Larissa de Farias Brito Silva

# Introdução às Funções Harmônicas

Volta Redonda, RJ

2020

Larissa de Farias Brito Silva

# Introdução às Funções Harmônicas

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Curso de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gines Egea

Volta Redonda, RJ

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BAVR
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586i Silva, Larissa de Farias Brito
Introdução às Funções Harmônicas / Larissa de Farias Brito Silva ; Leandro Gines Egea, orientador. Volta Redonda, 2020.
46 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, 2020.

1. Funções Harmônicas. 2. Equação de Laplace. 3. Funções Analíticas. 4. Produção intelectual. I. Egea, Leandro Gines, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Ciências Exatas. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

Larissa de Farias Brito Silva

# Introdução às Funções Harmônicas

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho Aprovado. Volta Redonda, RJ, 28 de Agosto 2020:

Prof. Dr. Leandro Gines Egea – UFF
Orientador

Prof. Dr. Alan Prata de Paula – UFF

Prof. Dr. Alessandro Gaio Chimenton – UFF

Volta Redonda, RJ
2020

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, Jusselio e Sirlene, que sempre me incentivaram e me mostraram a importância da educação.*

# Agradecimentos

Acima de tudo agradeço a Jesus Cristo, Maravilhoso Conselheiro, Deus Forte, Pai da Eternidade, Príncipe da Paz e Luz da minha vida, que me concedeu ânimo em todos os dias da concepção deste trabalho.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, Sirlene e Jusselio, e a minha avó, Marilene, pelo apoio emocional, financeiro e por acreditarem em mim sendo minha base ao longo de todo o curso, sem eles eu não teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço ao meu marido, Branden, por todo o apoio a mim concedido nessa reta final, por ter me dado confiança e força para seguir em frente, dia após dia.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo dessa jornada por todos os momentos lúdicos e extremamente divertidos, em especial eu agradeço à minha amiga, Mariana Silva, que sempre esteve ao meu lado me ajudando nos momentos mais difíceis e me incentivando a prosseguir.

Agradeço ao meu orientador Leandro Egea por toda a atenção e orientação prestadas, por auxiliar-me em todas as dificuldades e dúvidas, permitindo meu amadurecimento intelectual tão necessário para minha formação, e por sua prontidão em aceitar ser meu orientador.

Por fim, sou grata a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, participaram da realização deste projeto.

*“ Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,*
*mas transformai-vos pela renovação da mente,*
*a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:*
*o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.*
*(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

A Equação de Laplace é uma Equação Diferencial Parcial que aparece em distintos contextos e aplicações. As funções que satisfazem esta equação são chamadas Funções Harmônicas. Estas funções são muito importantes, não só do ponto de vista prático, por serem as soluções da Equação de Laplace, mas também desde o ponto de vista teórico devido as muitas, interessantes e surpreendentes propriedades que elas satisfazem. Por outro lado, as Funções Harmônicas aparecem de forma natural na Teoria de Funções Analíticas, permitindo assim fazermos uma ligação entre as duas teorias. Estudaremos neste trabalho as principais propriedades das Funções Harmônicas, assim como sua relação com as Funções Analíticas.

Palavras-chave: Funções Harmônicas. Equação de Laplace. Funções Analíticas.

# Abstract

The Laplace equation is a Partial Differential Equation that appears in different contexts and applications. The functions that satisfy this equation are called Harmonic Functions. These functions are very important, not only from the practical point of view because they are the solutions of the Laplace equation, but also from the theoretical point of view due to the many interesting and surprising properties that they satisfy. On the other hand, the Harmonic Functions appear naturally in the Analytical Functions Theory, allowing to connect the two theories. We will study in this work the main properties of the Harmonic Functions, as their relation with Analytic Functions.

Keywords: Harmonic Functions. Laplace's Equation. Analytic Functions.

# Lista de ilustrações

# Sumário

# 1 Introdução

O operador de Laplace ou Laplaciano é o operador $\Delta$ que associa a cada função real $u$ de $n$ variáveis a divergência do seu gradiente:

$$\Delta u = \text{div}(\nabla(u)).$$

Em coordenadas cartesianas este operador pode ser escrito como

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}.$$

O Laplaciano mede a diferença entre o valor da função em um ponto e o valor médio dela em uma vizinhança desse ponto. Assim, uma função que não varia de forma repentina tem um Laplaciano pequeno. Por exemplo, no caso de uma variável real, considere uma função quadrática $u(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$. O laplaciano de $u$ é $\Delta u = 2a$, que é justamente o dobro do coeficiente que determina quão larga ou estreita são as ramas da parábola, e assim, quanto menor for o valor de $a$, menos varia o valor de $u$ na vizinhança de qualquer ponto.

A **Equação de Laplace**, definida por $\Delta u = 0$, é chamada assim em homenagem a Pierre Simon Laplace, matemático, astrônomo e físico francês que viveu entre 1749 e 1827, e é uma das equações mais importantes pois aparece em distintos contextos físicos. Ela é uma equação diferencial parcial elíptica que foi utilizada por Euler no estudo de hidrodinâmica em 1752, e mais tarde, a partir de 1782, pelo próprio Laplace, para estudar a atração gravitacional entre corpos no espaço. (1)

A partir dali esta equação, com sua versão não homogênea $\Delta u = f$, começou a ser amplamente estudada pois foi aparecendo em distintos contextos, modelando diferentes situações físicas, como por exemplo:

(a) **Equação de Onda.** Considere uma função $u$ com coordenadas espaciais $x$, $y$, e $z$, e temporal $t$, que descreve, por exemplo, a pressão em um líquido ou gás; ou o deslocamento, ao longo de alguma direção específica, das partículas de um sólido vibrante de suas posições de repouso; ou as ondas de som no ar. Esta situação pode ser representada na sua forma mais simples pela equação

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

(b) **Difusão do Calor.** A evolução da temperatura ou a difusão do calor através de uma região ou objeto é representada por uma função $u$ de coordenadas espacias $x$, $y$ e $z$, e uma variável temporal $t$. A equação que satisfaz $u$ no contexto mais simples é

$$u_t = k\Delta u.$$

(c) **Eletroestática**. A partir das Equações de Maxwell, se $\varphi$ é a densidade de carga, e $E$ é o campo elétrico, então temos que

$$\mathrm{curl}E = 0, \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{div}E = 4\pi\rho,$$

onde curl$E = \quad \times E$ é o rotacional de $E$. Aqui denota o operador gradiente e $\times$ denota o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$. Quando $E$ está definido num aberto simplesmente conexo[1], e satisfaz curl$E = 0$, então existe uma função real $\varphi$ chamada *potencial elétrico* tal que $E = - \quad \varphi$. Assim, segue que

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}( \quad \varphi) = -4\pi\rho.$$

(d) **Movimento browniano.** Um movimento browniano é aquele onde partículas se movimentam de forma aleatória num fluido. Suponha que temos este tipo de movimento num aberto limitado $D$ de $\mathbb{R}^3$, tal que param quando elas atingem a fronteira de $D$. Dividimos de maneira arbitrária a fronteira de $D$, $\partial D = C_1 \quad C_2$. Denotamos por $u(x, y, z)$ a probabilidade de que uma partícula que começa no ponto $(x, y, z)$ pare em algum ponto de $C1$. Então tem-se que

$$\Delta u = 0, \quad \text{em } D, \quad \text{com} \quad u = 1 \text{ em } C_1, \quad u = 0 \text{ em } C_2.$$

Na teoria de Equações Diferenciais Parciais, a Equação de Laplace, e sua versão não homogênea, aparecem com alguma condição de contorno para seu estudo, dando lugar a distintos problemas. Sejam $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ onde $\Omega$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, seja $g$ uma função contínua na fronteira $\partial\Omega$, e seja $\mathrm{n}$ o vetor normal exterior unitário[2] a $\partial\Omega$. Assim

- Problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{em } \Omega \\ u &= g, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- Problema de Poisson:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u &= g, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $f$ é uma função contínua em $\Omega$.

- Problema de Neumann:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} &= f, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

[1] Informalmente, um conjunto é **simplesmente conexo** se toda curva contínua fechada simples pode ser deformada continuamente a um ponto

[2] Neste trabalho consideraremos só abertos orientáveis. Ver Apêndice B.

As funções que satisfazem a Equação de Laplace são chamadas **funções harmônicas**, e elas são objetos de estudo primordiais para a matemática moderna, em particular na área de Análise e de Equações Diferenciais Parciais, mas também em outras áreas do conhecimento, como na Física, no estudo de fluxos e na teoria do potencial. Desde um ponto de vista teórico, as funções harmônicas possuem propriedades importantes e interessantes, como a Propriedade do Valor Médio, que diz que o valor de uma função harmônica num ponto é a média do valor da função ao longo de qualquer disco centrado nesse ponto, e que tem como consequência a existência das derivadas parciais de todas as ordens; ou como o Teorema do Máximo Forte, que diz que funções harmônicas não constantes não atingem o máximo em nenhum ponto interior de seu domínio, que tem como consequência a unicidade dos problemas de Dirichlet e de Poisson.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2 introduzimos as funções harmônicas, exemplos e algumas propriedades inicias. No Capítulo 3, desenvolvemos a teoria das funções harmônicas. Estudaremos os principais resultados teóricos destas funções como a Propriedade do Valor Médio, a analiticidade, o Princípio de Máximo Forte, e certas propriedades restritivas que limitam e condicionam o comportamento das funções harmônicas. No Capítulo 4 estudamos a relação entre as funções harmônicas e as funções analíticas, deduzindo algumas propriedades destas últimas a partir da teoria das funções harmônicas. Finalmente, no último Capítulo, introduzimos a fórmula de Poisson para o problema de Dirichlet num disco de $R^2$.

# 2 Funções Harmônicas

Neste capítulo, veremos a definição de função harmônica, exemplos e algumas propriedades iniciais. Em todo este capítulo $\Omega$ denotará um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, onde $n$ é um inteiro positivo maior ou igual a 1. Denotamos por $C^k(\Omega)$ o espaço de funções continuamente diferenciáveis de ordem $k$ em $\Omega$, com $0 \leq k \leq \infty$. Um domínio será um aberto conexo.

**Definição 2.1.** Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe $C^2(\Omega)$, é harmônica se seu laplaciano é zero. Ou seja, se

$$\Delta(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

**Exemplo 2.2.** *Vejamos alguns exemplos de funções harmônicas:*

- *No caso $n = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é harmônica se, e somente se, sua segunda derivada é identicamente nula. Logo, as funções harmônicas na reta são as funções afins, $u(x) = ax + b$.*
- $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, *com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualquer aberto.*
- $u(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + \cdots + x_{2n-1}^2 - x_{2n}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, *qualquer aberto.*
- $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *onde $\Omega$ não contém 0*
- $u(x, y) = e^x \sin y$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um aberto qualquer.*

Como o laplaciano é linear em $C^2(\Omega)$ então a soma e a multiplicação por escalar de funções harmônicas é harmônica. Assim temos que o conjunto de funções harmônicas é um espaço vetorial. Denotamos esse espaço por $H(\Omega)$.

Uma das propriedades do laplaciano é que ele comuta com as derivadas parciais. De fato, se $u \in C^3(\Omega)$, então

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j}\right) = \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \tag{2.1}$$

onde usamos o Teorema de Schwarz, que nos diz que as derivadas parciais comutam. Com isto temos que se $u$ é harmônica, então a função $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ é harmônica para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim temos, por exemplo que a função

$$v(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x^2 + y^2))$$

é harmônica em todo aberto de $\mathbb{R}^2$ que não contem ao 0.

Vejamos agora o que acontece com o produto de funções harmônicas. Se $u$ e $v$ são funções harmônicas com valor real então $uv$ é harmônica se, e somente se, $\nabla u \cdot \nabla v = 0$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\Delta(uv) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial uv}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)u \\
&= \Delta(u)v + 2\nabla(u)\cdot\nabla(v) + u\Delta(v).
\end{aligned}
$$

Logo, se $u$ e $v$ são harmônicas, temos que $\Delta(uv) = 0$ se, e somente se, $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

Como consequência dessa propriedade temos que se $\Omega$ é conexo e $u$ é harmônica em $\Omega$, tal que $u^2$ é harmônica, então $u$ é constante. De fato, sejam $u$ e $u^2$ funções harmônicas, então $\Delta u^2 = \Delta(u \cdot u) = 0$ se, e somente se, $\nabla u \cdot \nabla u = 0$, assim, $\nabla u = 0$. Logo, $u$ é constante.

**Proposição 2.3.** *Seja $u \in C^2(U)$ harmônica. Então a função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por*

$$v(x) = x \cdot \nabla u(x)$$

*é harmônica.*

*Demonstração.* A função $v$ pode-se escrever como

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Então, o laplaciano de $v$ é:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2 \partial x_i}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2 \partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $v$ é harmônica. □

A Proposição anterior nos deu um método para construir novas funções harmônicas a partir de uma função harmônica dada. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.4.** *Seja $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$, que é harmônica em $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Logo a função*

$$v(x,y) = (x,y)\cdot \nabla u(x,y) = (x,y)\cdot\left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right) = 2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 2$$

*é harmônica.*

**Exemplo 2.5.** *Seja $u(x,y) = e^x \sin(y)$ harmônica em $\mathbb{R}^2$. O gradiente de $u$ é $(e^x\sin(y), e^x\cos(y))$. Logo a função*

$$v(x,y) = xe^x\sin(y) + ye^x\cos(y) = e^x(x\sin(y) + y\cos(y))$$

*é harmônica em todo o plano.*

## 2.1 Propriedades Invariantes

Outras propriedades que as funções harmônica possuem, são que elas são invariantes por certas aplicações:

- Translações: se $T_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por $T_y(x) = x + y$, com $y \in \mathbb{R}^n$ fixado, e $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é harmônica, então a função $u \circ T_y : \Omega_y \to \mathbb{R}$ é harmônica em $\Omega_y = \{x - y : x \in \Omega\}$.

  De fato, temos que

  $$\frac{\partial}{\partial x_i}(u(x+y)) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+y) \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u(x+y)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x+y)$$

  Assim,

  $$\Delta(u(x+y)) = \Delta u(x+y) = 0.$$

  Logo, $u \circ T_y : \Omega_y \to \mathbb{R}$ é harmônica.

- Homotetias: se $T_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por $T_r(x) = rx$ com $r > 0$, e $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é harmônica, então a função $u \circ T_r : \Omega_r \to \mathbb{R}$ é harmônica em $\Omega_r = \{x/r : x \in \Omega\}$.

  De fato, temos que

  $$\frac{\partial}{\partial x_i}(u(ax)) = a\frac{\partial u}{\partial x_i}(ax) \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u(ax)) = a^2\frac{\partial u}{\partial x_i^2}(ax)$$

  Assim,

  $$\Delta(u(ax)) = a^2 \Delta u(ax) = 0$$

  Logo, $u \circ T_r : \Omega_r \to \mathbb{R}$ é harmônica.

Considere agora uma transformação linear arbitrária $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função harmônica. Quando a função $v(x) = (u \circ T)(x)$ é uma função harmônica? Calculemos o laplaciano da função $v$. Primeiro vamos calcular as primeiras derivadas de $v$, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(T(x)) a_{ji} \\
&= \langle \nabla u(T(x)), T(e_i) \rangle ,
\end{aligned}$$

onde $e_i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor canônico de $\mathbb{R}^n$, com 1 na coordenada $i$-ésima e 0 nas demais coordenadas, e $(a_{ij})$ é a matriz de $T$ na base canônica de $\mathbb{R}^n$. As derivadas parciais de ordem 2 de $v$ são

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(T(x))}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u(T(x))}{\partial x_i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(T(x))a_{ji}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(T(x))a_{ji}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(T(x))\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(T(x))a_{ki}\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a_{ji}a_{ki}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_j}(T(x)).
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\Delta(u(T(x))) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{ji}a_{ki}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_j}(T(x))\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_j}(T(x)) \sum_{i=1}^{n} a_{ji}a_{ki} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_j}(T(x))\ \langle A_i, A_j\rangle
\end{aligned}
$$

onde $A_i$ é a linha $i$-ésima da matriz de $T$. Portanto, se as linhas da matriz de $T$ são ortonormais, então temos que $\Delta(u(T(x))) = 0$. Ou seja, se $T$ é uma transformação ortogonal, então $u(T(x))$ é harmônica. Isso significa que as funções harmônicas são invariantes por transformações ortogonais, ou seja, por rotações.(2)

### 2.1.1 Laplaciano em Coordenadas Polares de $\mathbb{R}^2$

Devido à invariância das funções harmônicas por rotações, é útil escrever o laplaciano em coordenadas polares. Para isso consideremos a mudança de coordenadas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Usando a regra da cadeia, escrevemos o operador derivada parcial em relação a $r$ e em relação a $\theta$ em termos do operador derivada parcial em relação a $x$ e em relação a $y$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Escrevamos agora as derivadas parciais em relação a $x$ e $y$ em termos das derivadas parciais em relação a $r$ e $\theta$, invertendo a matriz que as relaciona:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{-\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

Agora calculemos a segunda derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo a soma temos

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Consideremos o caso que a função $u$ em um aberto de $\mathbb{R}^2$ que não depende de $\theta$ (estas funções são conhecidas como funções radiais). Usando coordenadas polares, a Equação de Laplace para $u$ é

$$0 = \Delta u = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Assim

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow 0 = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r} = c_1 \Rightarrow u = c_1\log r + c_2.$$

# 3 Teoria das Funções Harmônicas

Este é o capítulo central deste trabalho. Desenvolveremos aqui resultados e propriedades que as funções harmônicas possuem. O capítulo consta de 3 seções. Na primeira estudaremos o Princípio do Valor Médio e as distintas consequências que ele tem. Na segunda seção, será provado o Teorema de Liouville que afirma que as funções harmônicas não constantes definidas em todo $\mathbb{R}^n$ são não limitadas; e também provaremos a analiticidade das funções harmônicas. Na seção final, veremos os Teoremas do Máximo Forte e Fraco, e algumas de suas consequências.

Em todo este capítulo $\Omega$ denotará um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$, e será referido como **domínio**. Vamos supor também que $\Omega$ é orientável (Ver Apêndice A).

## 3.1 Princípio de Valor Médio

O Princípio do Valor Médio é uma das propriedades mais importantes que as funções harmônicas possuem. Ele estabelece que o valor de uma função harmônica num ponto é a média do valor da função numa vizinhança desse ponto. Essa propriedade traz consequências interessantes, e também impõe certas restrições ao comportamento da função. Para algumas das provas desta seção usaremos os Teoremas de Green-Gauss (Ver Apêndice A) e algumas propriedades de convolução (Ver Apêndice B).

**Definição 3.1.** Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Então $u$ satisfaz a Propriedade do Valor Médio I se:

$$u(x) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y\,, \quad \text{para qualquer} \quad B_r(x) \subset \Omega \tag{3.1}$$

onde $w_n$ denota a área de superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

**Definição 3.2.** Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Então $u$ satisfaz a Propriedade do Valor Médio II se:

$$u(x) = \frac{n}{w_n r^{n}} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy\,, \quad \text{para qualquer} \quad B_r(x) \subset \Omega \tag{3.2}$$

onde $w_n$ denota a área de superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

**Observação 1.** *As duas definições são equivalentes, ou seja, uma função contínua tem a Propriedade do Valor Médio I se, e somente se, tem a Propriedade do Valor Médio II. Quando isto acontece, dizemos simplesmente que a função tem a Propriedade do Valor Médio.(3)*

*De fato, reescrevendo (3.1) temos*

$$u(x)r^{n-1} = \frac{1}{w_n}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y\,.$$

*Integramos de 0 a r em relação y:*

$$u(x)\frac{r^n}{n} = \int_0^r u(x)r^{n-1}\, dy = \frac{1}{w_n}\int_0^r \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y\right) dy = \frac{1}{w_n}\int_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

*e assim obtemos (3.2). Reciprocamente, reescrevermos (3.2) como*

$$u(x)r^n = \frac{n}{w_n}\int_{B_r(x)} u(y)\, dy = \frac{n}{w_n}\int_0^r \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y\right) dy.$$

*Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, derivamos em relação a r*

$$nu(x)r^{n-1} = \frac{d(u(x)r^n)}{dr} = \frac{n}{w_n}\frac{d}{dr}\left(\int_0^r \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y\right) dy\right) = \frac{n}{w_n}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y,$$

*e assim temos (3.1).*

**Observação 2.** *Podemos escrever as Propriedades do Valor Médio das seguintes maneiras equivalentes:*

($i$) *u satisfaz a* **Propriedade do Valor Médio I** *se*

$$u(x) = \frac{1}{w_n}\int_{|w|=1} u(x+rw)dS_w\,,\ \text{para qualquer } B_r(x) \subset \Omega;$$

($ii$) *u satisfaz a* **Propriedade do Valor Médio II** *se*

$$u(x) = \frac{n}{w_n}\int_{|z|<1} u(x+rz)dz\,,\ \text{para qualquer } B_r(x) \subset \Omega;$$

Vejamos uma das propriedades mais importantes das funções harmônicas: elas satisfazem a Propriedade do Valor Médio.

**Teorema 3.3** (Princípio do Valor Médio)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ harmônica em $\Omega$. Então u satisfaz a Propriedade do Valor Médio em $\Omega$.*

*Demonstração.* Tome a bola $B_r(x) \subset \Omega$. Para $\rho \in (0,r]$ nós aplicamos o Teorema da Divergência em $B_\rho(x)$ (ver Teorema A.5) e obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy &= \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}dS = \rho^{n-1}\int_{|w|=1}\frac{\partial u}{\partial \rho}(x+\rho w)dS_w \\ &= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{|w|=1} u(x+\rho w)dS_w\end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto, como $u$ é função harmônica, temos que para qualquer $\rho \in (0,r]$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{|w|=1} u(x+\rho w)dS_w = 0,$$

portanto é constante em $(0, r]$. Pela continuidade de $u$, podemos estender para 0, e assim

$$\int_{|w|=1} u(x+rw)dS_w = \int_{|w|=1} u(x)dS_w = u(x)w_n$$

$$= \quad u(x) = \frac{1}{w_n}\int_{|w|=1} u(x+rw)dS_w = \frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y$$

□

**Exemplo 3.4.** *Seja $u(x,y) = x^2 - y^2$, que vimos que $u$ é harmônica. Note que $u(x,x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $u$ é harmônica, pela Propriedade do Valor Médio, a média de $u$ tem que ser 0 em qualquer bola centrada em $(x,x)$. Vejamos que de fato isto acontece:*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta, x + r\sin\theta)\, d\theta &= \int_0^{2\pi} (x + r\cos(\theta))^2 - (x + r\sin(\theta))^2\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2xr(\cos(\theta) - \sin(\theta)) + r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\, d\theta \\ &= 0.\end{aligned}$$

A Propriedade do Valor Médio pede apenas continuidade da função em questão. Porém, quando uma função contínua satisfaz esta propriedade, ela é automaticamente diferenciável, ou seja, existem as derivadas parciais de todas as ordens. Provaremos este resultado a seguir. A prova usa propriedades da convolução de funções, as quais estão detalhadas no Apêndice B.

**Teorema 3.5.** *Se $u \in C(\Omega)$ tem a Propriedade de Valor Médio em $\Omega$, então $u$ é de classe $C^\infty$ em $\Omega$.*

*Demonstração.* Seja $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$, com $\int_{B_1(0)} \phi = 1$ e $\phi(x) = \psi(|x|)$, isto é,

$$w_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)\, dr = 1.$$

Defina $\phi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{z}{\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$. Agora para qualquer $x \in \Omega$ considere $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(y)\phi_\varepsilon(y-x)dy &= \int u(x+y)\phi_\varepsilon(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|y|<\varepsilon} u(x+y)\phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \int_{|y|<1} u(x+\varepsilon y)\phi(y)dy \\ &= \int_0^1 r^{n-1}dr \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon rw)\phi(rw)dS_w \\ &= \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon rw)dS_w \\ &= u(x)w_n \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr = u(x)\end{aligned}$$

Na última igualdade nós usamos a Propriedade do Valor Médio. Assim, obtemos

$$u(x) = (\phi_\varepsilon * u)(x), \text{ para qualquer } x \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega; d(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Portanto, pelo Teorema B.3 segue que $u$ é suave. □

Finalmente, vejamos que ser harmônica e ter a Propriedade do Valor Médio são condições equivalentes.

**Teorema 3.6** (Recíproca do Princípio do Valor Médio). *Se $u \in C(\Omega)$ tem a propriedade de valor médio em $\Omega$, então $u$ é harmônica em $\Omega$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema anterior temos que $u$ é diferenciável, portanto $u \in C^2(\Omega)$. Pela fórmula (3.3) no Teorema 3.3, e pela Propriedade do Valor Médio, temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)} \Delta u &= r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|w|=1} u(x+rw)dS_w \\ &= r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}(w_n u(x)) = 0\end{aligned}$$

Logo, como $\int_{B_r(x)} \Delta u = 0$, para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$, então $\Delta u = 0$ em $\Omega$. □

Vejamos agora algumas consequências interessantes sobre as funções harmônicas a partir da Propriedade do Valor Médio.

**Proposição 3.7.** *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmônica. Então os zeros de $u$ nunca são isolados.*

*Demonstração.* Seja $x_0 \in \Omega$ um zero de $u$, ou seja, $u(x_0) = 0$. Seja $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Pelo Princípio do Valor Médio, temos que

$$0 = u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y.$$

Logo, $u$ é identicamente nula em $\partial B_r(x_0)$ ou assume valores positivos e negativos em $\partial B_r(x_0)$. Neste último caso, como $\partial B_r(x_0)$ é conexo e $u$ é contínua em $\partial B_r(x_0)$, então existe algum ponto em $\partial B_r(x_0)$ que anula a $u$. □

**Exemplo 3.8.** *Seja $u(x,y) = x^2 - y^2$, vamos provar que um zero da função não é isolado. De fato, temos que $u(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$. Considere o caso $x = y$, e tomemos uma bola $B((x,x), \varepsilon)$. O ponto $\left(x+\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ é um zero de $u$, e satisfaz*

$$\begin{aligned} d\left((x,x), \left(x+\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) &= \sqrt{\left(x-\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^2 + \left(x-\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

*Portanto, na bola $B((x,x), \varepsilon)$ existe um zero da função $u$ distinto de $(x,x)$.*

**Exemplo 3.9.** *Considere a função harmônica $u(x,y) = e^x \sin(y)$. O ponto $(x,0)$ é um zero da função $u$, e em qualquer bola $B_r(x,0)$, todos os pontos do intervalo $(x-r, x+r) \times \{0\}$ são zeros de $u$ e estão contidos na bola.*

## 3.2 Estimada das Derivadas

Uma característica importante da equação de Laplace é que podemos estimar as derivadas de uma solução em uma bola em termos da solução em uma bola maior.

**Teorema 3.10.** *Seja $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ harmônica em $B_R(x_0)$. Então as derivadas parciais de $u$ são limitadas. Mais especificamente,*

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u|$$

*Demonstração.* Como $u$ é suave, podemos calcular o laplaciano das derivadas parciais de $u$. Como $u$ é harmônica e o laplaciano comuta com as derivadas parciais, então $\Delta(\frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0$, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ também é harmônica em $B_R(x_0)$. Assim, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ satisfaz o Princípio do Valor Médio. Pelo teorema da divergência, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u(y)}{\partial x_i}\, dy = \frac{n}{w_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\nu_i \, dS_y.$$

Logo, aplicando módulo

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n} \max_{\partial B_R(x_0)} |u| \cdot w_n R^{n-1} \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u|$$

□

**Teorema 3.11.** *Seja $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ uma função harmônica não negativa em $B_R(x_0)$. Então:*

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema da Divergência e pelo fato de $u$ ser não negativo, temos

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, dS_y = \frac{n}{R} u(x_0)$$

Pelo Princípio do Valor Médio, temos

$$\frac{n}{w_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, dS_y = \frac{n}{R} u(x_0)$$

Logo,

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0)$$

□

Uma consequência do teorema (3.10) é que uma função harmônica limitada em $\mathbb{R}^n$ é constante. Este resultado é conhecido como Teorema de Liouville.(4)

**Teorema 3.12** (Liouville). *Uma função harmônica em* $\mathbb{R}^n$ *e limitada é constante.*

*Demonstração.* Seja $u$ uma função harmônica e limitada em $R^n$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, aplicando o teorema (3.10) em $u \in B_R(x)$ e fazendo $R \to \infty$, temos que $\frac{\partial u}{\partial x_i}u(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, e para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto, $u$ é constante. □

A seguinte proposição estende o Teorema (3.10) para derivadas de ordem maior.

**Proposição 3.13.** *Seja* $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ *harmônica em* $B_R(x_0)$. *Então a derivada parcial de ordem m de u em relação a qualquer combinação das variáveis é limitada. Mais especificamente*

$$|D^m u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{B}_R} |u|,$$

*onde* $D^m u(x_0)$ *denota a derivada de ordem m de u em relação a alguma (qualquer) combinação das variáveis* $x_1, x_2, \dots, x_n$.

*Demonstração.* Provaremos por indução. Pelo teorema (3.10), temos que o teorema é verdadeiro para $m = 1$. Suponha que o teorema vale para $m$. Vamos provar que ele é válido para $m + 1$. Defina, $r = (1 - \theta)R \in (0, R)$, com $\theta \in (0, 1)$. Aplicando o teorema (3.10) á função $u$ na bola $B_r(x_0)$ temos

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{n}{r} \max_{B_r(x_0)} |D^m u|$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$\max_{B_r(x_0)} |D^m u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R - r)^m} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

Assim,

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{n}{r} \cdot \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R - r)^m} \max_{B_R(x_0)} |u| = \frac{n^{m+1} e^{m-1} m!}{R^{m+1}\theta^m (1 - \theta)} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

Seja $\theta = \frac{m}{m+1}$. Isso implica

$$\frac{1}{\theta^m (1 - \theta)} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m (m + 1) < e(m + 1)$$

Portanto, o resultado é estabelecido para qualquer derivada, em relação a quaisquer variáveis. □

**Teorema 3.14.** *Seja u é harmônica em* $\Omega$. *Então u admite um desenvolvimento em série de Taylor ao redor de qualquer ponto* $x \in \Omega$.

*Demonstração.* Seja $u$ uma função harmônica em $\Omega$. Fixe $x \in \Omega$ e tome $B_{2R}(x) \subset \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$, com $|h| \leq R$. Pela expansão de Taylor, temos

$$u(x + h) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^i u(x) + R_m(h)$$

onde
$$R_m(h) = \frac{1}{m!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m u\ (x_1 + \theta h_1, \cdots, x_n + \theta h_n)$$
para algum $\theta \in (0,1)$. Note que $x + h \in B_R(x)$ para $|h| < R$. Assim, pela proposição (3.13), temos
$$|R_m(h)| \leq \frac{1}{m!}|h|^m \cdot n^m \cdot \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m}\max_{\overline{B}_{2R}}|u| \leq \left(\frac{|h|n^2 e}{R}\right)^m \max_{\overline{B}_{2R}}|u|$$
Então, para qualquer $h$ com $|h|n^2e < \frac{R}{2}$, temos que $R_m(h) \to 0$ quando $m \to \infty$. □

**Corolário 3.15.** *Sejam $u$, $v$ harmônicas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que exista um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que as derivadas parciais de $u$ e $v$ de qualquer ordem e em relação a qualquer combinação de variáveis coincidem em $x_0$. Então $u = v$ em $\Omega$.*

*Demonstração.* Seja $F$ o conjunto onde as derivadas parciais de $u$ e $v$ de qualquer ordem e em relação a qualquer combinação de variáveis coincidem. Então $F \neq \emptyset$, já que $x_0 \in F$. Além disso, $F$ é fechado em $\Omega$ pois
$$F = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [D^m(u - v)]^{-1}(0)$$
é uma interseção de conjuntos relativamente fechados. O Teorema (3.14) implica que se $x \in F$, então a série Taylor de $u$, $v$ converge para o mesmo valor em alguma bola centrada em $x$. Assim, $u$, $v$ e todas as suas derivadas parciais são iguais nesta bola, portanto $F$ é aberto. Como $\Omega$ é conexo, segue-se que $F = \Omega$. □

Uma outra propriedade das funções harmônicas não negativas é que elas não podem oscilar muito em domínios compactos. Esse resultado é conhecido como **desigualdade de Harnack**.

**Teorema 3.16** (Desigualdade de Harnack - Versão 1)**.** *Seja $u$ harmônica em $\Omega$. Então para qualquer subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante positiva $C = (\Omega, K)$, tal que se $u \geq 0$ em $\Omega$, então*
$$\sup_K u \leq C \inf_K u$$

*Demonstração.* Primeiro vejamos que este resultado vale para uma bola. Considere $x \in \Omega$, e seja $R > 0$ tal que $B_{4R}(x_0) \subset \Omega$. Se $y \in B_R(x)$, então usando a Propriedade do Valor Médio e o fato de $u$ ser não negativa, temos por um lado que
$$u(y) = \frac{n}{w_n R^n}\int_{B_R(y)} u \leq \frac{n2^n}{w_n(2R)^n}\int_{B_{2R}(x)} u = 2^n u(x),$$
onde usamos que $B_R(y) \subset B_{2R}(x)$. Por outro lado, usando o fato que $B_{2R}(x) \subset B_{3R}(y)$, temos que
$$u(y) = \frac{n}{w_n(3R)^n}\int_{B_{3R}(y)} u \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{n}{w_n(2R)^n}\int_{B_{2R}(x)} u = \left(\frac{2}{3}\right)^n u(x).$$

Logo, segue que

$$\sup_{B_R(x)} u \leq 3^n \inf_{B_R(x)} u.$$

Agora, seja $K$ um compacto qualquer contido em $\Omega$, e seja $R > 0$ tal que $0 < 4R < (K, \partial\Omega)$. Como $K$ é compacto, podemos cobrir ele com uma quantidade finita $N$ de bolas $B_i$ de raio $R$, tal que $B_i \cap B_{i+1} =$ para $i = 1, \ldots, N-1$. Portanto, dados $x, y$ $K$ existe uma sequência de bolas $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{i+j}$ com $x$ $B_i$ e $y$ $B_{i+j}$. Aplicando a estimativa provada anteriormente a cada bola, e combinando os resultados, segue que

$$\sup_K u \leq 3^{nN} \inf_K u.$$

□

**Corolário 3.17** (Desigualdade de Harnack - Versão 2). *Seja $u \geq 0$ harmônica em $\Omega$. Então para qualquer subconjunto compacto $K$ $\Omega$, existe uma constante positiva $C = (\Omega, K)$, tal que*

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y), \text{ para qualquer } x, y \quad K.$$

*Demonstração.* Notar que a desigualdade

$$\sup_K u \leq C \inf_K u$$

do Teorema anterior (3.16) implica

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y) \text{ para qualquer } x, y \quad K.$$

□

## 3.3 Propriedades Limitantes das Funções Harmônicas

Em geral, funções contínuas de várias variáveis podem atingir seus valores máximos e mínimos (quando existirem) em qualquer ponto de seu domínio. No entanto, no caso das funções harmônicas, essa situação é mais restritiva, mais rígida. Nesta seção veremos dois teoremas que nos mostram esse comportamento. O Teorema do Máximo Fraco diz que em domínios limitados, o máximo de uma função harmônica é alcançado na fronteira. Por outro lado, o Teorema do Máximo Forte diz que se uma função harmônica atinge seu máximo no interior de seu domínio, então ela é constante. Esses resultados trazem consequências importantes sobre as soluções do problema de Dirichlet.

**Teorema 3.18** (Princípio do Máximo Fraco). *Seja $\Omega$ $\mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Seja $u$ $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função harmônica em $\Omega$. Então o valor de máximo de $u$ em $\overline{\Omega}$ é alcançado na fronteira $\partial\Omega$.*

*Demonstração.* Temos do cálculo que se um ponto interior é ponto de máximo então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Assim, $\Delta u \leq 0$ no ponto de interior que é ponto de máximo. Portanto, se $v$ é uma função tal que $\Delta v > 0$ em $\Omega$, então o valor de máximo de $v$ em $\overline{\Omega}$ não pode ser alcançado em $\Omega$. Logo, $v$ atinge seu valor máximo na fronteira $\partial\Omega$. A ideia para provar o princípio do máximo fraco é encontrar tal função $v$ a partir da função harmônica $u$ fornecida.

Defina a função $v\ : \Omega \to \mathbb{R}$ por $v\ (x) := u(x) + \ |x|^2$. Então, $v\quad C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Note que, $\Delta v\ > 0$ em $\Omega$ e assim, $v$ atinge seu máximo apenas na fronteira $\partial\Omega$. Sejam

$$M := \max_{\partial\Omega} u, \quad \text{e} \quad L := \max_{\partial\Omega}(|x|^2).$$

Logo, $v\ (x) \leq M + \ L, \quad x \quad \Omega$. Como $u(x) \leq v\ (x)$ em $\Omega$, segue que $u(x) \leq M + \ L, \quad x$ $\Omega$. Note que a última inequação vale para todo $\ > 0$. Assim, passando para o limite quando $\ \to 0$, temos que $u(x) \leq M, \quad x \quad \Omega$, o que prova o teorema. □

**Corolário 3.19** (Princípio do Mínimo Fraco). *Seja $u \quad C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função harmônica num domínio limitado $\Omega$. Então o valor mínimo de $u$ em $\overline{\Omega}$ é atingido na fronteira $\partial\Omega$.*

*Demonstração.* Defina $v(x) = -u(x)$ em $\Omega$, então $v$ é uma função harmônica. Pelo Princípio do Máximo Fraco aplicada à função harmônica $v$ segue o resultado. □

O Princípio do Máximo Fraco nos diz que em domínios limitados, qualquer função harmônica tem seu valor máximo na fronteira. Porém, ele não nos informa se a função harmônica terá ou não também um valor máximo em $\Omega$. Por exemplo, considere o disco unitário $D$ centrado na origem. Então a função constante $u = 1$ é definitivamente uma função harmônica em $D$. Ela atinge seu máximo em $D$, além de ter o atingido em $\partial D$.

Uma consequência imediata do Princípio do Máximo Fraco é a unicidade nas soluções do Problema de Dirichlet.

**Teorema 3.20** (Unicidade das Soluções para o Problema de Dirichlet). *Seja $\Omega \quad \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e considere o problema de Dirichlet em $\Omega$:*

$$\Delta u = f, \ \text{em } \Omega$$

$$u = g, \ \text{em } \partial\Omega$$

*onde $g$ é uma função contínua em $\partial\Omega$. Então o problema de Dirichlet tem no máximo uma solução de classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

*Demonstração.* Suponha que $u$ e $v$ pertencentes a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sejam soluções para o problema de Dirichlet. Defina $w := u - v$. Então $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e soluciona o problema de Dirichlet homogêneo:

$$\Delta w = 0 \text{ em } \Omega$$

$$w = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco temos que $w \leq 0$ e pelo Princípio do Mínimo Fraco $w \geq 0$. Assim, $w = 0$, ou seja, $u = v$. □

**Observação 3.** *Para garantir a unicidade da solução no problema de Dirichlet, é essencial que $\Omega$ seja um domínio limitado. Para domínios ilimitados, o teorema anterior pode não ser verdade.*

*Por exemplo, considere o seguinte problema de Dirichlet no semiplano superior:*

$$\Delta w = 0, \quad \text{em } \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$$
$$w(x, 0) = 0, \quad \text{em } \partial\Omega = \mathbb{R} \times \{0\}$$

*Esse problema tem pelo menos duas soluções, a saber $w_1(x, y) = xy$ e $w_2(x, y) = 0$.*

Por outro lado, se $\Omega$ é ilimitado, podemos ter soluções do problema de Dirichlet limitadas ou ilimitadas. Considere o seguinte problema:

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$
$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > 1\}$. Para $n = 2$ temos que $u(x) = \log|x|$ é uma solução. Note que $u \to \infty$ quando $r \to \infty$, e assim $u$ é ilimitada. Para $n = 3$ temos que $|x|^{2-n} - 1$ é uma solução. Note que $u \to -1$ quando $r \to \infty$. Portanto, $u$ é limitado. Agora, considere o semiplano superior $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, que também é ilimitado. Então $u(x) = x_n$ é uma solução não trivial, a qual é ilimitada.

O seguinte resultado nos dá informação da distância entre duas soluções do Problema de Dirichlet quando temos duas condições de contorno distintas.

**Teorema 3.21.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Para $i = 1, 2$, seja $u_i = C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solução para o seguinte problema de Dirichlet:*

$$\Delta u_i = f \quad \Omega$$
$$u_i = g_i \quad \partial\Omega$$

*onde $g_i$ é uma função contínua em $\partial\Omega$. Então $u_1$ e $u_2$ satisfazem:*

$$\max_{\Omega} |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1(x, y) - g_2(x, y)|$$

*Demonstração.* Defina $w = u_1 - u_2$. Então $w$ é solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \text{ em } \Omega \\ w &= g_1 - g_2 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned}$$

Aplicando o Princípio do Máximo Fraco e o Princípio do Mínimo Fraco temos que

$$\min_{\partial\Omega}(g1 - g2) \leq w(x) \leq \max_{\partial\Omega}(g_1 - g_2), \quad x \quad \Omega,$$

o que prova o teorema. □

**Teorema 3.22** (Princípio do Máximo Forte). *Sejam $\Omega$ aberto e conexo, $u$ uma função harmônica em $\Omega$, e suponha que $u$ tem um máximo ou um mínimo em $\Omega$. Então $u$ é constante.*

*Demonstração.* Suponha que $u$ atinja um máximo em $a$ $\Omega$. Escolha $r > 0$ tal que $B(a, r)$ $\Omega$. Se $u$ fosse menor que $u(a)$ em algum ponto de $B(a, r)$, então a continuidade de $u$ mostraria que a média de $u$ sobre $B(a, r)$ é menor que $u(a)$, contradizendo assim o Teorema (3.3). Portanto, $u$ é constante em $B(a, r)$, provando que o conjunto em que $u$ atinge seu máximo é aberto em $\Omega$. Pela continuidade de $u$ temos que este conjunto também é fechado em $\Omega$, assim pela conexidade, temos que este conjunto deve ser o $\Omega$ todo. Logo, $u$ é constante em $\Omega$.

Se $u$ atingir um mínimo em $\Omega$, podemos aplicar esse argumento a $-u$. □

# 4 Funções Analíticas

Neste capítulo estudaremos a relação entre as funções harmônicas e as funções complexas analíticas. Na primeira seção apresentaremos a noção de funções analíticas, junto com algumas de suas propriedades. Na seção 2, veremos que toda função analítica tem associadas duas funções harmônicas, e também que dada uma função harmônica ela induz uma função analítica. Na última seção veremos os resultamos que são obtidos de funções complexas a partir das propriedades que possuem as funções harmônicas. Neste capítulo o termo diferenciável está se referindo a diferenciabilidade complexa.

## 4.1 Equações de Cauchy-Riemann

**Definição 4.1.** Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um subconjunto aberto $U \quad \mathbb{C}$, e seja $z_0 \quad U$. Dizemos que $f$ tem derivada complexa no ponto $z_0$ se o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{4.1}$$

existe. Se o limite existir, o número em (4.1) é chamado derivada complexa de $f$ em $z_0$ e é denotado por $f\ (z_0)$ e será dito que $f$ é diferenciável.

Dizemos que um função complexa $f(z)$ é **analítica** no ponto $z_0$ se $f$ é diferenciável em $z_0$ e em todos os pontos de alguma vizinhança de $z_0$. Dizemos que $f$ é **função analítica** em $U$ se $f$ for analítica em todos os pontos de $U$.

Embora essa definição seja semelhante à definição da derivada de funções no $\mathbb{R}$, no caso complexo nós estamos exigindo um pouco mais. No caso real, $x$ só pode se aproximar de $x_0$ pela direita ou pela esquerda. Já no caso complexo, $z$ pode se aproximar de $z_0$ por vários caminhos, então para que esse limite exista precisamos que esse valor seja o mesmo independente do caminho que tomarmos para $\Delta z = z - z_0$.(5)

**Exemplo 4.2.** *$f(z) = z^2$ é uma função analítica.*

*De fato,*

$$\begin{aligned} f\ (z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + z\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z_0 \end{aligned}$$

*Portanto, $f$ é diferenciável em todo plano complexo. Logo, $f$ é analítica.*

**Exemplo 4.3.** *$g(z) = 2 + 4i$ é uma função analítica.*

**Exemplo 4.4.** *$h(z) = (3 - i)z$ é uma função analítica.*

**Exemplo 4.5.** *$k(z) = e^z$ é uma função analítica.*

**Exemplo 4.6.** *$j(z) = \sin(z)$ é uma função analítica.*

Dada qualquer função complexa $f : U \to \mathrm{C}$, com $U \quad \mathrm{C}$, temos associada duas funções reais definidas $U \quad \mathrm{R}^2$:

$$u, v : U \quad \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, \quad \text{dadas por } u = \mathrm{Real}(f) \text{ e } v = \mathrm{Ima}(f).$$

Assim podemos escrever qualquer função complexa $f$ como

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Suponha que $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica em um conjunto aberto $U$ e seja $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$ um ponto em $U$. A derivada em $z_0$ existe e é igual a

$$f\,(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{4.2}$$

Suponha que $z$ se aproxime de $z_0$ na direção do eixo $x$. Então $z = z_0 + \Delta x = (x_0 + \Delta x, y_0)$, $\Delta z = z - z_0 = \Delta x$ e (4.2) se torna:

$$\begin{aligned} f\,(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Assim,

$$f\,(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{4.3}$$

Agora tomaremos o limite quando $z$ se aproxima de $z_0$ na direção do eixo $y$. Então $z = z_0 + i\Delta y = (x_0, y_0 + \Delta y)$, $\Delta z = z - z_0 = i\Delta y$. Sabemos que $i\Delta y \to 0$ se, e somente se, $\Delta y \to 0$, assim

$$\begin{aligned} f\,(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + i(y_0 + \Delta y)) - f(x_0 + iy_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f\ (z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{4.4}$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (4.3) e (4.4), temos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.5}$$

Essas equações são chamadas de **Equações de Cauchy-Riemann**

**Teorema 4.7** (Equações de Cauchy-Riemann)**.** *Seja $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função analítica em $U$, então $u$ e $v$ são funções diferenciáveis em $U$ e satisfazem*

$$u_x = v_y \quad e \quad u_y = -v_x \tag{4.6}$$

*para todos os pontos em $U$. Assim, para todo $(x,y)\quad U$ temos que*

$$f\ (x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) \quad ou \quad f\ (x+iy) = v_y(x,y) - iu_y(x,y) \tag{4.7}$$

**Observação 4.** *O fato de $u$ e $v$ satisfazerem as equações de Cauchy-Riemann não garante a analiticidade de uma função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ em um ponto $z = x+iy$. É possível que as equações de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas em $z$ e, no entanto, $f$ pode não ser diferenciável em $z$, ou $f$ pode ser diferenciável em $z$, mas em nenhum outro lugar. Nos dois casos, $f$ não é analítica em $z$.(6)*

**Exemplo 4.8.** *Seja $f(z) = |z|^2$, temos que $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$, ou seja, $u(x,y) = x^2+y^2$ e $v(x,y) = 0$. Assim,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

*Portanto, as equações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas em nenhum ponto fora da origem. Logo, $f$ não é analítica em nenhum ponto.*

O seguinte teorema estabelece as condições suficientes para $u$ e $v$ que garantem a analiticidade de $f$.

**Teorema 4.9.** *Se $u$, $v$ são funções com valor real definidas em um subconjunto aberto $U \quad \mathbb{R}^2$, com derivadas parciais contínuas que satisfazem $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, então a função de valor complexo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em $U$.*

**Observação 5.** *Esta prova é técnica e longa, porém não é complicada pois só usa ferramentas de Cálculo. Como ela não traz nenhuma utilidade para este trabalho, a prova não será apresentada. A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro Asmar e Grafakos(5).*

**Exemplo 4.10.** $f(z) = z^2 + z$

*Podemos escrever* $f(z) = (x+iy)^2 + (x+iy) = x^2 + 2xyi + i^2y^2 + x + iy = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$*, onde* $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ *e* $v(x,y) = 2xy + y$*. Assim,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$$

*Portanto,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

*Logo, como a função* $f$ *satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e as derivadas parciais de* $u$ *e* $v$ *são contínuas, temos que* $f$ *é analítica.*

**Exemplo 4.11.** $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$

*Temos que* $u(x,y) = 2x^2 + y$ *e* $v(x,y) = (y^2 - x)$*. Assim,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1 \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

*Portanto,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

*Logo, como a função* $f$ *não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann* $f$ *não é analítica.*

Por definição, temos que toda função analítica é diferenciável, porém a recíproca não é verdadeira.

De fato, considere a função $f(z) = |z|^2$. Temos que $f$ é diferenciável em $z = 0$, mas, pelo Exemplo (4.8), temos que $f$ não é analítica nesse ponto.

**Definição 4.12.** Uma função complexa definida e analítica em todo o plano complexo C é chamada de função inteira.

Polinômios de variável complexa com valores complexos, são funções inteiras $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, onde $a_j$ C e $n$ é um inteiro.

**Teorema 4.13.** *Uma função* $f$ *analítica em um ponto* $z_0$ *é contínua em* $z_0$*.*

*Demonstração.* Sejam $z_0 \quad U$, $U$ aberto, e $f$ uma função analítica em $U$. Queremos mostrar que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) \cdot \frac{(z - z_0)}{(z - z_0)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} z - z_0 \\
&= f\ (z_0) \cdot 0 = 0 \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)
\end{aligned}
$$

Logo, $f$ é contínua em $z_0$ □

A recíproca do Teorema (4.13) não é verdadeira.

De fato, considere a função $f(z) = \bar{z}$. Temos que $f$ é contínua em C, mas ela não é analítica em nenhum ponto. Sabemos que $\bar{z} = x - iy$, onde $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$. Assim,

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1
$$

Daí,

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}
$$

Como a função não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann temos que $f$ não é analítica em nenhum ponto.

A derivada complexa tem propriedades semelhantes às propriedades da derivada real.

**Teorema 4.14** (Propriedades das Funções Analíticas). *Sejam $f$ e $g$ funções analíticas em um subconjunto aberto $U \quad$ C e sejam $c_1$ e $c_2$ constantes complexas.*

- *Então $c_1 f + c_2 g$ é analítica em $U$, e $\ z \quad U$*

$$
(c_1 f + c_2 g)\ (z) = c_1 f\ (z) + c_2 g\ (z) \tag{4.8}
$$

- *A função $fg$ é analítica em $U$, e $\ z \quad U$*

$$
(fg)\ (z) = f\ (z) g(z) + g\ (z) f(z) \tag{4.9}
$$

- *A função $\frac{f}{g}$ é analítica em $W = U \setminus \{w \quad W; g(w) = 0\}$, e $\ z \quad U$*

$$
\left(\frac{f}{g}\right)\ (z) = \frac{f\ (z) g(z) - f(z) g\ (z)}{(g(z))^2} \tag{4.10}
$$

- *Sejam $g$ analítica em um conjunto aberto $U$ e $f$ analítica em um conjunto aberto contendo $g(U)$. Então $f \circ g$ é uma função analítica em $U$. Além disso, para $z_0 \in U$, a identidade da regra da cadeia mantém:*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0) \tag{4.11}$$

## 4.2 Funções Harmônicas e Funções Analíticas

Nesta seção veremos a relação que existe entre as funções harmônicas e as funções analíticas.

Considere uma função analítica $f = u + iv$ em um conjunto aberto $\Omega$. Suponha que $u$ e $v$ sejam de classe $C^2$.

Usando as equações de Cauchy-Riemann (4.5), podemos escrever

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

para todo $(x, y) \in \Omega$, ou seja, $u$ e $v$ satisfazem a equação de Laplace. Logo, provamos o seguinte teorema.

**Teorema 4.15.** *Se as partes reais e imaginárias de uma função analítica são de classe $C^2$, então elas são harmônicas.*

**Observação 6.** *Usando a Teoria de Integral das funções complexas (livro Asmar e Grafakos(5)), é possível mostrar que toda função analítica é infinitamente diferenciável, e como consequência, as partes real e imaginária dela têm derivadas de todas as ordens. Como o objetivo deste trabalho é estudar as funções harmônicas e suas implicações, e não desenvolver a teoria das funções complexas, precisamos adicionar a hipótese sobre as partes reais e imaginárias de $f$ serem de classe $C^2$ para provar que elas são harmônicas. Na última seção provaremos que toda função analítica tem derivadas de todas as ordens também usando a hipótese adicional de $u$ e $v$ serem de classe $C^2$.*

**Exemplo 4.16.** *Seja $f(z) = e^z$, temos que a função $f$ é analítica.*

*De fato, $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x[\cos y + i \sin y]$, onde $u(x, y) = e^x \cdot \cos y$ e $v(x, y) = e^x \cdot \sin y$. Assim,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin y \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos y$$

*Portanto,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

*como as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas, pelo teorema 4.9 temos que $f$ é analítica.*

*Note que,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cdot \cos y \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cdot \cos y \quad = \quad \Delta u(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \cdot \sin y \quad e \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \cdot \sin y \quad = \quad \Delta v(x,y) = 0$$

*Logo, $u$ e $v$ são funções harmônicas.*

**Exemplo 4.17.** *Seja $f(z) = z^3$, temos que a função $f$ é analítica.*

*De fato, $f(z) = z^3 = x^3 + 3ix^2y - 3y^2x - iy^3$, onde $u(x,y) = x^3 - 3y^2x$ e $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. Assim,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6yx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6yx \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

*como as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas, pelo teorema 4.9 temos que $f$ é analítica.*

*Note que,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \quad = \quad \Delta u(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y \quad e \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y \quad = \quad \Delta v(x,y) = 0$$

*Logo, $u$ e $v$ são funções harmônicas.*

**Exemplo 4.18.** *Seja $f(z) = z^2$, temos que a função $f$ é analítica.*

*De fato, $f(z) = z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$, onde $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. Assim,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

*Portanto,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

*como as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas, pelo teorema 4.9 temos que $f$ é analítica.*

*Note que,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad = \qquad \Delta u(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad = \qquad \Delta v(x, y) = 0$$

*Logo, $u$ e $v$ são funções harmônicas.*

## 4.3 Conjugados Harmônicos

Duas funções harmônicas arbitrárias $u$ e $v$ num aberto de $\mathbb{R}^2$, não definem geralmente uma função analítica $f = u + iv$, pois têm que satisfazer as Equações de Cauchy-Riemann. Nesta seção veremos condições para que dada uma função harmônica $u$, exista uma função harmônica $v$ tal que $f = u + iv$ seja analítica.

**Definição 4.19.** Suponha que $u$ e $v$ sejam funções harmônicas que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em algum conjunto aberto $\Omega$, ou seja, a função $f = u + iv$ é analítica em $\Omega$. Então $v$ é chamado de conjugado harmônico de $u$.

Será que sempre podemos encontrar um conjugado harmônico de uma função harmônica $u$?

A resposta depende da função $u$ e de seu domínio de definição. Por exemplo, a função $\ln|z| = \text{Real} \log z$ é harmônica em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, onde $\text{Real} \log z$ é o logaritmo complexo, mas $\ln|z|$ não tem conjugado harmônico nesse domínio pois $\text{Real} \log z$ não é analítica em $\Omega$ . No entanto, $\ln|z|$ possui um conjugado harmônico em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.(5)

Vejamos, a seguir, uma forma de construir funções analíticas a partir de funções harmônicas.

**Proposição 4.20.** *Seja $u$ uma função harmônica em uma região $\Omega$. Então a função $g = u_x - iu_y$ definida em $\Omega$ é analítica em $\Omega$. Tal função é chamada* **gradiente conjugado** *de $u$.*

*Demonstração.* Suponha $g(z) = u_x(z) - iu_y(z) := U(z) + iV(z)$, $z \in \Omega$. Pela equação de Laplace temos que

$$U_x - V_y = u_{xx} - (-u_{yy}) = 0 \tag{4.12}$$

Como as derivadas parciais de $u(z)$ são contínuas em $\Omega$,

$$U_y + V_x = (u_x)_y + (-u_y)_x = 0 \tag{4.13}$$

Temos que as equações (4.12) e (4.13) são as equações de Cauchy-Riemann para $g = U + iV$. Note que $U_x$, $U_y$, $V_x$, $V_y$ são todas contínuas, assim podemos aplicar o Teorema (4.9) para estabelecer a analiticidade de $g$ em $\Omega$. □

**Proposição 4.21.** *Suponha que $u$ seja harmônica em um conjunto aberto $\Omega$ e que $v$ seja um conjugado harmônico de $u \in \Omega$. Então $-u$ é um conjugado harmônico de $v \in \Omega$.*

*Demonstração.* Sabemos que $f = u + iv$ é analítica em $\Omega$. Segue que a função $(-i)f = v - iu$ é analítica em $\Omega$ e, portanto, $-u$ é um conjugado harmônico de $v \in \Omega$. □

**Proposição 4.22.** *Suponha que $u$ é uma função harmônica em uma região $\Omega$. Então:*

*(i) se $v_1$ e $v_2$ são conjugados harmônicos de $u \in \Omega$, então $v_1$ e $v_2$ devem diferir por uma constante real.*

*(ii) se $v$ é um conjugado harmônico de $u$, então $v$ também é um conjugado harmônico de $u + c$, onde $c$ é uma constante real.*

*Demonstração.* Se $v_1$ e $v_2$ são conjugadas harmônicas de $u$, então existem $f_1$ e $f_2$ analíticas tal que

$$f_1 = u + iv_1, \quad \text{e} \quad f_2 = u + iv_2.$$

A função $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$ é analítica. Como a parte real de $f_1 - f_2$ é 0, pelas Equações de Cauchy-Riemann segue $v_1 - v_2$ é igual a constante. □

**Observação 7.** *Na hipótese da Proposição (4.22), estamos assumindo que $\Omega$ é um conjunto conexo. Caso contrário, a constante $c$ na afirmação (ii) pode variar em cada componente conexa diferente de $\Omega$.*

**Teorema 4.23** (Existência de Conjugados Harmônicos). *Se $u$ é harmônica em um domínio simplesmente conexo $D$, então existe uma função analítica em $D$ cuja parte real é igual a $u$.*

*Demonstração.* Considere $g(z) = u_x(z) - iu_y(z) := U(z) + iV(z)$, $z \in D$. Pela Proposição 4.20 temos que $g$ é analítica. Fixamos um ponto qualquer $z_0 \in D$ e definimos

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} g(\xi)d\xi$$

Como a função $g(z)$ é analítica em um domínio simplesmente conexo, temos pelo Teorema de Morera[3] e suas consequências[4] ((7), Teorema 8.14, Corolário 8.15) que a função $F(z)$ está bem definida e é analítica em $D$ com

$$F(z) = g(z) = u_x(z) - iu_y(z) = \frac{\partial}{\partial x} ReF(z) - i\frac{\partial}{\partial y} ReF(z)$$

Assim, $u(z)$ e $ReF(z)$ têm as mesmas derivadas parciais de primeira ordem em $D$, de modo que

$$ReF(z) = u(z) + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante real.}$$

Portanto, a função

$$f(z) = F(z) - c = \int_{z_0}^{z} (u_x(\xi) - iu_y(\xi)) \quad d\xi - c$$

é analítica em $D$ com $Ref(z) = u(z)$. □

**Observação 8.** *Toda função harmônica definida em uma região possui um conjugado harmônico localmente. Suponha que $u$ seja harmônica em uma região $\Omega$ e seja $z_0 \in \Omega$. Como $\Omega$ é aberto, podemos encontrar um disco aberto $B_r(z_0)$ em $\Omega$. Como $B_r(z_0)$ é simplesmente conexo, $u$ tem um conjugado harmônico em $B_r(z_0)$. Assim, a função harmônica tem um conjugado harmônico local em $\Omega$.(7)*

**Exemplo 4.24.** *Seja $u(x, y) = x^2 - y^2$. Vimos que ela é harmônica em $\mathbb{R}^2$. Logo $u$ é a parte real de uma função inteira, e uma conjugada harmônica de $u$ é $v(x, y) = 2xy$.*

### 4.3.1 Ortogonalidade das curvas de nível

Suponha que duas curvas regulares $C_1$ e $C_2$ se encontram no ponto $A$. As curvas são ortogonais se suas respectivas retas tangentes (quando existem) $L_1$ e $L_2$ (em $A$) são ortogonais. Também dizemos que $C_1$ e $C_2$ se cruzam em ângulo reto em $A$. Lembre-se de que se $m_1$ e $m_2$ denotam as respectivas inclinações das retas tangentes e se nenhuma delas é zero, então $L_1$ e $L_2$ são ortogonais se, e somente se,

$$m_1 m_2 = -1 \tag{4.14}$$

Diz-se que duas famílias de curvas são ortogonais se cada curva de uma família cruzar as curvas da outra família em ângulo reto.

Considere as curvas de nível de uma função harmônica $u$ em um domínio $\Omega$. Estas são as curvas determinadas pela relação implícita

$$u(x, y) = C_1 \tag{4.15}$$

[3] Teorema (Morera): Seja $f(z)$ uma função contínua num domínio $D$. Se $\oint_C f(z)\, dz = 0$ para toda curva fechada simples em $D$, então $f(z)$ é analítica em $D$

[4] Corolário: Seja $f(z)$ analítica num domínio simplesmente conexo $D$, e seja $z_0$ um ponto qualquer de $D$. Então a função $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw$ é analítica em $D$.

onde $C_1$ é uma constante. Como $u$ é harmônica, ela tem derivadas parciais contínuas. Supondo que localmente podemos escrever $y = y(x)$, e diferenciando ambos os lados de (4.15) em relação a $x$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{4.16}$$

Mas $\frac{dx}{dx} = 1$, então se $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ podemos resolver para $\frac{dy}{dx}$ e chegamos em

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{4.17}$$

Isso fornece a inclinação da reta tangente em um ponto em uma curva de nível. Agora suponha que podemos encontrar um conjugado harmônico $v$ de $u$ $\Omega$ e vamos considerar as curvas de nível

$$v(x, y) = C_2 \tag{4.18}$$

onde $C_2$ é uma constante. Como $v$ também é harmônica, por um desenvolvimento análogo ao feito para $u$ , descobrimos que a inclinação da reta tangente em um ponto de uma curva de nível é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \tag{4.19}$$

Pelas equações de Cauchy-Riemann temos que $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ Comparando (4.17) e (4.19), vemos que as inclinações das retas tangentes satisfazem a relação de ortogonalidade (4.14) e, portanto, as curvas de nível de $u$ são ortogonais as curvas de nível de $v$.

Temos assim o seguinte resultado:

**Teorema 4.25** (Ortogonalidade das curvas de nível). *Suponha que $u$ seja uma função harmônica em uma região $\Omega$ e seja $v$ um conjugado harmônico de $u$ $\Omega$, de modo que $f = u + iv$ é analítico em $\Omega$. Então, as duas famílias de curvas de nível, $u(x, y) = C_1$ e $v(x, y) = C_2$, são ortogonais em todos os pontos $z = x + iy$ para os quais $f\ (z) = 0$.*

**Exemplo 4.26.** *Seja $f(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$ uma função analítica, onde $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Queremos provar que as famílias de curvas de níveis $u(x, y) = C_1$ e $v(x, y) = C_2$ são ortogonais. Sabemos que as inclinações das retas tangentes de $u$ e $v$ são respectivamente*

$$m_1 = \frac{\frac{-\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

$$m_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{-2y}{2x} = \frac{-y}{x}$$

*Assim,*

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{-y}{x} = -1$$

*Logo, $C_1$ e $C_2$ são ortogonais.*

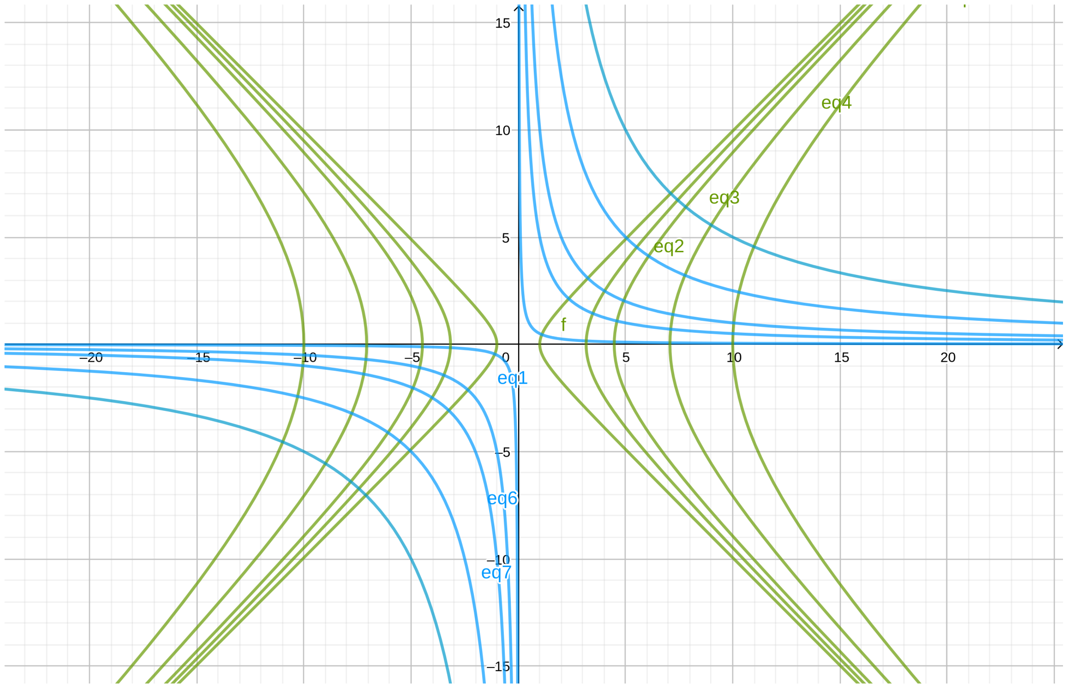


Figura 1 – Ortogonalidade das Curvas de Nível

Em verde estão as curvas de nível de $u$ e em azul as de $v$.

## 4.4 Relações entre resultados de Funções Harmônicas e Funções Analíticas

Nesta seção veremos alguns resultados da Teoria de Funções Harmônicas aplicados à Teoria de Funções Analíticas. Na seção anterior vimos que toda função analítica tem associada duas funções harmônicas, suas partes real e imaginária. E provamos também que toda função harmônica em um domínio simplesmente conexo é a parte real (ou imaginária) de uma função analítica. Devido a esta relação podemos obter algumas propriedades das funções analíticas a partir de resultados das funções harmônicas. Porém, vale destacar que a teoria das funções analíticas é mais forte, no sentido de que uma função analítica não é apenas uma função com parte real e imaginária harmônicas, pois essas partes tem uma forte relação entre si (Equações de Cauchy-Riemann). Isso significa que só alguns resultados podem ser obtidos como consequência das propriedades das harmônicas.

**Teorema 4.27.** *Seja $f = u + iv$ analítica num aberto $\Omega$ C com $u$ e $v$ de classe $C^2$ em $\Omega$. Então $f$ tem derivadas de todas as ordens em $\Omega$.*

*Demonstração.* Como $f = u + iv$ é diferenciável em $\Omega$ segue que $f = u_x + iv_x$. Como $f$ é analítica e $u$ e $v$ são de classe $C^2$, pelo Teorema (4.15) temos que $u$ e $v$ são harmônicas em $\Omega$ $\mathbb{R}^2$, e por (2.1) segue que $u_x$ e $v_x$ também são harmônicas, e tem derivadas de todas as ordens. Por outro lado, temos que $u_x$ e $v_x$ satisfazem as Equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Assim, segue que $f$ é analítica em $\Omega$. Continuando este precedimento, segue que $f$ tem derivadas de todas as ordens. □

**Teorema 4.28** (Liouville para Funções Analíticas ). *Seja $f = u + iv$ uma função complexa inteira e limitada. Então $f$ é constante.*

*Demonstração.* Como $f$ é limitada e $|u|, |v| \leq |f|$, segue que $u$ e $v$ são limitadas. Como $u$ e $v$ são harmônicas e limitadas em todo $\mathbb{R}^2$, segue do Teorema de Liouville para funções harmônicas que são contantes. Logo $f$ é constante. □

O Teorema de Liouville para funções analíticas implica o Teorema de Liouville para funções harmônicas. De fato, seja $u$ harmônica em $\mathbb{R}^2$ limitada, e seja $f$ uma função inteira com parte real $u$. Seja $g(z) = \exp(f(z))$. Como $f$ é inteira, segue que $g(z)$ é inteira. Temos que o módulo de $g(z)$ é $|g(z)| = \exp(u(z))$. Logo $g$ é também limitada. Logo é constante, e portanto $u$ é constante.

**Teorema 4.29** (Propriedade de valor médio de Gauss). *Seja $f = u + iv$ uma função analítica em uma região $\Omega$. Então $f$ satisfaz a propriedade de valor médio no seguinte sentido: Se $z \in \Omega$ e o disco fechado $B_r(z)$ ($r > 0$) estiver contido em $\Omega$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt$$

*Demonstração.* Como $f$ é analítica, $u$ e $v$ são funções harmônicas, e portanto, satisfazem a Propriedade do Valor Médio. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta \\
&\quad + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r} u(s)\, ds + i\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r} v(s)\, ds \\
&= u(x, y) + iv(x, y) \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

□

Veremos agora que o Teorema do Módulo Máximo de funções analíticas implica o Princípio do Máximo Forte para funções harmônicas.

**Teorema 4.30** (Princípio do Máximo Forte). *Suponha que $u$ é uma função harmônica em uma região $\Omega$. Se $u$ atingir um máximo ou um mínimo em $\Omega$, então $u$ é constante em $\Omega$.*

*Demonstração.* Seja $z_0 = (x_0, y_0)$ $\quad \Omega$ um ponto de máximo de $u$. Defina a função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ no domínio $B_r(z_0)$ para algum $r > 0$. Seja $g(z) = e^{f(z)}$, cujo módulo é $|g(z)| = e^{u(x,y)}$. Como $(x_0, y_0)$ é um máximo de $u$ nesta vizinhança, então $z_0$ é um máximo da função $g(z)$. Pelo Teorema do Módulo Máximo[5] ((7), Teorema 8.58), segue $g(z)$ é constante em $B_r(z_0)$. Portanto $u$ é constante em $B_r(z_0)$. Logo, $u$ é contante em $\Omega$. □

**Corolário 4.31.** *Seja $u$ harmônica em $\Omega$ e contínua em $\overline{\Omega}$. Então valem as seguintes afirmações:*

*(i) $u$ atinge seu máximo $M$ e mínimo $m$ na fronteira de $\Omega$;*

*(ii) $u$ é constante ou $m < u < M$ para todos os pontos em $\Omega$.*

**Corolário 4.32.** *Seja $u$ harmônica em $\Omega$ e contínua em $\overline{\Omega}$. Se $u$ é constante na fronteira de $\Omega$, então $u$ é constante em $\Omega$.*

**Corolário 4.33.** *Suponha que $\Omega$ é uma região delimitada e $u_1$ e $u_2$ são harmônicas em $\Omega$ e contínuas na fronteia de $\Omega$. Se $u_1 = u_2$ na fronteira de $\Omega$, então $u_1 = u_2$ em $\Omega$.*

[5] Teorema do Módulo Máximo: Seja $f(z)$ analítica num domínio $D$. Então $|f(z)|$ não pode atingir seu máximo em $D$, a menos que $f(z)$ seja contante.

# 5 Fórmula de Poisson em $\mathbb{R}^2$

Como a condição de ser harmônica é invariante por rotações, é interessante e útil estudar a equação de Laplace num círculo. Neste capítulo vamos a considerar o seguinte problema de Dirichlet num disco de $\mathrm{R}^2$:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \qquad & \Omega = \{(x, y) \quad \mathrm{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < a\} \\ u = h(\theta), \qquad & \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = a\} \quad [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Estamos considerando $\theta$ no intervalo $[0, 2\pi]$ como a parametrização usual de um círculo centrado na origem.

Para resolver este problema, utilizaremos o método de separação de variáveis. Devido a condição na fronteira que só depende do ângulo, vamos considerar as coordenadas polares. Assim, vamos supor que $u = R(r)\Phi(\theta)$, onde $R$ depende só da coordenada radial, e $\Phi$ só depende do ângulo. Portanto, seguindo o desenvolvido na subseção 2.1.1, a equação de Laplace a resolver é:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) u \\ &= \frac{\partial^2 R(r)\Phi(\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r)\Phi(\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R(r)\Phi(\theta)}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{d^2R}{dr^2}\Phi + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Phi + \frac{1}{r^2}R\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

Dividindo por $R\Phi$ e multiplicando por $r^2$, obtemos as seguintes EDOs:

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \lambda\Phi = 0 \tag{5.2}$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0. \tag{5.3}$$

A condição de contorno nos diz que a função $\Phi$ tem que ser periódica

$$\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta), \text{ para } -\infty < \theta < \infty.$$

Da Teoria de EDO, sabemos que a solução de (5.2) é da forma

$$\Phi(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde $\lambda = n^2$. Temos também a solução $\lambda = 0$ com $\Phi(\theta) = A$.

A Equação para $R$ (5.3) é do tipo Euler, e suas soluções são da forma $R(r) = r^\alpha$. Como $\lambda = n^2$, temos que

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

com $\alpha = \pm n$. Assim, $R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$ e temos

$$u = \left( Cr^n + \frac{D}{r^n} \right) (A \cos n\theta + B \sin n\theta), \text{ para } n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{5.4}$$

Quando $n = 0$, temos também que $R(r) = \log r$ é solução de (5.3), e é linearmente independente com a solução $R = \text{cte}$. Assim também temos soluções

$$u = C + D \log r. \tag{5.5}$$

Notar que os termos $r^{-n}$ e $\log r$ não estão definidas para $r = 0$, e assim são descartadas. As soluções restantes (5.4) e (5.5) são funções harmônicas no disco $D$, portanto fazemos sua soma, e assim temos

$$u = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

As condição de contorno $r = a$ implica que a série acima seja da forma

$$h(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{5.6}$$

Note que esta é a série Fourier para a função $h(\theta)$, e portanto sabemos que os coeficientes são

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \tag{5.7}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi \tag{5.8}$$

As equações (5.7) e (5.8) constituem a solução completa do nosso problema.

**Teorema 5.1** (Fórmula de Poisson). *A solução do problema de Dirichlet (5.1) é dada por*

$$u(r, \theta) = (a^2 - r^2) \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi) + r^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \tag{5.9}$$

*Demonstração.* Calculemos a soma explícita da série (5.6). De fato, substituindo (5.7) e (5.8) em (5.6), temos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi)(\cos n\varphi \cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta) \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} h(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \varphi) \right\} \frac{d\varphi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Escrevendo o termo entre chaves como uma série geométrica de números complexos, temos

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n e^{in(\theta - \varphi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n e^{-in(\theta - \varphi)} \\ &= 1 + \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{a - re^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{a - re^{-i(\theta-\varphi)}} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi) + r^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(r,\theta) = (a^2 - r^2)\int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi) + r^2}\frac{d\varphi}{2\pi}$$

□

A fórmula (5.9) é denominada **Fórmula de Poisson**, e ela expressa qualquer função harmônica dentro de um círculo em termos de suas valores de fronteira.

Interpretação Geométrica da Fórmula de Poisson.

Seja $\mathrm{x} = (x, y)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas polares $(r, \theta)$. Seja $\mathrm{x}' = (a, \varphi)$ um ponto na fronteira. A origem e os pontos $\mathrm{x}$ e $\mathrm{x}'$ formam um triângulo com lados $r = |\mathrm{x}|$, $a = |\mathrm{x}'|$ e $|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|$ (Figura 2).

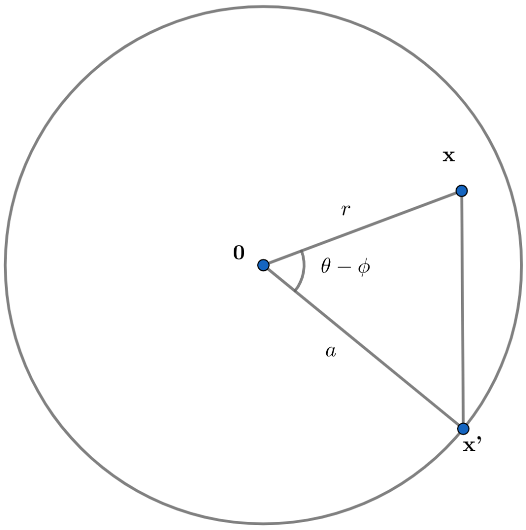


Figura 2 – Problema de Dirichlet no Círculo

Usando a Lei dos Cossenos, segue que

$$|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi).$$

Note que o elemento comprimento de arco da circunferência é $ds' = a\,d\varphi$. Assim a Fórmula de Poisson pode ser reescrita como

$$u(\mathrm{x}) = \frac{a^2 - |\mathrm{x}|^2}{2\pi a}\int_{|\mathrm{x}'|=a} \frac{u(\mathrm{x}')}{|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^2}\,ds' \tag{5.10}$$

para $x \in D$, onde escrevemos $u(\mathrm{x}') = h(\varphi)$.

**Teorema 5.2.** *Seja $h(\varphi) = u(\mathbf{x})$ qualquer função contínua no círculo $C = \partial D$. Então a Fórmula de Poisson fornece a única função harmônica em $D$ para a qual*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = h(x_0), \quad x_0 \in C.$$

*Isto significa que $u(x)$ é uma função contínua em $\overline{D} = D \cup C$ (8).*

## 5.1 Retângulo

Vamos terminar este capítulo calculando de forma explícita a solução do Problema de Dirichlet num retângulo em $\mathbb{R}^2$.

Considere a equação diferencial

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ em } D \tag{5.11}$$

onde $D$ é o retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, com as seguintes condições de contorno: $u = g(x)$ em $y = b$, e 0 em $y = 0$, $x = 0$ e $x = a$.

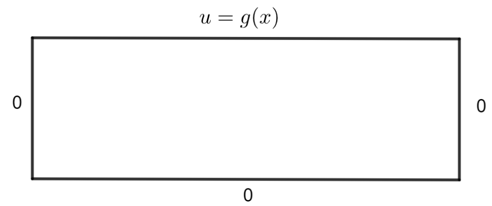


Figura 3 – Problema de Dirichlet no Retângulo

Usando o método de separação de variáveis, escrevemos $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$. Assim temos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

Logo, como cada lado depende de variáveis distintas, então cada lado deve ser constante. Assim, existe uma constante $\lambda$ tal que $X'' + \lambda X = 0$, com $0 \leq x \leq a$ e $Y'' - \lambda Y = 0$, com $0 \leq y \leq b$. Portanto, $X(x)$ satisfaz $X(0) = X'(a) = 0$. As soluções são da forma

$$\beta_n^2 = \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5.12}$$

$$X_n(x) = \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x}{a} \tag{5.13}$$

Em relação à função $Y$ temos que

$$Y'' - \lambda Y = 0, \text{ com } Y'(0) + Y(0) = 0$$

Sabemos que $= \lambda_n > 0$, para algum $n$. As soluções da equação para $Y$ são da forma

$$Y(y) = A \cosh \beta_n y + B \sinh \beta_n y$$

Então, $0 = Y'(0) + Y(0) = B\beta_n + A$. Podemos considerar, $B = -1$, e assim $A = \beta_n$. Daí,

$$Y(y) = \beta_n \cosh \beta_b y - \sinh \beta_n y \tag{5.14}$$

Como estamos em um retângulo, temos que esta função é limitada. Portanto, o somatório

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \beta_n x(\beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y) \tag{5.15}$$

é uma função harmônica em $D$ que satisfaz três das condições de contorno. Para a condição de contorno $u(x, b) = g(x)$, escrevemos

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b) \cdot \sin \beta_n x \tag{5.16}$$

para $0 < x < a$. Note que esta série é uma série de Fourier nas funções $\sin \beta_n x$.

Portanto, os coeficientes são dados por:

$$A_n = \frac{2}{a} (\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b)^{-1} \int_0^a g(x) \sin \beta_n x \, dx. \tag{5.17}$$

# 6 Considerações finais

Com este trabalho percebemos a importância das funções harmônicas, compreendemos porque elas são tão especiais. Obtivemos uma equivalência para a definição de funções harmônicas via a Propriedade do Valor Médio (Teorema 3.6), a partir da qual seguem várias consequências que limitam o comportamento das funções harmônicas, como por exemplo, que não pode ter zeros isolados.

Obtivemos também o Princípio do Máximo, que nos diz que as funções harmônicas não constantes não podem atingir seu máximo ou mínimo no interior de seu domínio, restringindo assim nossa busca à fronteira do domínio (quando existir). Vimos que estes resultados implicam na unicidade das soluções do problema de Dirichlet sobre domínios limitados. Conseguimos também com este trabalho fazer uma ponte entre as funções harmônicas e as funções analíticas, já que vimos que toda função analítica induz duas funções harmônicas, e assim podemos utilizar as propriedades das funções harmônicas na teoria de funções analíticas.

Finalmente, conseguimos obter a Fórmula de Poisson em $R^2$, como a forma geral de soluções do Problema de Dirichlet num disco no plano real.

# Referências

1 IÓRIO, V. d. M. *EDP,um curso de graduação*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. Citado na página 1.

2 AXLER, S.; BOURDON, P.; RAMEY, W. *Harmonic Function Theory*. San Francisco: Springer, 2001. Citado na página 8.

3 PINCHOVER, Y.; RUBINSTEIN, J. *An Introduction to Partial Di erencial Equations*. New York: Cambridge, 2005. Citado na página 10.

4 CVETKOVIĆ, D.; HAN, Q.; LIN, F. *Elliptic Partial Di erencial Equations*. New York: AMS, 1997. Citado na página 14.

5 ASMAR, N. H.; GRAFAKOS, L. *Complex Analysis with Applications*. San Francisco: Springer, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 21, 23, 26 e 28.

6 ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Massachusetts: Jones and Bartlett, 2003. Citado na página 23.

7 PONNUSAMY, S.; SILVERMAN, H. *Complex Variables with Applications*. Boston: Birkhäuser, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 34.

8 STRAUSS, W. A. *Partial Di erential Equations an Introduction*. New York: John Wiley Sons, 2008. Citado na página 38.

9 EVANS, L. C. *Partial Di erential Equations*. New York: AMS, 1998. Citado na página 43.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Teoremas de Green-Gauss

Neste apêndice lembraremos os Teoremas de Integração de Green-Gauss em $\mathbb{R}^n$. Para isso, fixemos primeiro as notações. Durante toda esta seção $U$ denotará um aberto limitado e orientável de $\mathbb{R}^n$, tal que $\partial U$ seja de classe $C^1$. Vamos a denotar por $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ o **vetor unitário normal** definido ao longo de $\partial U$, e assim denotamos $u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

**Teorema A.1** (Teorema de Green - Gauss). *Seja $u : U \to \mathbb{R}$ uma função $C^1(\overline{U})$. Então*

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dA = \int_{\partial U} u\nu_i \, dS, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

**Observação 9.** *A prova deste Teorema é longa e técnica, e está além dos temas deste trabalho, pelo que não será incluída.(9)*

**Corolário A.2** (Teorema de Green). *Considere uma região limitada $R$ de $\mathbb{R}^2$, e seja $C = \partial R$. Sejam $P, Q : R \to \mathbb{R}$ duas funções de classe $C^1(\overline{R})$. Parametrizemos $C$ com orientação positiva. Então temos pelo Teorema (A.1) que*

$$\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA = \int_C Q\nu_x \, dS \tag{A.1}$$

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_C P\nu_y \, dS. \tag{A.2}$$

*A curva $C$ está orientada positivamente, então se $(\nu_x, \nu_y)$ é o vetor normal unitário exterior, o vetor $(-\nu_y, \nu_x)$ é o vetor velocidade unitário da curva. Assim, subtraindo as Equações (A.1) e (A.2) temos*

$$\begin{aligned}
\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA &= \int_C Q\nu_x - P\nu_y \, dS \\
&= \int_C (Q, P) \cdot (\nu_x, -\nu_y)\, dS \\
&= \int_C (Q, P) \cdot (dy, dx)\, dS \\
&= \int_C Pdx + Qdy \, dS.
\end{aligned}$$

*Logo, obtemos o* **Teorema de Green em** $\mathbb{R}^2$.

**Corolário A.3** (Teorema da Divergência). *Considere um campo vetorial $F : U \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $C^1(\overline{C})$. Aplicando o Teorema (A.1) a cada função coordenada de $F$ temos*

$$\int_U \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dA = \int_{\partial U} f_i \nu_i \, dS, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

*Assim, somando sobre $i$ temos*

$$\int_U div(F)\, dx = \int_{\partial U} F \cdot \nu \, dS,$$

*o que nos dá o* **Teorema da Divergência em** $\mathbb{R}^3$.

**Teorema A.4** (Fórmula Integração por partes). *Sejam $u, v \in C^1(\overline{U})$, então*

$$\int_U v\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dA = -\int_U u\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dA + \int_{\partial U} uv\nu_i\, dS. \tag{A.3}$$

*Demonstração.* Aplicar o Teorema (A.1) à função $uv$. □

**Teorema A.5** (Fórmulas de Green). *Sejam $u, v \in C^2(\overline{U})$. Então*

*i)* $\displaystyle\int_U \Delta u\, dA = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS.$

*ii)* $\displaystyle\int_U \nabla u \cdot \nabla v = -\int_U u\Delta v\, dA + \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS.$

*iii)* $\displaystyle\int_U u\Delta v - v\Delta u\, dA = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS.$

*Demonstração.* Usando o Teorema (A.4) aplicado à função $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e à função constante 1, temos

$$\int_U \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, dA = \int_{\partial U} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dS.$$

Somando sobre $i = 1, \ldots, n$, segue $i$). Para obter $ii$), aplicamos o Teorema (A.4) com $v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Finalmente, aplicando $ii$) intercalando $u$ e $v$, e logo subtraindo, segue $iii$). □

# APÊNDICE B – Convolução

Neste apêndice lembraremos alguns resultados sobre convolução que foram usados neste trabalho.

Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $\epsilon > 0$, podemos escrever $U_\epsilon = \{x \in U; \operatorname{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$

**Definição B.1.** $(i)$ Defina $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})^n$ por:

$$\eta := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

a constante $C > 0$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

$(ii)$ Para cada $\epsilon > 0$, tome

$$\eta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Chamamos $\eta$ de *mollifier*[6]. As funções $\eta_\epsilon$ são de classe $C^\infty$ e satisfazem:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1, \quad suporte(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$$

**Definição B.2.** Se $f : U \to \mathbb{R}$ é localmente integrável então sua molificação é dada por

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f, \quad \text{em} \quad U_\epsilon$$

Isto é,

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)dy$$

para $x \in U_\epsilon$.

**Teorema B.3** (Propriedade dos *Mollifiers*). $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

*Demonstração.* Fixe $x \in U_\epsilon$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $h$ tão pequeno tal que $x + he_i \in U_\epsilon$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x+he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\, dy \end{aligned}$$

---

6 Em matemática, *mollifiers* são funções suaves com propriedades especiais, usadas por exemplo na teoria da distribuição para criar sequências de funções suaves aproximando funções não suaves, via convolução. Intuitivamente, dada uma função que é bastante irregular, ao convoluí-la com um *mollifier* a função fica "amolecida", isto é, suas características agudas são suavizadas, enquanto ainda permanece perto da função não suave original. (Texto do Wikipedia)

para algum conjunto aberto $V \subset \overline{V} \subset U$. Como

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

uniformemente em $V$, então $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe e é igual a

$$\int_U \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x-y)f(y)\,dy$$

Usando um argumento similar a este, provamos que $D^\alpha f(x)$ existe e

$$D^\alpha f(x) = \int_U D^\alpha \eta(x-y)f(y)\,dy \quad (x \in U)$$

para cada índice $\alpha$. Provando assim o teorema. $\square$