- (ii) $\lambda = d_i = d_j$ é um autovalor da matriz laplaciana com autovetor v .

Proposição 2.95. *Seja G um grafo e suponha que i, j são vértices gêmeos verdadeiros em G . Nós definimos o vetor (de Faria) v como*

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = i; \\ -1, & \text{se } k = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

- (i) $\lambda = -1$ é um autovalor da matriz adjacência com autovalor v ;
- (ii) $\lambda = d_i + 1 = d_j + 1$ é um autovalor da matriz laplaciana com autovetor v .

3 Teorema da Matriz-Árvore

A partir deste capítulo, denotaremos por \mathbb{M}_n o espaço vetorial das matrizes reais.

Lema 3.1. *Seja G um grafo de ordem n e \mathcal{B} sua matriz de incidência. Considere qualquer submatriz de \mathcal{B} obtida tomando-se $n - 1$ de suas colunas. Esta matriz de ordem $n \times (n - 1)$ corresponde a um subgrafo H de G contendo todos os seus vértices. Então se excluirmos qualquer linha de \mathcal{B} , a matriz resultante \mathcal{B}' será quadrada de ordem $n - 1$ e,*

(i) $|\det(\mathcal{B}')| = 1$, se H for uma árvore, ainda mais, se H for uma árvore será uma árvore geradora de G .

(ii) $|\det(\mathcal{B}')| = 0$, se H não for uma árvore.

Demonstração. Seja S uma submatriz de \mathcal{B} de ordem $n \times (n - 1)$. Sem perda de generalidade, considere \mathcal{B}' a matriz obtida pela exclusão da n -ésima linha de S . Pelo Lema 2.93, $|\det(\mathcal{B}')| = 1$ ou $|\det(\mathcal{B}')| = 0$.

Suponhamos inicialmente que o grafo H não seja uma árvore. Com n vértices e $n - 1$ arestas, H é necessariamente desconexo, e portanto, existe uma componente que não contém o vértice v_n de G , correspondente a última linha de \mathcal{B} . Como as colunas de \mathcal{B}' correspondentes as arestas desta componente somam zero, pois cada aresta liga dois vértices da mesma componente, as linhas de \mathcal{B}' são linearmente dependentes, logo $\det(\mathcal{B}') = 0$.

Suponhamos agora que H seja uma árvore. Então rotulamos seus vértices diferentes de v_n da seguinte maneira; Chamemos de $u_1 \neq v_n$ a um vértice de grau 1 de H . Chamemos de y_1 a aresta que incide em u_1 . Seja $u_2 \neq v_n$ um vértice extremo de $H - \{u_1\}$ e seja y_2 a aresta incidente em u_2 . Continuando este processo, notamos que cada aresta y_i incide no vértice v_i , e em algum vértice v_j com $j > i$. Mas esta renomeação dos vértices de H determina uma nova matriz \mathcal{B}'' que pode ser obtida de \mathcal{B}' por meio de operações elementares com suas linhas. Daí $|\det(\mathcal{B}')| = |\det(\mathcal{B}'')|$. Além disso, \mathcal{B}'' é uma matriz triangular inferior cujas entradas na diagonal principal são ± 1 . Portanto $|\det(\mathcal{B}')| = |\det(\mathcal{B}'')| = 1$.

□

Teorema 3.2 (Teorema da Matriz-Árvore). *O número de árvores geradoras de um grafo G é igual a qualquer cofator da matriz laplaciana de G . Em símbolos*

$$\text{adj}(L) = \tau(G)J,$$

onde $\tau(G)$ é o número de árvores geradoras de G .

Demonstração. Pelo Lema 2.92, $\text{adj}(L) = \lambda J$, basta mostrarmos então que um cofator de L é igual a $\tau(G)$.

Seja \mathcal{B}_0 a submatriz obtida de \mathcal{B} pela retirada de sua última linha. Retirando-se também a última linha e a última coluna de L , observamos que a submatriz obtida é exatamente $\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^T$. Assim, $\Delta(L)_{nn} = \det(\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^T)$ é um cofator de L . Expandindo o determinante de $\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^T$ pela fórmula de Binet-Cauchy 2.37, obtemos

$$\det(\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^T) = \sum_U \det(\mathcal{B}_U) \det(\mathcal{B}_U^T)$$

onde o somatório é tomado sobre todos os subconjuntos U de $\{1, 2, \dots, n\}$, com $n - 1$ elementos. Assim, $\mathcal{B}_U \in \mathbb{M}_{n-1}$ denota a submatriz de \mathcal{B}_0 cujas colunas correspondem exatamente aos elementos em U .

Pelos Lemas 2.93 e 3.1, $\det(\mathcal{B}_U) \neq 0$ se, e somente se, o subgrafo que contém todos os índices das arestas em U e todos os vértices de G é uma árvore geradora. No caso afirmativo, $\det(\mathcal{B}_U) = 1$ ou $\det(\mathcal{B}_U) = -1$. Assim $\det(\mathcal{B}_U) \det(\mathcal{B}_U^T) = 1$, e portanto

$$\det(\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0^T) = \sum_U \det(\mathcal{B}_U) \det(\mathcal{B}_U^T) = \sum_{\bar{U}} 1 = \tau(G).$$

O último somatório é tomado somente sobre os subconjuntos \bar{U} de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que o grafo obtido pelo Lema 3.1 é uma árvore geradora. \square

Exemplo 3.3. Número de árvores geradoras do grafo K_n .

Sabemos que todos os vértices de K_n tem grau $n - 1$, e são adjacentes a todos os outros vértices de K_n , assim podemos ver que $L(K_n) = nI - J$. Vamos agora calcular o número de árvores geradoras de K_n calculando um cofator da matriz laplaciana do grafo.

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & -1 \\ -1 & \dots & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det(L(K_n)_{11})$$

Pelo Teorema 3.2, temos que $\tau(G) = \Delta_{11}$, assim

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & & \\ & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & -1 \\ -1 & \dots & & -1 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Substituindo a primeira linha pela soma de todas as outras, obtemos

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & -1 \\ -1 & \dots & & -1 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Substituindo todas as linhas exceto a primeira pela sua soma com a primeira obtemos

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & n & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & n \end{vmatrix}.$$

$$\tau(G) = n^{n-2}$$

Como $\text{adj}(L(K_n)) = \tau(G)J$, temos que $\text{adj}(nI - J) = n^{n-2}J$.

Corolário 3.4. *Se G é um grafo de ordem n então*

$$\tau(G) = n^{-2} \det(J + L).$$

Demonstração. É fácil ver que $nJ = J^2$, e $JL = LJ = 0$.

Efetuando os cálculos

$$\begin{aligned} (nI - J)(J + L) &= nJ + nL - J^2 - JL \\ &= J^2 + nL - J^2 - 0 \\ &= nL. \end{aligned}$$

Deste fato, resulta

$$\text{adj}((nI - J)(J + L)) = \text{adj}(nI - J)\text{adj}(J + L) = \text{adj}(nL)$$

o que implica

$$\text{adj}(nI - J)\text{adj}(J + L) = \text{adj}(nL) = n^{n-1}\text{adj}(L) = n^{n-1}\tau(G)J.$$

Pois pela Proposição 2.10, $\text{adj}(nL) = n^{n-1}\text{adj}(L)$.

Do Exemplo 3.3, segue-se que $\text{adj}(nI - J) = n^{n-2}J$, por conseguinte

$$\begin{aligned} \text{adj}(nI - J)\text{adj}(J + L) &= \text{adj}(J + L)\text{adj}(nI - J) \\ &= n^{n-2}\text{adj}(J + L)J. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} n^{n-2}\text{adj}(J + L)J &= n^{n-1}\tau(G)J \\ \text{adj}(J + L)J &= n\tau(G)J \\ (J + L)\text{adj}(J + L)J &= n\tau(G)(J + L)J. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.11,

$$(J + L)\text{adj}(J + L) = \det(J + L)I.$$

Assim

$$\begin{aligned} (J + L)\text{adj}(J + L)J &= n\tau(G)(J + L)J \\ \det(J + L)J &= n\tau(G)J^2 + n\tau(G)LJ \\ \det(J + L)J &= n^2\tau(G)J \\ n^{-2}\det(J + L)J &= \tau(G)J. \end{aligned}$$

E desta forma

$$\tau(G) = n^{-2}\det(J + L).$$

□

Corolário 3.5 (Teorema da Matriz-Árvore versão espectral). *Seja G um grafo de ordem n . Se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ são autovalores laplacianos não nulos de G , então*

$$\tau(G) = \frac{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{n-1}}{n}.$$

Demonstração. Como J e L são diagonalizáveis e comutam, pela Proposição 2.29, os autovalores de $J + L$ são a soma dos correspondentes autovalores de L e J .

Os autovalores de J são n , com multiplicidade 1, e 0 com multiplicidade $n - 1$. Logo, os autovalores de $J + L$ são $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, n$. Como o determinante é o produto dos autovalores, pelo Corolário 3.4

$$\begin{aligned}\tau(G) &= \frac{\det(J + L)}{n^2} \\ &= \frac{n\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{n-1}}{n^2} \\ &= \frac{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

□

Observe que se G não é conexo então $\mu_{n-1} = 0$, e assim pelo Teorema 3.2 o número de árvores geradoras de G é 0.

4 Aplicações do Teorema da Matriz-Árvore

Neste capítulo, vamos aplicar o Teorema 3.2 nas famílias de grafos citadas na seção 2 do capítulo 2. Para isto, iremos utilizar o Corolário 3.5, a fim de obter o número de árvores geradoras de tais grafos. Finalmente, estudaremos os grafos matrogênicos, também citados na seção 2 do capítulo 1, e aplicaremos o Teorema 3.2 numa subclasse destes grafos.

Todos os grafos referentes a esta seção, foram introduzidos no Capítulo 2.

O Lema 4.1 nos ajudará no cálculo do número de árvores geradoras de algumas famílias de grafos.

Lema 4.1. *Seja $A_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que*

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & & \vdots \\ 0 & b & a & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b & 0 \\ & & & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

então

$$\det(A_n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b^2}} \left(\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \right)^{n+1} \right), & \text{se } a^2 - 4b^2 \neq 0. \\ (1+n) \left(\frac{a}{2} \right)^n, & \text{se } a^2 - 4b^2 = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Efetuando a Expansão de Laplace na última linha de A_n e depois na última coluna do cofator de ordem $\{n, n-1\}$ de A_n , chegamos em

$$\det(A_n) = a \det(A_{n-1}) - b^2 \det(A_{n-2}).$$

Assim, obtemos a fórmula de recorrência

$$\begin{cases} \det(A_1) = a. \\ \det(A_2) = a^2 - b^2. \\ \det(A_n) = a \det(A_{n-1}) - b^2 \det(A_{n-2}). \end{cases}$$

A partir dos termos iniciais e das raízes da equação $t^2 - at + b^2 = 0$, podemos resolver a fórmula de recorrência pelo método dado em [15], $a^2 - 4b^2 \neq 0$, então

$$\det(A_n) = Cr^n + Ds^n,$$

onde r e s são raízes de $t^2 - at + b^2 = 0$. Assim

$$\det(A_n) = C \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \right)^n + D \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \right)^n.$$

Usando o fato de que $\det(A_1) = a$ e $\det(A_2) = a^2 - b^2$ chegamos em

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b^2}} \left(\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Se as raízes da equação $t^2 - at + b^2$ são iguais, então $\frac{a}{2}$ é uma raiz com multiplicidade 2. Assim

$$\det(A_n) = (C + Dn) \frac{a^n}{2}.$$

Usando o fato de que $\det(A_1) = a$ e $\det(A_2) = \frac{3a^2}{4}$, chegamos em

$$\det(A_n) = (1 + n) \left(\frac{a}{2} \right)^n.$$

□

4.1 Caminhos

Seja \mathcal{P}_n um caminho de ordem n . Então os vértices podem ser rotulados de forma que o primeiro e o último vértice na rotulação sejam os vértices que só tem um vizinho em \mathcal{P}_n , desta forma, o grau do primeiro e do último vértice é igual a 1, e dos vértices restantes igual a 2. Podemos continuar a rotulação de forma que um vértice v_i em \mathcal{P}_n seja adjacente a v_{i+1} , com $1 \leq i \leq n$. Se $n > 2$, então nesta rotulação a matriz laplaciana de \mathcal{P}_n é dada por

$$L(\mathcal{P}_n) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

de onde $L(\mathcal{P}_n) \in \mathbb{M}_n$. Pelo Teorema 3.2

$$\tau(\mathcal{P}_n) = \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

Efetuada a Expansão de Laplace na última linha obtemos

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-2)} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

Pelo Lema 4.1, fazendo $b = -1$ e $a = 2$ temos que $a^2 - 4b^2 = 0$, e assim podemos calcular o determinantes das matrizes tridiagonais, daí

$$\Delta_{11} = (n - 2 + 1) - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-3)} = (n - 2 + 1) - (n - 3 + 1) = 1.$$

Assim

$$\tau(\mathcal{P}_n) = 1.$$

Se $n = 2$ então $L(\mathcal{P}_n) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, e assim

$$\tau(\mathcal{P}_n) = \Delta_{11} = 1.$$

4.2 Ciclos

Seja C_n um ciclo de ordem n . Então podemos ordenar os vértices de C_n de forma que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, e $\{v_1, v_n\} \in E$, onde v_i é um vértice de

C_n para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim, a matriz laplaciana de C_n é dada por

$$L(C_n) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 3.2

$$\tau(C_n) = \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

Pelo Lema 4.1

$$\tau(C_n) = (n-1) + 1 = n.$$

4.3 Grafo Completo

Seja K_n um grafo completo de ordem n . Então a matriz laplaciana de K_n é dada por

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & -1 \\ -1 & \cdots & & -1 & n-1 \end{bmatrix},$$

de onde $L(K_n) \in \mathbb{M}_n$. Como vimos no Exemplo 3.3

$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$

Uma outra forma de calcular o número de árvores geradoras de K_n é observando que $L(K_n) = nI - J$. Se λ é um autovalor de $L(K_n)$ associado a um autovetor v , então

$$(nI - J)v = \lambda v \implies nv - Jv = \lambda v \implies Jv = (n - \lambda)v.$$

Pela Proposição 2.29, os autovalores de J são n com multiplicidade 1, e 0 com multiplicidade $n - 1$. Assim

$$n - \lambda_0 = n \implies \lambda_0 = 0$$

$$n - \lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = n$$

Onde λ_0 e λ_1 são os autovalores de $L(K_n)$ com multiplicidades 1 e $n - 1$ respectivamente.

Assim, pelo Corolário 3.5 o número de árvores geradoras de K_n é

$$\tau(K_n) = \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{n} = n^{n-2}.$$

4.4 Grafos Bipartidos Completos

Seja $K_{m,n}$ um grafo bipartido completo. Então existem dois conjuntos de vértices V_1 e V_2 , de onde $d(v) = n$ para todo vértice $v \in V_1$ e $d(w) = m$ para todo vértice $w \in V_2$. Podemos notar também que todo vértice em V_1 é adjacente a todos os vértice em V_2 , e todos os vértices em V_2 são adjacentes a todos os vértices em V_1 . Desta forma, $L(K_{m,n})$ é dada por

$$L(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & & 0 & -1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & n & -1 & & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & & & 0 & m & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & & \dots & -1 & 0 & 0 & & m \end{bmatrix},$$

de onde $L(K_{m,n}) \in \mathbb{M}_{m+n, m+n}$. Pelo Teorema 3.2, o número de árvores geradoras de $K_{m,n}$ é dado por

$$\tau(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})_{m+n, m+n} = \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & & 0 & -1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & n & -1 & & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & & & 0 & m & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & & \dots & -1 & 0 & 0 & & m \end{vmatrix},$$

onde este é um determinante de uma matriz de ordem $m + n - 1$. Agora temos $n - 1$ entradas iguais á m na diagonal principal e m entradas iguais á n também na diagonal

principal. Efetuando operações elementares, podemos substituir a primeira linha desta matriz pela soma de todas as linhas, assim

$$\tau(K_{m,n}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & n & -1 & & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & & & 0 & m & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & & \dots & -1 & 0 & 0 & & m \end{vmatrix}.$$

Substituindo as n linhas com índice maior que $m - 1$ pela soma sua soma com a primeira linha, obtemos

$$\tau(K_{m,n}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & n & -1 & & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & m & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & m \end{vmatrix} = n^{m-1}m^{n-1}.$$

Pois o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

4.5 Rodas

Como vamos usar o determinante da matriz abaixo várias vezes, considere a notação a seguir:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p)} = x_p = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{p+1} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{p+1} \right),$$

onde p é a ordem da matriz.

Seja $W_p = (V, E)$ uma roda com p vértices. Iremos considerar a roda com a seguinte rotulação: os primeiros vértices rotulam o ciclo de forma sequencial no sentido horário, e o último vértice é o vértice universal, isto é, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{1, \dots, p-2\}$, $\{v_i, v_p\} \in E$ para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\{v_1, v_{p-1}\} \in E$ e nenhuma outra aresta pertença á E . Onde $v_i \in V$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$. Assim a matriz laplaciana de W_p é dada por

$$L(W_p) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & & & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & p-1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 3.2

$$\tau(W_p) = \Delta_{pp} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & & & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-1)}.$$

Efetutando a Expansão de Laplace na primeira linha da matriz, obtemos

$$\Delta_{pp} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-2)} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 3 & -1 \\ -1 & 0 & & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-2)} +$$

$$(-1)^{(p+1)} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 3 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(p-2)}$$

Separando os determinantes, e efetuando a expansão de Laplace na primeira coluna do polinômio

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & & \cdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 3 & -1 \\ -1 & 0 & & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-2)} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-3)} +$$

$$(-1)^p \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & -1 & 0 & & \vdots \\ -1 & 3 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}_{(p-3)}$$

mas

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-3)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right).$$

Assim, somando com o determinante da matriz triangular

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & & \cdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 3 & -1 \\ -1 & 0 & & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-2)} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right) + (-1)^{2p-3}.$$

Por outro lado, calculando o outro determinante por expansão de Laplace na primeira coluna chegamos em

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 3 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(p-2)} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(p-3)} + \\
 (-1)^p \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-3)} \\
 \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 3 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(p-2)} = (-1)^{p-2} + \frac{(-1)^p}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right)$$

Somando os resultados das equações obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta_{pp} &= \frac{3}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right) \\
 &+ (-1)^{2p-3} + (-1)^{2p-1} + \frac{(-1)^{2p-1}}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right) \\
 &= \frac{3}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} \right) - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right) - 2 \\
 &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) - 2 \\
 &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - 2.
 \end{aligned}$$

Desta forma, o número de árvores geradoras de W_p é dado por

$$\tau(W_p) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - 2.$$

4.6 Leques

Seja $F_p = (V, E)$ um leque com p vértices. Então podemos rotular os vértices $v_i \in V$ de forma que, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{1, \dots, p-2\}$, $\{v_i, v_p\}$ para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\{v_1, v_{p-1}\} \in E$ e nenhuma outra aresta pertença á E . Então, a matriz laplaciana de F_p é

$$L(F_p) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & & & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & p-1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 3.2

$$\tau(F_p) = \Delta_{pp} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Efetuando a expansão de Laplace na primeira linha da matriz, obtemos

$$\Delta_{pp} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-2)} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-2)}.$$

Separando os determinantes, e efetuando a Expansão de Laplace na primeira coluna do primeiro e na última linha do segundo, obtemos

(i)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-2)} = 2 \cdot (-1)^{2p-4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-3)} +$$

$$(-1)^{2p-4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{(p-3)}.$$

Novamente efetuando Expansão de Laplace na última coluna da última matriz, obtemos

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-2)} = 2(-1)^{2p-4}x_{(p-3)} + (-1)^{4p-9}x_{p-4}.$$

(ii) Calculando o determinante restante. Podemos efetuar a Expansão de Laplace na primeira linha, assim

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-2)} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-3)}.$$

Efetuada a Expansão de Laplace na última linha obtemos

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-4)} = 2 \cdot (-1)^{2p-6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{(p-3)} +$$

$$(-1)^{2p-6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{(p-4)} .$$

E assim

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(p-4)} = 2(-1)^{2p-6}x_{(p-4)} + (-1)^{4p-13}x_{p-5}.$$

Somando as equações (i) e (ii), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{pp} &= 4(-1)^{2p-4}x_{(p-3)} + 2(-1)^{4p-9}x_{p-4} + 2(-1)^{2p-7}x_{(p-4)} + (-1)^{4p-14}x_{p-5} \\ &= 4x_{(p-3)} - 2x_{(p-4)} - 2x_{(p-4)} + x_{(p-5)} \\ &= 4x_{(p-3)} - 4x_{(p-4)} + x_{(p-5)}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $x_{(p-3)}$, $x_{(p-4)}$ e $x_{(p-5)}$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{pp} &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} \right) - \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-3} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-3} \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(4 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - 4 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-2} - 4 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-3} + 4 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-3} \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} \left(4 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + 1 \right) \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} \left(4 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) + 1 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} (4\sqrt{5} + 9) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} (-4\sqrt{5} + 9) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-4} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} \right).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que o número de árvores geradoras de F_p é

$$\tau(F_p) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} \right).$$

4.7 Estrelas

Seja $S_p = (V, E)$ uma estrela com p vértices. Rotulando S_p de modo que $\{v_i, v_p\} \in E$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, e nenhuma outra aresta pertença á E , temos que

$$L(S_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & p-1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.33,

$$\tau(S_p) = \Delta_{pp} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(p-1)} = 1.$$

4.8 Algumas Subclasses de Matrogênicos

No Capítulo 2, apresentamos os grafos matrogênicos, e conforme visto, os grafos threshold pertencem a esta classe. Nesta seção, focaremos no cálculo de árvores geradoras de mais duas subclasses de grafos matrogênicos.

4.8.1 Grafos Threshold

Teorema 4.2 ([12]). *Seja G um grafo threshold conexo, e seja $D^*(G) = (d_1^{(n_1)}, \dots, d_s^{(n_s)})$ o rearranjo de sua sequência de graus 2.41. Então*

$$\tau(G) = \left(\prod_{i=1}^k d_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=k+2}^{s-1} (d_i + 1)^{n_i} \right) (d_{k+1} + 1)^{n_{k+1}-1} (d_s + 1)^{n_s-1}.$$

Onde k é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{s-1}{2}$.

Exemplo 4.3. Seja G o grafo ilustrado na Figura 29. Na figura, o grau de cada vértice está como índice afim de facilitar a compreensão do exemplo. Então $D^*(G) = (1^{(2)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}, 5^{(1)}, 7^{(1)})$. Aplicando o Teorema 2.66, temos que $s = 5$ e $k = 2$, assim

$$\begin{aligned} \tau(G) &= \left(\prod_{i=1}^2 d_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=4}^4 (d_i + 1)^{n_i} \right) (d_3 + 1)^{n_3-1} (d_5 + 1)^{n_5-1} \\ \tau(G) &= (d_1^{n_1} d_2^{n_2}) (d_4 + 1)^{n_4} (d_3 + 1)^{n_3-1} (d_5 + 1)^{n_5-1} \\ \tau(G) &= (1^1 \cdot 2^2) (6)^1 (4)^1 (8)^0 = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96. \end{aligned}$$

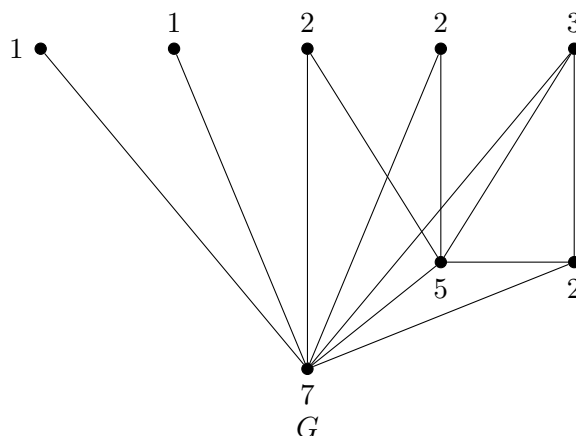


Figura 29: Grafo Threshold G.

Observamos que Hammer e Kelmans em [12] apresentaram um pequeno erro de digitação no artigo, e que o Teorema 2.66 não é válido quando s é par. Apresentamos como contra-exemplo o grafo ilustrado na Figura 30.

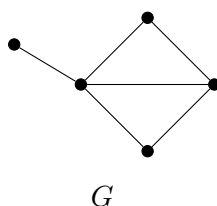


Figura 30: Grafo Treshold.

Temos que $D^*(G) = (1^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}, 4^{(1)})$. Assim $s = 4$ e $k = 1$. Então pelo Teorema 2.66 teríamos que

$$\begin{aligned} \tau(G) &= \left(\prod_{i=1}^1 d_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=3}^3 (d_i + 1)^{n_i} \right) (d_2 + 1)^{n_2-1} (d_4 + 1)^{n_4} \\ \tau(G) &= (d_1^{n_1})(d_3 + 1)^{n_3}(d_2 + 1)^{n_2-1}(d_4 + 1)^{n_4-1} \\ \tau(G) &= 1^1 \cdot 4 \cdot 3 = 12. \end{aligned}$$

Mas $Spec_L(G) = \{0, 1, 2, 4, 5\}$. Então pelo Teorema 3.2, temos que

$$\tau(G) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5}{5} = 8.$$

Então a generalização vista no artigo não é válida. Escrevemos a generalização correta abaixo.

Teorema 4.4. *Seja G um grafo threshold conexo, e seja $D^*(G) = (d_1^{(n_1)}, \dots, d_s^{(n_s)})$ o rearranjo de sua sequência de graus 2.41. Se s é ímpar então*

$$\tau(G) = \left(\prod_{i=1}^k d_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=k+2}^{s-1} (d_i + 1)^{n_i} \right) (d_{k+1} + 1)^{n_{k+1}-1} (d_s + 1)^{n_s-1}.$$

Se s é par então

$$\tau(G) = \left(\prod_{i=1}^k d_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=k+2}^{s-1} (d_i + 1)^{n_i} \right) (d_{k+1})^{n_{k+1}-1} (d_s + 1)^{n_s-1}.$$

Onde k é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{s-1}{2}$.

Assim, pelo Teorema 4.4 o cálculo do número de árvores geradoras do grafo ilustrado na Figura 20 é dado por

$$\begin{aligned} \tau(G) &= \left(\prod_{i=1}^1 d_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=3}^3 (d_i + 1)^{n_i} \right) (d_2)^{n_2-1} (d_4 + 1)^{n_4} \\ \tau(G) &= (d_1^{n_1}) (d_3 + 1)^{n_3} (d_2)^{n_2-1} (d_4 + 1)^{n_4-1} \\ \tau(G) &= 1^1 \cdot 4 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

4.8.2 Grafos Matrogênicos Obtidos do Grafo Split Completo

Vimos no Teorema 2.74 que para obter famílias de grafos matrogênicos basta obter grafos split matrogênicos. Podemos então denotar um grafo matrogênico H da seguinte forma

$$H = G_n(K \cup S, C),$$

onde $K \cup S$ é um grafo split matrogênico e C induz uma coroa de acordo com o Teorema 2.74.

Pela Proposição 2.71, o grafo split completo é um grafo split matrogênico. Assim, podemos analisar o número de árvores geradoras de 3 subclasses de grafos matrogênicos. Estas subclasses são obtidas do Teorema 2.74, fazendo $K \cup S = CS(r, s)$, e pela variação de C . Antes disto, vamos enunciar alguns lemas que usaremos nas demonstrações dos resultados.

Lema 4.5 ([6]). *Se $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz da forma*

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{bmatrix}$$

então o espectro de M é dado por,

$$\text{Spec}(M) = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec}(M_i).$$

Lema 4.6. A matriz $M = (r + 1)I - A(tK_2)$ tem espectro $\text{Spec}(M) = \{r^{[t]}, (r + 2)^{[t]}\}$. Em particular, para cada k , $1 \leq k \leq t$, o vetor $x^{(k)}$ cujas entradas são definidas por:

$$[x^{(k)}]_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in \{2k - 1, 2k\}; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é um autovetor associado a r .

Demonstração. Com efeito, $M = [m_{ij}]$, tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} r + 1, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } |i - j| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz M é formada por blocos diagonais da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} r + 1 & -1 \\ -1 & r + 1 \end{bmatrix} = (r + 2)I - J.$$

E os autovalores desta matriz são r e $r + 2$. Logo, pelo Lema 4.6, o espectro de M é igual á $\text{Spec}(M) = \{r^{[t]}, (r + 2)^{[t]}\}$.

Agora, vamos provar que $x^{(k)}$ é de fato um autovalor de M . Com efeito,

$$[Mx^{(k)}]_i = \sum_{k=1}^{2t} m_{i,k}x_k = m_{i,i} + m_{i,i+1}x_{i+1} = (r + 1)x_i - x_{i+1} = r.$$

□

Definição 4.7. Sejam r, s, t números naturais. Então definimos os seguintes grafos matro-gênicos:

$$H_1 = G_n(CS(r, s), tK_2), \quad H_2 = G_n(CS(r, s), CP(2t)), \quad H_3 = G_n(CS(r, s), C_5),$$

onde $CS(r, s)$ é o grafo split completo com r vértices na clique e s vértices no conjunto estável, tK_2 é o emparelhamento perfeito com $2t$ vértices e $CP(2t)$ é o “cocktail party” com $2t$ vértices.

Estamos interessados em calcular o número de árvores geradoras dos grafos H_1 , H_2 e H_3 . Para isto, utilizaremos o Corolário 3.5.

Proposição 4.8. *Seja $H_1 = G_n(CS(r, s), tK_2)$, então*

$$\tau(H_1) = (r + s + 2t)^{r-1} (r + 2)^t r^{s+t-1}.$$

Demonstração.

$$A(H_1) = \begin{bmatrix} A(tK_2)_{2t,2t} & J_{2t,r} & 0_{2t,s} \\ J_{r,2t} & J_r - I_r & J_{r,s} \\ 0_{s,2t} & J_{s,r} & 0_{s,s} \end{bmatrix}$$

$$L(H_1) = \begin{bmatrix} D(tK_2) - A(tK_2) & -J_{2t,r} & 0_{2t,s} \\ -J_{r,2t} & D(K) - J_r + I_r & -J_{r,s} \\ 0_{s,2t} & -J_{s,r} & D(S)_{s,s} \end{bmatrix}$$

onde K é a clique de $CS(r, s)$, e S é o conjunto estável de $CS(r, s)$.

$$\bar{L}(H_1) = \begin{bmatrix} (r+1) - 1 & -r & 0 \\ -2t & (s+2t+r-1) - r + 1 & -s \\ 0 & -r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -r & 0 \\ -2t & s+2t & -s \\ 0 & -r & r \end{bmatrix}$$

Da matriz reduzida $\bar{L}(H_1)$, pela Proposição 2.35 temos $\{r + s + 2t, r, 0\} \subset \text{Spec}(L(H_1))$.

Podemos observar que os vértices do conjunto estável são todos gêmeos falsos entre si. Assim, pela Proposição 2.94, $d(v_s) = r \in \text{Spec}(L(H_2))$, onde v_s é um vértice do conjunto estável S , além disso, $m(r) \geq s - 1$, pois podemos comparar $s - 1$ vértices entre si no conjunto estável.

Usando raciocínio análogo, observamos também que os vértices da clique K são todos vértices gêmeos verdadeiros, assim pela Proposição 2.95, $d(v_k) + 1 = s + 2t + (r - 1) + 1 = r + s + 2t \in \text{Spec}(L(H_2))$, onde v_k é um vértice de K , com $m(r + s + 2t) \geq r - 1$.

Temos também que, a cada emparelhamento perfeito, os vértices pertencentes a estes são gêmeos verdadeiros. Como existem t emparelhamentos, pela Proposição 2.95, $d(v_t) + 1 = r + 1 + 1 = r + 2 \in \text{Spec}(L(H_2))$, com $m(r + 2) \geq t$. Onde v_t é um vértice de um emparelhamento em tK_2 .

Juntando com os resultados da matriz reduzida, $m(r) \geq s$, $m(r + s + 2t) \geq r$, $m(r + 2) \geq t$ e $0 \in \text{Spec}(L(H_2))$. E assim, encontramos $r + s + t + 1$ autovalores, nos faltam achar $t - 1$ autovalores. Para provarmos a afirmação, nos basta agora provar que $m(r) = s + t - 1$.

Seja x o vetor particionado da seguinte forma,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

tal que x_1 e x_3 tem a soma de suas entradas iguais á zero. Assim, fazendo $M = D(tK_2) - A(tK_2)$ e multiplicando $L(H_1)$ por x , obtemos

$$\begin{bmatrix} M & -J_{2t,r} & 0_{2t,s} \\ -J_{r,2t} & D(K) - J_r + I_r & -J_{r,s} \\ 0_{s,2t} & -J_{s,r} & D(S)_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \cdot x_1 \\ -J_{r,2t} \cdot x_1 - J_{r,s} \cdot x_3 \\ D(S)_{s,s} \cdot x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D(tK_2) - A(tK_2)) \cdot x_1 \\ 0 \\ D(S)_{s,s} \cdot x_3 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que $D(S)_{s,s} \cdot x_3 = rI x_3$, isto é, x_3 é um autovetor da matriz identidade, isto implica que x_3 pode ser qualquer vetor. Em particular,

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, pelo Lema 4.6, r é um autovalor de M com multiplicidade t . Assim,

$$\begin{bmatrix} M \cdot x_1 \\ -J_{r,2t} \cdot x_1 - J_{r,s} \cdot x_3 \\ D(S)_{s,s} \cdot x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot x_1 \\ 0 \\ r \cdot x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e portanto, $\text{Spec}(L(H_1)) = \{(r + s + 2t)^{[r]}, (r + 2)^{[t]}, r^{[s+t-1]}, 0\}$.

□

Proposição 4.9. *Seja $H_3 = G_n(CS(r, s), C_5)$, então*

$$\tau(H_3) = (r + s + 5)^{r-1} \left(\frac{2r + 5 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \left(\frac{2r + 5 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 r^s.$$

Demonstração. Sejam

$$A(H_3) = \begin{bmatrix} A(C_5) & J_{5,k} & 0_{5,s} \\ J_{k,5} & J_k - I_k & J_{k,s} \\ 0_{s,5} & J_{s,k} & 0_{s,s} \end{bmatrix} \quad L(H_3) = \begin{bmatrix} D(C_5) - A(C_5) & -J_{5,r} & 0_{5,s} \\ -J_{r,5} & D(K) - J_r + I_r & -J_{r,s} \\ 0_{s,5} & -J_{s,r} & D(\bar{s})_{s,s} \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}(H_3) = \begin{bmatrix} (r+2) - 2 & -r & 0 \\ -5 & (r-1+s+5) - r + 1 & -s \\ 0 & -r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -r & 0 \\ -5 & s+5 & -s \\ 0 & -r & r \end{bmatrix}$$

$$\text{Spec}(\bar{L}(H_3)) = \{s+r+5, r, 0\}.$$

Afirmação. $\text{Spec}(L(H_3)) = \{(r+s+5)^{[r]}, (\frac{2r+5+\sqrt{5}}{2})^{[2]}, (\frac{2r+5-\sqrt{5}}{2})^{[2]}, r^{[s]}, 0\}$

Pela matriz reduzida, $\{s+r+5, r, 0\} \subset \text{Spec}(L(H_3))$. Novamente, os vértices do conjunto estável são gêmeos falsos, daí $d(v_s) = r \in \text{Spec}(L(H_3))$, com $m(r) \geq s$, onde v_s é um vértice de S . Os vértices da clique são gêmeos verdadeiros, deste fato, $d(v_k) = r+s+5 \in \text{Spec}(L(H_3))$, e $m(r+s+5) \geq r-1$. Onde v_k é um vértice de K .

Destes fatos, temos que $m(r) \geq s$, $m(r+s+5) \geq r$ e $0 \in \text{Spec}(L(H_3))$. Logo, encontramos $r+s+1$ autovalores do grafo G . Restam achar os 4 restantes.

Sejam μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 , os 4 autovalores restam para encontrarmos.

Por testes computacionais, podemos supor que $\mu_1 = \mu_3$, e $\mu_2 = \mu_4$.

Temos:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 5(2+r) + r(r+s+4) + sr \implies \sum_{i=1}^n d_i = r^2 + 2rs + 9r + 10s$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i &= (r-1)(r+s+5) + (s-1)r + (r+s+5) + r + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \\ &= r(r+s+5) + sr + 2\mu_1 + 2\mu_2. \end{aligned}$$

Como $\text{tr}(L(G)) = \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^n d_i$ segue que $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \mu_i$, e por conseguinte

$$r^2 + 2rs + 9r + 10 = r(r+s+5) + sr + 2(\mu_1 + \mu_2).$$

Assim,

$$\mu_1 + \mu_2 = 2r + 5. \quad (4.1)$$

Além disso, $\text{tr}(L^2(G)) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{i=1}^n (d_i^2 + d_i) = \sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i$. Por outro lado, $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 + r(r+s+5)^2 + sr^2$, $\sum_{i=1}^n d_i^2 = sr^2 + r(r+s+4)^2 + 5(2+r)^2$ e $\sum_{i=1}^n d_i = r^2 + 2rs + 9r + 10$.

Com estes resultados, chegamos a seguinte equação,

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i \iff \mu_1^2 + \mu_2^2 = 2r^2 + 10r + 15. \quad (4.2)$$

Pela equações (4.1) e (4.2), temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \mu_1^2 + \mu_2^2 = 2r^2 + 10r + 15, \\ \mu_1 + \mu_2 = 2r + 5, \end{cases}$$

cujos conjunto-solução é formado por

$$\mu_1 = \frac{2r + 5 + \sqrt{5}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{2r + 5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Porém, $\mu_1 = \mu_3$ e $\mu_2 = \mu_4$, e portanto, os 4 autovalores restantes são μ_1 e μ_2 com multiplicidade 2.

□

Conjectura 4.10. *Seja $H_2 = G_n(CS(r, s), CP(2t))$, então*

$$\tau(H_2) = (r + s + 2t)^{r-1} (2t + r)^{t-1} (2t - 2 + r)^t r^s.$$

Também podemos usar a ideia dos vértices gêmeos para a determinação do espectro laplaciano desta família de grafos.

A matriz de adjacência de H_2 é dada por

$$A(H_2) = \begin{bmatrix} (J - I - A(tK_2))_{2t,2t} & -J_{2t,r} & 0_{2t,s} \\ J_{r,2t} & J_r - I_r & J_{r,s} \\ 0_{s,2t} & J_{s,r} & 0_{s,s} \end{bmatrix},$$

e sua matriz laplaciana por

$$L(H_2) = \begin{bmatrix} (D((tK_2)^C) - J + I + A(tK_2)) & -J_{2t,r} & 0_{2t,s} \\ -J_{r,2t} & D(K) - J_r + I_r & -J_{r,s} \\ 0_{s,2t} & -J_{s,r} & D(S)_{s,s} \end{bmatrix}$$

Como as linhas de cada bloco somam constantes, obtemos a matriz reduzida $\bar{L}(H_2)$ associada a $L(H_2)$

$$\bar{L}(H_2) = \begin{bmatrix} (2t - 2 + r) - 2t + 1 + 1 & -r & 0 \\ -2t & s + 2t & -s \\ 0 & -r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -r & 0 \\ -2t & s + 2t & -s \\ 0 & -r & r \end{bmatrix},$$

de onde chegamos em $\text{Spec}(\bar{L}(H_2)) = \{r + s + 2t, r, 0\}$.

Afirmção. $\text{Spec}_L(H_2) = \{(r + s + 2t)^{[r]}, (2t + r)^{[t-1]}, (2t - 2 + r)^{[t]}, r^{[s]}, 0\}$

Pela matriz reduzida, $\{s + r + 2t, r, 0\} \subset \sigma(L(H_2))$.

Os vértices do conjunto estável são gêmeos falsos, então pela Proposição 2.94, $d(v_s) = r \in \sigma(L(H_2))$, com $m(r) \geq s - 1$, onde v_s é um vértice de S .

Os vértices da clique são gêmeos verdadeiros, então pela Proposição 2.95, $d(v_k) + 1 = s + r + 2t \in \sigma(L(H_2))$, com $m(s + r + 2t) \geq r - 1$, onde v_k é um vértice de K .

Cada vértice de $CP(2t)$ possui um gêmeo não adjacente, então como existem $2t$ vértices em $CP(2t)$, $d(v_t) = 2t - 2 + r \in \sigma(L(H_2))$, com $m(2t - 2 + r) \geq t$, onde v_t é um vértice de $CP(2t)$.

Com essas informações com as obtidas pela matriz reduzida, e pelos vértices gêmeos, $m(r) \geq s$, $m(r + s + 2t) \geq r$, $m(2t - 2 + r) \geq t$ e $0 \in \sigma(L(H_2))$.

Resta provarmos que $(2t + r) \in \sigma(L(H_2))$, e que $m(2t + r) = t - 1$.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos o Teorema da Matriz-Árvore em sua versão por cofatores e sua versão espectral, e o aplicamos em famílias conhecidas de grafos. Também estudamos uma família de grafos não tão conhecida na literatura, os grafos matrogênicos.

Para isto, no Capítulo 2 foram introduzidos conceitos fundamentais em Teoria de Grafos, Teoria de Matrizes e Teoria Espectral de Grafos a fim de se compreender o restante do trabalho. No Capítulo 3, apresentamos a prova completa do Teorema da Matriz-Árvore por cofatores da matriz laplaciana, e provamos um corolário que é sua versão espectral. Finalmente, aplicamos o Teorema da Matriz-Árvore nas classes de grafos enunciadas no Capítulo 2, e após estudar os grafos threshold e matrogênicos, apresentamos um teorema que nos diz o número de árvores geradoras de um grafo threshold a partir do rearranjo da sua sequência de graus, e o cálculo do número de árvores geradoras de algumas famílias de grafos matrogênicos.

Como trabalhos futuros propõe-se um estudo aprofundado dos grafos split matrogênicos, tendo em vista que pelo Teorema 2.74, a cada grafo split matrogênico existem 3 famílias de grafos matrogênicos. Se existir alguma forma de se caracterizar os grafos split matrogênicos então a classe dos grafos matrogênicos também poderá ser caracterizada, e dependendo de seus autovalores laplacianos será possível calcular o número de árvores geradoras de qualquer grafo desta classe.

Como todo grafo threshold é split matrogênico, as perguntas atuais são:

É possível caracterizar o espectro laplaciano de um grafo matrogênico quando o grafo split matrogênico do Teorema 2.74 é um grafo threshold?

Como construir grafos split matrogênicos que não são threshold?

Respondendo estas perguntas iremos caracterizar o espectro de uma boa quantidade de grafos matrogênicos.

Referências

- 1 NETTO, P. O. B. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 5. ed. [S.l.]: Blucher, 2012. Citado na página 1.
- 2 SOUSA, D. M. de. *O Teorema da Matriz-Árvore*. Dissertação (Monografia de Final de Curso) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004. Citado na página 1.
- 3 MOON, J. W. Various proofs of Cayley's formula for counting trees. *A Seminar on Graph Theory*, Holt, Reinhart & Winston, p. 70–78, 1967. Citado na página 1.
- 4 HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. 2nd. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 2, 3, 10, 11 e 12.
- 5 STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. 4. ed. Belmont, CA: Thomson, Brooks/Cole, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 2, 5 e 8.
- 6 MERRIS, R. *Graph Theory*. [S.l.]: Wiley, 2011. (Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization). Citado 4 vezes nas páginas 2, 13, 21 e 56.
- 7 ABREU, N. M. M. et al. *Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução*. Florianópolis, SC, Brasil: III Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014. Citado na página 2.
- 8 MARSAGLIA, G.; STYAN, G. P. H. Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 2, p. 269–292, 1974. Citado na página 7.
- 9 CHVÁTAL, V. *Set-packing problems and threshold graphs*. [S.l.: s.n.], 1973. Citado na página 22.
- 10 HENDERSON, P. B.; ZALCSTEIN, Y. A graph-theoretic characterization of the pv_chunk class of synchronizing primitives. *SIAM Journal on Computing*, SIAM, v. 6, n. 1, p. 88–108, 1977. Citado na página 22.
- 11 MAHADEV, N.; PELED, U. Threshold graphs and related topics. In: *Threshold Graphs and Related Topics*. [S.l.]: Elsevier, 1995, (Annals of Discrete Mathematics, v. 56). p. iii. Citado 3 vezes nas páginas 22, 25 e 28.
- 12 HAMMER, P. L.; KELMANS, A. K. Laplacian spectra and spanning trees of threshold graphs. *Discrete Applied Mathematics*, North-Holland, v. 65, n. 1-3, p. 255–273, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 23, 54 e 55.
- 13 FOLDES, S.; HAMMER, P. *On a Class of Matroid-producing Graphs*. [S.l.]: Universität Bonn. Institut für Ökonometrie und Operations Research, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- 14 PINHEIRO, W. M. *Um estudo sobre sequências gráficas e grafos matrogênicos*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Federal Fluminense, 2018. Citado na página 26.
- 15 ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 5th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2002. Citado na página 42.