Patrick dos Santos Alves

Teorema Espectral

Volta Redonda, RJ

2021

Patrick dos Santos Alves

Teorema Espectral

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática com ênfase em Matemática Computacional da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Curso de Matemática

Orientador: Leandro Gines Egea

Volta Redonda, RJ

2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BAVR
Gerada com informações fornecidas pelo autor

A474t Alves, Patrick dos Santos
Teorema Espectral / Patrick dos Santos Alves ; Leandro Gines Egea, orientador. Volta Redonda, 2021.
50 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, 2021.

1. Espaços de Hilbert. 2. Teorema Espectral. 3. Problema de Dirichlet. 4. Produção intelectual. I. Egea, Leandro Gines, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Ciências Exatas. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Patrick dos Santos Alves

Teorema Espectral

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática com ênfase em Matemática Computacional da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Volta Redonda, RJ, 03 de maio de 2021:

Prof. Dr. Leandro Gines Egea – UFF
Orientador

Prof. Dr. Alan Prata de Paula – UFF

Prof. Dr. Alessandro Gaio Chimenton – UFF

Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando – UFF

Volta Redonda, RJ
2021

A minha família.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus por ter me dado forças e me capacitado em todo o tempo de estudo na graduação. Tenho total convicção que Ele me capacitou para poder conseguir concluir cada matéria, superar cada barreira que aparecia e me animar nos dias em que não tinha vontade de continuar.

Sou grato também a meus pais, Cleveci Alves e Débora dos Santos Alves, e minha irmã Amanda dos Santos Alves por terem investido em mim, sendo com carinho, orientando e acreditando no meu potencial.

Aos meus amigos, Guylherme Barros, Guilherme Saroka, João Pedro Vasconcellos, Joel Marques, Mariana Macedo, Nelson Assis, Rayan Gustavo e Taís Carvalho por terem feito parte de todo meu trajeto acadêmico e auxiliado no meu desenvolvimento, pelos momentos jogando UNO no corredor, pela união e companheirismo.

Ao meu orientador, Leandro Egea, por ter me acolhido como orientando, mesmo em dias difíceis de pandemia, por ter sido bem paciente ao tentar saciar minhas dúvidas e por toda a dedicação que teve me auxiliando em todo o desenvolvimento deste trabalho.

"E tudo o que pedirem em oração,
se crerem, vocês receberão."
(Bíblia Sagrada, Mateus 21, 22)

Resumo

Neste trabalho estudaremos o Teorema Espectral para operadores compactos em espaços de Hilbert. Este teorema permite decompor certos tipos de operadores como soma direta de projeções ortogonais, parametrizadas pelo espectro do operador. Em outras palavras, o Teorema Espectral caracteriza os operadores diagonalizáveis por operadores auto-adjuntos. Mostraremos também uma aplicação deste teorema a Equações Diferenciais Parciais. O Teorema Espectral em espaços de Hilbert é uma generalização do Teorema Espectral em dimensão finita.

Palavras-chave: Espaços de Hilbert. Teorema Espectral. Problema de Dirichlet.

Abstract

In this work we will study the Spectral Theorem for compact operators in Hilbert spaces. This theorem allows to decompose certain types of operators as a direct sum of orthogonal projections, parameterized by the operator's spectrum. In other words, the Spectral Theorem characterize the diagonalizable operators by self-adjoint operators. We will also show an application of this theorem to Partial Differential Equations. The Spectral Theorem in Hilbert spaces is a generalization of the Spectral Theorem for a finite dimensional inner product space.

Keywords: Hilbert spaces. Spectral Theorem. Dirichlet's problem.

Lista de símbolos

$L(X,Y)$	Espaço vetorial das transformações lineares de X em Y
$L(X)$	Espaço vetorial das transformações lineares de X em X
$B(X,Y)$	Espaço vetorial das transformações lineares contínuas de X em Y
$B(X)$	Espaço vetorial das transformações lineares contínuas de X em X
$K(X,Y)$	Espaço vetorial das transformações lineares compactas de X em Y
$K(H)$	Espaço vetorial das transformações lineares compactas de H em H
Δ	Operador Laplaciano
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω
$C(\Omega)$	Espaço das funções contínuas definidas de Ω para $\mathbb{R}$
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto definidas de Ω para $\mathbb{R}$
$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis

Sumário

1 Introdução

Uma das formas mais simples de enunciar o Teorema Espectral em dimensão finita é que toda matriz simétrica com entradas reais é ortogonalmente semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, $A = P^{-1}DP$ onde D é uma matriz diagonal formada por todos os autovalores de A, e P é ortogonal, cujas colunas são os autovetores de A. Em termos de operadores, o Teorema Espectral diz que um operador linear simétrico é diagonalizável e que o espaço vetorial admite uma base ortonormal de autovetores. O Teorema Espectral para matrizes simétricas reais foi provado por Cauchy em 1826, e estendido para o caso complexo por Hermite em 1855. Uma consequência direta do Teorema Espectral é o Teorema dos Eixos Principais que diz que toda forma quadrática pode ser reescrita sem os termos mistos. Essa aplicação é importante para classificação de formas quadráticas.

Uma pergunta sobre o estudo da Teoria Espectral é: Um operador linear em espaço de dimensão infinita também apresenta uma forma "diagonal"?

Neste trabalho nosso objetivo é generalizar o Teorema Espectral para operados em espaços de dimensão infinita. Para isso iremos trabalhar em espaços de Hilbert e veremos em que condições é possível obter uma forma "diagonal" para este tipo de operador.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, introduziremos Espaços Normados e Espaços de Hilbert, com suas propriedades. No Capítulo 3, serão estudados operadores em espaços de Hilbert, tais como operadores adjuntos e normais. O Teorema Espectral será apresentado no Capítulo 4, junto com o estudo dos operadores compactos. No Capítulo 5, trataremos uma Equação Diferencial Parcial (Problema de Dirichlet) sob o ponto de vista da Teoria Espectral.

2 Espaços de Hilbert

Neste capítulo revisaremos algumas propriedades de espaços vetoriais, todo o desenvolvimento será em um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Esses conceitos nos auxiliarão no estudo do cerne deste trabalho, os espaços de Hilbert. Nestes espaços a norma é induzida por um produto interno, isso nos permite ter uma ideia da estrutura geométrica que é similar ao espaço euclidiano n-dimensional.

O estudo dos espaços de Hilbert requerem alguns conceitos topológicos que serão objetivo do início deste capítulo. Como nosso interesse é utilizar uma teoria mais geral, será necessário apresentar noções de espaços vetoriais e convergência.

2.1 Espaços Normados

Definição 2.1. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Chamamos de Espaço Normado um par $(X, \|\cdot\|)$ de um espaço vetorial X e uma norma $\|\cdot\|$ em X. Neste capítulo adotaremos a notação $(X, \|\cdot\|)$ para nos referirmos a um espaço vetorial normado. Seja $x \in X$. Dizemos que x é unitário se $\|x\| = 1$.

Exemplo 2.2. *A função $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por:*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

é a norma usual de $\mathbb{K}^n$.
Sejam $x, y \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,então

(i) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(|\alpha x_i|)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|$;

(iv)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i|^2+|y_i|^2+2|x_iy_i|) \\
&\leq \|x\|^2+\|y\|^2+2\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\|+\|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. *Seja $C([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ com valores em $\mathbb{R}$. Então a função $\|\cdot\| : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\|f\| = \max\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$$

é a norma em $C([0,1])$. De fato, sejam $f, g \in C([0,1])$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $\|f\| = \max\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\} \geq 0$;

(ii) $\|f\| = \max\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\} = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0\ \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f(x) = 0\ \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f \equiv 0$.

(iii) $\|\alpha f\| = \max\{|\alpha f(x)|;\ x \in [0,1]\} = |\alpha| \max\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\} = |\alpha|\|f\|$

(iv) Seja $x \in [0,1]$. Então:

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Para trabalharmos em espaços de dimensão infinita será necessário algumas noções topológicas, uma delas é olhar um espaço normado como um espaço métrico em que a métrica utilizada é a norma do espaço. Alguns conceitos de espaços métricos e topologia foram estudados em [1]. As seguintes definições serão necessários para falarmos de convergência em espaços de normados.

Definição 2.4. Seja V um espaço vetorial. Uma sequência em V é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to V$ de modo que o elemento $x(n)$ será denotado por x_n e (x_n) representará a sequência $(x_1, \cdots, x_n, \cdots)$.

Definição 2.5. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e (x_n) uma sequência em X. Dizemos que x_n converge para x se:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Podemos escrever também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Teorema 2.6. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, (x_n) e (y_n) sequências em X que convergem para $x, y \in X$ respectivamente e (α_n) uma sequência em $\mathbb{K}$ a qual converge para $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (x + y)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = \alpha x$;

Demonstração. (a) Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

(b) Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, temos que

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando limite na desigualdade segue que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

(c) Como (α_n) é convergente, ela é limitada. Então existe $K > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n (x_n - x) + (\alpha_n - \alpha) x\| \\ &\leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \\ &\leq K \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

$\square$

Definição 2.7. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e (x_n) uma sequência em X. Dizemos que (x_n) é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

Se toda sequência de Cauchy em um espaço X converge para algum ponto do espaço então X é um espaço normado completo.

Definição 2.8. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial X são equivalentes se existem $A, B > 0$ de forma que

$$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Exemplo 2.9. *Abaixo listaremos algumas normas mais conhecidas em $\mathbb{R}^n$.*

- $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *(norma usual);*
- $\|x\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *(norma da soma);*
- $\|x\|_M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$ *(norma do máximo).*

O Teorema 2.10 nos diz que as normas vistas acima são equivalentes em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.10 (Teorema 1.7 [2].)**.** *Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são duas normas em um espaço normado de dimensão finita então elas são equivalentes.*

Corolário 2.11 (Corolário 1.8 [2])**.** *Se $\|\cdot\|$ é alguma norma em um espaço de dimensão finita X, então este é um espaço normado completo.*

Definição 2.12. Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado e completo.

Para o estudo dos espaços abaixo é necessário um conhecimento mais aprofundado em Teoria da Medida, como este não é nosso foco principal comentaremos um pouco sobre os espaços L^p por terem grande importância quando querermos falar de um espaço de funções. Mais detalhes sobre estes espaços podem ser encontrados em [3] e [4].

Exemplo 2.13. *Os seguintes exemplos são espaços de Banach. O espaço L^p é o conjunto das classes de equivalência de funções p-integráveis (quando $|f|^p$ é integrável) por Lebesgue e são iguais em quase todo ponto, ou seja, assumem o mesmo valor, exceto em um conjunto de medida nula. Listamos abaixo apenas os casos $p = 1$ e $p = 2$, pois serão os espaços de nosso interesse neste trabalho.*

- $L(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f| d\mu < \infty\}$
- $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty\}$

Estes espaços vetoriais são espaços de Banach com a norma p dada por:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja V o espaço das sequências com valores reais. Temos um outro espaço que também é de Banach e é dado por:

$$\ell^2 = \{(x_n) \in V; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

É o espaço das sequências ao qual a soma dos termos ao quadrado é convergente.

Lema 2.14 (Desigualdade de Hölder - Lema A.12 [4]). *Sejam f, g funções mensuráveis em Ω para $p, q \geq 1$ com $1/p + 1/q = 1$,*

$$\|fg\|_{L(\Omega)} \leq \|g\|_{L^p(\Omega)} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

A Desigualdade acima é uma generalização da desigualdade de Schwartz para funções contínuas com a norma usual do espaço das funções. Este último pode ser encontrado como exercício de Análise Real em [5].

Definição 2.15. Seja (x_n) uma sequência num espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Definimos a série de termos x_n sendo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definição 2.16. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Uma série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge para x se:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - x \right\| < \epsilon.$$

Denotamos de n-ésima soma parcial a parcela $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ e a série é absolutamente convergente se $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ converge.

Teorema 2.17. *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência convergente em X. Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge. Então a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ também converge.*

Demonstração. Tome $\epsilon > 0$. Seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ a n-ésima soma parcial da sequência. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge a sequência das somas parciais $\sum_{k=1}^{n} ||x_k||$ é Cauchy, assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=n+1}^{m} ||x_k|| < \epsilon$$

quando $m > n \geq n_0$. Logo, pela desigualdade triangular temos que

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||x_k|| < \epsilon.$$

Portanto, (s_n) é uma sequência de Cauchy em um espaço de Banach. Assim, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge. □

2.2 Espaços com Produto Interno

Definição 2.18. Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

(a) $\langle x, x \rangle \geq 0$;

(b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(c) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(d) $\langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle$;

(e) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Um par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado Espaço com Produto Interno.

Exemplo 2.19. *A função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$, é um produto interno em $\mathbb{K}^n$. Este produto interno é chamado de produto interno usual de $\mathbb{K}^n$.*
De fato,

(a) $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$;

(b) $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$;

(c) $\langle x + y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \overline{z_i} + y_i \overline{z_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i} = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(d) $\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) \overline{y_i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \alpha \langle x, y \rangle$;

(e) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i \overline{x_i}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}} = \overline{\langle y, x \rangle}$

Exemplo 2.20. *Se $f, g \in L^2(\Omega)$ então $f\overline{g} \in L^1(\Omega)$ e a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{K}$ definida por $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\overline{g} d\mu$ é um produto interno em $L^2(\Omega)$. Este produto interno é chamado de produto interno usual em $L^2(\Omega)$. Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$. Então, pela Desigualdade de Hölder, com $p = q = 2$ e a definição de $L^2(\Omega)$,*

$$\int_\Omega |f\overline{g}| d\mu \leq \Big(\int_\Omega |f|^2 d\mu \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |g|^2 d\mu \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

então $f\overline{g} \in L^1(\Omega)$ e a fórmula $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\overline{g} d\mu$ está bem definida. Agora vamos mostrar que a forma acima define um produto interno em $L^2(\Omega)$ verificando todas as propriedades. Usando as propriedades de integral teremos que:

(i) $\langle f, f\rangle = \int_\Omega |f|^2 d\mu \geq 0$;

(ii) $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f|^2 d\mu = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$;

(iii) $\langle f+g, h\rangle = \int_\Omega (f+g)\overline{h} d\mu = \int_\Omega f\overline{h} d\mu + \int_\Omega g\overline{h} d\mu = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$;

(iv) $\langle \alpha f, h\rangle = \int_\Omega \alpha f\overline{h} d\mu = \alpha \int_\Omega f\overline{h} d\mu = \alpha\langle f, h\rangle$;

(v) $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\overline{g} d\mu = \overline{\int_\Omega g\overline{f} d\mu} = \overline{\langle g, f\rangle}$.

Lema 2.21. *Sejam X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $x, y \in X$. Então:*

(a) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$;

(b) A função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, é uma norma em X.

Demonstração. (a) Se $x = 0$ ou $y = 0$ o resultado é verdadeiro.

Suponha ambos não nulos, então podemos tomar $\alpha = -\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}$ e teremos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle x, x\rangle + \alpha\langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \left|\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle}\right|^2 \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}\overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\
&= \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle \\
&= -\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Consequentemente, $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

(b) Tome $x \in X$ e note que são satisfeitas as seguintes propriedades:

(i) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\|x\|$;

(iv) Para a desigualdade triangular segue que:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

O item (a) do Lema 2.2 é conhecido como Desigualdade de Cauch-Schwartz. Já o item (b) nos diz que o produto interno induz uma norma (chamamos de norma induzida). A norma induzida será necessária quando introduzirmos espaços de Hilbert.

Teorema 2.22. *Sejam X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma induzida $\| \cdot \|$. Então, para todo $x, y \in X$:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &+ \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle -y, -y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

□

Um meio de mostrar que a norma de um espaço vetorial não é induzida por um produto interno é verificar que a lei do paralelogramo ou a identidade de polarização não é satisfeita.

Exemplo 2.23. *A norma usual do espaço $C([0,1])$ não é induzida por nenhum produto interno. Considere as funções $f, g \in C([0,1])$ dadas por $f(x) = 1$ e $g(x) = x$, $x \in [0,1]$. Pela definição da norma em $C([0,1])$ temos que:*

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= 4 + 1 = 5, \\ 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) &= 2(1+1) = 4. \end{aligned}$$

Como Teorema 2.22 não é satisfeito temos que a norma não pode ser induzida por um produto interno.

Definição 2.24. Seja X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que $x, y \in X$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Um conjunto $A \subset X$ é ortogonal se $\langle x, y \rangle = 0$ $\forall x, y \in A$ com $x \neq y$.

Definição 2.25. Sejam X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e A um subconjunto de X. O <u>complemento ortogonal</u> de A é o conjunto

$$A^{\perp} = \{x \in X; \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in A\}.$$

Lema 2.26. *Sejam X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A \subset X$ um subconjunto. Então:*

(a) $A^{\perp}$ *é subespaço vetorial de* X*;*

(b) Se $Y \subset A$ *então* $A^{\perp} \subset Y^{\perp}$*;*

(c) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$*.*

Demonstração.

(a) Sejam $x, y \in A^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Para qualquer $z \in A$ teremos que $\langle \alpha x + y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0$. Assim, $\alpha x + y \in A^{\perp}$.

(b) Seja $x \in A^{\perp}$ e $y \in Y$. Como $Y \subset A$ segue que $y \in A$. Logo, $0 = \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Portanto, $x \in Y^{\perp}$.

(c) Seja $x \in A$ e $y \in A^{\perp}$. Por definição temos que $0 = \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, como $y \in A^{\perp}$ segue que $x \in (A^{\perp})^{\perp}$.

□

2.3 Espaços de Hilbert

No estudo de espaços vetoriais com dimensão infinita é notável que muitas propriedades que validas em espaços vetoriais n-dimensionais não são preservadas. Nesta seção veremos que no caso dos espaços de Hilbert, mesmo a dimensão sendo qualquer ainda é possível manter muitos resultados desde que o espaço seja fechado.

Definição 2.27. Um espaço vetorial com produto interno $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é de Hilbert se é completo na norma induzida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Abaixo temos alguns espaços já mencionados que são de Hilbert.

Exemplo 2.28. *(a) Todo espaço de dimensão finita é um espaço de Hilbert;*

Segue do Corolário 2.11.

(b) $L^2(\Omega)$ *com o produto interno usual.*

Como $L^2(\Omega)$ *é completo. Basta mostrar que a norma do espaço é induzida, neste caso note que com o produto interno usual de* $L^2(\Omega)$ *temos que*

$$\langle f, f\rangle = \int_{\Omega} f\overline{f}d\mu = \int_{\Omega} |f|^2 d\mu$$

Logo, obtemos que

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 2.29. Um espaço de Hilbert H é dito separável se admite um subconjunto denso e enumerável em H, ou seja, existe $X \subset H$ enumerável tal que $H \subset \overline{X}$.

Proposição 2.30 (Proposição 3.25 [3])**.** *Sejam M um espaço normado separável e $F \subset M$ algum subconjunto. Então F também é separável.*

O seguinte Teorema nos diz sobre quais condições o espaço $L^p(\Omega)$ é separável.

Teorema 2.31 (Teorema 4.13 [3])**.** *Seja Ω um espaço de medida separável. Então $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.*

Lema 2.32. *Sejam H um espaço de Hilbert e $Y \subset H$ um subespaço vetorial. Então, Y é um espaço de Hilbert se e somente se Y é fechado em H.*

Demonstração. Por definição Y é um espaço de Hilbert se e só se é completo. Mas um subconjunto de um espaço normado completo é completo se e só se for fechado. $\square$

Lema 2.33 (Lema 3.30 [6])**.** *Seja Y um subespaço de um espaço com produto interno X. Então,*

$$x \in Y^{\perp} \Leftrightarrow \|x - y\| \geq \|x\|, \ \forall y \in Y.$$

O resultado acima junto como Teorema 2.35 nos dá mais informações sobre os subespaços Y e $Y^{\perp}$, desde que estejam contidos em espaço de Hilbert H. Para isso precisaros da definição de conjunto convexo.

Definição 2.34. Um subconjunto A de um espaço vetorial X é <u>convexo</u> se para todo par $x, y \in A$ e todo $\lambda \in [0, 1]$ temos $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Em outras palavras um conjunto A é convexo se dado dois pontos $x, y \in A$ então qualquer segmento de reta entre eles esta inteiramente contido em A.

Teorema 2.35 (Teorema 3.32 [6])**.** *Sejam A um subconjunto não vazio, fechado, convexo de um espaço de Hilbert H e $p \in H$. Então existe um único $q \in A$ tal que*

$$\|p - q\| = \inf\{\|p - a\| : a \in A\}.$$

Teorema 2.36. *Seja Y um subespaço vetorial não vazio e fechado de um espaço de Hilbert H. Dado $x \in H$, existem únicos $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$ tal que $x = y + z$. Além disso, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.*

Demonstração. Como Y é não vazio, fechado e convexo, pelo Teorema 2.35 existe um único $y \in Y$ tal que para todo $u \in Y$, $\|x - y\| \leq \|x - u\|$. Tome $z = x - y$, em particular $x = z + y$. Portanto, para todo $u \in Y$,

$$\|z - u\| = \|x - (y + u)\| \geq \|x - y\| = \|z\|.$$

Assim, pelo Lema 2.33 $z \in Y^{\perp}$. Isso nos mostra que os y, z desejados existem. Para provar a unicidade suponha que $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, onde $y_1, y_2 \in Y$ e $z_1, z_2 \in Y^{\perp}$. Então, $y_1 - y_2 = z_1 - z_2$, mas $y_1 - y_2 \in Y$ e $z_1 - z_2 \in Y^{\perp}$. Assim, $y_1 - y_2 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$. Logo, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$ e vale a unicidade. Agora, como $x = y + z$ teremos

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|y + z\|^2 \\ &= \langle y + z, y + z\rangle \\ &= \|y\|^2 + \langle y, z\rangle + \langle z, y\rangle + \|z\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2.\end{aligned}$$

□

Sabemos que se X é um espaço vetorial fechado de dimensão finita e $Y \subset X$ um subespaço vetorial fechado então podemos escrever $X = Y \oplus Y^{\perp}$ como soma direta. Isso nem sempre vale para espaços de dimensão infinita, mas o teorema anterior nos garante que se o espaço for fechado e de Hilbert é possível decompor um espaço vetorial como soma direta de um subespaço e seu complemento ortogonal.

Corolário 2.37. *Se Y é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert então $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.26 temos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Agora suponha que $x \in Y^{\perp\perp}$. Pelo Teorema 2.36 $x = y + z$, com $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$. Logo,

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \langle z, z\rangle = \|z\|^2,$$

então $z = 0$ e $x = y \in Y$. Consequentemente $Y^{\perp\perp} \subset Y$ o que prova o resultado. □

Corolário 2.38 (Corolário 3.36 [6])**.** *Se Y é algum subespaço vetorial de um espaço de Hilbert H então $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.*

Definição 2.39. Sejam X um espaço vetorial de dimensão finita e $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ um subconjunto de X. Dizemos que $\mathrm{Sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é o espaço gerado por todas as combinações lineares dos elementos de $\{x_i\}_{i=1}^{n}$.

Esta primeira definição nos diz como denotaremos o espaço gerado por um conjunto finito de elementos. A próxima definição nos diz como podemos caracterizar uma base em um espaço de Hilbert com dimensão infinita.

Definição 2.40. Seja (H_n) uma sequência de subespaços fechados de um espaço de Hilbert H. Dizemos que H é a soma de Hilbert dos E_n's e escrevemos $H = \bigoplus E_n$ se ocorre:

(a) os espaços E_n são mutualmente ortogonais, isto é,

$$\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall u \in E_n, \quad \forall v \in E_m,\ m \neq n;$$

(b) o espaço linear gerado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é denso em H.

Proposição 2.41. *Um espaço de Hilbert separável admite base ortonormal.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ um conjunto denso enumerável de H. Para cada n, considere o subespaço vetorial $H_n = \mathrm{Sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ gerado por $x_1, \ldots, x_n$, (não necessariamente $L.I.$). Pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, existe um conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{m_n}\}$, com $m_n \leq n$, que é base de H_n. Como o conjunto $\{x_n\}$ é denso, segue que $\{e_n\}$ é denso em H. □

Dada uma sequência ortonormal $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, definimos o operador P_n como a projeção ortogonal de um vetor sobre o espaço gerado pelos vetores $e_1, \ldots, e_n$, ou seja, dado $v \in H$,

$$P_n(v) = \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle e_j.$$

Uma propriedade particular das projeções ortogonais é que para todo $v \in H$ temos

$$\langle v - P_n(v), P_n(v) \rangle = 0.$$

Teorema 2.42 (Desigualdade de Bessel)**.** *Suponha que $\{e_n\}$ é um conjunto ortonormal de H. Para todo $v \in H$, temos que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2,$$

onde a igualdade vale se e somente se $P_n(v) \to v$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Como P_n é uma projeção ortogonal, segue que para todo $v \in H$,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \|v - P_n(v) + P_n(v)\|^2 \\ &= \|v - P_n(v)\|^2 + \|P_n(v)\|^2 \\ &= \|v - P_n(v)\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle v, e_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Note que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle v, e_j \rangle|^2 = \|v\|^2 - \|v - P_n(v)\|^2 \leq \|v\|^2.$$

Isso nos diz que $\left(\sum_{j=1}^{n} |\langle v, e_j \rangle|^2 \right)$ é uma sequência de somas parciais crescente e limitada. Logo,

$$\|v\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|v - P_n(v)\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |\langle v, e_j \rangle|^2,$$

com igualdade ocorrendo se e somente se $\lim_{n \to \infty} \|v - P_n(v)\| = 0$. □

O seguinte resultado nos diz sobre quais condições é possível decompor cada elemento de um espaço de Hilbert como combinação linear de uma base ortonormal.

Teorema 2.43 (Teorema da Estrutura Ortogonal)**.** *Se $\{e_j\}$ é uma base ortonormal de um espaço de Hilbert H, então cada vetor $v \in H$ se escreve de forma única como uma série convergente*

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, e_j \rangle e_j.$$

Mais ainda, $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle v, e_j \rangle|^2$.

Demonstração. Considere a sequência $(P_n(v))$. Pela desigualdade de Bassel, se $n > m$, temos que

$$\|P_n(v) - P_m(v)\| = \sum_{j=m}^{n} |\langle v, e_j \rangle|^2.$$

Logo $(P_n(v))$ é de Cauchy. Seja $\tilde{v}$ o limite da sequência $(P_n(v))$. Para todo $j \leq n$, temos que $\langle e_j, v - P_n(v) \rangle = 0$. Tomando o limite quando n tende a infinito, segue que

$$\langle e_j, v - \tilde{v} \rangle = 0 \quad \text{para todo } j.$$

Como $\{e_j\}$ é base, segue que $v = \tilde{v}$. $\square$

3 Transformações Lineares em Espaços de Hilbert

Uma transformação linear entre espaços vetoriais é uma função que preserva a estrutura linear, ou seja, se T é uma função entre os espaços vetoriais X e Y sobre o corpo $\mathbb{K}$, então T é linear se satisfaz $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. O espaço das transformações lineares de X em Y será denotado por $L(X, Y)$, em particular, para $X = Y$ denotaremos apenas por $L(X)$. Devido a estrutura adicional que os espaços de Hilbert possuem, i.e., produto interno, norma, topologia, existem outras propriedades a considerar além da linearidade. Neste capitulo estudaremos distintos tipos de transformações lineares em espaços de Hilbert.

3.1 Transformações Limitadas em Espaços Normados

Definição 3.1. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados e $T \in L(X, Y)$ uma transformação linear. T é dita limitada se existe um real positivo k tal que $\|T(x)\|_Y \leq k\|x\|_X \ \forall x \in X$.

Na definição acima utilizamos $\|\cdot\|_X$ para indicar a norma com respeito ao espaço vetorial X e $\|\cdot\|_Y$ a norma com respeito ao espaço vetorial Y.

Exemplo 3.2. *Seja $T \in L(\ell^2)$ dada por $T(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$. Vejamos que T é limitada. Se $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^2$ então*

$$\|T(x_1, x_2, \cdots)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Portanto $\|T(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \ell^2$.

Como um espaço normado tem uma topologia, faz sentido se perguntar qual é a relação entre uma transformação linear limitada e continuidade.

Proposição 3.3. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T \in L(X, Y)$. São equivalentes as seguintes assertivas:*

(a) T é uniformemente contínua.

(b) T é contínua.

(c) T é contínua em 0.

(d) $\exists\, k > 0$ *tal que* $\|T(x)\|_Y \leq k$ *para qualquer* $x \in X$ *e* $\|x\|_X \leq 1$.

(e) $\exists\, k > 0$ *tal que* $\|T(x)\|_Y \leq k\|x\|_X$ *para qualquer* $x \in X$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ e $(b) \Rightarrow (c)$ são triviais.

$(c) \Rightarrow (d)$ Por hipótese T é contínua em 0. Então, para $\epsilon = 1$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_Y < 1$. Seja $w \in X$ com $\|w\|_X \leq 1$. Como $\|\frac{\delta}{2}w\|_X = \frac{\delta}{2}\|w\|_X \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, pela continuidade de T em 0 temos:

$$\|T(\frac{\delta}{2}w)\|_Y = \frac{\delta}{2}\|T(w)\|_Y < 1 \Rightarrow \|T(w)\|_Y < \frac{2}{\delta}$$

Tomando $k = \dfrac{2}{\delta}$ temos $\|T(w)\|_Y < k \;\forall w \in X$ e $\|w\|_X \leq 1$.
$(d) \Rightarrow (e)$ Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq k$ para $x \in X$ e $\|x\|_X \leq 1$. Como $T(0) = 0$, segue que para $x = 0$ temos $\|T(0)\|_Y \leq k\|0\|_X$. Agora, tome $y \in X$ com $y \neq 0$. Assim, $\left\|\dfrac{y}{\|y\|_X}\right\|_X = 1$ e sendo T linear teremos

$$\frac{\|T(y)\|_Y}{\|y\|_X} = \left\|\frac{T(y)}{\|y\|_X}\right\|_Y = \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|_X}\right)\right\|_Y \leq k.$$

Logo $\|T(y)\|_Y \leq k\|y\|_X \;\forall y \in X$.
$(e) \Rightarrow (a)$ Como T é linear, teremos

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq k\|x-y\|_X \;\forall x, y \in X.$$

Seja $\epsilon > 0$ e tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$. Então, $\|x-y\|_X < \delta$ implica $\|T(x) - T(y)\|_Y \leq k\|x-y\|_X < k\dfrac{\epsilon}{k} = \epsilon$. Portanto T é uniformemente contínua. □

O conjunto de todas as transformações lineares contínuas de X para Y será denotado por $B(X,Y)$ (ou apenas B(X), desde que X=Y). A proposição acima nos diz que um elemento em $B(X,Y)$ também é limitado. Assim, podemos dizer que $B(X,Y)$ é o conjunto de todas as transformações lineares limitadas. Além disso, o conjunto $B(X,Y) \subset L(X,Y)$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua e

$$M = \sup\{|k(s,t)| : (s,t) \in [a,b] \times [a,b]\}.$$

Se $g \in C([a,b])$, então $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)g(t)dt$$

está em $C[a,b]$. Tome $\epsilon > 0$ e $s \in [a,b]$. Seja $k_s \in C([a,b])$ a função $k_s(t) = k(s,t), t \in [a,b]$. Onde o quadrado $[a,b] \times [a,b]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. A função k é uniformemente contínua. Então existe $\delta > 0$ tal que $|s - s'| < \delta$ implica $|k_s(t) - k_{s'}(t)| < \epsilon \ \forall t \in [a, b]$. Portanto,

$$|f(s) - f(s')| \leq \int_a^b |k(s,t) - k(s',t)||g(t)|dt \leq \epsilon(b-a)\|g\|.$$

Logo f é contínua.

Exemplo 3.4. *Se a transformação linear* $k : C[a, b] \to C[a, b]$ *é definida por*

$$(k(g))(s) = \int_a^b k(s,t)g(t)dt$$

então $k \in B(C[a, b])$ *e* $\|k(g)\| \leq M(b - a)\|g\|$. *De fato, para qualquer* $s \in [a, b]$ *temos que*

$$|(k(g))(s)| \leq \int_a^b |k(s,t)g(t)|dt \leq M(b-a)\|g\|.$$

Portanto $\|k(g)\| \leq M(b - a)\|g\|$. *Logo,* $k \in B(C[a, b])$.

Exemplo 3.5. *Seja* $\mathscr{P}$ *o subespaço vetorial de* $C([0, 1])$ *consistindo de todos os polinômios com coeficientes reais. Seja* $T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ *a transformação linear derivada definida por* $T(p) = p'$. *Então* T *não é contínua. De fato, se* $p(t) = t^n$ *então*

$$\|p(t)\| = \max\{|t^n|; t \in [0, 1]\} = 1.$$

Mas,

$$\|T(p_n(t))\| = \|p_n'(t)\| = \max\{|nt^{n-1}|; t \in [0, 1]\} = n.$$

Logo não existe $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|T(p)\| \leq k\|p\| \quad \forall p \in \mathscr{P}$.

Teorema 3.6. *Sejam* X *um espaço normado de dimensão finita,* Y *algum espaço vetorial normado e* $T \in L(X, Y)$. *Então* T *é contínua.*

Demonstração. Para mostrar isso vamos definir uma nova norma em X. Seja $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$. Mostraremos que $\|\cdot\|_1$ é uma norma em X. Sejam $x, y \in X$.

(i) $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \geq 0$

(ii) Se $\|x\|_1 = 0$ então

$$\|x\|_X + \|T(x)\|_Y = 0 \Rightarrow \|x\|_X = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Reciprocamente, se $x = 0$, teremos

$$\|x\|_X = \|T(x)\|_Y = 0 \Rightarrow \|x\|_1 = 0$$

(iii) Seja $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= \|\lambda x\|_X + \|T(\lambda x)\|_Y \\ &= |\lambda|\|x\|_X + |\lambda|\|T(x)\|_Y \\ &= |\lambda|(\|x\|_X + \|T(x)\|_Y) \\ &= |\lambda|\|x\|_1\end{aligned}$$

(iv) Para a Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \|x + y\|_X + \|T(x + y)\|_Y \\ &= \|x + y\|_X + \|T(x) + T(y)\|_Y \\ &\leq \|x\|_X + \|y\|_X + \|T(x)\|_Y + \|T(y)\|_Y \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma em X. Agora, como X tem dimensão finita, $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes e então existe $k > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq k\|x\|_X$ $\forall x \in X$, pelo Corolário 2.10. Logo, $\|T(x)\|_Y \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_X$ $\forall x \in X$. Então, T é limitada, portanto contínua. □

Lema 3.7. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $S, T \in B(X, Y)$ com $\|S(x)\|_Y \leq k_1\|x\|_X$ e $\|T(x)\|_Y \leq k_2\|x\|_X$ $\forall x \in X$. Então,*

(i) $\|(S + T)(x)\|_Y \leq (k_1 + k_2)\|x\|_X$ $\forall x \in X$.

(ii) $\|(\lambda S)(x)\|_Y \leq |\lambda|k_1\|x\|_X$ $\forall x \in X$.

Demonstração. (i) Pela desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned}\|(S + T)(x)\|_Y &\leq \|S(x)\|_Y + \|T(x)\|_Y \\ &\leq k_1\|x\|_X + k_2\|x\|_X \\ &= (k_1 + k_2)\|x\|_X.\end{aligned}$$

(ii) Se $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|(\lambda S)(x)\| = |\lambda|\|S(x)\|_Y \leq |\lambda|k_1\|x\|_X$$

□

O Lema 3.7 nos diz que $B(X, Y)$ é um espaço vetorial já que o espaço das transformações lineares limitas é fechado com as operações de soma e multiplicação por escalar. Em particular $B(X, Y)$ é subespaço vetorial de $L(X, Y)$.

Definição 3.8. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $T \in L(X, Y)$. Definimos a norma de T por $\|T\|_{L(X,Y)} = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$.

Vejamos que $\|T\|_{L(X,Y)}$ é uma norma em $L(X,Y)$. De fato, se $\|x\|_X \leq 1$ temos

(i) $0 \leq \|T(x)\|_Y \leq \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} = \|T\|_{L(X,Y)}$.

(ii) $\|T\|_{L(X,Y)} = 0 \Leftrightarrow \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow T(x) = 0 \; \forall x \; ; \; \|x\| = 1 \in X \Leftrightarrow T \equiv 0$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \|\alpha T\|_{L(X,Y)} &= \sup\{\|\alpha T(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|T(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} \\ &= |\alpha| \|T\|_{L(X,Y)}. \end{aligned}$$

(iv) Desigualdade triangular: Sejam $T, S \in L(X,Y)$. Então

$$\begin{aligned} \|T+S\|_{L(X,Y)} &= \sup\{\|(T+S)(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)+S(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} + \sup\{\|S(x)\|_Y \;:\; \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \|T\|_{L(X,Y)} + \|S\|_{L(X,Y)}. \end{aligned}$$

Uma consequência imediata da norma de um operador é que $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)}$ quando $\|x\| \leq 1$. Assim, se $x \neq 0$ temos que $\|T(x/\|x\|_X)\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)} \Rightarrow \|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)}\|x\|_X$. Com a definição de norma de um operador podemos falar também sobre convergência de um operador em um espaços de Banach.

Definição 3.9. Sejam X um espaço de Banach e $(T_n) \in L(X,Y)$ uma sequência. Dizemos que (T_n) converge uniformemente para $T \in L(X,Y)$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \|T_n - T\|_{L(X,Y)} < \epsilon.$$

Lema 3.10. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ espaços normados, $T \in L(X,Y)$ e $S \in L(Y,Z)$. Então $S \circ T \in L(X,Z)$ e $\|S \circ T\|_{L(X,Z)} \leq \|S\|_{L(Y,Z)}\|T\|_{L(X,Y)}$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \|(S \circ T)(x)\|_Z &= \|(S(T(x))\|_Z \\ &\leq \|S\|_{L(Y,Z)}\|T(x)\|_Y \\ &\leq \|S\|_{L(Y,Z)}\|T\|_{L(X,Y)}\|x\|_X \;\; \forall x \in X. \end{aligned}$$

Logo $\|S \circ T\|_{L(X,Z)} \leq \|S\|_{L(Y,Z)}\|T\|_{L(X,Y)}$. □

Lema 3.11 (Lema 4.32 [6])**.** *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado. Se (T_n) e (S_n) são sequências em $B(X)$ tais que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ e $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Então, $\lim_{n\to\infty} S_n T_n = ST$.*

Teorema 3.12. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ um espaço de Banach. Então $B(X,Y)$ é um espaço de Banach com respeito ao corpo $\mathbb{K}$ e a norma do operador $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$.*

Demonstração. Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $B(X,Y)$, isto é, $\|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} < \epsilon$ para todo $m, n > n_0$. Consequentemente,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{L(X,Y)}\|x\|_X < \epsilon\|x\|_X \quad \text{para todo } m, n > n_0. \tag{3.1}$$

Portanto, a sequência $(T_n(x))$ é de Cauchy. Como Y é um espaço de Banach, $(T_n(x))$ é convergente. Defina,

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \quad \text{para todo } x \in X. \tag{3.2}$$

Veremos que T é linear. De fato,

$$\begin{aligned}
T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n(x) + T_n(y)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\
&= \alpha T(x) + T(y)
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Por 3.1 temos

$$\begin{aligned}
\|T_n(x)\|_Y &= \|T_n(x) + T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x)\|_Y \\
&\leq \|T_n(x) - T_{n_0}(x)\|_Y + \|T_{n_0}(x)\|_Y \\
&\leq \epsilon\|x\|_X + \|T_{n_0}(x)\|_Y
\end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $n \geq n_0(\epsilon)$. Aplicando limite de $n \to \infty$ em 3.3 teremos

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_Y = \|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\|_Y \leq (\epsilon + \|T_{n_0}\|_{L(X,Y)})\|x\|_X.$$

Assim, T é contínua. Tomando o limite de $m \to \infty$ em 3.1 teremos

$$\|T_n - T\|_{L(X,Y)} < \epsilon\|x\|_X$$

para todo $n \geq n_0(\epsilon)$ e todo $x \in X$. Consequentemente, $\|T_n - T\|_{L(X,Y)} < \epsilon$ para todo $n \geq n_0(\epsilon)$, isto é, $T_n \to T$ em $B(X,Y)$ quando $n \to \infty$. Isto prova que toda sequência de Cauchy em $B(X,Y)$ é convergente, isto é, $B(X,Y)$ é um espaço de Banach. □

Definição 3.13. Seja $T \in L(X,Y)$. Definimos os seguintes conjuntos:

(i) $\ker(T) = \{x \in X; T(x) = 0\}$.

(ii) $\mathrm{Im}(T) = \{T(x); x \in X\}$.

Lema 3.14. *Sejam* $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espaços normados e* $T \in B(X,Y)$. *Então,* $\ker(T)$ *é fechado.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset \ker(T)$ uma sequência convergente tal que $x_n \to x$. Como T é contínua temos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(x).$$

Assim, $x \in \ker(T)$. Logo, $\ker(T)$ é fechado. □

Definição 3.15. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados. Um operador $T \in B(X,Y)$ é dito inversível se existe $S \in B(Y,X)$ tal que $S \circ T = I_X, T \circ S = I_Y$, onde I_X e I_Y são respectivamente as transformações lineares identidade nos espaços X e Y. Sendo S a inversa de T, por convenção denotaremos S por T^{-1}.

Lema 3.16. *Sejam* X, Y *e* Z *espaços vetoriais. Se* $T_1 \in L(X,Y)$ *e* $T_2 \in L(Y,Z)$ *operadores invertíveis. Então*

(a) T_1^{-1} é invertível com inversa T_1.

(b) T_2T_1 é invertível com inversa $T_1^{-1}T_2^{-1}$

Demonstração. De fato,

$$(T_1^{-1})^{-1}T_1^{-1} = I \Rightarrow (T_1^{-1})^{-1}T_1^{-1}T_1 = T_1 \Rightarrow (T_1^{-1})^{-1} = T_1$$

e

$$T_1^{-1}(T_1^{-1})^{-1} = I \Rightarrow T_1T_1^{-1}(T_1^{-1})^{-1} = T_1 \Rightarrow (T_1^{-1})^{-1} = T_1$$

Para a segunda propriedade teremos

$$T_2T_1(T_2T_1)^{-1} = I \Rightarrow T_1(T_2T_1)^{-1} = T_2^{-1} \Rightarrow (T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1}T_2^{-1}.$$

e

$$(T_2T_1)^{-1}T_2T_1 = I \Rightarrow (T_2T_1)^{-1}T_2 = T_1^{-1} \Rightarrow (T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1}T_2^{-1}.$$

□

Teorema 3.17. *Seja* X *um espaço de Banach. Se* $T \in B(X)$ *é um operador com* $\|T\|_{L(X)} < 1$. *Então* $I - T$ *é invertível e a inversa é dada por*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Demonstração. Como X é um espaço de Banach, pelo Teorema 3.12 $B(X)$ também é. Como $\|T\|_{L(X)} < 1$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n_{L(X)}$ converge. Além disso, como $\|T^n\|_{L(X)} \leq \|T\|^n_{L(X)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, com isso a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|_{L(X)}$ também converge. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge pelo Teorema 2.17. Seja $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ e seja $S_k = \sum_{m=0}^{k} T^m$. Então a sequência (S_k) converge para S em $B(X)$. Agora,

$$\begin{aligned}\|(I-T)S_k - I\|_{L(X)} &= \|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\|_{L(X)} \\ &= \|\sum_{n=0}^{k}(T^n - T^{k+1}) - I\|_{L(X)} \\ &= \|I - T^{n+1} - I\|_{L(X)} \\ &= \|-T^{k+1}\|_{L(X)} \leq \|T\|^{k+1}_{L(X)}.\end{aligned}$$

Sendo $\|T\|_{L(X)} < 1$ podemos concluir que $\lim_{k\to\infty}(I-T)S_k = I$. Portanto,

$$(I-T)S = (I-T)\lim_{k\to\infty} S_k = I,$$

pelo Lema 3.11. Por outro lado, $S(I-T) = I$. Então $(I-T)$ é invertível e $(I-T)^{-1} = S$. $\square$

O teorema a seguir nos dá uma série conhecida por **Expansão de Newman**, em particular, tomando $\lambda = 1$ temos exatamente o Teorema 3.17.

Teorema 3.18. *Se $T \in B(X)$ é um operador em um espaço de Banach X, e λ é algum escalar tal que $\|T\|_{L(X)} < |\lambda|$. Então $\lambda I - T$ tem uma inversa em $B(X)$ dada pela seguinte série uniformemente convergente:*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k.$$

Demonstração. Seja $T \in B(X)$ e λ um escalar não nulo arbitrário. Se $\|T\|_{L(X)} < |\lambda|$, segue que $\sum_{k=0}^{\infty} \|(T/\lambda)\|^k_{L(X)} < \infty$. Portanto, já que

$$\|(T/\lambda)^k\|_{L(X)} \leq \|(T/\lambda)\|^k_{L(X)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ segue que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \|(T/\lambda)^k\|_{L(X)}$ converge absolutamente em $\mathbb{R}$. Como $B(X)$ é um espaço de Banach então a série $\sum_{k=0}^{\infty}(T/\lambda)^k$ também converge. Em particular a sequência $\left(\sum_{k=0}^{n}(T/\lambda)^k\right)$ converge para $\sum_{k=0}^{\infty}(T/\lambda)^k$ uniformemente em $B(X)$. Agora, note que

$$(\lambda I - T)\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}(T/\lambda)^k = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}(T/\lambda)^k(\lambda I - T) = I - (T/\lambda)^{n+1}.$$

Porém, $(T/\lambda)^{n+1} \to 0$ já que $\|T/\lambda\| < 1$. Logo,

$$(\lambda I - T)\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(T/\lambda)^k = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(T/\lambda)^k(\lambda I - T) = I.$$

Assim, $\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(T/\lambda)^k = (\lambda I - T)^{-1} \in B(X)$. □

3.2 Transformação Adjunta

Nesta seção mostraremos que toda transformação linear limitada entre espaços de Hilbert tem associada uma outra (única) transformação linear, a adjunta, que satisfaz a uma equação em relação ao produto interno. Veremos também distintas propriedades da transformação adjunta. Para a construção da transformação adjunta será necessário um importante Teorema da Análise Funcional, o Teorema de Riesz, ele mostra que podemos definir uma determinada transformação linear (funcional linear) em termos de um produto interno.

Definição 3.19. Seja H um espaço de Hilbert. Se $f \in B(H, \mathbb{K})$ dizemos que f é um funcional linear. O espaço $B(H, \mathbb{K})$ é chamado de espaço dual de H e será denotado por H'.

Teorema 3.20. *(Teorema de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert e $f \in H'$. Então existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = f_y(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$. Além disso, $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.*

Demonstração. (Existência) Se $f(x) = 0\ \forall x \in H$ então $y = 0$ funciona. Caso contrário, $\ker(f) = \{x \in H;\ f(x) = 0\}$ é um subespaço fechado de H pelo Teorema 3.14, e pelo Teorema 2.36 $\ker(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Portanto, existe $z \in \ker(f)^{\perp}$ tal que $f(z) \neq 0$, em particular podemos tomar z de modo que $f(z) = 1$. Claramente $z \neq 0$, pois $f \in H'$, então defina $y = z/\|z\|_H^2$. Para $x \in H$ arbitrário e pela linearidade de f teremos

$$\begin{aligned} f(x - f(x)z) &= f(x) - f(x)f(z) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x - f(x)z \in \ker(f)$. Então,

$$\langle x - f(x)z, z\rangle = 0$$

Logo,

$$\langle x, z\rangle - f(x)\langle z, z\rangle = 0 \Rightarrow f(x) = \langle x, z/\|z\|_H^2\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Agora, se $\|x\|_H \leq 1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_H\|y\|_H \leq \|y\|_H.$$

Logo, $\|f\|_{H'} \leq \|y\|_H$. Por outro lado, se $x = \dfrac{y}{\|y\|_H}$ teremos $\|x\|_H = 1$ e

$$\|f\|_{H'} \geq |f(x)| = \frac{|f(y)|}{\|y\|_H} = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|_H} = \|y\|_H.$$

Assim, $\|f\|_{H'} \geq \|y\|_H$, ou seja, $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.
(Unicidade) Se y e w satisfazem $f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, w\rangle$ para todo $x \in H$, então $\langle x, y-w\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Portanto, $y = w$. $\square$

Veremos em seguida um exemplo no qual não pode ser aplicado o Teorema de Riesz. Seja $\mathscr{P}$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais e defina

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \forall f, g \in \mathscr{P}.$$

Se $f = \sum a_k x^k$ e $g = \sum b_j x^j$ então

$$\langle f, g\rangle = \sum \frac{1}{j+k+1} a_k b_j.$$

Exemplo 3.21. *Seja z um número real e L um funcional linear definido por*

$$L(f) = f(x).$$

Vamos mostrar que não existe polinômio g tal que $\langle f, g\rangle = L(f) \quad \forall f \in \mathscr{P}$.
Suponha que

$$f(z) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

para toda f. Seja $h(x) = x - z$. Então temos que $(hf)(z) = 0$. Assim,

$$0 = \int_0^1 h(t)f(t)g(t)dt$$

para toda f. Tomando $f = hg$ segue que

$$\int_0^1 |h(t)|^2 |g(t)|^2 dt = 0.$$

Logo, $hg \equiv 0$. Como $h \neq 0$, segue que $g \equiv 0$. Mas isso implica que L é o funcional nulo. Assim, g não existe.

Teorema 3.22. *Sejam H e K espaços de Hilbert e $T \in B(H, K)$. Existe uma única transformação $T^* \in B(K, H)$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

para todo $x \in H$ e $y \in K$.

Demonstração. Seja $y \in K$ e $f : H \to \mathbb{K}$ definida por $f(x) = \langle Tx, y\rangle$. Como T é linear e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é linear na primeira coordenada temos que f também é linear. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle Tx, y\rangle| \\ &\leq \|T(x)\|_K \|y\|_H \\ &\leq \|T\|_{L(X,K)} \|x\|_H \|y\|_H \end{aligned}$$

assim, $\|f\|_{H'} \leq \|T\|_{L(X,K)} \|y\|_H$ o que implica que f é limitada, ou seja, $f \in H'$. Agora, pelo Teorema 3.20 existe um único $z \in H$ tal que $f(x) = \langle x, z\rangle$. Tomando $T^*(y) = z$ concluímos que T^* é uma função de K para H que satisfaz

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Veremos que T^* é linear. Sejam $y, z \in K$, $x \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y + z)\rangle &= \langle T(x), \alpha y + z\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle T(x), y\rangle + \langle T(x), z\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, T^*(y)\rangle + \langle x, T^*(z)\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y)\rangle + \langle x, T^*(z)\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y) + T^*(z)\rangle \end{aligned}$$

Pela generalidade de y, z e α segue que

$$\begin{aligned} &\langle x, T^*(\alpha y + z)\rangle = \langle x, \alpha T^*(y) + T^*(z)\rangle \\ &\Rightarrow T^*(\alpha y + z) = T^*(y) + T^*(z). \end{aligned}$$

Agora provemos que T^* é limitada. De fato,

$$\begin{aligned} \|T^*(y)\|_H^2 &= \langle T^*(y), T^*(y)\rangle \\ &= \langle T(T^*(y), y\rangle \\ &\leq \|T\|_{L(H,K)} \|T^*(y)\|_H \|y\|_K. \end{aligned}$$

Se $\|T^*(y)\|_H = 0$ vale a desigualdade. Então suponha $\|T^*(y)\|_H \neq 0$, neste caso podemos dividir ambos os lados por $\|T^*(y)\|_H$ e obter $\|T^*(y)\|_H \leq \|T\|_{L(H,K)} \|y\|_K$. Consequentemente $\|T^*\|_{L(K,H)} \leq \|T\|_{L(H,K)}$. Para verificar a unicidade, suponha que exista $S \in B(K, H)$ que satisfazem a condição de T^*. Então, para qualquer $x \in H$ e $y \in K$ teremos $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle$. Como vale para todo $y \in K$ segue que $S = T^*$ e isso conclui a prova do Teorema. □

Definição 3.23. Sejam H, K espaços de Hilbert e $T \in B(H, K)$. O operador T^* é chamado de adjunto de T.

Exemplo 3.24. *Sejam H um espaço de Hilbert, $x, y, z \in H$ e $T \in B(H)$ dado por $T(x) = \langle x, y\rangle z$. Vamos encontrar T^*. Note que,*

$$\langle T(x), w\rangle = \langle\langle x, y\rangle z, w\rangle = \langle x, y\rangle\langle z, w\rangle = \langle x, \langle w, z\rangle y\rangle.$$

Tomando $S(w) = \langle w, z\rangle y$ segue que $S = T^*$.

Exemplo 3.25. *Sejam D o operador derivada e $\mathscr{P}$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais. Considere o produto interno usual em $C([0, 1])$. Veremos que D^* não existe. Note que*

$$\begin{aligned}\langle D(f), g\rangle &= \int_0^1 f'(t)g(t)dt \\ &= f(t)g(t)|_0^1 - \int_0^1 f(t)g'(t)dt \\ &= f(1)g(1) - f(0)g(0) - \langle f, D(g)\rangle.\end{aligned}$$

Fixe g e suponha que D^* existe, então temos que

$$\langle f, D^*(g)\rangle = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \langle f, D(g)\rangle$$

ou

$$\langle f, D^*(g)\rangle = f(1)g(1) - f(0)g(0).$$

Como g é fixo, $L(f) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ é um funcional linear do tipo considerado no Exemplo 3.21 e não pode ser da forma $L(f) = \langle f, h\rangle$ a menos que $L \equiv 0$. Se D^*g existe, então podemos tomar $h = (D + D^*)(g)$ e obter $L(f) = \langle f, h\rangle$, assim $g(0) = g(1) = 0$ já que $L \equiv 0$. A existência de um polinômio $D^*(g)$ adequado implica em $g(0) = g(1) = 0$. Reciprocamente, se $g(0) = g(1) = 0$, o polinômio $D^*(g) = -D(g)$ satisfaz $\langle D(f), g\rangle = \langle f, D^*(g)\rangle$ para todo f. Se escolhermos g de modo que $g(0) \neq 0$ ou $g(1) \neq 0$ não é possível definir $D^*(g)$. Assim concluímos que D não possui adjunto.

Neste último exemplo não é possível garantir a existência do adjunto porque o operador D não é limitado, então ele não satisfaz todas as hipóteses do Teorema para que haja existência.

Lema 3.26. *Sejam H, K e L espaços de Hilbert, $R, S \in B(H, K)$, $T \in B(K, L)$ e $\mu \in \mathbb{K}$. Então*

(a) $(\mu R + S)^* = \overline{\mu} R^* + S^*$

(b) $(TR)^* = R^* T^*$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}\langle(\mu R+S)(x),y\rangle &= \langle \mu R(x)+S(x),y\rangle\\ &= \mu\langle R(x),y\rangle+\langle S(x),y\rangle\\ &= \langle x,\overline{\mu}R^*(y)\rangle+\langle x,S^*(y)\rangle\\ &= \langle x,(\overline{\mu}R^*+S^*)(y)\rangle\end{aligned}$$

Pela unicidade da transformação adjunta segue que $(\mu R+S)^* = (\overline{\mu}R^*+S^*)$.

$$\begin{aligned}\langle(TR)(x),y\rangle &= \langle T(R(x)),y\rangle\\ &= \langle R(x),T^*(y)\rangle\\ &= \langle x,R^*(T^*(y))\rangle\end{aligned}$$

Consequentemente $(TR)^* = R^*T^*$. □

Definição 3.27. Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$. Dizemos que T é auto-adjunto se $T^* = T$.

Definição 3.28. Sejam H um espaço de Hilbert. Uma projeção ortogonal é um operador $E \in L(H)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $E^2 = E$;

(ii) $\ker(T) \perp \mathrm{Im}(E)$.

Observação. *Projeções ortogonais tem a propriedade de* $Im(I-E) = \ker(E)$, $\ker(I-E) = Im(E)$ *e* $H = \ker(E) \oplus Im(E)$. *Além disso, se* $Y \subset H$ *é um subespaço vetorial fechado existe uma projeção* $E \in B(H)$ *tal que* $Im(E) = Y$. *O Teorema da Estrutura Ortogonal (Teorema 2.43) nos diz que se* H *possui uma base ortonormal então é possível decompor o operador identidade no espaço* H *como soma de projeções ortogonais, ou seja,* $I \in B(H)$, $\{e_j\}$ *uma base ortogonal de* H, *então*

$$I(x) = \sum E_j(x) \quad x \in H,$$

onde $Im(E_j) = Sp\{e_j\}$. *Estas últimas conclusões são discutidas mais detalhadamente nas seguintes referências [6], [7] e [4].*

Lema 3.29. *Sejam* H *e* K *espaços de Hilbert e* $T \in B(H,K)$.

(i) $\ker(T) = Im(T^*)^{\perp}$;

(ii) $\ker(T^*) = Im(T)^{\perp}$;

Demonstração. (i) Seja $x \in H$. Então,

$$\begin{aligned} x \in \ker(T) &\Leftrightarrow T(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow \langle x, T^*(y)\rangle = 0 \quad \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(T^*)^{\perp} \end{aligned}$$

(ii) Seja $x \in H$. Então,

$$\begin{aligned} x \in Ker(T^*) &\Leftrightarrow T^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle T^*(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow \langle x, T(y)\rangle = 0 \quad \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(T)^{\perp} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.30 (Lema 6.26 [6])**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$.*

(a) T^*T e TT^* são auto-adjuntos.

(b) $T = R + iS$ onde R e S são auto-adjuntos.

Definição 3.31. Seja H um espaço de Hilbert e $S \in B(H)$ auto-adjunto. Dizemos S é positivo se $\langle S(x), x\rangle \geq 0$ $\forall x \in H$.

Exemplo 3.32. *Seja $T \in B(H)$ então o operador T^*T é positivo. De fato, se $x \in H$ então*

$$\langle T^*(T(x)), x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle = \|T(x)\|^2 \geq 0.$$

Definição 3.33. Seja H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$. Dizemos que T é normal se $TT^* = T^*T$.

Lembremos que se X é um espaço vetorial, $T \in L(X)$, e $W \subset X$ é um espaço invariante se $T(W) \subset W$.

Definição 3.34. Sejam $T \in B(H)$ e $W \subset H$ subespaço, dizemos que W reduz T se W e $W^{\perp}$ são ambos T-invariantes.

Proposição 3.35. *Sejam $T \in B(H)$ um operador normal e $M \subset H$ um subespaço vetorial fechado e invariante então a restrição $T|_M$ é normal se e só se M reduz T.*

Demonstração. Sejam $x \in M$ e $y \in M^\perp$. Como $T(x) \in M$, temos que $0 = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, ou seja, $T^*(M^\perp) \subset M^\perp$. Assim segue que M ser T-invariante implica $M^\perp$ é T^*-invariante. Como $(T^*)^* = T$ e $(M^\perp)^\perp = M$, temos que

$$T(M) \subset M \Longleftrightarrow T^*(M^\perp) \subset M^\perp.$$

Analogamente, segue que

$$T(M^\perp) \subset M^\perp \Longleftrightarrow T^*(M) \subset M.$$

Portanto, vale

$$T(M) \subset M \text{ e } T(M^\perp) \subset M^\perp \Longleftrightarrow T^*(M^\perp) \subset M^\perp \text{ e } T^*(M) \subset M.$$

Sejam agora $x, y \in M$ e suponha que M reduz T. Então $\langle (T|_M)(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, (T^*|_M)(y)\rangle$. Como T é normal, segue que $T|_M$ é normal. Reciprocamente, como a restrição de T a M é normal, segue que M é invariante por T^*. Portanto $M^\perp$ é invariante por T. Logo M reduz T. □

3.3 Espectro de uma Transformação Linear

Definição 3.36. Seja H um espaço de Hilbert, $I \in B(H)$ o operador identidade e $T \in B(H)$. O espectro de T, denotado por $\sigma(T)$ é definido por

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ é não invertível}\}.$$

Se $(T - \lambda I)v = 0$, onde $v \in H \backslash \{0\}$ então v é um autovetor associado a λ.

Observação. $\lambda \in \sigma(T)$ *não significa que* $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$, *isso não acontece necessariamente para todo* λ *em espaços de dimensão infinita pois* T *pode ser não sobrejetiva. O exemplo 3.38 mostra que isso pode acontecer. Assim, definimos o espectro pontual por*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \textit{ é não invertível e } \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

A sutil diferença entre espectro e espectro pontual é que para o espectro pontual é necessária a condição do operador $T - \lambda I$ ser não injetivo. A partir disso é simples ver que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ e quando $\dim(H) < \infty$ podemos concluir $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ já que o operador é invertível se e só se for sobrejetivo. O exemplo a seguir nos mostra de forma mais clara a diferença entre ambos os conjuntos e que eles não são necessariamente iguais.

Exemplo 3.37. *Seja* $T \in B(\ell^2)$ *dado por* $T(x) = (0, x_1, x_2, \cdots)$ *com* $x = (x_1, x_2, \cdots)$. *É claro que* $0 \in \sigma(T)$, *pois* T *não é sobrejetiva já que* $(1, 0, 0, \cdots) \notin Im(\ell^2)$. *Note que*

$T(x) - \lambda x = 0$ implica em $(0, x_1, x_2, \cdots) - \lambda(x_1, x_2, \cdots) = 0$ que é satisfeita apenas quando $\lambda = 0$ ou $x = 0$. Suponha $\lambda = 0$, então

$$\begin{cases} 0 - \lambda x_1 = 0 \\ x1 - \lambda x_2 = 0 \\ x_2 - \lambda x_3 = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

e resolvendo este sistema teremos que $x_1 = x_2 = \cdots = 0$. Portanto $\lambda \notin \sigma_p(T)$ e $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Em dimensão finita sabemos que toda transformação sobre o corpo dos complexos tem ao menos um autovalor, mas em dimensão infinita isso nem sempre acontece, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.38. *Sejam V o espaço das funções analíticas que vão de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ e $T \in L(V)$ dado por*

$$T(f)(z) = \int_0^z f(t)dt.$$

Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T - \lambda I$ seja não invertível. Então existe $g \in V$ tal que $T(g) - \lambda g = 0$. Isso implica que

$$T(g)(z) = \int_0^z g(t)dt = \lambda g(z)$$

e derivando de ambos os lados segue que

$$g(z) = \lambda g'(z).$$

Se $\lambda = 0$ temos $g \equiv 0$, o que não pode acontecer. Suponha $\lambda \neq 0$, assim

$$g(z) = \lambda g'(z) \Rightarrow g'(z)/g(z) = [\ln g(z)]' = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow g(z) = e^{\frac{z}{\lambda}}.$$

Mas,

$$T(e^{\frac{1}{\lambda}}) = \lambda e^{\frac{1}{\lambda}} - 1 = \lambda e^{\lambda z} \Rightarrow 1 = 0$$

Absurdo, logo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que o operador $T - \lambda I$ é invertível.

Teorema 3.39. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$.*

(a) Se $|\lambda| > \|T\|$ então $\lambda \notin \sigma(T)$.

(b) $\sigma(T)$ é um conjunto fechado.

Demonstração. O item (a) segue direto do Teorema 3.18. Defina $F : \mathbb{K} \to L(H)$ por $F(\lambda) = T - \lambda I$. Então

$$\|F(\lambda) - F(\mu)\|_{L(H)} = \|T - \lambda I - (T - \mu I)\|_{L(H)} = \|(\mu - \lambda)I\|_{L(H)} = |\mu - \lambda|.$$

Portanto F é contínua. Agora, note que $\{T\}$ é um subconjunto fechado de $B(H)$ e $\sigma(T) = F^{-1}(T)$. Pela continuidade da F temos que $\sigma(T)$ é fechado. □

O Teorema 3.39 nos mostra que $\sigma(T)$ é um conjunto compacto já que é fechado e limitado em $\mathbb{C}$. Dessa maneira podemos afirmar que se $\lambda \in \sigma(T)$ temos $|\lambda| \in [-\|T\|, \|T\|]$.

Teorema 3.40. *O espectro de um operador auto-adjunto só possui valores reais e autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração. Sejam $T \in B(H)$ auto-ajunto e $x, y \in H$ autovetores tais que $T(x) = \lambda x$ e $T(y) = \mu y$ com $\lambda \neq \mu$. Temos que

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda\langle x, x\rangle = \langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}&\lambda\langle x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle\\ &\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0\end{aligned}$$

□

Teorema 3.41. *Seja $T \in B(H)$ um operador normal. Se λ é autovalor de T então $\overline{\lambda}$ é autovalor de T^*.*

Demonstração. Sejam $x \in H$ tal que $T(x) = \lambda x$ então $x \in \ker(T - \lambda I)$. Note que o operador $(T - \lambda I)$ também é normal. Logo,

$$\begin{aligned}\|(T^* - \overline{\lambda}I)(x)\|^2 &= \|(T - \lambda I)^*(x)\|^2\\ &= \langle (T - \lambda I)^*(x), (T - \lambda I)^*(x)\rangle\\ &= \langle (T - \lambda I)(T - \lambda I)^*(x), x\rangle\\ &= \langle (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)(x), x\rangle = 0.\end{aligned}$$

Assim, $(T^* - \overline{\lambda}I)(x) = 0$ nos diz que $T^*(x) = \overline{\lambda}x$. □

Teorema 3.42. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$ um operador normal. Então, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração. Sejam $x, y \in H$ tal que $T(x) = \lambda x$ e $T(y) = \mu y$ com $\lambda \neq \mu$ onde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Como T é normal, pelo Teorema 3.41 $T^*(y) = \overline{\mu}y$. Assim,

$$\begin{aligned}&\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle\\ &\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0.\end{aligned}$$

□

Definição 3.43. O complemento do conjunto $\sigma(T)$ é o conjunto resolvente denotado por $\rho(T)$. Além disso o resolvente de T em λ é definido por $R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$.

O Teorema 3.39 deixa evidente que o operador $R_T(\lambda)$ existe para todo λ tal que $\|T\| < \lambda$.

Proposição 3.44. *Seja H um espaço de Hilbert e $S \in B(H)$. Então, se $\lambda, \mu \in \rho(S)$*

1. $R_S(\mu) - R_S(\lambda) = (\lambda - \mu)R_S(\mu)R_S(\lambda)$
2. $R_S(\lambda)R_S(\mu) = R_S(\mu)R_S(\lambda)$

Demonstração. Para a primeira parte temos

$$\begin{aligned}(\mu I - S)^{-1} &= (\mu I - S)^{-1}(\lambda I - S)(\lambda I - S)^{-1} \\ &= (\mu I - S)^{-1}[(\mu I - S) + (\lambda - \mu)I](\lambda I - S)^{-1} \\ &= (\lambda I - S)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu I - S)^{-1}(\lambda I - S)^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto, $R_S(\mu) - R_S(\lambda) = (\lambda - \mu)R_S(\mu)R_S(\lambda)$. Já no segundo item podemos usar (1). Logo, teremos que

$$\begin{aligned}R_S(\lambda) - R_S(\mu) &= (\lambda - \mu)R_S(\lambda)R_S(\mu) \\ R_S(\mu) - R_S(\lambda) &= (\mu - \lambda)R_S(\mu)R_S(\lambda)\end{aligned}$$

multiplicando a segunda equação por (-1) obteremos $(\lambda-\mu)R_S(\lambda)R_S(\mu) = (\lambda-\mu)R_S(\mu)R_S(\lambda)$ o que implica em $R_S(\lambda)R_S(\mu) = R_S(\mu)R_S(\lambda)$. $\square$

4 Teorema Espectral

Um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear é que todo operador auto-adjunto definido em um espaço com dimensão finita é diagonalizável por uma matriz ortogonal. Neste capítulo iremos demonstrar uma generalização deste Teorema para operadores em espaços de Hilbert. Quando o corpo for $\mathbb{C}$ consideraremos operadores compactos e normais, quando for $\mathbb{R}$ operadores compactos e auto-adjuntos.

4.1 Operadores Compactos

Definição 4.1. Sejam X e Y espaços normados. Uma transformação linear $T \in L(X,Y)$ é compacta se para qualquer sequência limitada (x_n) em X a sequência $(T(x_n))$ em Y contém uma subsequência convergente. Equivalentemente, T é compacta se o fecho de $T(K)$ é um conjunto compacto em Y para $K \subset X$ compacto. O espaço das transformações lineares compactas é denotado por $K(X,Y)$.

Teorema 4.2. *Sejam X e Y espaços normados, $T \in L(X,Y)$ compacta. Então T é limitado. Ou seja, $K(X,Y) \subset B(X,Y)$.*

Demonstração. Suponha que T seja ilimitada. Então existe uma sequência (x_n) em X tal que $\|T(x_n)\|_Y \geq n$. Como T é compacto existe também uma subsequência $(T(x_{n_k}))$ convergente, mas supusemos $\|T(x_{n_k})\|_Y \geq n_k$ e isso contraria a convergência da subsequência. $\square$

Teorema 4.3. *Seja X um espaço normado de dimensão infinita. Então o operador identidade não é compacto.*

Antes de provar este teorema, precisamos do seguinte resultado.

Teorema 4.4 (Lema de Riesz)**.** *Sejam X um espaço normado, $Y \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado e $\alpha \in (0,1)$. Então existe $x_\alpha \in X$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ e $\|x_\alpha - y\| > \alpha$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus Y$. Como Y é fechado, então

$$d = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\} > 0.$$

Como $\alpha \in (0,1)$, segue que $d < d\alpha^{-1}$. Portanto, existe $z \in Y$ tal que $\|x - z\| = d\alpha^{-1}$. Seja $x_\alpha = \dfrac{x - z}{\|x - z\|}$. Assim, $\|x_\alpha\| = 1$, e para todo $y \in Y$ temos

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha - y\| &= \left\| \frac{x - z}{\|x - z\|} - y \right\| \\
&= \left\| \frac{x}{\|x - z\|} - \frac{z}{\|x - z\|} - \frac{\|x - z\|}{\|x - z\|} y \right\| \\
&= \frac{1}{\|x - z\|} (x - \underbrace{(z + \|x - z\| y)}_{\text{em } Y}) \\
&> (d\alpha^{-1})^{-1} d \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

□

Demostração do Teorema 4.3. Provemos que existe uma sequência limitada que não tem uma subsequência convergente. Seja $x_1 \in X$ unitário. Como o subespaço $\mathrm{Sp}\{x\}$ gerado por x é fechado e está contido estritamente em X, pelo Lema de Riesz (Teorema 4.4), existe x_2 unitário tal que

$$\|x_2 - \alpha x_1\| \geq \frac{3}{4}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. De forma similar, o subespaço $\mathrm{Sp}\{x_1, x_2\}$ gerado por x_1 e x_2 é fechado e está contido estritamente em X. Novamente pelo Lema de Riesz, existe x_3 unitário tal que

$$\|x_3 - \alpha x_1 - \beta x_2\| \geq \frac{3}{4}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Continuando assim, construímos uma sequência (x_n) de vetores unitários tal que, para todo $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geq \dfrac{3}{4}$. Portanto, a sequência (x_n) não tem uma subsequência convergente. Agora, como $I(x_n) = x_n$ para todo n, segue que I não é compacto. □

Proposição 4.5. *Sejam H um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $T \in K(H)$. Então $0 \in \sigma(T)$.*

Demonstração. Suponha que $0 \notin \sigma(T)$, então T é invertível. Como T é compacto isso implica que é um operador limitado. Vejamos que T^{-1} também é limitado. De fato, tome (x_n) um sequência em H convergindo para o vetor nulo. Então, temos que a sequência $(T(x_n))$ também converge para o vetor nulo, já que T é contínua. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|T^{-1}(T(x))\| = \lim_{n\to\infty} \|I(x_n)\| = 0.$$

Pela Proposição 3.3 T^{-1} é limitada. Logo $I = T \circ T^{-1}$ é um operador compacto. Contradição.

□

Teorema 4.6. *Sejam $T \in K(H)$ e $\lambda \neq 0$. Então*

1. $\dim(\ker(T - \lambda I))$ *é finita.*

2. *Im*$(T - \lambda I)$ *é fechado.*

Demonstração. 1. Suponha que a dimensão de $M = \ker(T - \lambda I)$ é infinita. Como M é fechado, M é um espaço de Hilbert. Logo existe uma sequência ortonormal $(e_n) \subset M$. Como $e_n \in M$, então $T(e_n) = \lambda e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lambda \neq 0$ e os e_n's são ortogonais, a sequência (λe_n) não tem uma subsequência convergente, contradizendo o fato de T ser compacto.

2. Seja (y_n) uma sequência em $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ com $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Para cada número $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $x_n = (T - \lambda I)y_n$. Como o núcleo de $T - \lambda I$ é fechado, temos que $H = \ker(T - \lambda I) \oplus \ker(T - \lambda I)^{\perp}$. Assim, existem únicos $u_n \in \ker(T - \lambda I)$ e $v_n \in \ker(T - \lambda I)^{\perp}$ tal que $x_n = u_n + v_n$. Provemos que a sequência (v_n) é limitada. Suponha que não é limitada, então $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \infty$ (tomando uma subsequência caso seja necessário). Considere os vetores unitários $w_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|}$. Então, como (y_n) é limitada

$$(T - \lambda I)w_n = \frac{y_n}{\|v_n\|} \to 0.$$

Como T é compacto, temos que a sequência $(T(w_n))$ é convergente (tomando uma subsequência caso seja necessário). Como $\lambda \neq 0$, segue que a sequência (w_n) converge. Seja $w = \lim_{n\to\infty} w_n$. Como T e I são contínuas, segue que $w \in \ker(T - \lambda I)$. Por outro lado, como $w_n \in \ker(T - \lambda I)^{\perp}$, temos que

$$\|w_n - w\| = \langle w_n - w, w_n - w\rangle = \|w_n\|^2 + \|w\|^2 = 2,$$

que contradiz o fato de $w_n \to w$. Assim temos que a sequência (v_n) é limitada. Como T é compacto, segue que $(T(v_n))$ converge (ou uma subsequência). Mais ainda, temos que a sequência (v_n) também converge pois

$$v_n = \lambda^{-1}(T(v_n) - (T - \lambda I)(v_n)) = \lambda^{-1}(T(v_n) - y_n)$$

é a diferença de duas sequências convergentes. Seja $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Logo

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)v_n = (T - \lambda I)v_n.$$

Portanto, $y \in \mathrm{Im}(T - \lambda I)$, e assim $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ é fechado.

□

Teorema 4.7. *Para qualquer real $t > 0$, o conjunto de todos os autovalores distintos λ de T com $|\lambda| \geq t$ é finito.*

Demonstração. Suponhamos que existe $t_0 > 0$ tal que existe uma sequência de distintos autovetores (λ_n) com $\|\lambda_n\| \geq t_0$ para todo n. Seja (e_n) a respectiva sequência de autovetores unitários. Vamos a construir uma sequência limitada de vetores que não tem uma subsequência convergente. Seja $y_1 = e_1$. Para cada $k \geq 1$, o conjunto $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é linearmente independente, e o espaço vetorial $M_k = \mathrm{Sp}\{e_1, \ldots, e_k\}$ gerado por ele é um subespaço fechado, e está contido estritamente em M_{k+1}. Por outro lado, dado qualquer $x \in M_k$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tal que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k$. Logo

$$(T - \lambda_k I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1},$$

e assim temos que $(T - \lambda_k I)x \in M_{k-1}$. Agora, como $M_k \neq M_{k+1}$, existe um vetor unitário $y_{k+1} \in M_{k+1} \setminus M_k$ tal que $\langle y_{k+1}, x \rangle = 0$ e $\|y_{k+1} - x\| \geq 1$. Repetindo esta construção, temos uma sequência (y_n). Vejamos que não tem uma subsequência convergente. Sejam $n > m$ dois inteiros positivos, então

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = |\lambda_n| \underbrace{\|y_n - \lambda_n^{-1}(-(T - \lambda_n I)y_n + T(y_m))\|}_{\geq 1} \geq |\lambda_n| \geq t_0.$$

Logo temos uma contradição com o fato de T ser compacto. Portanto, temos que o conjunto de autovalores com módulo maior ou igual a t é finito, para todo $t > 0$. $\square$

Corolário 4.8. *O conjunto $\sigma_p(T)$ é enumerável. Seja (λ_n) é qualquer sequência de autovalores distintos de T. Então $\lim_{n\to\infty} \lambda_k = 0$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos autovalores λ com $|\lambda| > n^{-1}$ é finito. Logo o conjunto $\sigma_p(T)$ é enumerável. $\square$

Teorema 4.9 (Teorema 6.6 [3])**.** *Seja $T \in K(H)$. Então,* $\ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow$ *Im*$(I - T) = H$.

Corolário 4.10. *Seja $T \in B(H)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo. Então acontece só uma das seguintes possibilidades:*

1. *Ou $\lambda \in \rho(T)$ e $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$,*

2. *Ou $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.*

Demonstração. Primeiro vamos ver que $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$. Tome $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$. Então o operador $T - \lambda I$ é não invertível, em particular, $T\lambda^{-1} - I$ também não é invertível. Como $T\lambda^{-1}$ é compacto podemos aplicar o Teorema 4.9 e consequentemente $\ker(T\lambda^{-1} - I) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T\lambda^{-1} - I) = H$. Porém isso implica que $\ker(T - \lambda I) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T - \lambda I) = H$, ou seja, $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$. Note que $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$. E o mesmo vale para $\rho(T)$ e $\rho(T^*)$. Agora falta ver que as condições (1) e (2) não são satisfeitas simultaneamente. De fato, $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \notin \rho(T)$, o que valida o resultado. $\square$

Teorema 4.11 (Lema 30.8 [2]). *Seja $T \in B(H)$ compacto, auto-adjunto e não nulo. Então T possui um autovalor não nulo, pois $-\|T\|$ ou $\|T\|$ é um autovalor.*

O resultado abaixo é fundamental para conseguirmos concluir nosso objetivo que é demonstrar o Teorema Espectral. Ele nos mostra que é possível decompor um subespaço invariante como soma de subespaços ortogonais.

Teorema 4.12. *Se $\{\lambda_k\}$ é um conjunto não vazio de escalares complexos e $T \in B(H)$ é normal. Então*

$$M = \overline{\sum_{\lambda_k} \ker(T - \lambda_k I)}$$

reduz T e a restrição $T|_M \in B(M)$ também é normal.

Demonstração. Cada subespaço $N_{\lambda_k} = \ker(T - \lambda_k I)$ é invariante por T. De fato, seja $x \in N_{\lambda_k}$. Então:

$$(T - \lambda_k T)(T(x)) = (T^2 - \lambda_k T)(x) = T(T - \lambda_k I)(x) = 0,$$

e assim, $T(x) \in N_{\lambda_k}$. Note que a restrição de T a $\ker(T - \lambda_k I)$ é $\lambda_k I$. Portanto, $T|_{N_{\lambda_k}} \in B(N_{\lambda_k})$ e é normal. Então pela Proposição 3.35, N_{λ_k} reduz T, e N_{λ_k} é T^*-invariante. Seja $x \in M$, então podemos escrevê-lo de forma única (Teorema 2.43) como $x = \sum u_{\lambda_k}$ com $u_{\lambda_k} \in N_{\lambda_k}$. Como T e T^* são contínuos, então $T(x) = \sum T(u_{\lambda_k}) \in M$ e $T^*(x) = \sum T^*(u_{\lambda_k}) \in M$. Logo T restrita a M é normal. Portanto, pela Proposição 3.35, segue que M reduz T. □

No caso em que $\{\lambda_k\}$ é o conjunto de autovalores de T, temos que cada subespaço $\ker(T - \lambda_k I)$ é invariante por T.

Teorema 4.13. *(Teorema Espectral - Caso Complexo) Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{C}$ e $T \in B(H)$ um operador normal e compacto. Então existe uma família de projeções ortogonais $\{E_k\}$ sobre cada auto-espaço $\ker(T - \lambda_k I)$ satisfazendo*

$$T = \sum_k \lambda_k E_k.$$

Se a soma for infinita ela converge uniformemente no espaço $B(H)$.

Demonstração. Se $T \in B(H)$ é compacto e normal então o conjunto $\sigma_p(T)$ é não vazio. O primeiro passo é mostrar que o operador T possui uma quantidade suficiente de autovalores de modo que a soma de todos os autoespaços possam gerar todo o espaço de Hilbert H. Para isso vamos verificar que

$$H = \overline{\sum_{\lambda \in \sigma_{p(T)}} \ker(T - \lambda I)}$$

De fato, tome $M = \overline{\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \ker(T - \lambda I)}$ que é subespaço de H. Suponha $M \neq H$ então $M^\perp \neq \emptyset$. Considere $T|_{M^\perp}$ como a restrição de T sobre $M^\perp$. Como T é normal, pelo Teorema 4.12 temos que M reduz T, e assim $M^\perp$ é T-invariante. Portanto $T|_{M^\perp} \in B(M^\perp)$ é normal. Se T é compacto a restrição também tem que ser compacta. Assim, o operador $T|_{M^\perp}$ é normal e compacto em um espaço de Hilbert $M^\perp$ que é não nulo. Assim, $\sigma_p(T|_{M^\perp}) \neq \emptyset$, ou seja, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in M^\perp$ tal que $T|_{M^\perp}(x) = \lambda x$. Portanto $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $x \in \ker(T - \lambda I) \subset M$ que é uma contradição, pois $M \cap M^\perp = \{0\}$ e $0 \neq x \in M \cap M^\perp$. Logo $M = H$. Sendo T compacto o conjunto $\sigma_p(T)$ é enumerável e limitado. Então podemos escrever $\sigma_p(T) = \{\lambda_k\}$ onde $\{\lambda_k\}$ é o conjunto de todos os autovalores de T. Como T é normal o Teorema 3.42 nos diz que cada auto-espaço $\ker(T - \lambda_k I) \perp \ker(T - \lambda_j I)$ para $k \neq j$ e assim $(\ker(T - \lambda_k I))$ é uma sequência de subespaços ortogonais que geram H. Portanto cada $x \in H$ pode ser escrito da forma $x = \sum_k E_k(x)$. Como T é linear e contínua temos também que $T(x) = \sum_k TE_k(x)$ para todo $x \in H$. Mas cada $E_k(x) \in \mathrm{Im}(E_k) = \ker(T - \lambda_k I)$ e então $TE_k(x) = \lambda_k E_k(x)$, para cada k e para todo $x \in H$. Portanto, para cada $x \in H$ podemos escrever

$$T(x) = \sum_k \lambda_k E_k(x)$$

Se a soma for finita então acabou. Caso seja infinita, a identidade acima nos diz que $T \to \sum_k \lambda_k E_k$ quando $n \to \infty$. Isto é, a sequência $(\sum_k \lambda_k E_k(x))$ converge em $B(H)$. Vamos verificar que a convergência também é uniforme. De fato,

$$\begin{aligned}
\left\|(T - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k)(x)\right\|_H^2 &= \left\|_H \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k E_k(x)\right\|_H \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \|E_k(x)\|_H^2 \\
&\leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|E_k(x)\|_H^2 \\
&\leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k|^2 \|x\|_H^2
\end{aligned}$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Portanto,

$$0 \leq \left\|T - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k\right\|_{L(H)}^2 \leq \sup_{\|x\|=1} \left\|(T - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k)(x)\right\|_H^2 \leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k|^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T é compacto temos que (λ_k) é uma sequência de distintos autovalores tendendo a zero. Portando $\lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} |\lambda_k| = 0$ o que conclui o resultado final.

□

Esta versão do Teorema Espectral não exige que o espaço H seja separável. C seja, é possível conseguir uma base $\{e_k\}$ ortonormal de autovetores. Se H não for separável podemos escrever $H = \ker(T) \bigoplus \ker(T)^{\perp}$ onde $\ker(T)^{\perp}$ é a soma direta de cada autoespaço para os autovalores não nulos e $\ker(T)^{\perp}$ é separável, já que cada $\ker(T-\lambda_k I)$ tem dimensão finita, isso nos garante que é possível conseguir uma base α_k finita e ortonormal para cada autoespaço de modo que $\bigcup \alpha_k$ é base para $\ker(T)^{\perp}$, ou seja, $\ker(T)^{\perp}$ é separável, porém na condição de H não ser separável o espaço $\ker(T)$ também não é e conseguimos apenas uma base ortonormal para $Im(T) \subset H$. Se H for separável, então $\ker(T)$ também é. Assim, é possível obter uma base ortonormal de autovetores para todo o espaço H. Logo em seguida veremos uma versão do Teorema para operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert separável.

Teorema 4.14. *(Teorema Espectral - Caso Real) Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in B(H)$ um operador normal e auto-adjunto. Então, H possui uma base ortonormal de autovetores de T.*

Demonstração. Sendo T auto-adjunto temos que autovetores associados autovalores distintos são ortogonais. Assim, se $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ então $\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I)$ quando $\lambda \neq \mu$. Logo, podemos escrever o conjunto

$$M = \bigoplus_{0 \neq \lambda_k \in \sigma(T)} \ker(T - \lambda_k I).$$

Tome $x \in M^{\perp}$. Então para todo $y \in \ker(T - \lambda_k I)$ com $\lambda_k \neq 0$, tem-se que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \lambda_k \langle x, y\rangle = 0$, o que nos diz que $T(x) \in \ker(T-\lambda_k I)^{\perp}$ e pela generalidade de λ_k segue que $T(x) \in M^{\perp}$, ou seja, $M^{\perp}$ é invariante por T. Agora veremos que $\ker(T) = M^{\perp}$. De fato, se $x \in \ker(T)$ e $y \in \ker(T - \lambda_k I)$, então $\lambda_k\langle x, y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$, assim $\ker(T) \subset M^{\perp}$. Como T é auto-adjuto e M é invariante, então $M^{\perp}$ também é invariante por T. Além disso a restrição $S = T|_{M^{\perp}}$ é um operador auto-adjunto e compacto. Se $S \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo e $w \in M^{\perp}$ um vetor não nulo tais que $S(w) = \lambda w$, assim, por construção $w \in M$ que é um absurdo. Portanto $M^{\perp} = \ker(T)$. Sendo $\ker(T)$ fechado podemos escrever também $H = M \oplus M^{\perp}$. Além disso podemos tomar α uma base ortonormal de $\ker(T)$, pois $\ker(T)$ é separável. Como $\dim\, \ker(T - \lambda_k I) = d_k < \infty$ para $\lambda_k \neq 0$ podemos tomar β_k sendo uma base ortonormal para cada $\ker(T - \lambda_k I)$ e consequentemente o conjunto

$$\left[\bigcup \beta_k\right] \cup \alpha$$

é uma base ortonormal de autovetores de T. $\square$

Para o operador normal a condição do espaço vetorial ser sobre um corpo complexo é necessária. Tome por exemplo, o operador $T \in B(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(x, y) = (y, -x)$. É fácil verificar que $T^*(x, y) = (-y, x)$. Além disso,

$$T(T^*(x, y)) = T(-y, x) = (x, y) = T^*(y, -x) = T^*(T(x, y)),$$

e assim, T é normal e compacto, pois é um operador em um espaço de dimensão finta. Mas T não é diagonalizável em $\mathbb{R}^2$, pois seus autovalores são $\lambda_1 = -i$ e $\lambda_2 = i$. Logo, o operador não possui base ortonormal de autovetores.

4.2 Aplicação do Teorema Espectral

Na seção anterior demonstramos um importante resultado da Álgebra Linear que nos diz que um operador possui uma base ortonormal de autovetores quando está sob as condições de auto-adjunto, compacto e definido em um espaço de Hilbert. Agora iremos expandir o Teorema a uma forma bilinear. Essa aplicação terá grande importância posteriormente para podermos aplicar o Teorema Espectral no operador Laplaciano. Utilizaremos este caminho para encontrar soluções de uma determinada Equação Diferencial Parcial. Para isso, precisamos das seguintes condições.

Sejam H e K espaços de Hilbert de dimensão infinita. Suponha que o produto interno em H seja denotado por $\langle u, v\rangle_H$ e o produto interno em K denotado por $\langle u, v\rangle_K$. Suponha também que,

1. K é continuamente e densamente mergulhado em H, ou seja, existe uma injeção linear e contínua $i : K \to H$ com $i(K)$ denso em H.

2. A injeção é compacta.

3. Temos um mapa $a : K \times K \to \mathbb{K}$ que é bilinear, contínuo e simétrico.

4. a é elíptico em K, ou seja, $a(u, u) \geq C\|u\|_K^2$ $\forall u \in K$ e para algum $C > 0$.

   Uma consequência da simetria e elipcidade de a é que $a(u, v)$ define um produto interno em K, no qual é uma norma equivalente a norma $\|\cdot\|_K$ em K.

Teorema 4.15. *Dadas as condições acima temos que existe uma sequência de vetores $\{u_1, u_2, \cdots\} \in K$ e números*

$$0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \to \infty$$

tais que:

- *$\{u_j\}$ é um autovetor de $a(\cdot,\cdot)$ com autovalor γ_j, ou seja, $a(u_j, v) = \gamma_j\langle u_j, v\rangle_H$ $\forall v \in K$,*

- *$\{u_j\}$ é uma base ortonormal para H,*

- *$\{u_j/\sqrt{\gamma_j}\}$ é uma base ortonormal para K com respeito ao produto interno $a(\cdot,\cdot)$.*

  A decomposição

$$f = \sum_j \langle f, u_j\rangle_H u_j$$

converge em H para cada $f \in H$, e converge em K para cada $f \in K$.

Demonstração. Vamos começar com a seguinte afirmação.

Afirmação. *Para cada $f \in H$ existe um único $u \in K$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_H \quad v \in K.$$

Fixe $f \in H$ e defina o funcional linear $F(v) = \langle v, f\rangle_H$, com $v \in K$. Vamos ver que F é limitado. De fato,

$$\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \|v\|_H \|f\|_H \\
&\leq C\|v\|_K \|f\|_H, \quad \text{pois } K \hookrightarrow H \\
&\leq Ca(v,v)^{\frac{1}{2}} \|f\|_H, \quad \text{pois } C\|v\|_K^2 \leq a(v,v)
\end{aligned}$$

Logo, $|F(v)| \leq Ca(v,v)^{\frac{1}{2}}$. Pelo Teorema de Riesz o funcional F pode ser escrito como um produto interno em K com respeito a forma bilinear a. Consequentemente, existe um único $u \in K$ tal que

$$F(v) = a(v,u) \quad \forall v \in K.$$

Defina $B : H \to K$ dado por $B(f) = u$, onde u é o elemento da representação de Riesz. Temos que B está bem definido e é linear. Vejamos que B é limitado.

$$a(u,u) = |F(u)| \leq |\langle u, f\rangle_H| \leq Ca(u,u)^{\frac{1}{2}} \|f\|_H.$$

Porém, $C\|u\|_K^2 \leq a(u,u) \Rightarrow \|u\|_K^2 \leq C^{-1}a(u,u)$. Sendo $B(f) = u$ temos

$$\|B(f)\|_K^2 \leq C^{-1}a(u,u) \leq C^{-1}a(u,u)^{\frac{1}{2}} \|f\|_H.$$

Se $a(u,u) = 0$, acabou. Suponha $a(u,u) \neq 0$. Assim,

$$a(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f\|_H \Rightarrow \|B(f)\|_K \leq C\|f\|_H.$$

Logo, B é limitado. Como $K \hookrightarrow H$ temos que $B : H \to H$ também é compacto. Vejamos que B é auto-adjunto. Note que, para quaisquer $f, g \in H$ temos

$$\begin{aligned}
\langle B(f), g\rangle_H &= \overline{\langle g, B(f)\rangle_H} \\
&= \overline{a(B(f), B(g))} \\
&= a(B(g), B(f)) \\
&= \langle f, B(g)\rangle_H.
\end{aligned}$$

Logo B é um operador auto-adjunto. Portanto, podemos aplicar o Teorema Espectral sobre o operador B e consequentemente existe uma base ortonormal de autovetores $\{u_j\}$ em H tal que

$$B(u_j) = \lambda_j u_j$$

com $\lambda_j \to 0$. Como B é injetiva, já que se para todo $v \in K$ tivermos $a(v, B(f)) = \langle v, f\rangle_H = 0$ então $f = 0$. Assim $\lambda_j \neq 0$ para todo j, assim podemos dividir por λ_j e $B(u_j) = \lambda_j u_j$ nos diz que $u_j = B(u_j/\lambda_j)$, ou seja, cada autovetor é um elemento da imagem de B, logo $u_j \in K$.

Os autovalores de B são positivos, pois

$$0 < \|u_j\|_H^2 = \langle u_j, u_j\rangle_H = a(B(u_j), u_j) = \lambda_j a(u_j, u_j),$$

como $0 \leq a(u, u)$ para todo $u \in K$ temos que $\lambda_j > 0$.

Em particular, tomando $\gamma_j = 1/\lambda_j$ então $\gamma_j \to \infty$ e $\lambda_j a(u_j, v) = \langle u_j, v\rangle_H$ nos diz que

$$a(u_j, v) = \gamma_j \langle u_j, v\rangle_H \ \ \forall v \in K.$$

Finalmente o conjunto $\{u_j/\sqrt{\gamma_j}\}$ é ortonormal com respeito a forma bilinear a, visto que

$$a(u_j/\gamma_j, u_k/\gamma_k) = \gamma_j \langle u_j/\gamma_j, u_k/\gamma_k\rangle_H = \frac{\gamma_j}{\sqrt{\gamma_j}\sqrt{\gamma_k}}\delta_{ik}.$$

Esse conjunto ortonormal é completo em K, pois se $a(u_j, v) = 0$ para todo j então $\langle u_j, v\rangle_H = 0$ o que implica $v = 0$. Portanto, para cada $f \in K$ podemos decompor

$$f = \sum_j \langle f, u_j/\sqrt{\gamma_j}\rangle_H u_j/\sqrt{\gamma_j},$$

ou seja,

$$f = \sum_j a(f, u_j/\sqrt{\gamma_j}) u_j/\sqrt{\gamma_j}$$

com convergência em K para todo $f \in K$ e converge em H para todo $f \in H$, dado que $a(f, u_j) = \gamma_j \langle f, u_j\rangle_H$. $\square$

5 Aplicação do Teorema Espectral a EDP

Neste capítulo, consideraremos uma equação diferencial parcial particular (problema de Dirichlet), e mostraremos como o Teorema Espectral pode ser usado para estudá-la. Concretamente, associaremos a esta EDP um espaço de Hilbert H e um operador $B \in K(H)$, de tal forma que os autovetores correspondentes a B sejam as soluções da equação. Para tal fim, precisaremos introduzir alguns resultados e propriedades dos espaços de Sobolev.

5.1 Problema de Dirichlet

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, e considere a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega \\ u = 0 \ \ \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

onde Δ é o operador de Laplace: $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$, e λ um número real. Por sua condição de contorno ($u = 0$), esta EDP é chamada Problema de Dirichlet.

Definição 5.1. Uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaz (5.1) é chamada de solução clássica do problema de Dirichlet.

Seja $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções diferenciáveis em Ω com suporte compacto, ou seja, funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis tais que o conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \ : \ f(x) \neq 0\}}$$

é compacto. Como o operador Δ é linear, a equação $-\Delta u = \lambda u$ pode ser considerada um problema de autovalores e autovetores no espaço $C_0^\infty(\Omega)$, no seguinte sentido: exitem pares da forma (λ, u) com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que a Equação (5.1) seja satisfeita?

Porém, não estamos no contexto do Teorema Espectral, pois o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ não é completo, já que não é fechado no espaço $L^2(\Omega)$, (alias, $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, ver Corolário 4.23 de [3]). Por outro lado, devido à condição de diferenciabilidade necessária para aplicar o Laplaciano, o operador Δ não está definido em todo o espaço $L^2(\Omega)$.

Portanto, vamos achar um espaço de Hilbert H adequado, junto com um operador $B \in K(H)$ auto-adjunto, de tal maneira que os autovalores e autovetores de B sejam soluções do Problema de Dirichlet.

5.2 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev, denotados por $W^{1,p}(\Omega)$, são subespaços de $L^p(\Omega)$ onde habitam muitas soluções para problemas de equações diferenciais. Estes espaços de funções são definidos a partir de uma condição de *diferenciabilidade fraca, dada em termos da integração.*

As soluções (clássicas) de equações diferenciáveis são funções diferenciáveis em algum aberto Ω, ou seja, são funções $f \in C^k(\Omega)$, para algum k. Em algumas situações é possível, e útil, transformar a equação diferencial inicial, numa versão *fraca*, onde são *relaxadas* algumas condições de diferenciabilidade. As soluções de uma tal formulação são chamadas de *soluções fracas*, e tem-se que toda solução da equação clássica é deste tipo. Os espaços de Sobolev são o ambiente natural para achar as soluções fracas de equações diferenciáveis.

Seja $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ o espaços das funções localmente integráveis, ou seja, funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que são integráveis sobre conjuntos compactos de Ω. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, definimos o operador diferencial $D^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Definição 5.2. Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Se existe uma função $u^{(\alpha)} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u^{(\alpha)}\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi$$

para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dizemos que u tem uma derivada parcial fraca de ordem α, que denotamos $D^\alpha u := u^{(\alpha)}$.

Observação. *A ideia de derivada fraca é pensar na derivada em termos da regra de integração por partes. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo fechado. Se u e v são duas funções diferenciáveis que se anulam na fronteira de I, a regra de integração por partes diz que*

$$\int_I u'v = -\int_I uv'.$$

Assim, u tem derivada fraca se existe uma função Du tal que para toda função v

$$\int_I Duv = -\int_I uv'.$$

Quando a função é diferenciável no sentido usual, a derivada fraca é a derivada usual. Esta ideia de pensar na derivada em termos da integral por partes, pode ser estendida para abertos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição 5.3. O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ sobre Ω é definido por

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \;:\; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ para } |\alpha| \leq 1\}.$$

Note que $u \in H^1(\Omega)$ se e somente se existem funções $g_1, \ldots, g_n \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi,$$

para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $i = 1, \ldots, n$.

Observação. *Os espaços de Sobolev são definidos de forma geral por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ D^\alpha(u) \in L^p(\Omega) \ \forall \ |\alpha| \leq k\}.$$

Para este trabalho só será necessário o $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Teorema 5.4. *O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

para todo par de funções $u, v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Pela linearidade da derivada parcial fraca, $H^1(\Omega)$ é um espaço vetorial. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ é soma de produtos internos, é um produto interno. Vejamos que é completo. Seja $(u_n) \in H^1(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Em particular, (u_n) é uma sequência de Cauchy no espaço $L^2(\Omega)$. Seja $u = \lim\ u_n$ em $L^2(\Omega)$. De maneira similar, temos que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$, logo converge para uma função $u^{(\alpha)}$. Mostremos que $D^\alpha u = u^{(\alpha)}$. Por definição de $D^\alpha u_n$, dada qualquer função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_n = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi.$$

Por convergência no espaço $L^2(\Omega)$, podemos tomar o limite quanto $n \to \infty$ a ambos lados, a assim temos

$$\int_\Omega \varphi u^\alpha = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi.$$

□

Teorema 5.5. *O espaço $H^1(\Omega)$ é separável.*

Demonstração. Considere o multi-índice $\alpha^i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$, e defina a seguinte aplicação

$$H^1(\Omega) \to \underbrace{L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)}_{n+1}, \quad u \to (u, D^{\alpha^1} u, \ldots, D^{\alpha^n}).$$

Note que esta aplicação é isométrica, ou seja, preserva o produto interno, e assim $H^1(\Omega)$ pode ser considerado um subespaço fechado de $n+1$ cópias de $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$ é separável, segue que $H^1(\Omega)$ também é. □

Devido à condição de contorno que temos em nossa equação diferencial ($u = 0,$ em $\partial\Omega$), introduzimos o seguinte subconjunto de $H^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

o fecho do espaço das funções diferenciáveis em Ω com suporte compacto, em relação a norma em $H^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é fechado, segue que é um espaço de Hilbert separável.

Os seguintes dois teoremas fornecem propriedades necessárias para este trabalho sobre o espaço $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 5.6 (Teorema 9.17 [3])**.** *Suponha que Ω é um aberto limitado com fronteira de classe C^1 [1]. Seja $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então $u = 0$ em $\partial\Omega$ se e somente se $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Teorema 5.7 (Corolário 6.11 [4])**.** *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então a inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta.*

Com a introdução do espaço $H_0^1(\Omega)$, vamos reformular o Problema de Dirichlet inicial, numa versão fraca.

Definição 5.8. Uma solução fraca do Problema de Dirichlet (5.1) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição 5.9. *Se u é uma solução clássica de (5.1) então é uma solução fraca.*

Demonstração. Seja $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $u = 0$ em $\partial\Omega$. Pelo Teorema 5.6, segue que $u \in H_0^1(\Omega)$. Como u satisfaz (5.1), segue que $-\Delta u = \lambda u$. Por outro lado, a Primeira Identidade de Green implica que

$$\langle \Delta u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

para toda função $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ Assim, segue que u é solução fraca do Problema de Dirichlet. □

Vejamos agora como recuperar a solução clássica da Equação (5.1). Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ e suponha que Ω é tem fronteira de classe C^1. Então pelo Teorema 5.6, temos que $u = 0$ em $\partial\Omega$. Se u é uma solução fraca do Problema de Dirichlet, então para toda função $v \in C_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega (\Delta u + \lambda u)v = 0.$$

Assim, $\Delta u + \lambda u = 0$ para quase todo ponto em Ω. Como $u \in C^2(\overline{\Omega})$, segue que $-\Delta u = \lambda u$ em Ω, e portanto, u é solução clássica da Equação (5.1).

[1] Fronteira de classe C^1 significa que as parametrizações locais dos pontos da fronteira são de classe C^1.

5.3 Solução do Problema de Dirichlet usando o Teorema Espectral

Agora que temos toda a teoria necessária de espaços de Sobolev, podemos estudar a equação diferencial (5.1) sob ponto de vista do Teorema Espectral.

Seja $H = L^2(\Omega)$ com o produto interno $\langle .,. \rangle_{L^2(\Omega)}$ e $K = H_0^1(\Omega)$ com o produto interno $\langle .,. \rangle_{H_0^1(\Omega)}$. Como $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ segue que $H_0^1(\Omega)$ também é denso em $L^2(\Omega)$.

O espaço $H_0^1(\Omega)$ está mergulhado em $L^2(\Omega)$, já que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

e pelo Teorema 5.7, temos que o mergulho $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacto.

A forma bilinear $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + uv = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}$$

é claramente simétrica e elíptica, já que $a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ (lembremos que a é elíptico em um espaço de Hilbert K se $a(u,u) \geq C\|u\|_K$, para algum $C > 0$).
O Teorema 4.15 nos diz que existe uma base $\{u_j\}$ ortonormal de autofunções em $L^2(\Omega)$, correspondentes a autovalores $\gamma_j > 0$. Colocando $\gamma_j = \lambda_j + 1$, o Teorema 4.15 também diz que, para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$, vale

$$\langle u_j, v \rangle_{H^1(\Omega)} = (\lambda_j + 1)\langle u_j, v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Reescrevendo teremos

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v = \lambda_j \int_\Omega u_j v$$

e pela identidade de Green

$$\langle \Delta u_j, v \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla u_j, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

assim, segue que $\langle \Delta u_j + \lambda_j u_j, v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Logo $\Delta u_j + \lambda_j u_j = 0$. Portanto, u_j é uma solução clássica para o Problema de Dirichlet. A condição $u_j = 0$ em $\partial\Omega$ é satisfeita já que $u_j \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, cada λ_j é positivo, visto que,

$$\lambda_j \int_\Omega u_j^2 = \int_\Omega |\nabla u_j|^2$$

com $u_j \neq 0$. Consequentemente,

$$0 \leq \lambda_j = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_j|^2}{\displaystyle\int_\Omega u_j^2}.$$

Agora veremos que a desigualdade acima é estrita, ou seja, $\int_\Omega |\nabla u_j|^2 \neq 0$.
Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u^2 = -2\int_\Omega x_j u \frac{\partial u}{\partial x_j}\\ &\leq 2(\max_{x\in\overline{\Omega}} |x|)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|\partial u/\partial x_j\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\partial u/\partial x_j\|_{L^2(\Omega)}$$

logo, se $|\nabla u_j|^2 = 0$ então $u_j = 0$ que implica em $\lambda_j > 0$. Além disso, $\lambda_j \to \infty$, uma vez que $j \to \infty$.

6 Considerações finais

Neste Trabalho de Conclusão de Curso estudamos Espaços de Hilbert e suas propriedades, vimos que é possível decompor o espaço em soma direta de subespaços ortogonais, mesmo que eles tenham dimensão infinita. Essa estrutura geométrica teve grande importância para conseguirmos demonstrar os resultados finais, em particular, apresentamos o Teorema Espectral para operadores normais e compactos. O resultado pode ser encontrado em [7], Teorema 3.3, onde não necessariamente conseguimos uma base ortogonal par todo o espaço H, mas para a imagem do operador que é um subespaço de H. Provamos o resultado para quando o operador é auto-adjunto (Teorema 30.13 [2]) e quando temos a condição do espaço H ser separável é possível obter uma base ortonormal para o espaço H.

Estes Teoremas foram generalizações de resultados para operadores em espaços vetoriais com dimensão finita e essa generalização nos permitiu ainda aplicar o Teorema em uma forma bilinear que com a teoria de espaços de Sobolev foi possível conseguir condições para provarmos que é possível achar uma base ortonormal de autofunções em Equações Diferenciais Parciais, em particular o Problema de Dirichlet.

Referências

1 LIMA, E. L. Espaços métricos. 2. ed. Brasília: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. Citado na página 3.

2 OLIVEIRA, C. R. D. Introdução à análise funcional. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 5, 37 e 49.

3 BREZIS, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York: Springer Science & Business Media, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 5, 11, 36, 43 e 46.

4 BORTHWICK, D. Spectral Theory. Gewerbestrasse, Switzerland: Springer, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 5, 6, 27 e 46.

5 LIMA, E. L. Análise Real - Funções de Uma Variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Citado na página 6.

6 RYNNE, B.; YOUNGSON, M. A. Linear functional analysis. London: Springer Science & Business Media, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 19, 27 e 28.

7 KUBRUSLY, C. S. Spectral theory of operators on Hilbert spaces. New York: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 49.