

Rayan Gustavo Oliveira Jucá Lima

# Propriedades $A_\alpha$ -espectrais de Operações em Grafos

Volta Redonda, RJ

2021

Rayan Gustavo Oliveira Jucá Lima

## **Propriedades $A_\alpha$ -espectrais de Operações em Grafos**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Curso de Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Ebling Brondani

Coorientador: Profa. Dra. Francisca Andrea Macedo França

Volta Redonda, RJ

2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BAVR  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

L732p Lima, Rayan Gustavo Oliveira Jucá  
Propriedades A-alpha-espectrais de Operações em Grafos /  
Rayan Gustavo Oliveira Jucá Lima ; André Ebling Brondani,  
orientador ; Francisca Andrea Macedo França, coorientadora.  
Volta Redonda, 2021.  
70 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-  
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências  
Exatas, Volta Redonda, 2021.

1. Matriz A-alpha. 2. Produto de Grafos. 3. Corona de  
Grafos. 4. Produção intelectual. I. Brondani, André Ebling,  
orientador. II. França, Francisca Andrea Macedo,  
coorientadora. III. Universidade Federal Fluminense.  
Instituto de Ciências Exatas. IV. Título.

CDD -

Rayan Gustavo Oliveira Jucá Lima

## **Propriedades $A_\alpha$ -espectrais de Operações em Grafos**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Volta Redonda, 03 de maio de 2021:

---

**Prof. Dr. André Ebling Brondani** – UFF  
Orientador

---

**Profa. Dra. Francisca Andrea Macedo França** – UFF  
Coorientadora

---

**Prof. Dr. Carlos Henrique Pereira do Nascimento** – UFF

---

**Prof. Dr. Fernando Colman Tura** – UFSM

Volta Redonda, RJ  
2021

# Agradecimentos

Agradeço meus pais, Gerardo Jucá e Juliana Oliveira, por todo apoio, carinho e compreensão durante toda a minha vida e, em especial, nesses oito semestres de faculdade e para a conclusão deste trabalho.

Agradecimentos à todos os amigos que conheci na universidade, em especial, à Guilherme Saroka, Guylherme Mattos, João Marcos, João Pedro, Joel Marques, Lucas Oliveira, Mariana Macedo, Nelson Júnior, Orlando Warlem, Patrick Alves, Robson Júnior, Tais Carvalho e à tantos outros alunos do ICEX de Volta Redonda, por deixarem toda a jornada muito mais fácil, leve e divertida.

Minha gratidão ao meu orientador, André Brondani, e à minha coorientadora, Francisca França, e aos demais professores que contribuíram para a minha formação, por todos os ensinamentos e conselhos que recebi.

*“Jogue  
Somente para ganhar  
E não para perder  
A vida é assim  
Cheia de dificuldades  
Fale o que quiser”  
(Ednaldo Pereira, Vale Nada Vale Tudo)*

# Resumo

Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$ ,  $A(G)$  a sua matriz de adjacência e  $D(G)$  a matriz diagonal de graus de  $G$ . Em 2017, para cada  $\alpha$  em  $[0, 1]$ , Nikiforov definiu a matriz  $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G)$ . Neste trabalho, estudamos as propriedades do espectro da matriz  $A_\alpha$  de grafos obtidos a partir da aplicação de diferentes tipos de operações produtos e corona em grafos.

**Palavras-chave:** Matriz  $A_\alpha$ . Produto de Grafos. Corona de Grafos.

# Abstract

Let  $G$  be a graph of order  $n$ ,  $A(G)$  its adjacency matrix and  $D(G)$  the diagonal matrix of degrees of  $G$ . In 2017, for every  $\alpha$  in  $[0, 1]$ , Vladimir Nikiforov defined the matrix  $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G)$ . In this work, we study the properties of the spectrum of the matrix  $A_\alpha$  of graphs obtained from the application of different types of products and corona operations in graphs.

**Keywords:** Matrix  $A_\alpha$ . Product of Graphs. Corona of Graphs.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo $G$ . . . . .	18
Figura 2 – Grafos não simples . . . . .	19
Figura 3 – Grafo $G$ . . . . .	19
Figura 4 – Grafo completo $K_5$ . . . . .	20
Figura 5 – Grafo cíclico $C_3$ . . . . .	20
Figura 6 – Grafo caminho $P_4$ . . . . .	21
Figura 7 – Um grafo e seu complementar . . . . .	21
Figura 8 – Grafo 3-regular . . . . .	21
Figura 9 – Grafo e seu grafo linha . . . . .	21
Figura 10 – Grafo 3-partido $G(X_1, X_2, X_3)$ e grafo bipartido completo $K_{3,2}$ . . . . .	22
Figura 11 – Grafos isomorfos . . . . .	22
Figura 12 – Grafos com 5 vértices . . . . .	23
Figura 13 – Grafo com 9 arestas . . . . .	24
Figura 14 – Grafo soma $C_3 + P_3$ . . . . .	34
Figura 15 – Grafo junção $C_3 \vee P_3$ . . . . .	35
Figura 16 – Grafo produto cartesiano $P_3 \times C_3$ . . . . .	39
Figura 17 – Grafo produto direto $P_3 \odot C_3$ . . . . .	40
Figura 18 – Grafo produto forte $P_3 \otimes C_3$ . . . . .	42
Figura 19 – Grafo composição $P_3[C_3]$ . . . . .	44
Figura 20 – Grafo duplicação $Du(K_4)$ e $Du(K_2)$ . . . . .	47
Figura 21 – Grafo coroa $K_4 \circ K_2$ . . . . .	48
Figura 22 – Grafo duplicação coroa $K_4 \boxplus K_2$ . . . . .	50
Figura 23 – Grafo duplicação vizinhança coroa $K_4 \boxtimes K_2$ . . . . .	53
Figura 24 – Grafo duplicação aresta coroa $K_4 \boxplus K_2$ . . . . .	56

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS INICIAIS</b>	<b>2</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria de Matrizes</b>	<b>2</b>
2.1.1	Produto de Kronecker	11
<b>2.2</b>	<b>Teoria de Grafos</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Teoria Espectral de Grafos</b>	<b>22</b>
2.3.1	Matriz de Adjacência	23
2.3.2	Matriz Laplaciana sem Sinal	26
2.3.3	Matriz $A_\alpha$	29
<b>3</b>	<b>PROPRIEDADES <math>A_\alpha</math>-ESPECTRAIS DE PRODUTOS DE GRAFOS</b>	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>União de Grafos</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>Junção de Grafos</b>	<b>35</b>
<b>3.3</b>	<b>Produto de Grafos</b>	<b>37</b>
3.3.1	Produto Cartesiano de Grafos	38
3.3.2	Produto Direto de Grafos	39
3.3.3	Produto Forte de Grafos	42
3.3.4	Produto Composição de Grafos	44
<b>4</b>	<b>PROPRIEDADES <math>A_\alpha</math>-ESPECTRAIS DE OPERAÇÕES CORONA</b>	<b>46</b>
<b>4.1</b>	<b>Duplicação de Grafos</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Corona de Grafos</b>	<b>48</b>
<b>4.3</b>	<b>Duplicação Corona de Grafos</b>	<b>49</b>
<b>4.4</b>	<b>Duplicação Vizinhaça Corona de Grafos</b>	<b>52</b>
<b>4.5</b>	<b>Duplicação Aresta Corona de Grafos</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>60</b>

# 1 Introdução

Os grafos, de maneira não rigorosa, são um conjunto de vértices ligados por um conjunto de arestas. Eles podem ser vistos representados em várias situações no nosso dia a dia, como nas linhas de trens da sua cidade ou por trás do algoritmo da rede social.

Através dos trabalhos publicados na Teoria de Grafos foram definidas distintas operações sobre estes a fim de se obter novos grafos. Por exemplo, quando uma empresa de transporte ferroviário quer unir duas de suas linhas de transporte para facilitar seus negócios. Essa união pode ser vista como uma operação entre grafos. Neste projeto, apresentaremos algumas operações entre grafos e utilizaremos a Teoria Espectral de Grafos para a interpretação e resolução de problemas.

Com sua primeira aplicação em Química [1], e depois se espalhando para diversas outras áreas, como Física, Ciência da Computação, Biologia, e até Economia, a Teoria Espectral de Grafos busca encontrar autovalores de matrizes associadas a grafos e estudar como eles se relacionam com as propriedades estruturais dos grafos. Na literatura, diversas matrizes associadas a grafos já tiveram seus espectros estudados, em particular, as matrizes de adjacência, Laplaciana e Laplaciana sem sinal.

A matriz  $A_\alpha$  é uma maneira de generalizar as matrizes de adjacência e Laplaciana sem sinal. Ela é uma combinação linear convexa da matriz dos graus com a matriz de adjacência de um grafo. Ela foi proposta por Vladimir Nikiforov, em 2017, quando contribuiu para um novo Teorema Espectral de Turán, [2]. O objetivo desse projeto é estudar o espectro da matriz  $A_\alpha$  associada ao grafo resultante de certas operações entre grafos e como esse espectro se relaciona com o espectro dos grafos operados.

No segundo capítulo, apresentaremos os conceitos iniciais da Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e da Teoria Espectral de Grafos que serão utilizados ao longo do trabalho. No terceiro capítulo, estudamos o  $A_\alpha$ -espectro de grafos resultantes das seguintes operações em grafos: União de grafos; Junção de grafos; Produto cartesiano de grafos; Produto direto de grafos; Produto forte de grafos e Produto composição de grafos. No quarto capítulo, apresentamos o  $A_\alpha$ -espectro das operações Duplicação, Corona e de operações derivadas delas: Duplicação corona; Duplicação vizinhança corona e Duplicação aresta corona, sendo que para estas últimas operações, contribuimos com alguns resultados originais. No último capítulo, apresentamos as considerações finais do trabalho.

## 2 Conceitos Iniciais

Neste capítulo serão apresentados os conceitos iniciais da literatura sobre a Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e da Teoria Espectral de Grafos, que serão necessários para a compreensão do texto.

### 2.1 Teoria de Matrizes

Nesta seção serão apresentados resultados sobre a Teoria de Matrizes utilizados ao longo do trabalho. Para maiores detalhes ver [3] e [4].

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Uma *matriz*  $A$  sobre  $\mathbb{K}$  é um arranjo em um retângulo com  $n$  linhas e  $m$  colunas,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

onde  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  é a entrada da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $A$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Neste caso, a matriz é dita *de ordem*  $n \times m$  e será denotada por  $A = (a_{ij})_{n \times m}$ . Quando houver necessidade, utilizaremos a notação  $[A]_{ij}$  para representar a entrada  $a_{ij}$  de  $A$ .

Denotemos por  $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  o conjunto das matrizes de ordem  $n \times m$  com entradas em  $\mathbb{K}$ . Se  $n = m$ , a matriz é dita *matriz quadrada* de ordem  $n$  e  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  denota o conjunto formado por tais matrizes.

Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ . A *soma das matrizes*  $A$  e  $B$  é a matriz  $A + B$  de ordem  $n \times m$  cujas as entradas são definidas por  $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$ , onde  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Sejam  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . A *multiplicação por escalar* é a matriz  $\lambda A$  de ordem  $n \times m$  cujas as entradas são dadas por  $[\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij}$ , onde  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Sejam  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ . O *produto das matrizes*  $A$  e  $B$  é a matriz  $AB$  de ordem  $n \times p$  cujas as entradas são definidas por  $[AB]_{ik} = \sum_{j=1}^m [A]_{ij}[B]_{jk}$ , onde  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

**Exemplo 2.1.** Se  $A$  e  $B$  são as matrizes dadas a seguir,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{então}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

De forma geral, o produto de matrizes é não comutativo, neste caso, temos  $AB \neq BA$ .

Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . A *diagonal principal* de  $A$  é o conjunto das entradas  $a_{ii}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Se  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ , dizemos que  $A$  é uma *matriz diagonal* e denotamos por  $A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ . No caso em que todas as entradas da diagonal principal são iguais a 1 e as demais iguais a 0, denotamos a matriz diagonal por  $I_n$ . O *traço* de  $A$ ,  $\text{tr}(A)$ , é definido como  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

Uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é *triangular superior* se  $a_{ij} = 0$  para todo  $i > j$ . Se  $a_{ij} = 0$  para todo  $i < j$ , então  $A$  é *triangular inferior*.

**Exemplo 2.2.** Observe que as matrizes  $D = \text{diag}\{2, 8, -1\}$  e a matriz identidade de ordem 2 são triangulares superiores.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ . A *matriz transposta* de  $A$ ,  $A^T$ , é a matriz de ordem  $m \times n$  cujas as entradas são dadas por  $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ . Se  $A = A^T$ ,  $A$  é dita *matriz simétrica*. A *matriz conjugada* de  $A$ ,  $\bar{A}$ , é a matriz de ordem  $n \times m$  cujas as entradas são definidas por  $[\bar{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}$ , onde  $\overline{[A]_{ij}}$  é o conjugado do número complexo  $[A]_{ij}$ . Chamamos  $A$  de *hermitiana* se  $A = \overline{A^T}$ . Para simplificar a notação, denotamos por  $A^* = \overline{A^T}$ .

**Exemplo 2.3.** Sejam  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$  e  $B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$  matrizes dadas abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7i \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 + 3i \\ i & 0 & 2 \\ 1 - 3i & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Note que  $A$  é não hermitiana e simétrica e  $B$  é hermitiana e não simétrica.

Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A$  é igual a sua matriz conjugada e sua matriz transposta conjugada coincide com sua matriz transposta, ou seja,  $A = \bar{A}$  e  $A^* = A^T$ , então  $A$  é simétrica se e somente se  $A$  é hermitiana. Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ , dizemos que  $A$  é *unitária* quando

$AA^* = A^*A = I_n$ . Note que se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é unitária, então sua inversa é igual a sua matriz transposta conjugada, ou seja,  $A^{-1} = A^*$ . Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $A$  é unitária, então  $A$  é dita *ortogonal*.

**Exemplo 2.4.** As matrizes  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$  e  $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

são unitárias e, em particular,  $B$  é ortogonal.

Denominamos por *n-vetor coluna* (*n-vetor linha*) a matriz que possui somente uma coluna (linha) e  $n$  linhas (colunas). Ao longo do texto, um *n-vetor coluna* é simplesmente denominado por vetor com  $n$  coordenadas. Dois vetores,  $u$  e  $v$ , são *ortogonais* se  $u^T v = 0$ . A matriz de ordem  $n \times m$  cujas entradas são iguais a 1 é denotada por  $J_{n \times m}$  e  $J_n$  denota o *n-vetor coluna* cujas coordenadas são iguais a 1. Observe que se  $u$  e  $J_n$  são ortogonais, então  $J_{n \times m} u = 0$ .

Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ .  $A$  é *semelhante* à  $B$  se existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  invertível tal que  $A = P^{-1}BP$ . Observe que se  $A$  é semelhante à  $B$ , então  $B$  é semelhante à  $A$ . Com efeito, se  $A$  é semelhante a  $B$ , então existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  invertível tal que  $A = P^{-1}BP$ . Então,  $PAP^{-1} = P(P^{-1}BP)P^{-1} = B$ . Ou seja,  $B$  é semelhante à  $A$ .

**Teorema 2.5** (Teorema da Triangularização). *Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , então existe  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  unitária tal que  $U^*AU$  é triangular superior.*

Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ . Uma *submatriz* de  $A$  é uma matriz obtida pela remoção de todas as entradas de um número de linhas ou colunas. Uma submatriz é *principal* se ela foi obtida pela remoção de um subconjunto de linhas e do seu correspondente subconjunto de colunas.

**Exemplo 2.6.** Dada a matriz  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

são submatrizes de  $A$ ,  $B$  obtida pela remoção da terceira coluna de  $A$  e  $C$  obtida pela remoção da primeira linha e primeira coluna de  $A$ .  $C$  é submatriz principal de  $A$ .

**Definição 2.7.** De forma indutiva, definimos o *determinante* de uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ .

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned}$$

Para  $n = 1$ ,  $|A| = a_{11}$  e para  $n = 2$ ,  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

Para  $n > 2$ , suponha que está definido para  $\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$  e considere  $A_{ij}$  a submatriz de  $A$  obtida pela remoção da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna de  $A$ . Assim, para qualquer  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}|.$$

**Exemplo 2.8.** Dada a matriz  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

fixando sua primeira coluna, temos

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| = (-1)^2 a_{11} |A_{11}| + (-1)^3 a_{21} |A_{21}| + (-1)^4 a_{31} |A_{31}| \\ &= 3 |A_{11}| - 0 |A_{21}| + |A_{31}| = 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 9 = 18. \end{aligned}$$

**Proposição 2.9.** Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Então,  $|AB| = |A| |B|$ .

Uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é *invertível* se existe matriz  $A^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ , caso contrário,  $A$  é dita *singular*. Chamamos a matriz  $A^{-1}$  de *matriz inversa* de  $A$ .

**Lema 2.10.** Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  invertível. Então,  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 2.9, temos que  $|I_n| = |AA^{-1}| = |A| |A^{-1}| = 1$ . Portanto,  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ .  $\square$

**Corolário 2.11.** Uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é invertível se e somente se  $|A| \neq 0$ .

Um *menor* de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é um determinante de uma submatriz de  $A$ . Um menor é *principal* se é determinante de uma submatriz principal.

**Definição 2.12.** Um matriz  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  é uma *matriz em blocos* se  $A$  pode ser escrita da forma

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pq} \end{pmatrix},$$

onde  $B_{ij}$  é uma submatriz de  $A$ . As submatrizes  $B_{ij}$  de  $A$  são chamadas *blocos* de  $A$ .

Observe que toda matriz  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  é uma matriz em blocos, basta considerar os blocos como submatrizes de ordem 1, da forma  $B_{ij} = ([A]_{ij})$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Assim, chamaremos uma matriz de matriz em blocos quando o particionamento em blocos desta matriz convém para a obtenção dos resultados, como na Proposição 2.13.

**Proposição 2.13.** *Seja  $P$  uma matriz em blocos da forma  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  ou  $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ , sendo  $A$  e  $C$  matrizes quadradas. Então,  $|P| = |A||C|$ .*

**Lema 2.14.** *Sejam  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  matrizes.*

(i) *Se  $M$  é invertível, então*

$$\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = |M| |Q - PM^{-1}N|.$$

*Chamamos  $|Q - PM^{-1}N|$  de completo de Schur de  $M$ .*

(ii) *Se  $Q$  é invertível, então*

$$\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = |Q| |M - NQ^{-1}P|.$$

*Chamamos  $|M - NQ^{-1}P|$  de complemento de Schur de  $Q$ .*

*Demonstração.* (i) Como  $M$  é invertível, podemos decompor a matriz  $\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$ , da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & M^{-1}N \\ 0 & Q - PM^{-1}N \end{pmatrix}$$

Como ambos fatores da decomposição são matrizes triangulares em blocos, temos que

$$\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = |M| |I| |I| |Q - PM^{-1}N| = |M| |Q - PM^{-1}N|.$$

(ii) Como  $Q$  é invertível, podemos decompor a matriz  $\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$ , da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - NQ^{-1}P & N \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q^{-1}P & I \end{pmatrix}$$

Como ambos fatores da decomposição são matrizes triangulares em blocos, temos que

$$\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = |M - NQ^{-1}P| |Q| |I| |I| = |Q| |M - NQ^{-1}P|.$$

□



**Definição 2.15.** Um *espaço vetorial*,  $V = (V, +, \cdot)$ , sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é um conjunto  $V$  munido de duas operações

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V & \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v & (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned}$$

tais que para todo  $u, v, w \in V$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- (i)  $u + v = v + u$ ;
- (ii)  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ;
- (iii) existe  $0 \in V$  tal que  $v + 0 = v$ ;
- (iv) existe  $-v \in V$  tal que  $v + (-v) = 0$ ;
- (v)  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$  e  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ ;
- (vi)  $1 \cdot v = v$ .

Consideraremos o conjunto  $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  munido das operações de adição de matrizes e multiplicação por escalar como espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ .

Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um *autovalor* de  $A$  se existe um vetor  $v \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  tal que  $Av = \lambda v$ , nesse caso,  $v$  é chamado *autovetor* de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Teorema 2.16.** *Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é simétrica, então*

- (i) *todos os autovalores de  $A$  são reais;*
- (ii) *os autovetores de  $A$  associados a distintos autovalores são ortogonais.*

Vamos denotar um autovalor de  $A$  como  $\lambda(A)$ . Além disso, se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , por convenção, escrevemos  $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ , isto é,  $\lambda_1(A)$  denota o maior autovalor de  $A$  e  $\lambda_n(A)$  denota o menor autovalor de  $A$ .

**Exemplo 2.17.** *Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $v \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  são os dados abaixo,*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

*então  $v$  é autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda(A) = 5$ . De fato,*

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5v.$$

**Proposição 2.18** ([5]). *Seja  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  uma matriz em blocos de ordem  $n$ . Para que  $\lambda$  seja um autovalor de  $P$  é necessário e suficiente que  $\lambda$  seja um autovalor de  $A + B$  ou  $A - B$ .*

*Demonstração.* Se  $\lambda$  autovalor de  $(A + B)$  então, existe  $v$  não nulo tal que  $(A + B)v = \lambda v$ . Considere  $V = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$ . Assim,

$$PV = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + Bv \\ Bv + Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + B)v \\ (A + B)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v \\ \lambda v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \lambda V.$$

Por outro lado, se  $\lambda$  é autovalor de  $P$ , então existe  $v$  não nulo tal que  $Pv = \lambda v$ . Vamos escrever  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  particionado. Assim,

$$Pv = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 + Bv_2 \\ Bv_1 + Av_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda v.$$

Daí, temos que  $Av_1 + Bv_2 = \lambda v_1$  e  $Bv_1 + Av_2 = \lambda v_2$ . Somando essas igualdades, obtemos

$$(A + B)(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2),$$

ou seja,  $\lambda$  é autovalor de  $A + B$ . A demonstração para  $A - B$  é análoga.  $\square$

O *polinômio característico* de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $p_A(x)$ , é o polinômio mônico de grau  $n$  definido como  $p_A(x) = |xI_n - A|$ . O *polinômio mínimo* de  $A$ ,  $m_A(x)$ , é polinômio mônico de menor grau que satisfaz  $m_A(A) = 0$ .

**Exemplo 2.19.** *Considere a matriz  $A$  dada no Exemplo 2.17,*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{temos: } p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x - 4 & -2 \\ -2 & x - 1 \end{vmatrix} = (x - 4)(x - 1) - 4 = x^2 - 5x.$$

**Proposição 2.20.** *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Para que  $\lambda \in \mathbb{K}$  seja um autovalor de  $A$  é necessário e suficiente que  $\lambda$  seja raiz do polinômio característico de  $A$ ,  $p_A(x)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Considere a função

$$\begin{aligned} T : \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v &\longmapsto (\lambda I_n - A)v \end{aligned}$$

É fácil notar que  $T$  é uma transformação linear. Assim,

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ é autovalor de } A &\iff Av = \lambda v \\
 &\iff (\lambda I_n - A)v = 0 \\
 &\iff T \text{ é não injetora} \\
 &\iff (\lambda I_n - A) \text{ é singular} \\
 &\iff |\lambda I_n - A| = 0 \\
 &\iff p_A(\lambda) = 0.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.21.** Com a mesma matriz  $A$  dada no Exemplo 2.17, vimos no Exemplo 2.19 que  $p_A(x) = x^2 - 5x$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, basta encontrar as raízes de  $p_A(x)$ .

$$p_A(x) = 0 \iff x^2 - 5x = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = 0.$$

Logo,  $\lambda_1(A) = 5$  e  $\lambda_2(A) = 0$  são autovalores de  $A$ , ou seja,  $\text{Spec}(A) = \{5, 0\}$ .

Um *multiconjunto* é uma lista de elementos. Diferente dos conjuntos, os multiconjuntos permitem repetição de elementos.

O *espectro* de  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Spec}(A)$ , é o multiconjunto formado pelos  $n$  autovalores de  $A$ . A *multiplicidade algébrica* de um autovalor  $\lambda \in \text{Spec}(A)$  é o número de vezes que  $\lambda$  é raiz de  $p_A(x)$ .

**Proposição 2.22.** Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  simétrica, então  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$ .

**Proposição 2.23.** Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  simétrica, então  $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A)$ .

*Demonstração.* Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  com  $\text{Spec}(A) = \{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Então, pela Proposição 2.20,

$$p_A(x) = |xI_n - A| = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n).$$

Assim, para  $x = 0$ , temos

$$|-A| = (-\lambda_1)(-\lambda_2) \dots (-\lambda_n) = (-1)^n (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n).$$

Como  $|-A| = |-I_n A| = |-I_n| |A|$  e  $|-I_n| = (-1)^n$ , obtemos o resultado,

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

□

**Corolário 2.24.**  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é singular se e somente se  $0$  é um de seus autovalores.

**Corolário 2.25.** Os autovalores de uma matriz triangular superior são as entradas de sua diagonal principal.

**Teorema 2.26** ([2]). Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  matrizes hermitianas. Então, para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$(i) \quad \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-n}(A+B), \text{ se } i+j \geq n+1;$$

$$(ii) \quad \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \geq \lambda_{i+j-1}(A+B), \text{ se } i+j \leq n+1,$$

ou, de forma mais simples,  $\lambda_i(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_i(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_1(B)$ .

**Lema 2.27.** Seja  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  uma matriz em blocos de ordem  $n$ , sendo  $A$  e  $C$  matrizes quadradas. Então,

$$\text{Spec}(P) = \text{Spec}(A) \cup \text{Spec}(C).$$

*Demonstração.* Basta encontrar o polinômio característico de  $P$ . Usando a Proposição 2.13, temos

$$p_P(x) = |xI_n - P| = \begin{vmatrix} xI - A & B \\ 0 & xI - C \end{vmatrix} = |xI - A| |xI - C| = p_A(x)p_C(x).$$

Assim,  $p_P(x) = 0$  se e somente se  $p_A(x) = 0$  ou  $p_C(x) = 0$ . Pela Proposição 2.20, obtemos o resultado.  $\square$

**Proposição 2.28.** Se  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  são semelhantes, então  $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$ .

*Demonstração.* Como  $A$  e  $B$  são semelhantes, existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $A = P^{-1}BP$ . Assim,

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI_n - A| = |xI_n - P^{-1}BP| = |xP^{-1}I_nP - P^{-1}BP| = |P^{-1}(xI_n - B)P| \\ &= |P^{-1}| |xI_n - B| |P| = |xI_n - B| = p_B(x). \end{aligned}$$

Então,  $p_A(x) = 0$  se e somente se  $p_B(x) = 0$ . Pela Proposição 2.20, obtemos o resultado.  $\square$

**Teorema 2.29** ([3]). Sejam  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ . Então,  $p_{BA}(x) = x^{n-m}p_{AB}(x)$ , ou seja,  $\text{Spec}(BA) = \text{Spec}(AB) \cup \{0^{[n-m]}\}$ . Se  $n = m$  e  $A$  ou  $B$  é não singular, então  $AB$  e  $BA$  são semelhantes.

*Demonstração.* Considere as matrizes em blocos  $C = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}$  e  $D = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ , onde  $0_n$  e  $0_m$  denotam, respectivamente, as matrizes de ordem  $n$  e  $m$  cujas todas as entradas são iguais a 0. Tomando  $P = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ , obtemos que  $D = P^{-1}CP$ , ou seja,  $C$  e  $D$  são

semelhantes. Pelo Lema 2.27,  $\text{Spec}(C) = \text{Spec}(AB) \cup \{0^{[n]}\}$  e  $\text{Spec}(D) = \text{Spec}(BA) \cup \{0^{[m]}\}$ . Usando a Proposição 2.28, obtemos que  $\text{Spec}(BA) = \text{Spec}(AB) \cup \{0^{[n-m]}\}$ , ou seja,  $p_{BA}(x) = x^{n-m}p_{AB}(x)$ . Supondo  $n = m$  e  $A$  (respectivamente,  $B$ ) não singular, temos que  $AB = A(BA)A^{-1}$  (respectivamente,  $BA = B(AB)B^{-1}$ ), ou seja,  $AB$  e  $BA$  são semelhantes.  $\square$

### 2.1.1 Produto de Kronecker

Para definir algumas operações em grafos e para o cálculo espectral delas, precisamos definir o produto de Kronecker e introduzir algumas de suas propriedades. Nesta subseção, [6] foi a principal referência adotada e podemos encontrar outros resultados em [7].

**Definição 2.30.** Sejam  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times q}$ . O *produto de Kronecker* de  $A$  e  $B$ ,  $A \otimes B$ , é definido como

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

Note que, por definição, o produto de Kronecker é escrito como uma matriz em blocos, dessa forma, sejam  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ , vamos denotar  $A \otimes B = (a_{ij}B)$ , onde  $a_{ij}B$  é o  $(i, j)$ -ésimo bloco de  $A \otimes B$ .

**Exemplo 2.31.** Considere as matrizes  $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$  dadas abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim como no produto de matrizes, de forma geral, o produto de Kronecker é não comutativo, neste exemplo, temos  $A \otimes B \neq B \otimes A$ .

Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ . A  $k$ -ésima potência de Kronecker,  $A^{\otimes k}$ , é definida de forma indutiva para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$  como  $A^{\otimes 1} = A$  e

$$A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes(k-1)}, \text{ para } k > 1.$$

**Teorema 2.32** ([6]). *Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ . Então:*

- (i)  $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B) = A \otimes (\lambda B)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (ii)  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ , para todo  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (iii)  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ , para todo  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$  e  $C \in \mathbb{M}_{r \times s}(\mathbb{K})$ ;
- (iv)  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ , para todo  $B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  e  $C \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (v)  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ , para todo  $B, C \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (vi)  $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$ ;
- (vii)  $I_n \otimes I_m = I_{nm}$ .

*Demonstração.* Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ .

- (i)  $(\lambda A) \otimes B = ((\lambda a_{ij})B) = \lambda(a_{ij}B) = \lambda(A \otimes B) = (a_{ij}(\lambda B)) = A \otimes (\lambda B)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (ii)  $(A \otimes B)^T = (a_{ij}B)^T = (a_{ji}B^T) = A^T \otimes B^T$ , para todo  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (iii)  $(A \otimes B) \otimes C = (a_{ij}B) \otimes C = ([a_{ij}B]_{xy}C) = (a_{ij}(B \otimes C)) = A \otimes (B \otimes C)$ , para todo  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$  e  $C \in \mathbb{M}_{r \times s}(\mathbb{K})$ ;
- (iv)  $A \otimes (B + C) = (a_{ij}(B + C)) = (a_{ij}B + a_{ij}C) = (a_{ij}B) + (a_{ij}C) = A \otimes B + A \otimes C$ , para todo  $B, C \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ;
- (v)  $A \otimes 0 = (a_{ij}0) = (0_{ij}A) = 0 \otimes A = (0_{ij}) = 0$ ;

$$(vi) \quad I_n \otimes I_m = \begin{pmatrix} 1I_m & 0I_m & \cdots & 0I_m \\ 0I_m & 1I_m & \cdots & 0I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0I_m & 0I_m & \cdots & 1I_m \end{pmatrix}_{n \times m} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_m \end{pmatrix}_{n \times m} = I_{nm}.$$

□

**Corolário 2.33** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ . Então,  $A \otimes B = 0$  se e somente se  $A = 0$  ou  $B = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha  $A \otimes B = 0$ . Assim,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,  $B = 0$  ou  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , ou seja,  $A = 0$  ou  $B = 0$ . Por outro lado, pelo item (vi) do Teorema 2.32,  $A = 0$  ou  $B = 0$ , então  $A \otimes B = 0$ .  $\square$

A Propriedade do Produto Misto é o resultado mais importante desta subseção. A obtenção do espectro de um produto de Kronecker,  $A \otimes B$ , a partir do espectro de  $A$  e de  $B$  (Teorema 2.40) e a obtenção de sua inversa (Corolário 2.38) são resultados decorrentes dela.

**Teorema 2.34** (Propriedade do Produto Misto [6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathbb{M}_{m \times r}(\mathbb{K})$  e  $D \in \mathbb{M}_{q \times s}(\mathbb{K})$ . Então,*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

*Demonstração.* Seja  $A = (a_{ih})$  e  $C = (c_{hj})$ . Então,  $A \otimes B = (a_{ih}B)$  e  $C \otimes D = (c_{hj}D)$ . Assim, o  $(i, j)$ -ésimo bloco de  $(A \otimes B)(C \otimes D)$  é dado por

$$\sum_{h=1}^n (a_{ih}B)(c_{hj}D) = \left( \sum_{h=1}^n (a_{ih}c_{hj}) \right) BD.$$

Por outro lado, note que  $\sum_{h=1}^n (a_{ih}c_{hj})$  é a  $(i, j)$ -ésima entrada de  $AC$ . Dessa forma, obtemos o resultado,  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .  $\square$

O corolário a seguir é uma generalização da Propriedade do Produto Misto.

**Corolário 2.35** ([6]). *Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , sejam  $A_i$  e  $B_i$  matrizes. As seguintes igualdades se verificam.*

$$(i) \quad (A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_k)(B_1 \otimes B_2 \otimes \dots \otimes B_k) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2 \otimes \dots \otimes A_k B_k.$$

$$(ii) \quad (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \dots (A_k \otimes B_k) = (A_1 A_2 \dots A_k) \otimes (B_1 B_2 \dots B_k).$$

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre  $k$ . Para  $k = 1$ , o resultado é trivial.

(i) Pelo Teorema 2.34,  $(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1B_1 \otimes A_2B_2$ . Suponha que vale para  $k = n$ . Então,

$$\begin{aligned} & (A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n \otimes A_{n+1})(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n \otimes B_{n+1}) \\ &= ((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n) \otimes A_{n+1})((B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n) \otimes B_{n+1}) \\ &= ((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n)(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n))(A_{n+1}B_{n+1}) \\ &= (A_1B_1 \otimes A_2B_2 \otimes \cdots \otimes A_nB_n) \otimes (A_{n+1}B_{n+1}) \\ &= A_1B_1 \otimes A_2B_2 \otimes \cdots \otimes A_nB_n \otimes A_{n+1}B_{n+1} \end{aligned}$$

(ii) Pelo Teorema 2.34,  $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$ . Suponha que vale para  $k = n$ . Então,

$$\begin{aligned} & (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \cdots (A_n \otimes B_n)(A_{n+1} \otimes B_{n+1}) \\ &= ((A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \cdots (A_n \otimes B_n))(A_{n+1} \otimes B_{n+1}) \\ &= ((A_1A_2 \cdots A_n) \otimes (B_1B_2 \cdots B_n))(A_{n+1} \otimes B_{n+1}) \\ &= ((A_1A_2 \cdots A_n)A_{n+1}) \otimes ((B_1B_2 \cdots B_n)B_{n+1}) \\ &= (A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}) \otimes (B_1B_2 \cdots B_nB_{n+1}) \end{aligned}$$

□

O Corolário 2.36 mostra que  $A \otimes I_m$  e  $I_n \otimes B$  são comutativas com respeito a multiplicação de matrizes. Sua demonstração é consequência direta do Teorema 2.34.

**Corolário 2.36.** *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ . São válidas as seguintes igualdades:  $A \otimes B = (A \otimes I_m)(I_n \otimes B) = (I_n \otimes B)(A \otimes I_m)$ .*

**Corolário 2.37** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ . Então,  $(A \otimes I)^k = A^k \otimes I$  e  $(I \otimes B)^k = I \otimes B^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ . Além disso, para qualquer polinômio  $p(x)$ ,  $p(A \otimes I) = p(A) \otimes I$  e  $p(I \otimes B) = I \otimes p(B)$ , onde  $A^0 = I$  e  $B^0 = I$ .*

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.35,

$$\begin{aligned} (A \otimes I)^k &= (A \otimes I)(A \otimes I) \cdots (A \otimes I) = (AA \cdots A \otimes II \cdots I) = A^k \otimes I \text{ e} \\ (I \otimes B)^k &= (I \otimes B)(I \otimes B) \cdots (I \otimes B) = (II \cdots I \otimes BB \cdots B) = I \otimes B^k. \end{aligned}$$

Além disso, seja  $p(x) = \alpha_t x^t + \alpha_{t-1} x^{t-1} \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 x^0$ , então,

$$\begin{aligned} p(A \otimes I) &= \alpha_t (A \otimes I)^t + \alpha_{t-1} (A \otimes I)^{t-1} + \cdots + \alpha_1 (A \otimes I) + \alpha_0 (A \otimes I)^0 \\ &= \alpha_t (A^t \otimes I) + \alpha_{t-1} (A^{t-1} \otimes I) + \cdots + \alpha_1 (A \otimes I) + \alpha_0 (A^0 \otimes I) \\ &= (\alpha_t A^t + \alpha_{t-1} A^{t-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) \otimes I = p(A) \otimes I. \end{aligned}$$



Da mesma forma, para  $p(I \otimes B)$ ,

$$\begin{aligned} p(I \otimes B) &= \alpha_t(I \otimes B)^t + \alpha_{t-1}(I \otimes B)^{t-1} + \cdots + \alpha_1(I \otimes B) + \alpha_0(I \otimes B)^0 \\ &= \alpha_t(I \otimes B^t) + \alpha_{t-1}(I \otimes B^{t-1}) + \cdots + \alpha_1(I \otimes B) + \alpha_0(I \otimes B^0) \\ &= I \otimes (\alpha_t B^t + \alpha_{t-1} B^{t-1} + \cdots + \alpha_1 B + \alpha_0 I) = I \otimes p(B). \end{aligned}$$

□

A seguir, conseguimos obter a inversa de um produto de Kronecker,  $A \otimes B$ , a partir das inversas de  $A$  e de  $B$ .

**Corolário 2.38** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  invertíveis. Então,  $A^{-1} \otimes B^{-1}$  é a matriz inversa de  $A \otimes B$ .*

*Demonstração.* Basta verificar que  $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = I_{nm}$ . Assim, pelo Teorema 2.34,

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) &= (AA^{-1} \otimes BB^{-1}) = (I_n \otimes I_m) = I_{nm} \text{ e} \\ (A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) &= (A^{-1}A \otimes B^{-1}B) = (I_n \otimes I_m) = I_{nm}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.39** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  matrizes triangulares superiores. Então,  $A \otimes B$  é triangular superior.*

*Demonstração.* Como  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{hk})$  são triangulares superiores,  $a_{ij} = 0$ ,  $i > j$ , e  $b_{hk} = 0$ ,  $h > k$ . Assim, por definição,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ 0 & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Além disso, como  $b_{hk} = 0$  para  $h > k$ , temos que  $a_{ii}B = \begin{pmatrix} a_{ii}b_{11} & a_{ii}b_{12} & \cdots & a_{ii}b_{1m} \\ 0 & a_{ii}b_{22} & \cdots & a_{ii}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}b_{mm} \end{pmatrix}$ .

Então,  $A \otimes B$  é triangular superior. □

No Teorema 2.40, obtemos o espectro de um produto de Kronecker,  $A \otimes B$ , a partir do espectro de  $A$  e de  $B$ . Será muito importante para resultados sobre o espectro de operações em grafos, a seguir.

**Teorema 2.40** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ . Se  $\lambda \in \mathbb{K}$  é autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $v$  e  $\mu \in \mathbb{K}$  é autovalor de  $B$  associado ao autovetor  $u$ , então  $\lambda\mu \in \mathbb{K}$  é autovalor de  $A \otimes B$  associado ao autovetor  $v \otimes u \in \mathbb{M}_{nm \times 1}(\mathbb{K})$ . Além disso, temos que*

$$\text{Spec}(A \otimes B) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{\lambda_i \mu_j\},$$

onde  $\text{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i\}$  e  $\text{Spec}(B) = \bigcup_{j=1}^m \{\mu_j\}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $v \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  e  $\mu \in \mathbb{K}$  autovalor de  $B$  associado ao autovetor  $u \in \mathbb{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$ . Assim, temos  $Av = \lambda v$  e  $Bu = \mu u$ . Então,

$$(A \otimes B)(v \otimes u) = (Av) \otimes (Bu) = (\lambda v) \otimes (\mu u) = \lambda\mu(v \otimes u).$$

Ou seja,  $v \otimes u$  é autovetor de  $A \otimes B$  associado ao autovalor  $\lambda\mu$ . Pelo Teorema da Triangularização, existem  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $V \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  unitárias tais que  $T_A = U^*AU$  e  $T_B = V^*BV$  são triangulares superiores. Por definição,  $T_A$  é semelhante à  $A$  e  $T_B$  é semelhante à  $B$ . Assim, pelo Teorema 2.32,  $(U \otimes V)^* = U^* \otimes V^*$  e portanto, pelo Corolário 2.35,  $(U \otimes V)^*(A \otimes B)(U \otimes V) = (U^*AU) \otimes (V^*BV) = T_A \otimes T_B$ , além disso, obtemos que  $T_A \otimes T_B$  é semelhante à  $A \otimes B$ . Daí, pelo Lema 2.39, como  $T_A$  e  $T_B$  são triangulares superiores,  $T_A \otimes T_B$  é triangular superior. Então, pelo Corolário 2.25, as entradas da diagonal principal de  $T_A \otimes T_B$  são seus autovalores e além disso, são os  $nm$  produtos das entradas da diagonal principal de  $T_A$  com as entradas da diagonal principal de  $T_B$ . Pela Proposição 2.28,  $\text{Spec}(T_A \otimes T_B) = \text{Spec}(A \otimes B)$ , portanto, os autovalores de  $A \otimes B$  são os  $nm$  produtos dos autovalores de  $A$  e  $B$ .  $\square$

**Corolário 2.41.** *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ . Então,  $\text{Spec}(A \otimes B) = \text{Spec}(B \otimes A)$ .*

**Corolário 2.42** ([6]). *Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  os distintos autovalores de  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  com suas respectivas multiplicidades algébricas  $s_1, s_2, \dots, s_p$  e sejam  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$  os distintos autovalores de  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  com suas respectivas multiplicidades algébricas  $t_1, t_2, \dots, t_q$ . Se  $\gamma$  é autovalor de  $A \otimes B$ , então a multiplicidade algébrica de  $\gamma$  é  $\sum_{\lambda_i \mu_j = \gamma} s_i t_j$ , onde  $\lambda_i \mu_j = \gamma$  inclui todas as maneiras de  $\gamma$  ser o produto de um autovalor de  $A$  com um autovalor de  $B$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.40, temos que  $\text{Spec}(A \otimes B) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{\lambda_i \mu_j\}$ . Se  $\gamma$  é autovalor de  $A \otimes B$ , então a multiplicidade algébrica de  $\gamma$  é o número de vezes que o produto de um autovalor de  $A$  com um autovalor de  $B$  é igual a  $\gamma$ ,  $\lambda_i \mu_j = \gamma$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Se  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$  são tais que  $\lambda_k \mu_l = \gamma$ , então, dadas as multiplicidades  $s_k$  e  $t_l$  de  $\lambda_k$  e  $\mu_l$ , respectivamente, temos que o produto  $\lambda_k \mu_l$  ocorre  $s_k t_l$  vezes em  $\text{Spec}(A \otimes B)$ . Logo,  $\gamma$  tem multiplicidade algébrica  $\sum_{\lambda_k \mu_l = \gamma} s_k t_l$ .  $\square$

**Corolário 2.43** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ . Então,*

$$|A \otimes B| = |A|^m |B|^n = |B \otimes A|.$$

*E  $A \otimes B$  e  $B \otimes A$  são invertíveis se e somente se  $A$  e  $B$  são invertíveis.*

*Demonstração.* Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  com  $\text{Spec}(A) = \{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  e  $\text{Spec}(B) = \{\mu_j : 1 \leq j \leq m\}$ . Pelo Teorema 2.40, temos  $\text{Spec}(A \otimes B) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{\lambda_i \mu_j\}$  e usando a Proposição 2.23, podemos escrever

$$|A \otimes B| = \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \lambda_i \mu_j = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \lambda_i \mu_j = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^m \left( \prod_{j=1}^m \mu_j \right)^n = |A|^m |B|^n.$$

De forma análoga, obtemos que  $|B \otimes A| = |B|^n |A|^m$  e, por conseguinte,  $|A \otimes B| = |B \otimes A|$ . Além disso, obtemos que  $|A \otimes B| = 0$  se e somente se  $|A| = 0$  ou  $|B| = 0$ . Ou seja,  $A \otimes B$  e  $B \otimes A$  são invertíveis se e somente se  $A$  e  $B$  são invertíveis.  $\square$

**Corolário 2.44** ([6]). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ . Então,*

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(B \otimes A).$$

*Demonstração.* Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  com  $\text{Spec}(A) = \{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  e  $\text{Spec}(B) = \{\mu_j : 1 \leq j \leq m\}$ . Pelo Teorema 2.40, temos  $\text{Spec}(A \otimes B) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{\lambda_i \mu_j\}$  e usando a Proposição 2.22, podemos escrever

$$\text{tr}(A \otimes B) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \lambda_i \mu_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda_i \mu_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j = \text{tr}(A)\text{tr}(B).$$

De forma análoga, obtemos que  $\text{tr}(B \otimes A) = \text{tr}(B)\text{tr}(A)$  e  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(B \otimes A)$ , por consequência.  $\square$

**Teorema 2.45.** *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  e  $p, q \in \mathbb{K}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{K}$  é autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $v$  e  $\mu \in \mathbb{K}$  é autovalor de  $B$  associado ao autovetor  $u$ , então  $p\lambda + q\mu \in \mathbb{K}$  é autovalor de  $A \otimes B$  associado ao autovetor  $v \otimes u \in \mathbb{M}_{nm \times 1}(\mathbb{K})$ . Além disso, temos que*

$$\text{Spec}(p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B)) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{p\lambda_i + q\mu_j\},$$

onde  $\text{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i\}$  e  $\text{Spec}(B) = \bigcup_{j=1}^m \{\mu_j\}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $v \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  e  $\mu \in \mathbb{K}$  autovalor de  $B$  associado ao autovetor  $u \in \mathbb{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$ . Assim, temos  $Av = \lambda v$  e  $Bu = \mu u$ .

Então, dados  $p, q \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned}
 (p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B))(v \otimes u) &= p(A \otimes I_m)(v \otimes u) + q(I_n \otimes B)(v \otimes u) \\
 &= p(Av \otimes u) + q(v \otimes Bu) \\
 &= p(\lambda v \otimes u) + q(v \otimes \mu u) \\
 &= p\lambda(v \otimes u) + q\mu(v \otimes u) \\
 &= (p\lambda + q\mu)(v \otimes u)
 \end{aligned}$$

Ou seja,  $v \otimes u$  é autovetor de  $(p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B))$  associado ao autovalor  $p\lambda + q\mu$ . Pelo Teorema da Triangularização, existem  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $V \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$  unitárias tais que  $T_A = U^*AU$  e  $T_B = V^*BV$  são triangulares superiores. Por definição,  $T_A$  é semelhante à  $A$  e  $T_B$  é semelhante à  $B$ . Assim, pelo Teorema 2.32,  $(U \otimes V)^* = U^* \otimes V^*$  e portanto, pelo Corolário 2.35,  $(U \otimes V)^*(p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B))(U \otimes V) = p(T_A \otimes I_m) + q(I_n \otimes T_B)$ , além disso, obtemos que  $p(T_A \otimes I_m) + q(I_n \otimes T_B)$  é semelhante à  $p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B)$ . Daí, pelo Lema 2.39, como  $T_A$  e  $T_B$  são triangulares superiores,  $p(T_A \otimes I_m) + q(I_n \otimes T_B)$  é triangular superior. Então, pelo Corolário 2.25, as entradas da diagonal principal de  $p(T_A \otimes I_m) + q(I_n \otimes T_B)$  são seus autovalores e além disso, são as  $nm$  somas das entradas da diagonal principal de  $pT_A$  com as entradas da diagonal principal de  $qT_B$ . Pela Proposição 2.28,  $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(T_A)$ ,  $\text{Spec}(B) = \text{Spec}(T_B)$  e  $\text{Spec}(p(T_A \otimes I_m) + q(I_n \otimes T_B)) = \text{Spec}(p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B))$ , portanto, os autovalores de  $p(A \otimes I_m) + q(I_n \otimes B)$  são os autovalores de  $A$  multiplicados por  $p$  somados aos autovalores de  $B$  multiplicados por  $q$ .  $\square$

## 2.2 Teoria de Grafos

Nesta seção, apresentaremos os grafos e algumas de suas classificações. Os conceitos que não estão aqui apresentados podem ser encontrados em [8], [9], [10] e [11].

**Definição 2.46.** Um *grafo*  $G$  é um par ordenado  $G = G(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados *vértices* e  $E$  é um conjunto onde cada elemento é um conjunto de dois vértices de  $V$ , chamados *arestas*. Se  $e = \{v, u\} \in E$ , denotamos como  $e = \{v, u\} = vu$ . Quando tratamos de mais de um grafo, podemos denotar com  $V = V(G)$  e  $E = E(G)$ .

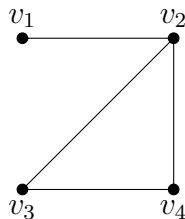


Figura 1: Grafo  $G$

Na Figura 1, temos  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ .

Um *laço* é uma aresta da forma  $uu \in E$ , isto é, uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Um grafo é *simples* se não existem mais de uma aresta ligando dois vértices e se não possui laços.

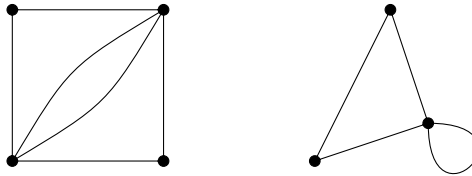


Figura 2: Grafos não simples

Na Figura 2, um grafo possui arestas múltiplas e o outro possui um laço, logo ambos não são grafos simples.

Dizemos que  $v \in V$  é *adjacente* a  $u \in V$  em  $G$  se  $vu \in E$ . Neste caso, dizemos que  $vu$  *incide* em  $v$  e em  $u$ . O *grau* de um vértice  $v$ , denotado por  $d_G(v)$ , é o número de vértices adjacentes a  $v$ . O maior grau de um vértice em  $G$  é denotado  $\Delta(G)$  e o menor grau de um vértice em  $G$  é denotado  $\delta(G)$ .

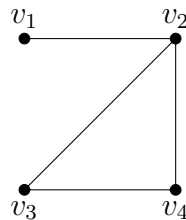


Figura 3: Grafo G

No grafo, ilustrado na Figura 3, temos  $d_G(v_1) = 1$ ,  $d_G(v_2) = 3$ ,  $d_G(v_3) = 2$  e  $d_G(v_4) = 2$ , então  $\Delta(G) = 3$  e  $\delta(G) = 1$ .

**Proposição 2.47.** *Seja  $G$  um grafo com  $m$  arestas. Então, a soma dos graus dos vértices de  $G$  é igual a  $2m$ .*

*Demonstração.* Para cada aresta, o grau dos vértices incididos pela aresta é somado em 1, assim, como toda aresta incide em exatamente 2 vértices, obtemos o resultado.  $\square$

Um grafo  $H$  é *subgrafo* de  $G$  se  $V(H) \subset V(G)$  e  $E(H) \subset E(G)$ , neste caso, denotamos  $H \subset G$ . Se  $H \subset G$  com  $V(H) \neq V(G)$  ou  $E(H) \neq E(G)$ , então  $H$  é dito

*subgrafo próprio* de  $G$ . Quando  $H \subset G$  e dois vértices são adjacentes em  $H$  se e somente se eles são adjacentes em  $G$ ,  $H$  é chamado *subgrafo induzido* de  $G$ .

Um grafo é *completo* se todo vértice  $v \in V$  é adjacente a todos os outros vértices. Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

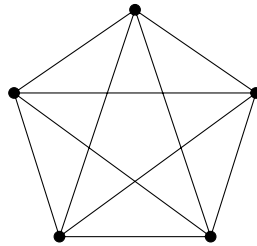


Figura 4: Grafo completo  $K_5$

Seja  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Um *passeio* de tamanho  $k$  por um grafo  $G$  é uma sequência de vértices e arestas, da forma  $(v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k v_{k+1})$ , onde  $e_i = v_i v_{i+1}$ . Um *caminho* é um passeio sem repetição de vértices. Uma *trilha* é um passeio sem repetição de arestas. Um passeio é *fechado* se tem tamanho  $k \geq 1$  e  $v_1 = v_{k+1}$ .

Sejam  $G$  um grafo e  $v, u \in V(G)$ . A *distância* entre  $v$  e  $u$ ,  $d(v, u)$ , é o tamanho do menor caminho entre  $v$  e  $u$  em  $G$ . O *diâmetro* de  $G$ ,  $diam(G)$ , é o tamanho do maior caminho entre quaisquer dois vértices em  $G$ .

Um grafo é *conexo* se possui um único vértice ou se existe um caminho entre quaisquer dois vértices. Caso contrário, o grafo é *desconexo*. Se  $G$  é um grafo desconexo, dizemos que  $G' \subset G$  é uma *componente* de  $G$  quando  $G'$  é um grafo conexo e não existe um grafo conexo  $H \subset G$  tal que  $G' \subset H$  e  $G' \neq H$ .

Um *ciclo* é uma trilha fechada com uma única repetição de vértices, que ocorre com  $v_1 = v_{k+1}$ . Um grafo é *cíclico* se é formado por apenas um ciclo,  $C_k$ , onde  $k$  é o tamanho do ciclo.

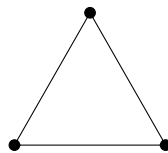


Figura 5: Grafo cíclico  $C_3$

Um *grafo caminho* é um grafo conexo, sem ciclos, com exatamente dois vértices com grau igual a 1 e os demais vértices com grau igual a 2. Denotamos por  $P_n$ , onde  $n$  é o seu número de vértices.



Figura 6: Grafo caminho  $P_4$

O *grafo complementar* de  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo em que  $V(\overline{G}) = V(G)$  e dois vértices são adjacentes em  $\overline{G}$  se não são adjacentes em  $G$ , ou seja,  $e \in E(\overline{G})$  se e somente se  $e \notin E(G)$ .

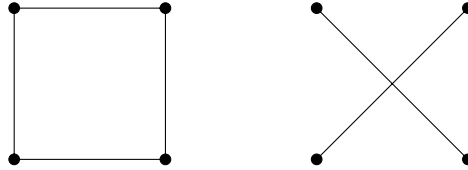


Figura 7: Um grafo e seu complementar

Seja  $r \in \mathbb{N}$ . Um grafo é *r-regular*, se todos os seus vértices possuem grau igual a  $r$ .

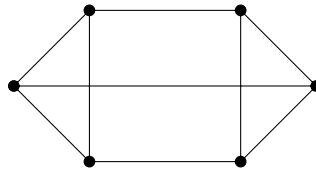


Figura 8: Grafo 3-regular

O *grafo linha* de  $G$ ,  $\ell(G)$ , é o grafo obtido tomando as arestas de  $G$  como vértices de  $\ell(G)$  e ligando dois vértices em  $\ell(G)$  quando as arestas correspondentes em  $G$  possuírem um vértice comum.

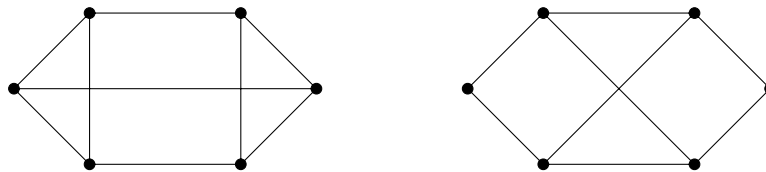


Figura 9: Grafo e seu grafo linha

Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Um grafo  $G$  é *k-partido* se  $V$  pode ser dividido em  $k$  subconjuntos disjuntos não vazios,  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , chamados *partições*, nos quais não há arestas conectando vértices de uma mesma partição. Denotamos como  $G = G(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . Um grafo *k-partido* é completo se cada vértice de uma partição é adjacente a todos os outros vértices de cada uma das outras partições. Se  $G = G(X_1, X_2, \dots, X_k)$  é completo, então denotamos como  $G = K_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ , onde  $p_i = |X_i|$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

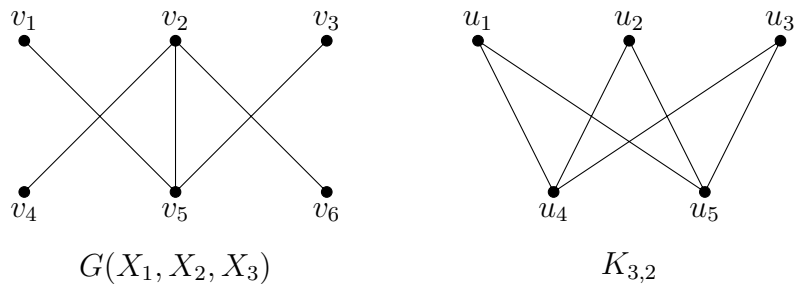


Figura 10: Grafo 3-partido  $G(X_1, X_2, X_3)$  e grafo bipartido completo  $K_{3,2}$

Na Figura 10,  $X_1 = \{v_1, v_2\}$ ,  $X_2 = \{v_3, v_4\}$  e  $X_3 = \{v_4, v_5\}$  são as partições de  $G(X_1, X_2, X_3)$  e  $Y_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$  e  $Y_2 = \{u_4, u_5\}$  são as partições de  $K_{3,2}$ .

Dois grafos,  $G$  e  $H$ , são *isomorfos* se existe uma bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que quaisquer dois vértices  $u, v \in V(G)$  são adjacentes em  $G$  se e somente se  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes em  $H$ .

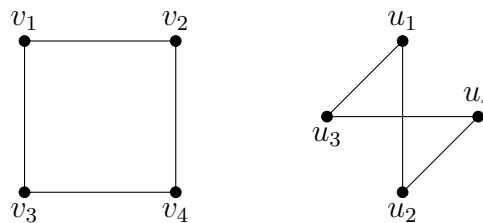


Figura 11: Grafos isomorfos

Os grafos,  $G$  e  $H$ , dados na Figura 11 são isomorfos. De fato, basta considerar a bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  definida como  $f(v_1) = u_1$ ,  $f(v_2) = u_4$ ,  $f(v_3) = u_3$  e  $f(v_4) = u_2$ .

Podemos dizer também, que dois grafos são isomorfos se podemos obter um a partir de uma nova rotulação de vértices do outro. Isomorfismo é uma relação que preserva características estruturais dos grafos relacionados. Por exemplo, se dois grafos são isomorfos, então ambos possuem mesmo número de vértices e arestas, mesmo número de ciclos e mesmo número de vértices com um determinado grau.

### 2.3 Teoria Espectral de Grafos

Grafos são estruturas abstratas, as figuras neste trabalho são apenas representações de grafos, não são grafos por si só. Representar grafos com vértices e arestas, em formas geométricas, não é muito prático e dificulta a implementação em algoritmos computacionais. Além dessa forma, podemos representar grafos como listas de adjacência e matrizes, por exemplo. Nessa seção, estudaremos a representação de grafos em forma matricial e o espectro associado a elas. Para maiores detalhes consultar [12], [13] e [14].



### 2.3.1 Matriz de Adjacência

A matriz de adjacência é a mais utilizada e a mais estudada na literatura. É uma matriz simétrica, com entradas 0 e 1, e traço nulo.

**Definição 2.48.** A *matriz de adjacência* de  $G$ ,  $A(G)$ , é a matriz de ordem  $n$  cujas as entradas são definidas por  $[A(G)]_{ij} = 1$  se  $v_i$  é adjacente a  $v_j$  e  $[A(G)]_{ij} = 0$ , caso contrário, para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Outra maneira de denotar as entradas de  $A(G)$  é associando cada entrada de  $A(G)$  aos vértices correspondentes a ela, ou seja, dados  $v_i, v_j \in V(G)$ , denotamos  $[A(G)]_{ij} = [A(G)]_{v_i v_j}$ , para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

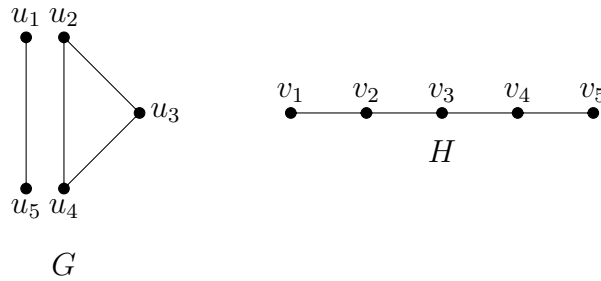


Figura 12: Grafos com 5 vértices

**Exemplo 2.49.** Sejam  $G$  e  $H$  os grafos ilustrados na Figura 12. Assim, temos

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Além disso,  $p_{A(G)}(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$  e  $p_{A(H)}(x) = x^5 - 4x^3 + 3x$ . Então,

$$\text{Spec}(A(G)) = \{2, 1, -1^{[3]}\} \quad e \quad \text{Spec}(A(H)) = \{\sqrt{3}, 1, 0, -1, -\sqrt{3}\}.$$

A Proposição 2.50 mostra que a partir do polinômio característico da matriz de adjacência de um grafo  $G$ , obtemos características estruturais de  $G$ , como seu número de arestas e seu número de triângulos.

**Proposição 2.50** ([15]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices de  $m$  arestas e sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  os coeficientes do polinômio característico de  $A(G)$ .*

$$p_{A(G)}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Então,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -m$  e  $a_3 = -2t$ , onde  $t$  é o número de ciclos de tamanho 3 em  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices de  $m$  arestas e sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  os coeficientes do polinômio característico de  $A(G)$ . Temos, por [3, Página 53], que a soma dos menores principais de  $A(G)$  com  $i$  linhas e  $i$  colunas é igual a  $(-1)^i a_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Como todos os elementos da diagonal de  $A(G)$  são iguais a 0, todos os menores principais de  $A(G)$  com 1 linha e 1 coluna são iguais a 0. Portanto,  $a_1 = 0$ . Como  $A(G)$  é simétrica, qualquer menor principal de  $A(G)$  com 2 linhas e 2 colunas é

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 .$$

Note que o menor não nulo corresponde a submatriz no qual temos um par de vértices adjacentes, ou seja, para cada par deste, temos um menor principal igual a  $-1$ . Assim,  $(-1)^2 a_2 = (-1)E(G) = -m$ . Agora, analisaremos os possíveis menores principais de  $A(G)$ , são eles:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Note que a única possibilidade não nula corresponde a submatriz no qual temos três vértices mutuamente adjacentes, ou seja, para cada ciclo de tamanho 3 temos um menor principal igual a 2. Portanto,  $(-1)^3 a_3 = 2t \implies a_3 = 2t$ , onde  $t$  é o número de ciclos de tamanho 3 em  $G$ . □

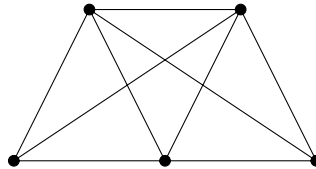


Figura 13: Grafo com 9 arestas

**Exemplo 2.51.** *Seja  $G$  o grafo ilustrado na Figura 13. Observe que  $G$  tem 9 arestas e 7 ciclos de tamanho 3 e temos  $p_{A(G)}(x) = x^5 - 9x^3 - 14x^2 - 6x$ .*

**Proposição 2.52** ([15]). *Seja  $G$  um grafo. O número de passeios de tamanho  $l$  ligando o vértice  $v_i$  ao vértice  $v_j$  em  $G$  é dado pela  $(i, j)$ -ésima entrada da matriz  $A(G)^l$ .*

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre  $l$ . Para  $l = 1$ , é imediato, pois se existe um passeio de tamanho  $l = 1$  ligando o vértice  $v_i$  ao  $v_j$  em  $G$ , então a  $(i, j)$ -ésima entrada de  $A(G)$  é igual a 1. Esse passeio é único e é dado pela aresta  $\{v_i, v_j\}$ . Agora, suponha que o resultado vale para um certo  $l = k$ . Note que o número de passeios de tamanho  $k + 1$  ligando o vértice  $v_i$  ao vértice  $v_j$  em  $G$  é o mesmo número de passeios de tamanho  $k$

ligando o vértice  $v_i$  à algum vértice  $v_h$  adjacente ao vértice  $v_j$  em  $G$ . Assim, o número de tais passeios é dado por

$$\sum_{\{v_h, v_j\} \in E(G)} [A(G)^{k+1}]_{ih} = \sum_{h=1}^n [A(G)^k]_{ih} [A(G)]_{hj} = [A(G)^{k+1}]_{ij}.$$

Portanto, o número de passeios de tamanho  $k+1$  ligando o vértice  $v_i$  ao vértice  $v_j$  em  $G$  é igual a  $(i, j)$ -ésima entrada de  $A(G)^k$ ,  $[A(G)^{k+1}]_{ij}$ .  $\square$

**Exemplo 2.53.** Se  $G$  é o grafo da Figura 13, então o número de passeios de tamanho 2 entre quaisquer dois vértices de  $G$  é dado pela matriz

$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Agora, a partir da relação do traço de uma matriz com os autovalores da mesma, obtemos o número de passeios fechados em um grafo  $G$  em função dos autovalores da matriz de adjacência de  $G$ .

**Corolário 2.54** ([15]). Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas e sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  autovalores de  $A(G)$ . Se  $T_k$  é o número de passeios fechados de tamanho  $k$  em  $G$  então,  $T_k = \text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ . Em particular,

$$(i) \quad T_2 = \text{tr}(A(G)^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m;$$

$$(ii) \quad \text{se } G \text{ é } r\text{-regular, } T_2 = \text{tr}(A(G)^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m = rn;$$

$$(iii) \quad T_3 = \text{tr}(A(G)^3) = 6t, \text{ onde } t \text{ é o número de ciclos de tamanho 3 em } G.$$

**Proposição 2.55** ([15]). Se  $G$  é um grafo conexo, então  $A(G)$  tem, no mínimo,  $\text{diam}(G)+1$  autovalores distintos.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo e sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  os distintos autovalores de  $A(G)$ . Como  $A(G)$  é real e simétrica,  $m_{A(G)}(x)$  tem grau  $k$  e é um produto de fatores lineares distintos ([3]), então

$$m_{A(G)}(A(G)) = (A(G) - \lambda_1 I_n)(A(G) - \lambda_2 I_n) \dots (A(G) - \lambda_k I_n) = 0.$$

Daí, escrevemos  $A(G)^k$  como uma combinação linear de  $I_n, A(G), A(G)^2, \dots, A(G)^{k-1}$ . Suponha que  $k \leq \text{diam}(G)$  e sejam  $v, u \in V(G)$  tais que  $d(v, u) = k$ . Como  $d(v, u) = k$ , o número de passeios de tamanho menor que  $k$  entre  $v$  e  $u$  é nulo, então, pela Proposição 2.52,  $[A^i]_{vu} = 0$ , para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , e  $[A^k]_{vu} > 0$ . Absurdo, pois  $A^k$  é combinação linear de  $I_n, A(G), A(G)^2, \dots, A(G)^{k-1}$ . Logo,  $k \geq \text{diam}(G) + 1$ .  $\square$

### 2.3.2 Matriz Laplaciana sem Sinal

Caracterizar grafos via espectro é um dos objetivos da Teoria Espectral de Grafos e a matriz Laplaciana sem sinal tem se mostrado mais eficiente do que a matriz de adjacência neste sentido, e isso tem incentivado estudos sobre a matriz.

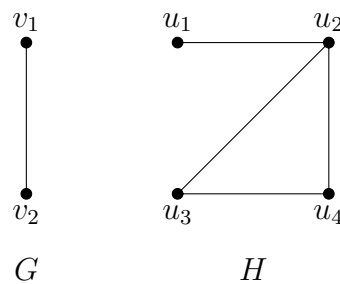
A *matriz dos graus* de  $G$ ,  $D(G)$ , é a matriz diagonal definida por  $D(G) = \text{diag}\{d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n)\}$ .

A matriz dos graus de um grafo, normalmente, não é utilizada para representar grafos já que uma mesma matriz de graus pode representar diferentes grafos, mas ela é importante, pois guarda informação sobre os graus dos vértices e é utilizada para definir outras matrizes que representam grafos.

**Definição 2.56.** A *matriz Laplaciana sem sinal* de  $G$ , denotada por  $Q(G)$ , é definida por  $Q(G) = D(G) + A(G)$ .

A *matriz de incidência* de  $G$ ,  $O(G)$  é a matriz de ordem  $n \times m$ , onde  $[O(G)]_{ij} = 1$  se a aresta  $e_j$  incide no vértice  $v_i$  e,  $[O(G)]_{ij} = 0$  caso contrário, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . A matriz de incidência relaciona de forma mais explícita o conjunto de vértice com o conjunto de arestas de um grafo. Note que a soma de cada linha da matriz de incidência é o grau do vértice associado a essa linha e a soma de cada coluna é sempre 2, já que cada aresta incide em exatamente dois vértices.

**Exemplo 2.57.** Sejam  $G$  e  $H$  grafos dados abaixo, vamos encontrar suas respectivas matrizes de adjacência, Laplaciana sem sinal e de incidência.



Note que em grafos simples, em particular, em grafos sem laços, os valores da diagonal principal de suas respectivas matrizes são iguais a 0, pois, caso contrário, se  $[A(G)]_{ii} = 1$  para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , deveria existir uma aresta conectando o vértice  $v_i$  a ele mesmo, o que é um absurdo.

Além disso, se  $v_i v_j \in E$ , então  $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\} = v_j v_i \in E$ . Dessa forma, temos  $[A(G)]_{ij} = 1 \iff [A(G)]_{ji} = 1$  e  $[A(G)]_{ij} = 0 \iff [A(G)]_{ji} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Então,  $E(G) = \{v_1v_2\}$  e  $E(H) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$ . Assim,

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, para as matrizes dos graus de  $G$ ,  $v_1$  é adjacente a apenas um vértice, e o mesmo vale para  $v_2$ , então  $d_G(v_1) = 1$  e  $d_G(v_2) = 1$ . Já em  $H$ ,  $u_1$  é adjacente a apenas  $u_2$ , que por sua vez, é adjacente a  $u_1, u_3$  e  $u_4$ . Ainda em  $H$ ,  $u_3$  e  $u_4$  são adjacentes e ambos são adjacentes a  $v_2$ , logo,  $d_H(u_1) = 1$ ,  $d_H(u_2) = 3$ ,  $d_H(u_3) = 2$  e  $d_H(u_4) = 2$ . Assim,

$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad D(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para a matriz Laplaciana sem sinal, basta fazer a soma da matriz de adjacência pela matriz dos graus. Daí,

$$Q(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e$$

$$Q(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para as matrizes incidência, temos que

$$O(G) = \begin{matrix} & v_1v_2 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad e \quad O(H) = \begin{matrix} & u_1u_2 & u_2u_3 & u_2u_4 & u_3u_4 \\ u_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Lema 2.58** ([15]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então,*

$$Q(G) = O(G)O(G)^T.$$

*Demonstração.* Considere  $O(G) = (o_{ij})$ . Vamos analisar o produto  $O(G)O(G)^T$ . Temos que a entrada  $(i, j)$  de  $O(G)O(G)^T$  é dada por

$$[O(G)O(G)^T]_{ij} = o_{i1}o_{j1} + o_{i2}o_{j2} + \cdots + o_{im}o_{jm}.$$

Assim, se  $i = j$ ,  $[O(G)O(G)^T]_{ii} = o_{i1}o_{i1} + o_{i2}o_{i2} + \cdots + o_{im}o_{im} = \sum_{k=1}^n o_{ik}^2$ . Logo, a entrada  $(i, i)$  de  $O(G)O(G)^T$  é a soma dos quadrados dos elementos da  $i$ -ésima linha de  $O(G)$ , como cada um destes elementos representa uma possível aresta incidente ao vértice corresponde, obtemos que a entrada  $(i, i)$  de  $O(G)O(G)^T$  é o grau do vértice  $v_i$  de  $G$ . Se  $i \neq j$ , a entrada  $(i, j)$  é 1 ou 0, conforme  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes ou não em  $G$ . Portanto,  $O(G)O(G)^T$  é a soma da matriz dos graus de  $G$  com a matriz de adjacência de  $G$ .  $\square$

**Lema 2.59** ([15]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então,*

$$O(G)^T O(G) = 2I_m + A(\ell(G)).$$

*Demonstração.* Considere  $O(G) = (o_{ij})$ . Vamos analisar o produto  $O(G)^T O(G)$ . Temos que a entrada  $(i, j)$  de  $O(G)^T O(G)$  é dada por

$$[O(G)^T O(G)]_{ij} = o_{1i}o_{1j} + o_{2i}o_{2j} + \cdots + o_{mi}o_{mj}.$$

Assim, se  $i = j$ ,  $[O(G)^T O(G)]_{ii} = o_{1i}o_{1i} + o_{2i}o_{2i} + \cdots + o_{mi}o_{mi} = \sum_{k=1}^n o_{ki}^2$ . Logo, a entrada  $(i, i)$  de  $O(G)^T O(G)$  é a soma dos quadrados dos elementos da  $i$ -ésima coluna de  $O(G)$ , e como a soma dos elementos de cada coluna de  $O(G)$  é  $1 + 1 = 2$ , obtemos que  $[O(G)^T O(G)]_{ii} = 2$ , para todo  $i$ . Além disso, note que  $[O(G)^T O(G)]_{ij} = 1$  se as arestas  $e_i$  e  $e_j$  incidem em um vértice comum e  $[O(G)^T O(G)]_{ij} = 0$ , caso contrário. Agora, por definição, temos que  $[A(\ell(G))]_{ij} = 1$  se as arestas  $e_i$  e  $e_j$  de  $G$  incidem em um vértice comum e  $[A(\ell(G))]_{ij} = 0$ , caso contrário. Daí, se  $[A(\ell(G))]_{ij} = 1$ , obtemos que  $[2I_m + A(\ell(G))]_{ij} = 1$ , se  $i \neq j$ , e  $[2I_m + A(\ell(G))]_{ij} = 2$ , caso contrário.  $\square$

**Proposição 2.60** ([15]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então,*

$$p_{A(\ell(G))}(x) = (x + 2)^{m-n} p_{Q(G)}(x + 2).$$

*Demonstração.* Temos, respectivamente, pelos Lemas 2.58 e 2.59, que  $O(G)O(G)^T = Q(G)$  e  $O(G)^T O(G) = 2I_m + A(\ell(G))$  e usando o Teorema 2.29, podemos escrever a igualdade  $p_{2I_m + A(\ell(G))}(x) = x^{m-n} p_{Q(G)}(x)$ . Além disso, temos que

$$p_{2I_m + A(\ell(G))}(x) = |xI_m - 2I_m - A(\ell(G))| = |(x - 2)I_m - A(\ell(G))| = p_{A(\ell(G))}(x - 2).$$

Então,  $p_{A(\ell(G))}(x) = p_{2I_m + A(\ell(G))}(x + 2)$ , e portanto,  $p_{A(\ell(G))}(x) = (x + 2)^{m-n} p_{Q(G)}(x + 2)$ .  $\square$

**Proposição 2.61** ([15]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então,  $m = \frac{-q_1}{2}$ , onde  $q_1$  é o coeficiente de  $x^{n-1}$  em  $p_{Q(G)}(x)$ .*

*Demonstração.* Temos que o traço de  $Q(G)$  é a soma dos graus dos vértices de  $G$ , que por sua vez, pela Proposição 2.47, é igual a  $2m$ . Além disso, por [3, Página 53], a soma

dos menores principais de  $Q(G)$  com  $i$  linhas e  $i$  colunas é igual a  $(-1)^i q_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Então, a soma de todos os menores principais de  $Q(G)$  com 1 linha e 1 coluna é igual a  $-q_1 = \text{tr}(Q(G)) = 2m$ . Portanto,  $m = \frac{-q_1}{2}$ .  $\square$

**Exemplo 2.62.** O polinômio característico da matriz Laplaciana sem sinal do grafo  $K_{3,2}$  é  $p_{Q(K_{3,2})}(x) = x^5 - 12x^4 + 51x^3 - 92x^2 + 60x = x(x - 2)^2(x - 3)(x - 5)$ . Daí, pela Proposição 2.61, sabemos que  $K_{3,2}$  tem  $m = \frac{12}{2} = 6$  arestas. Além disso, usando a Proposição 2.60, obtemos que  $p_{A(\ell(K_{3,2}))}(x) = x^2(x + 2)^2(x - 1)(x - 3)$ .

**Proposição 2.63** ([15]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Se  $Q(G)$  é singular, então  $G$  é bipartido.*

*Demonstração.* Suponha que  $Q(G)$  é singular. Então, pelo Corolário 2.24,  $Q(G)$  possui um autovalor nulo. Daí, pela Proposição 2.60, como 0 é autovalor de  $Q(G)$ ,  $-2$  é autovalor de  $A(\ell(G))$  com multiplicidade, no mínimo,  $m - n + 1$ . Assim, por [16, Teorema 2.2.4], obtemos que  $G$  é bipartido.  $\square$

### 2.3.3 Matriz $A_\alpha$

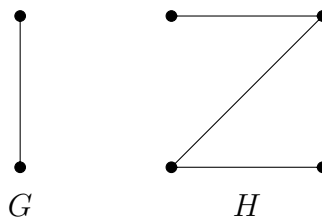
Apresentada por Vladimir Nikiforov, em 2017, em [2], a matriz  $A_\alpha$  será a matriz no qual focarem o estudo espectral neste trabalho. Pode-se encontrar mais resultados em [17, 18] e em [19], onde são apresentados grafos determinados pelo espectro da matriz  $A_\alpha$ .

**Definição 2.64.** Seja  $\alpha \in [0, 1]$ . A matriz  $A_\alpha$  de  $G$ ,  $A_\alpha(G)$ , é a combinação linear das matrizes  $A(G)$  e  $D(G)$  definida por

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G).$$

A matriz  $A_\alpha$  pode ser vista como um segmento de reta no espaço das matrizes quadradas de ordem  $n$ , que parte da matriz de adjacência, quando  $\alpha = 0$ , passa pela matriz Laplaciana sem sinal multiplicada pelo escalar  $\frac{1}{2}$ , quando  $\alpha = \frac{1}{2}$  e, finalmente, chega à matriz dos graus, quando  $\alpha = 1$ . Dessa forma, podemos dizer que  $A_\alpha(G)$  generaliza as matrizes  $A(G)$ ,  $Q(G)$  e  $D(G)$ .

**Exemplo 2.65.** *Considere  $G$  e  $H$  grafos dado a seguir. No Exemplo 2.57, obtemos a matriz de adjacência e a matriz dos graus de ambos os grafos.*



Então,

$$A_\alpha(G) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad e$$

$$A_\alpha(H) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha & 0 & 0 \\ 1 - \alpha & 3\alpha & 1 - \alpha & 1 - \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 2\alpha & 1 - \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

**Lema 2.66.** Se  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ , então  $A_\alpha(G) - A_\beta(G) = (\alpha - \beta)L(G)$ , onde  $L(G)$  é a matriz definida como  $L(G) = D(G) - A(G)$ . A matriz  $L(G)$  é chamada matriz Laplaciana de  $G$ .

*Demonstração.* Sejam  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ . Então,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G) - A_\beta(G) &= \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G) - (\beta D(G) + (1 - \beta)A(G)) \\ &= (\alpha - \beta)D(G) + (1 - \alpha - (1 - \beta))A(G) \\ &= (\alpha - \beta)D(G) + (\beta - \alpha)A(G) \\ &= (\alpha - \beta)(D(G) - A(G)) = (\alpha - \beta)L(G). \end{aligned}$$

□

Além disso, note que podemos escrever a matriz  $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G)$  em função da matriz Laplaciana, da forma  $A_\alpha(G) = \alpha L(G) + A(G)$ . Podemos, também, escrever a matriz Laplaciana sem sinal em função da matriz  $A_\alpha$ , da seguinte maneira,  $Q(G) = \frac{1}{(1 - \alpha)} (A_\alpha(G) - (2\alpha - 1)D(G))$ ,  $\alpha \in [0, 1)$ .

Seja  $\alpha \in [0, 1]$  e considere  $G$  um grafo de ordem  $n$  com  $\lambda$  autovalor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovetor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Vamos encontrar as equações dos autovetores de  $A_\alpha(G)$ . Para facilitar a escrita, denotaremos os vértices de  $G$  como  $i = v_i \in V(G)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e considere  $A(G) = (a_{ij})$ . Então,

$$\begin{aligned} \lambda x &= A_\alpha(G)x = \alpha D(G)x + (1 - \alpha)A(G)x \\ &= \alpha \begin{pmatrix} d_G(1)x_1 \\ d_G(2)x_2 \\ \vdots \\ d_G(n)x_n \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como  $a_{ij} = 1$ , se  $\{i, j\} \in E(G)$  e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário, podemos reescrever o somatório  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  como  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{\{i,j\} \in E(G)} x_j$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Daí, obtemos as  $n$  equações dos autovetores de  $A_\alpha(G)$ , dadas por

$$\lambda x_i = \alpha d_G(i)x_i + (1 - \alpha) \sum_{\{i,j\} \in E(G)} x_j,$$



para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Chamamos o multiconjunto dos autovalores da matriz  $A_\alpha$  de um grafo  $G$ ,  $\text{Spec}(A_\alpha(G))$ , de  $A_\alpha$ -espectro de  $G$ .

**Proposição 2.67** ([2]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Então,  $\lambda_1(L(G)) \leq n$  e  $\lambda_n(L(G)) = 0$ .*

**Proposição 2.68** ([2]). *Sejam  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$  e  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Então,*

$$\lambda_i(A_\beta(G)) \leq \lambda_i(A_\alpha(G)), \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 2.66, temos  $A_\alpha(G) - A_\beta(G) = (\alpha - \beta)L(G)$ . Usando o Teorema 2.26, obtemos que

$$\lambda_i(A_\alpha(G)) - \lambda_i(A_\beta(G)) \geq (\alpha - \beta)\lambda_n(L(G)) = 0 \implies \lambda_i(A_\beta(G)) \leq \lambda_i(A_\alpha(G)).$$

□

**Proposição 2.69** ([2]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então,*

$$\text{tr}(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_\alpha(G)) = \alpha \sum_{v_i \in V(G)} d_G(v_i) = 2\alpha m.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.22, temos que  $\text{tr}(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_\alpha(G))$ . Além disso, por definição, os elementos da diagonal principal de  $A_\alpha(G)$  são os graus dos vértices de  $G$  multiplicados por  $\alpha$ , assim o resultado segue pela Proposição 2.47. □

**Proposição 2.70** ([2]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então,*

$$\text{tr}(A_\alpha(G)^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_\alpha(G)^2) = 2m(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 \sum_{v_i \in V(G)} d_G(v_i)^2.$$

*Demonstração.* A primeira igualdade segue da Proposição 2.22. Calculando o quadrado da matriz  $A_\alpha(G)$ , temos

$$\begin{aligned} A_\alpha(G)^2 &= (\alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G))^2 \\ &= \alpha^2 D(G)^2 + \alpha(1 - \alpha)D(G)A(G) + \alpha(1 - \alpha)A(G)D(G) + (1 - \alpha)^2 A(G)^2 \end{aligned}$$

Como  $A(G)$  possui diagonal principal nula, temos  $\text{tr}(D(G)A(G)) = \text{tr}(A(G)D(G)) = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_\alpha(G)^2) &= \alpha^2 \text{tr}(D(G)^2) + (1 - \alpha)^2 \text{tr}(A(G)^2) \\ &= \alpha^2 \sum_{v_i \in V(G)} d_G(v_i)^2 + 2m(1 - \alpha)^2 \end{aligned}$$

□

O Teorema 2.71 é uma consequência do *Teorema de Perron-Frobenius* [20], o qual fornece propriedades do maior autovalor de uma matriz simétrica com todas as entradas não negativas, o que é o caso da matriz  $A_\alpha$ .

**Teorema 2.71** ([2]). *Seja  $G$  um grafo e  $x$  um autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(G))$ , com todas as entradas não negativas. Então,*

- (i) *se  $G$  é conexo, então  $x$  não tem entradas nulas;*
- (ii) *se  $G$  é desconexo e  $P$  é o conjunto de vértices correspondentes as entradas positivas de  $x$ , então o subgrafo induzido por  $P$  é uma união de componentes  $H$  de  $G$  tal que  $\lambda_1(A_\alpha(H)) = \lambda_1(A_\alpha(G))$ ;*
- (iii) *se  $G$  é conexo e  $\mu$  é um autovalor de  $A_\alpha(G)$  associado a um autovetor com todas as entradas não negativas, então  $\mu = \lambda_1(A_\alpha(G))$ ;*
- (iv) *se  $G$  é conexo e  $H$  é um subgrafo próprio de  $G$ , então  $\lambda_1(A_\alpha(H)) < \lambda_1(A_\alpha(G))$ .*

**Lema 2.72.** *Seja  $G$  um grafo  $r$ -regular com  $n$  vértices. Então,  $\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))$  é autovalor de  $A_\alpha(G)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

*Demonstração.* Como  $G$  é  $r$ -regular, temos que  $D(G) = rI_n$ . Seja  $x_i$  um autovetor de  $A(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_i(A(G))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então

$$\begin{aligned} A_\alpha(G)x_i &= (\alpha rI_n + (1 - \alpha)A(G))x_i = \alpha r x_i + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))x_i \\ &= (\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G)))x_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.73** ([2]). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $d_G(v_1) \geq \dots \geq d_G(v_n)$ . Então, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\lambda_i(A_\alpha(G)) \leq d_G(v_i)$ .*

*Demonstração.* Da Proposição 2.68, para  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ , temos  $\lambda_i(A_\alpha(G)) \leq \lambda_i(A_\beta(G))$ . Tomando  $\beta = 1$ , temos que  $A_\beta(G) = D(G)$  e, então,  $\lambda_i(A_\alpha(G)) \leq \lambda_i(D(G)) = d_G(v_i)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . □

**Proposição 2.74** ([2]). *Seja  $G$  um grafo. Então, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,*

$$\alpha\delta(G) + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G)) \leq \lambda_i(A_\alpha(G)) \leq \alpha\Delta(G) + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G)).$$

*Demonstração.* Perceba que  $\lambda_n(\alpha D(G)) = \alpha\delta(G)$ ,  $\lambda_1(\alpha D(G)) = \alpha\Delta(G)$  e, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\lambda_i((1 - \alpha)A(G)) = (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))$ , assim, o resultado segue do Teorema 2.26. □

**Proposição 2.75** ([2]). *Seja  $G$  um grafo. Então,*

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{1}{2} \left( \alpha(1 + \Delta(G)) + \sqrt{\alpha^2(\Delta(G) + 1)^2 + 4\Delta(G)(1 - 2\alpha)} \right).$$

*Se  $G$  é conexo e  $\alpha \neq 1$ , temos a igualdade se e somente se  $G = K_{1,\Delta(G)}$*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.8, o maior autovalor de  $A_\alpha(K_{1,\Delta(G)})$  é dado por

$$\lambda_1(A_\alpha(K_{1,\Delta(G)})) = \frac{1}{2} \left( \alpha(1 + \Delta(G)) + \sqrt{\alpha^2(1 + \Delta(G))^2 + 4\Delta(G)(1 - 2\alpha)} \right).$$

Observe que  $K_{1,\Delta(G)}$  é subgrafo de  $G$ . Daí, pelo Teorema 2.71,  $\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \lambda_1(A_\alpha(K_{1,\Delta(G)}))$  e, portanto,

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{1}{2} \left( \alpha(1 + \Delta(G)) + \sqrt{\alpha^2(1 + \Delta(G))^2 + 4\Delta(G)(1 - 2\alpha)} \right).$$

A igualdade segue, também, do Teorema 2.71. □

**Corolário 2.76** ([2]). *Seja  $G$  um grafo. Se  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , então  $\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \alpha(\Delta(G) + 1)$ . E, se  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ , então  $\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \alpha\Delta(G) + \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha)^2$ .*

## 3 Propriedades $A_\alpha$ -espectrais de Produtos de Grafos

Dado um conjunto de grafos, podemos operar seus elementos afim de obter novos grafos. Neste capítulo, apresentamos a união, a junção e o produto de grafos. Para mais detalhes sugerimos a referência [11]. O espectro da matriz de adjacência e da Laplaciana sem sinal destas operações foram apresentados em [21, 22] e o  $A_\alpha$ -espectro de cada um dos produtos de grafos, em [23].

Considere  $G$  um grafo com  $n_1$  vértices e  $m_1$  arestas,  $H$  um grafo com  $n_2$  vértices e  $m_2$  arestas,  $j_n$  o vetor com  $n$  entradas, todas iguais a 1, e  $J_{n \times m}$  a matriz com todas as entradas iguais a 1 de ordem  $n \times m$ . Demais hipóteses serão enunciadas, quando necessário.

Os resultados não referenciados, neste capítulo, são originais deste trabalho.

### 3.1 União de Grafos

**Definição 3.1** ([11]). A *união* de  $G$  e  $H$ ,  $G \cup H$ , é o grafo cujo conjunto de vértices é dado por  $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$  e o conjunto de arestas por  $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ . Se  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ , então  $G \cup H$  é a *soma* de  $G$  e  $H$  e denotamos por  $G + H$ .

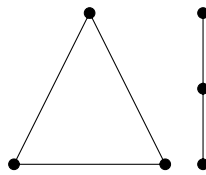


Figura 14: Grafo soma  $C_3 + P_3$

Note que na união  $G \cup H$ , os vértices e as arestas de  $G$  e  $H$  são mantidos e nenhum outro vértice ou aresta é adicionado à união, ou seja, se  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ , então  $G \cup H$  tem  $n_1 + n_2$  vértices e  $m_1 + m_2$  arestas. Além disso, temos  $d_{G \cup H}(v) = d_G(v)$  e  $d_{G \cup H}(u) = d_H(u)$ , para todo  $v \in V(G)$  e  $u \in V(H)$ .

Rotulando  $G \cup H$  de forma com que os vértices de  $G$  sejam os primeiros e os vértices de  $H$  sejam os últimos, podemos escrever

$$A(G \cup H) = \begin{pmatrix} A(G) & 0 \\ 0 & A(H) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D(G \cup H) = \begin{pmatrix} D(G) & 0 \\ 0 & D(H) \end{pmatrix}.$$

Portando,  $A_\alpha(G \cup H) = \alpha D(G \cup H) + (1 - \alpha)A(G \cup H)$  é dada por

$$A_\alpha(G \cup H) = \begin{pmatrix} A_\alpha(G) & 0 \\ 0 & A_\alpha(H) \end{pmatrix}.$$

O  $A_\alpha$ -espectro de  $G \cup H$  segue diretamente do Lema 2.27, como a seguir.

**Teorema 3.2.** *O  $A_\alpha$ -espectro de  $G \cup H$  é dado por*

$$\text{Spec}(A_\alpha(G \cup H)) = \text{Spec}(A_\alpha(G)) \cup \text{Spec}(A_\alpha(H)).$$

**Exemplo 3.3.** *Na Figura 14, temos*

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A_\alpha(C_3)) &= \{2, 3\alpha - 1\} \text{ e} \\ \text{Spec}(A_\alpha(P_3)) &= \left\{ \alpha, \frac{3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2}, \frac{3\alpha - \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2,

$$\text{Spec}(A_\alpha(C_3 \cup P_3)) = \left\{ 2, 3\alpha - 1, \alpha, \frac{3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2}, \frac{3\alpha - \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\}.$$

## 3.2 Junção de Grafos

**Definição 3.4** ([11]). Sejam  $G$  e  $H$  grafos tais que  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ . A *junção* de  $G$  e  $H$ , denotada por  $G \vee H$ , é o grafo com conjunto de vértices dado por  $V(G) \cup V(H)$ , onde todo vértice de  $G$  é adjacente a todo vértice de  $H$  e se  $e \in E(G)$  ou  $e \in E(H)$ , então  $e \in E(G \vee H)$ .

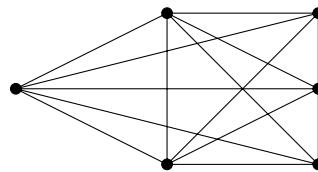


Figura 15: Grafo junção  $C_3 \vee P_3$

Na junção  $G \vee H$ , além dos vértices e das arestas de  $G$  e  $H$  serem mantidos, novas arestas são criadas. O grafo  $G \vee H$  tem  $n_1 + n_2$  vértices e  $n_1n_2 + m_1 + m_2$  arestas. Além disso, temos  $d_{G \vee H}(v) = d_G(v) + n_2$  e  $d_{G \vee H}(u) = d_H(u) + n_1$ , para todo  $v \in V(G)$  e  $u \in V(H)$ .

Rotulando de forma com que os vértices de  $G$  sejam os primeiros e os vértices de  $H$  sejam os últimos, podemos escrever

$$A(G \vee H) = \begin{pmatrix} A(G) & J_{n_1 \times n_2} \\ J_{n_2 \times n_1} & A(H) \end{pmatrix} \text{ e } D(G \vee H) = \begin{pmatrix} n_2 I_{n_1} + D(G) & 0 \\ 0 & n_1 I_{n_2} + D(H) \end{pmatrix}.$$

Portando, a matriz  $A_\alpha(G \vee H) = \alpha D(G \vee H) + (1 - \alpha)A(G \vee H)$  é dada por

$$A_\alpha(G \vee H) = \begin{pmatrix} \alpha n_2 I_{n_1} + A_\alpha(G) & (1 - \alpha)J_{n_1 \times n_2} \\ (1 - \alpha)J_{n_2 \times n_1} & \alpha n_1 I_{n_2} + A_\alpha(H) \end{pmatrix}.$$

**Teorema 3.5** ([2]). *Se  $x$  e  $y$  são vetores não nulos ortogonais ao vetor  $j$  tais que  $A_\alpha(G) = \lambda x$  e  $A_\alpha(H) = \mu y$ , para algum  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , então*

$$\{\alpha n_2 + \lambda, \alpha n_1 + \mu\} \in \text{Spec}(A_\alpha(G \vee H)).$$

*Demonstração.* Considere  $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  o vetor de tamanho  $n_1 + n_2$  cujas  $n_1$  primeiras entradas são iguais as  $n_1$  entradas do vetor  $x$  e as demais  $n_2$  entradas são todas iguais a 0. Temos,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G \vee H)X &= \begin{pmatrix} \alpha n_2 I_{n_1} + A_\alpha(G) & (1 - \alpha)J_{n_1 \times n_2} \\ (1 - \alpha)J_{n_2 \times n_1} & \alpha n_1 I_{n_2} + A_\alpha(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha n_2 I_{n_1} x + A_\alpha(G)x \\ (1 - \alpha)J_{n_2 \times n_1} x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha n_2 x + \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha n_2 + \lambda) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha n_2 + \lambda)X. \end{aligned}$$

Agora, considere  $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$  o vetor de tamanho  $n_1 + n_2$  cujas  $n_1$  primeiras entradas são todas iguais a 0 e as demais  $n_2$  entradas são iguais as  $n_2$  entradas do vetor  $y$ . Temos,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G \vee H)Y &= \begin{pmatrix} \alpha n_2 I_{n_1} + A_\alpha(G) & (1 - \alpha)J_{n_1 \times n_2} \\ (1 - \alpha)J_{n_2 \times n_1} & \alpha n_1 I_{n_2} + A_\alpha(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha)J_{n_1 \times n_2} y \\ \alpha n_1 I_{n_2} y + A_\alpha(H)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha n_1 y + \mu y \end{pmatrix} = (\alpha n_1 + \mu) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = (\alpha n_1 + \mu)Y. \end{aligned}$$

Portanto,  $\{\alpha n_2 + \lambda, \alpha n_1 + \mu\} \in \text{Spec}(A_\alpha(G \vee H))$ . □

**Teorema 3.6** ([2]). *Se  $G$  é  $r_1$ -regular e  $H$  é  $r_2$ -regular, então*

$$\lambda_1(A_\alpha(G \vee H)) = \lambda_1(M) \quad e \quad \lambda_{n_1+n_2}(A_\alpha(G \vee H)) = \lambda_2(M),$$

onde  $M = \begin{pmatrix} r_1 + \alpha n_2 & (1 - \alpha)^2 n_1 n_2 \\ 1 & r_2 + \alpha n_1 \end{pmatrix}$ . Além disso,

$$\alpha r_1 + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G)), \alpha r_2 + (1 - \alpha)\lambda_j(A(H)) \in \text{Spec}(A_\alpha(G \vee H)),$$

para todo  $i \in \{2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{2, \dots, n_2\}$ .

Observe que  $K_n = K_{n-1} \vee K_1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, podemos escrever o grafo completo de  $n$  vértices como uma junção de  $n$  grafos com apenas um vértice,  $K_1$ , da forma  $K_n = K_1 \vee K_1 \vee \dots \vee K_1$ ,  $n$  vezes. Além disso, se  $G$  e  $H$  não possuem arestas, então  $K_{n_1, n_2} = G \vee H$ . As Proposições 3.7 e 3.8 seguem disto.

**Proposição 3.7** ([2]). *O  $A_\alpha$ -espectro de  $K_n$  é dado por  $\lambda_1(A_\alpha(K_n)) = n - 1$  e, para cada  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ ,  $\lambda_i(A_\alpha(K_n)) = \alpha n - 1$ .*

**Proposição 3.8** ([2]). *O  $A_\alpha$ -espectro de  $K_{p,q}$ ,  $p \geq q \geq 1$ , é dado por*

$$\begin{aligned}\lambda_1(A_\alpha(K_{p,q})) &= \frac{1}{2} \left( \alpha(p+q) + \sqrt{\alpha^2(p+q)^2 + 4pq(1-2\alpha)} \right), \\ \lambda_i(A_\alpha(K_{p,q})) &= \alpha p, \text{ para } 1 < i \leq q, \\ \lambda_i(A_\alpha(K_{p,q})) &= \alpha q, \text{ para } q < i < p+q, \\ \lambda_{p+q}(A_\alpha(K_{p,q})) &= \frac{1}{2} \left( \alpha(p+q) - \sqrt{\alpha^2(p+q)^2 + 4pq(1-2\alpha)} \right).\end{aligned}$$

**Exemplo 3.9.** *Considere os grafos  $K_2$  e  $C_4$ . Pela Proposição 3.7 e calculando o espectro de  $A_\alpha(C_4)$ , temos*

$$\text{Spec}(A_\alpha(K_2)) = \{1, 2\alpha - 1\} \quad \text{e} \quad \text{Spec}(A_\alpha(C_4)) = \{2, 2\alpha^{[2]}, 4\alpha - 2\}.$$

*Perceba que, por definição,  $K_2$  é 1-regular e  $C_4$  é 2-regular. Seja  $M = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & 8(1-\alpha)^2 \\ 1 & 2+2\alpha \end{pmatrix}$ .*

*Calculando o  $\text{Spec}(M)$ , obtemos que*

$$\lambda_1(M) = \frac{6\alpha + 3 + \sqrt{36\alpha^2 - 68\alpha + 33}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2(M) = \frac{6\alpha + 3 - \sqrt{36\alpha^2 - 68\alpha + 33}}{2}.$$

*Pelo Teorema 3.6, o  $A_\alpha$ -espectro de  $K_2 \vee C_4$  é dado por*

$$\text{Spec}(A_\alpha(K_2 \vee C_4)) = \left\{ \lambda_1(M), (4\alpha - 2\alpha^2)^{[2]}, 4\alpha - 2\alpha^2 - 1, 8\alpha - 4\alpha^2 - 2, \lambda_2(M) \right\}.$$

### 3.3 Produto de Grafos

O *produto* de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G * H$ , tem seu conjunto de vértices dado pelo produto Cartesiano  $V(G) \times V(H)$ . A partir daí, para cada forma de definir o conjunto de arestas de  $G * H$ , temos um produto de grafos diferente. Sejam  $(v, u)$  e  $(v', u')$  vértices quaisquer de  $G * H$ , considere as seguintes possibilidades:

- $v$  é adjacente a  $v'$  em  $G$  ou  $v$  não é adjacente a  $v'$  em  $G$ .
- $u$  é adjacente a  $u'$  em  $H$  ou  $u$  não é adjacente a  $u'$  em  $H$ .
- $v = v'$  e/ou  $u = u'$ .

Para ajudar na definição dos diferentes produtos de grafos, com base nas possibilidades acima, vamos montar uma tabela, no qual cada tabela estará associada a um produto de grafos. Usaremos os símbolos E, N e = para denotar, respectivamente, adjacência, não adjacência ou igualdade dos vértices de algum grafo. Considere a tabela  $S$ , dada abaixo,

onde as linhas correspondem ao grafo  $G$  e as colunas ao grafo  $H$ , de forma que cada  $\circ$  na tabela depende se o vértice  $(v, u)$  é adjacente ou não ao vértice  $(v', u')$ . Em caso afirmativo,  $\circ$  recebe  $E$ , em caso negativo,  $\circ$  recebe  $N$ .

$$S : \begin{matrix} & & \text{E} & = & \text{N} \\ \text{E} & & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & = & \circ \\ \text{N} & & \circ & \circ & \circ \end{matrix},$$

Por exemplo, se em dado um produto de grafos a seguir, a entrada  $EN$  da tabela receber o símbolo  $E$ , quer dizer que os vértices  $(v, u)$  e  $(v', u')$  são adjacentes em  $G * H$  se  $v$  é adjacente a  $v'$  e  $u$  não é adjacente a  $u'$ . De forma análoga para as demais entradas. Note que cada  $\circ$  possui duas possibilidades,  $E$  ou  $N$ , assim, como são oito  $\circ$ 's, podemos definir  $2^8 = 256$  produtos de grafos diferentes usando  $G$  e  $H$ . Definiremos alguns produtos e apresentaremos suas respectivas matrizes  $S$ .

Seja  $V_i^G(G * H)$  o conjunto dos vértices de  $G * H$  no qual a primeira coordenada é dada pelo vértice  $v_i$  de  $G$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . A ordenação dos vértices de  $G * H$ , utilizada neste trabalho, é dada por

$$V(G * H) = V_1^G(G * H) \cup V_2^G(G * H) \cup \dots \cup V_{n_1}^G(G * H),$$

isto é, ao escrevermos as matrizes associadas a um produto de grafos  $G * H$ , as primeiras linhas desta matriz estão associadas aos vértices de  $V_1^G(G * H)$ , seguido pelos vértices de  $V_2^G(G * H)$  e, as últimas linhas, aos vértices de  $V_{n_1}^G(G * H)$ .

### 3.3.1 Produto Cartesiano de Grafos

**Definição 3.10** ([11]). O *produto cartesiano* de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G \times H$ , é o grafo no qual  $(v, u)$  e  $(v', u')$  são adjacentes se, e somente se,  $v = v'$  e  $u$  é adjacente a  $u'$  em  $H$ ; ou  $v$  é adjacente a  $v'$  em  $G$  e  $u = u'$ .

$$S : \begin{matrix} & & \text{E} & = & \text{N} \\ \text{E} & & N & E & N \\ & & E & = & N \\ \text{N} & & N & N & N \end{matrix}.$$



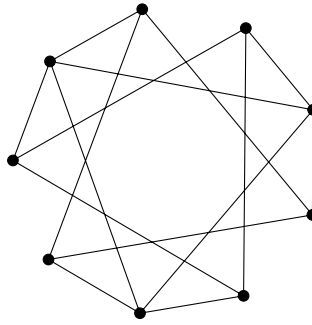


Figura 16: Grafo produto cartesiano  $P_3 \times C_3$

Da Definição 3.10, temos

$$A(G \times H) = A(G) \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes A(H) \quad \text{e} \quad D(G \times H) = D(G) \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes D(H).$$

Portando, a matriz  $A_\alpha(G \times H) = \alpha D(G \times H) + (1 - \alpha)A(G \times H)$  é dada por

$$A_\alpha(G \times H) = A_\alpha(G) \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes A_\alpha(H).$$

O  $A_\alpha$ -espectro de  $G \times H$  segue diretamente do Teorema 2.45, como a seguir.

**Teorema 3.11** ([23]). *O  $A_\alpha$ -espectro de  $G \times H$  é dado por*

$$\text{Spec}(A_\alpha(G \times H)) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{n_2} \{\lambda_i(A_\alpha(G)) + \lambda_j(A_\alpha(H))\}.$$

**Exemplo 3.12.** *Considere os grafos  $C_3$  e  $P_3$ . Temos*

$$\text{Spec}(A_\alpha(C_3)) = \left\{ 2, (3\alpha - 1)^{[2]} \right\} \quad \text{e} \quad \text{Spec}(A_\alpha(P_3)) = \left\{ \alpha, \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\}.$$

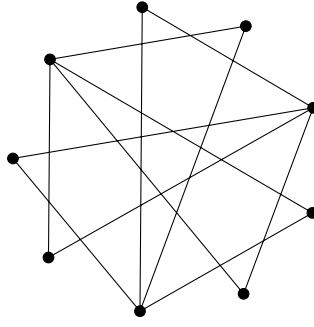
Então, pelo Teorema 3.11, o  $A_\alpha$ -espectro de  $C_3 \times P_3$  é dado pelo multiconjunto

$$\left\{ 2 + \alpha, (4\alpha - 1)^{[2]}, \frac{3\alpha + 4 \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2}, \left( \frac{9\alpha - 2 \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right)^{[2]} \right\}.$$

### 3.3.2 Produto Direto de Grafos

**Definição 3.13** ([11]). O *produto direto* de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G \odot H$ , é o grafo no qual  $(v, u)$  e  $(v', u')$  são adjacentes se, e somente se,  $v$  é adjacente a  $v'$  em  $G$  e  $u$  é adjacente a  $u'$  em  $H$ .

$$S : \begin{matrix} & & \text{E} & = & \text{N} \\ \text{E} & & \begin{bmatrix} E & N & N \\ N & = & N \\ N & N & N \end{bmatrix} & & \end{matrix}.$$


 Figura 17: Grafo produto direto  $P_3 \odot C_3$ 

Da Definição 3.13, temos

$$A(G \odot H) = A(G) \otimes A(H) \quad \text{e} \quad D(G \odot H) = D(G) \otimes D(H).$$

Portando, a matriz  $A_\alpha(G \odot H) = \alpha D(G \odot H) + (1 - \alpha)A(G \odot H)$  é dada por

$$A_\alpha(G \odot H) = \alpha D(G) \otimes D(H) + (1 - \alpha)A(G) \otimes A(H).$$

O espectro da matriz de adjacência de  $G \odot H$  segue diretamente do Teorema 2.40.

**Teorema 3.14** ([21]). *O espectro de  $A(G \odot H)$  é dado por*

$$\text{Spec}(A(G \odot H)) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{n_2} \{\lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H))\}.$$

**Teorema 3.15** ([23]). *Se  $H$  é  $r$ -regular, então*

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} \{r\lambda_i(A_\alpha(G))\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(G \odot H)).$$

*Demonstração.* Seja  $x_i$  um autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_i(A_\alpha(G))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Então,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G \odot H)(x_i \otimes j_{n_2}) &= (\alpha D(G) \otimes D(H) + (1 - \alpha)A(G) \otimes A(H))(x_i \otimes j_{n_2}) \\ &= (\alpha D(G) \otimes D(H))(x_i \otimes j_{n_2}) + (1 - \alpha)A(G) \otimes A(H)(x_i \otimes j_{n_2}) \\ &= \alpha D(G)x_i \otimes D(H)j_{n_2} + (1 - \alpha)A(G)x_i \otimes A(H)j_{n_2} \\ &= \alpha D(G)x_i \otimes rj_{n_2} + (1 - \alpha)A(G)x_i \otimes rj_{n_2} \\ &= rA_\alpha(G)x_i \otimes j_{n_2} \\ &= r\lambda_i(A_\alpha(G))(x_i \otimes j_{n_2}), \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Logo,  $\bigcup_{i=1}^{n_1} \{r\lambda_i(A_\alpha(G))\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(G \odot H))$ .  $\square$

**Corolário 3.16.** *Se  $G$  é  $r$ -regular, então  $\bigcup_{j=1}^{n_2} \{r\lambda_j(A_\alpha(H))\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(G \odot H))$ .*

Considere  $H$   $r$ -regular. No Teorema 3.15, obtemos que se  $x_1$  é autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(G))$ , então  $x_1 \otimes j_{n_2}$  é autovetor de  $A_\alpha(G \odot H)$  associado ao autovalor  $r\lambda_1(A_\alpha(G))$ . Se  $G$  é conexo e  $x_1$  possui todas as entradas não negativas, segue, do Teorema 2.71, o seguinte resultado.

**Corolário 3.17** ([23]). *Se  $H$  é  $r$ -regular,  $G$  é conexo e  $x$  é um autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(G))$ , com todas as entradas não negativas, então*

$$\lambda_1(A_\alpha(G \odot H)) = r\lambda_1(A_\alpha(G)).$$

De forma análoga ao Corolário 3.17, se  $G$  é  $r$ -regular,  $H$  é conexo e  $y$  é um autovetor de  $A_\alpha(H)$  associado autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(G))$ , com todas as entradas não negativas, então  $\lambda_1(A_\alpha(G \odot H)) = r\lambda_1(A_\alpha(H))$ .

**Exemplo 3.18.** *Considere os grafos  $P_3$  e  $C_3$ . Temos*

$$\text{Spec}(A_\alpha(P_3)) = \left\{ \alpha, \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\} \quad \text{e } C_3 \text{ é 2-regular.}$$

Então, pelo Teorema 3.15,  $\{2\alpha, 3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(P_3 \odot C_3))$ .

**Teorema 3.19.** *Se  $G$  é  $r_1$ -regular e  $H$  é  $r_2$ -regular, então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \odot H$  é dado por*

$$\text{Spec}(A_\alpha(G \odot H)) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{n_2} \{\alpha r_1 r_2 + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H))\}.$$

*Demonstração.* Sejam  $x_i$  e  $y_j$  autovetores associados, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_i(A(G))$  e  $\lambda_j(A(H))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Então,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G \odot H)(x_i \otimes y_j) &= (\alpha D(G \odot H) + (1 - \alpha)A(G \odot H))(x_i \otimes y_j) \\ &= (\alpha D(G) \otimes D(H) + (1 - \alpha)A(G) \otimes A(H))(x_i \otimes y_j) \\ &= (\alpha r_1 I_{n_1} \otimes r_2 I_{n_2} + (1 - \alpha)A(G) \otimes A(H))(x_i \otimes y_j) \\ &= \alpha r_1 x_i \otimes r_2 y_j + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))x_i \otimes \lambda_j(A(H))y_j \\ &= (\alpha r_1 r_2 + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H)))(x_i \otimes y_j), \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Como  $A_\alpha(G \odot H)$  possui exatamente  $n_1 n_2$  autovalores, não necessariamente distintos, obtemos o resultado.  $\square$

**Exemplo 3.20.** *O grafo  $K_4$  é 3-regular e o  $K_5$  é 4-regular, e pela Proposição 3.7,*

$$\text{Spec}(K_4) = \{3, (4\alpha - 1)^{[3]}\} \quad \text{e} \quad \text{Spec}(K_5) = \{4, (5\alpha - 1)^{[4]}\}.$$

Pelo Teorema 3.19,

$$\text{Spec}(A_\alpha(G \odot H)) = \{12, (32\alpha - 16\alpha^2 - 4)^{[3]}, (30\alpha - 15\alpha^2 - 3)^{[4]}, (40\alpha^2 - 20\alpha^3 - 9\alpha)^{[12]}\}.$$

### 3.3.3 Produto Forte de Grafos

**Definição 3.21** ([11]). O *produto forte* de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G \otimes H$ , é o grafo no qual  $(v, u)$  e  $(v', u')$  são adjacentes se, e somente se,  $v$  é adjacente a  $v'$  em  $G$  e  $u$  é adjacente ou igual a  $u'$  em  $H$ ; ou  $u$  é adjacente a  $u'$  e  $v = v'$ .

$$S : \begin{matrix} & \text{E} & = & \text{N} \\ \text{E} & \begin{bmatrix} E & E & N \\ E & = & N \\ N & N & N \end{bmatrix} & & \end{matrix}.$$

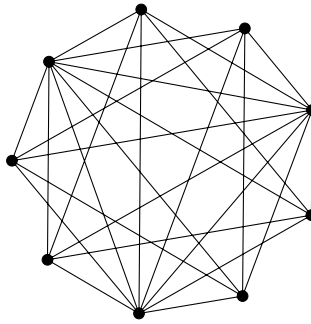


Figura 18: Grafo produto forte  $P_3 \otimes C_3$

Observe que, pela Definição 3.21,  $G \otimes H = (G \times H) \cup (G \odot H)$ . Além disso, temos

$$A(G \otimes H) = A(G \times H) + A(G \odot H) \quad \text{e} \quad D(G \otimes H) = D(G \times H) + D(G \odot H).$$

Portando, a matriz  $A_\alpha(G \otimes H) = \alpha D(G \otimes H) + (1 - \alpha)A(G \otimes H)$  é dada por

$$A_\alpha(G \otimes H) = A_\alpha(G \times H) + A_\alpha(G \odot H).$$

**Teorema 3.22** ([21]). *O espectro de  $A(G \otimes H)$  é dado por*

$$\text{Spec}(A(G \otimes H)) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{n_2} \{ \lambda_i(A(G)) + \lambda_j(A(H)) + \lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H)) \}.$$

*Demonstração.* Sejam  $v_i$  e  $u_j$  autovetores associados, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_i(A(G))$  e  $\lambda_j(A(H))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Então,

$$\begin{aligned} A(G \otimes H)(v_i \otimes v_j) &= (A(G \times H) + A(G \odot H))(v_i \otimes v_j) \\ &= A(G \times H)(v_i \otimes v_j) + A(G \odot H)(v_i \otimes v_j) \\ &= (\lambda_i(A(G)) + \lambda_j(A(H)))(v_i \otimes v_j) + \lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H))(v_i \otimes v_j) \\ &= (\lambda_i(A(G)) + \lambda_j(A(H)) + \lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H)))(v_i \otimes v_j), \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Como  $A(G \otimes H)$  possui exatamente  $n_1 n_2$  autovalores, não necessariamente distintos, obtemos o resultado.  $\square$

**Teorema 3.23** ([23]). *Se  $H$  é  $r$ -regular, então*

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} \{r\lambda_i(A_\alpha(G)) + \lambda_i(A_\alpha(G)) + r\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(G \otimes H)).$$

*Demonstração.* Seja  $x_i$  um autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_i(A_\alpha(G))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Então, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G \otimes H)(x_i \otimes j_{n_2}) &= A_\alpha(G \times H)(x_i \otimes j_{n_2}) + A_\alpha(G \odot H)(x_i \otimes j_{n_2}) \\ &= (A_\alpha(G) \otimes I_{n_2})(x_i \otimes j_{n_2}) + (I_{n_1} \otimes A_\alpha(H))(x_i \otimes j_{n_2}) \\ &\quad + r\lambda_i(A_\alpha(G))(x_i \otimes j_{n_2}) \\ &= A_\alpha(G)x_i \otimes j_{n_2} + x_i \otimes A_\alpha(H)j_{n_2} + r\lambda_i(A_\alpha(G))(x_i \otimes j_{n_2}) \\ &= (r\lambda_i(A_\alpha(G)) + \lambda_i(A_\alpha(G)) + r)(x_i \otimes j_{n_2}). \end{aligned}$$

Logo,  $\bigcup_{i=1}^{n_1} \{r\lambda_i(A_\alpha(G)) + \lambda_i(A_\alpha(G)) + r\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(G \otimes H))$ .  $\square$

**Exemplo 3.24.** *Considere os grafos  $P_3$  e  $C_3$ . Temos*

$$\text{Spec}(A_\alpha(P_3)) = \left\{ \alpha, \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\} \text{ e } C_3 \text{ é } 2\text{-regular.}$$

Então, pelo Teorema 3.23,  $\left\{ 3\alpha + 2, \frac{9\alpha + 4 \pm 3\sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(P_3 \otimes C_3))$ .

**Corolário 3.25.** *Se  $G$  é  $r$ -regular, então*

$$\bigcup_{j=1}^{n_2} \{r\lambda_j(A_\alpha(H)) + \lambda_j(A_\alpha(H)) + r\} \subset \text{Spec}(A_\alpha(G \otimes H)).$$

Considere  $H$   $r$ -regular. No Teorema 3.23, obtemos que se  $x_1$  é autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(G))$ , então  $x_1 \otimes j_{n_2}$  é autovetor de  $A_\alpha(G \otimes H)$  associado ao autovalor  $r\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_1(A_\alpha(G)) + r$ . Se  $G$  é conexo e  $x_1$  possui todas as entradas não negativas, segue, do Teorema 2.71, o seguinte resultado.

**Corolário 3.26** ([23]). *Se  $H$  é  $r$ -regular,  $G$  é conexo e  $x$  é um autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(G))$ , com todas as entradas não negativas, então*

$$\lambda_1(A_\alpha(G \otimes H)) = r\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_1(A_\alpha(G)) + r.$$

De maneira análoga ao Corolário 3.26, se  $G$  é  $r$ -regular,  $H$  é conexo e  $y$  é um autovetor de  $A_\alpha(H)$  associado ao autovalor  $\lambda_1(A_\alpha(H))$ , com todas as entradas não negativas, então  $\lambda_1(A_\alpha(G \otimes H)) = r\lambda_1(A_\alpha(H)) + \lambda_1(A_\alpha(H)) + r$ .

**Teorema 3.27.** *Se  $G$  é  $r_1$ -regular e  $H$  é  $r_2$ -regular, então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \otimes H$  é dado pelo multiconjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{n_2} \{ \alpha(r_1 + r_2 + r_1 r_2) + (1 - \alpha)(\lambda_i(A(G)) + \lambda_j(A(H)) + \lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H))) \}.$$

*Demonstração.* Sejam  $x_i$  e  $y_j$  autovetores associados, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_i(A(G))$  e  $\lambda_j(A(H))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Então,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G \otimes H)(x_i \otimes y_j) &= (A_\alpha(G \times H) + A_\alpha(G \odot H))(x_i \otimes y_j) \\ &= A_\alpha(G \times H)(x_i \otimes y_j) + A_\alpha(G \odot H)(x_i \otimes y_j) \\ &= A_\alpha(G \times H)(x_i \otimes y_j) + A_\alpha(G \odot H)(x_i \otimes y_j) \\ &= (\alpha(r_1 + r_2) + (1 - \alpha)(\lambda_i(A(G)) + \lambda_j(A(H))))(x_i \otimes y_j) \\ &\quad + (\alpha r_1 r_2 + (1 - \alpha)\lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H)))(x_i \otimes y_j) \\ &= ((1 - \alpha)(\lambda_i(A(G)) + \lambda_j(A(H)) + \lambda_i(A(G))\lambda_j(A(H))) \\ &\quad + \alpha(r_1 + r_2 + r_1 r_2))(x_i \otimes y_j) \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ . Como  $A_\alpha(G \otimes H)$  possui exatamente  $n_1 n_2$  autovalores, não necessariamente distintos, obtemos o resultado.  $\square$

**Exemplo 3.28.** *Pela Proposição 3.8,*

$$\text{Spec}(A_\alpha(K_{3,3})) = \{6\alpha - 3, 3\alpha^{[4]}, 3\}.$$

Como  $K_{3,3}$  é 3-regular, pelo Teorema 3.27, o  $A_\alpha$ -espectro de  $K_{3,3} \otimes K_{3,3}$  é dado pelo multiconjunto

$$\begin{aligned} \{60\alpha^2 - 36\alpha^3 - 15\alpha + 6, (18\alpha^2 - 18\alpha^3 + 18\alpha - 3)^{[8]}, (48\alpha - 24\alpha^2 - 9)^{[2]}, \\ (24\alpha - 12\alpha^2 + 3)^{[8]}, (3\alpha^2 - 9\alpha^3 + 21\alpha)^{[16]}, 15\}. \end{aligned}$$

### 3.3.4 Produto Composição de Grafos

**Definição 3.29** ([11]). O *produto composição* de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G[H]$ , é o grafo no qual  $(v, u)$  e  $(v', u')$  são adjacentes se, e somente se,  $v$  é adjacente a  $v'$  em  $G$ ; ou  $v = v'$  e  $u$  é adjacente a  $u'$  em  $H$ .

$$S : \begin{matrix} & \text{E} & = & \text{N} \\ \text{E} & \begin{bmatrix} E & E & E \\ E & = & N \\ N & N & N \end{bmatrix} & & \end{matrix}.$$

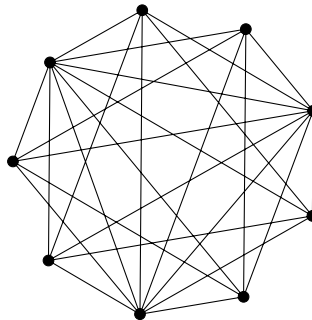


Figura 19: Grafo composição  $P_3[C_3]$

Da Definição 3.29, temos

$$A(G[H]) = I_{n_1} \otimes A(H) + A(G) \otimes J_{n_2} \quad \text{e} \quad D(G[H]) = I_{n_1} \otimes D(H) + n_2 D(G) \otimes I_{n_2}.$$

Portando, a matriz  $A_\alpha(G[H]) = \alpha D(G[H]) + (1 - \alpha)A(G[H])$  é dada por

$$A_\alpha(G[H]) = I_{n_1} \otimes A_\alpha(H) + (1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2} + \alpha n_2 D(G) \otimes I_{n_2}.$$

**Teorema 3.30** ([23]). *Se  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$  e  $H$  é  $r$ -regular com  $\lambda_1(H) = r$ , então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G[H]$  é dado pelo multiconjunto*

$$\left( \bigcup_{i=1}^{n_1} \{r + \lambda_i(A_\alpha(G))n_2\} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=2}^{n_2} \{\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_j(A(H)) + \alpha n_2 d_G(v_i)\} \right).$$

*Demonstração.* Sejam  $J_{n_2}, y_2, y_3, \dots, y_{n_2}$  autovetores ortogonais de  $A(H)$  associados, respectivamente, aos autovalores  $r, \lambda_2(H), \lambda_3(H), \dots, \lambda_{n_2}(H)$ . Pelo Lema 2.72, temos que  $A_\alpha(H)y_j = (\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_j(H))y_j$ . Seja  $k_i$  o vetor coluna de tamanho  $n_1$  cuja a  $i$ -ésima entrada é igual a 1 e as demais são todas iguais a 0, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Assim,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G[H])(k_i^T \otimes y_j) &= (I_{n_1} \otimes A_\alpha(H) + (1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2} + \alpha n_2 D(G) \otimes I_{n_2})(k_i^T \otimes y_j) \\ &= k_i^T \otimes A_\alpha(H)y_j + (1 - \alpha)A(G)k_i^T \otimes J_{n_2}y_j + \alpha n_2 D(G)k_i^T \otimes y_j \\ &= (\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_j A(H))(k_i^T \otimes y_j) + (\alpha n_2 d_G(v_i))(k_i^T \otimes y_j) \\ &= (\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_j A(H) + \alpha n_2 d_G(v_i))(k_i^T \otimes y_j). \end{aligned}$$

Ou seja, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  e  $j \in \{2, 3, \dots, n_2\}$ ,  $k_i^T \otimes y_j$  é autovetor de  $A_\alpha(G[H])$  associado ao autovalor  $\alpha r + (1 - \alpha)\lambda_j A(H) + \alpha n_2 d_G(v_i)$ . Temos  $n_1(n_2 - 1)$  autovalores, nos resta encontrar os outros  $n_1$ .

Seja  $x_i$  um autovetor de  $A_\alpha(G)$  associado ao autovalor  $\lambda_i(A_\alpha(G))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Então,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G[H])(x_i \otimes J_{n_2}) &= (I_{n_1} \otimes A_\alpha(H) + (1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2} + \alpha n_2 D(G) \otimes I_{n_2})(x_i \otimes J_{n_2}) \\ &= x_i \otimes A_\alpha(H)J_{n_2} + (1 - \alpha)A(G)x_i \otimes J_{n_2}J_{n_2} + \alpha n_2 D(G)x_i \otimes J_{n_2} \\ &= r x_i \otimes J_{n_2} + n_2(1 - \alpha)A(G)x_i \otimes J_{n_2} + \alpha n_2 D(G)x_i \otimes J_{n_2} \\ &= r x_i \otimes J_{n_2} + n_2 A_\alpha(G)x_i \otimes J_{n_2} \\ &= (r + \lambda_i(A_\alpha(G))n_2)(x_i \otimes J_{n_2}) \end{aligned}$$

Ou seja,  $x_i \otimes J_{n_2}$  é autovetor de  $A_\alpha(G[H])$  associado ao autovalor  $r + \lambda_i(A_\alpha(G))n_2$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Assim, concluímos os  $n_1 n_2$  autovalores de  $A_\alpha(G[H])$ .  $\square$

**Exemplo 3.31.** *Considere os grafos  $P_3$  e  $C_3$ . Temos*

$$\text{Spec}(A_\alpha(P_3)) = \left\{ \alpha, \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2} \right\} \quad \text{e} \quad \text{Spec}(A_\alpha(C_3)) = \left\{ 2, (3\alpha - 1)^{[2]} \right\}.$$

Como  $C_3$  é 2-regular, pelo Teorema 3.30, o  $A_\alpha$ -espectro de  $P_3[C_3]$  é dado por

$$\left\{ 3\alpha + 2, \frac{9\alpha + 4 \pm 3\sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}}{2}, 9\alpha - 3\alpha^2 - 1, (12\alpha - 3\alpha^2 - 1)^{[2]}, (9\alpha - 3\alpha^2 - 1)^{[4]} \right\}.$$

## 4 Propriedades $A_\alpha$ -espectrais de Operações Corona

Neste capítulo, estudaremos a operação corona de grafos [24], operação duplicação de grafos [25] e algumas operações baseadas nelas: duplicação corona, duplicação vizinhança corona e duplicação aresta corona [26]. O espectro da matriz de adjacência e da Laplaciana sem sinal destas operações já foram apresentados em [21, 27, 26, 25], vamos generalizá-los por meio do estudo do  $A_\alpha$ -espectro associado a cada uma delas.

Considere  $G$  um grafo com  $n_1$  vértices e  $m_1$  arestas,  $H$  um grafo com  $n_2$  vértices e  $m_2$  arestas,  $j_n$  o vetor com  $n$  entradas, todas iguais a 1, e  $J_{n \times m}$  a matriz com todas as entradas iguais a 1 de ordem  $n \times m$ . Demais hipóteses serão enunciadas, quando necessário.

Os resultados não referenciados, neste capítulo, são originais deste trabalho.

**Definição 4.1** ([28]). Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . O  $A$ -coronal, denotado por  $\Gamma_A(x)$ , é o polinômio definido por  $\Gamma_A(x) = j_n^T(xI_n - A)^{-1}j_n$ .

Observe que para toda matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $j_n A j_n^T$  é igual a soma de todas as entradas da matriz  $A$ . Ou seja, o  $A$ -coronal é a soma de todas as entradas da inversa da matriz  $(xI_n - A)$ . Ele será útil para expressar o polinômio característico das matrizes  $A_\alpha$  associadas às operações corona estudadas neste capítulo. Se um grafo é regular, então a soma de cada uma das linhas da matriz  $A_\alpha$  associada a ele é constante, a Proposição 4.2 nos ajuda neste caso.

**Proposição 4.2** ([28]). *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Se a soma de cada uma das linhas é igual a uma constante  $r$ , então*

$$\Gamma_A(x) = \frac{n}{x - r}.$$

*Demonstração.* Como a soma de cada linha de  $A$  é igual a  $r$ , obtemos que  $Aj_n = rj_n$ , portanto,  $(xI_n - A)j_n = (x - r)j_n$ . Assim,

$$\Gamma_A(x) = j_n^T(xI_n - A)^{-1}j_n = \frac{j_n^T j_n}{x - r} = \frac{n}{x - r}.$$

□

### 4.1 Duplicação de Grafos

**Definição 4.3** ([25]). Dado um grafo  $G$  de ordem  $n \geq 1$ , sejam  $W$  um conjunto tal que  $V \cap W = \emptyset$ ,  $|W| = n$  e  $f : V \rightarrow W$  uma aplicação bijetora. A *duplicação* de



$G$ ,  $Du(G)$ , é o grafo com conjunto de vértices  $U = V \cup W$  e o conjunto de arestas  $E(Du(G)) = \{\{u, f(v)\}, \{f(u), v\} : \{u, v\} \in E(G)\}$ .

A Figura 20 exhibe a duplicação dos grafos  $K_4$  e  $K_2$ . Note que  $Du(K_4)$  é conexo e  $Du(K_2)$  é desconexo.

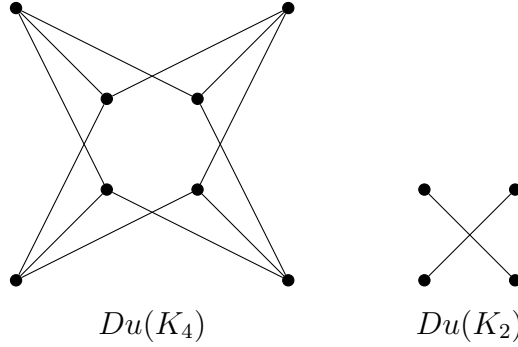


Figura 20: Grafo duplicação  $Du(K_4)$  e  $Du(K_2)$

O grafo  $Du(G)$  tem  $2n_1$  vértices,  $2m_1$  arestas e para cada vértice  $v \in V(G)$ , tem-se  $d_G(v) = d_{Du(G)}(v) = d_{Du(G)}(f(v))$ . Além disso,  $Du(G)$  é um grafo bipartido.

**Teorema 4.4** ([25]). *Seja  $G$  um grafo conexo.*

- (a) *Para que  $Du(G)$  seja conexo é necessário e suficiente que  $G$  não seja um grafo bipartido.*
- (b) *O grafo  $G$  é bipartido se, e somente se,  $Du(G) = 2G$ .*

Da Definição 4.3, vemos que

$$A(Du(G)) = \begin{pmatrix} 0 & A(G) \\ A(G) & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D(Du(G)) = \begin{pmatrix} D(G) & 0 \\ 0 & D(G) \end{pmatrix}.$$

Dessa forma,

$$A_\alpha(Du(G)) = \begin{pmatrix} \alpha D(G) & (1 - \alpha)A(G) \\ (1 - \alpha)A(G) & \alpha D(G) \end{pmatrix}.$$

O Teorema 4.5 segue diretamente da Proposição 2.18.

**Teorema 4.5.** *O  $A_\alpha$ -espectro de  $Du(G)$  é dado por*

$$\text{Spec}(A_\alpha(Du(G))) = \text{Spec}(A_\alpha(G)) \cup \text{Spec}(L_\alpha(G)),$$

onde  $L_\alpha(G) = \alpha D(G) - (1 - \alpha)A(G)$ .

## 4.2 Corona de Grafos

**Definição 4.6** ([24]). A *corona* de  $G$  e  $H$ , denotada por  $G \circ H$ , é o grafo obtido tomando uma cópia de  $G$  e  $n_1$  cópias de  $H$ , e juntando o  $i$ -ésimo vértice de  $G$  em todo vértice na  $i$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ .

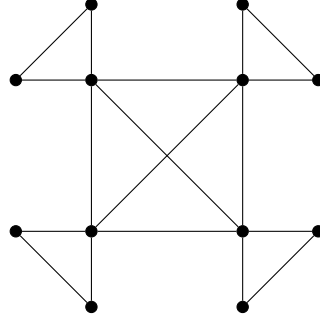


Figura 21: Grafo corona  $K_4 \circ K_2$

Se  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ , então o grafo  $G \circ H$  tem  $n_1(n_2 + 1)$  vértices e  $m_1 + n_1(m_2 + n_2)$  arestas. Ordenaremos o conjunto de vértices de  $G \circ H$  como

$$V(G \circ H) = (V_1(H) \cup V_2(H) \cup \dots \cup V_{n_1}(H)) \cup V(G),$$

onde  $V_i(H)$  é o conjunto de vértices da  $i$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ .

Com respeito a esta ordenação, a matriz de adjacência de  $G \circ H$  é escrita como

$$A(G \circ H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes A(H) & I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & A(G) \end{pmatrix}$$

e a matriz dos graus de  $G \circ H$  é dada por

$$D(G \circ H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes (D(H) + I_{n_2}) & 0 \\ 0 & n_2 I_{n_1} + D(G) \end{pmatrix}.$$

Então,  $A_\alpha(G \circ H) = \alpha D(G \circ H) + (1 - \alpha)A(G \circ H)$  implica em

$$A_\alpha(G \circ H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes (A_\alpha(H) + \alpha I_{n_2}) & (1 - \alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ (1 - \alpha)I_{n_1}^T \otimes J_{n_2} & A_\alpha(G) + \alpha n_2 I_{n_1} \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.7** ([29]). O polinômio característico de  $A_\alpha(G \circ H)$  é dado por

$$p_{A_\alpha(G \circ H)}(x) = p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)^{n_1} p_{A_\alpha(G)}(x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)).$$

*Demonstração.* Por definição,  $p_{A_\alpha(G \circ H)}(x) = |xI_{n_1(n_2+1)} - A_\alpha(G \circ H)|$ , ou seja, o polinômio característico de  $A_\alpha(G \circ H)$  é dado por

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} xI_{n_1 n_2} - I_{n_1} \otimes (A_\alpha(H) + \alpha I_{n_2}) & -(1 - \alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ -(1 - \alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & xI_{n_1} - (A_\alpha(G) + \alpha n_2 I_{n_1}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} I_{n_1} \otimes ((x - \alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)) & (\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ (\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & (x - \alpha n_2)I_{n_1} - A_\alpha(G) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Para utilizarmos o Lema 2.14, dividiremos a matriz  $xI_{n_1(n_2+1)} - A_\alpha(G \circ H)$  da seguinte forma:

$$xI_{n_1(n_2+1)} - A_\alpha(G \circ H) = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} M &= I_{n_1} \otimes ((x - \alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)), & N &= (\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}, \\ P &= (\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & e \quad Q &= (x - \alpha n_2)I_{n_1} - A_\alpha(G). \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.14,

$$\begin{aligned} & \left| xI_{n_1(n_2+1)} - A_\alpha(G \circ H) \right| = \left| M \right| \left| Q - PM^{-1}N \right| \\ &= \left| M \right| \left| Q - ((\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T)(I_{n_1} \otimes ((x - \alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1})((\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}) \right| \\ &= \left| M \right| \left| Q - ((\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T)((x - \alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1}((\alpha - 1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}) \right| \\ &= \left| M \right| \left| Q - (1 - \alpha)^2 I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T ((x - \alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} J_{n_2} \right| \\ &= \left| M \right| \left| Q - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)I_{n_1} \right| \\ &= \left| I_{n_1} \otimes ((x - \alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)) \right| \left| (x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha))I_{n_1} - A_\alpha(G) \right| \\ &= p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)^{n_1} p_{A_\alpha(G)}((x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha))). \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.8.** *Se  $H$  é  $r$ -regular, então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \circ H$  é dado pela união dos autovalores da forma*

$$\alpha + \lambda_j(A_\alpha(H)) \text{ com multiplicidade } n_1, \text{ para todo } j \in \{2, 3, \dots, n_2\},$$

com o conjunto das raízes do polinômio  $p_{A_\alpha(G)} \left( x - \alpha n_2 - \frac{n_2(1 - \alpha)^2}{(x - \alpha) - r} \right)$ .

**Exemplo 4.9.** *Pela Proposição 3.7, temos*

$$\text{Spec}(A_\alpha(K_4)) = \{3, (4\alpha - 1)^{[3]}\} \quad e \quad \text{Spec}(A_\alpha(K_2)) = \{1, 2\alpha - 1\}.$$

Então, pelo Corolário 4.8,  $\text{Spec}(A_\alpha(K_4 \circ K_2))$  é dado por

$$\left\{ (3\alpha - 1)^{[4]}, \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 4(5\alpha + 1)}}{2}, \left( \frac{7\alpha - 4 \pm \sqrt{33\alpha^2 - 76\alpha + 28}}{2} \right)^{[3]} \right\}.$$

### 4.3 Duplicação Corona de Grafos

**Definição 4.10** ([26]). *A duplicação corona de  $G$  e  $H$ , denotada por  $G \boxplus H$ , é o grafo obtido tomando uma cópia de  $Du(G)$  e  $n_1$  cópias de  $H$ , e juntando o  $i$ -ésimo vértice de  $Du(G)$  em todo vértice na  $i$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ .*

A Figura 22 ilustra o grafo duplicação corona  $K_4 \boxplus K_2$ , os vértices da cópia de  $Du(K_4)$  estão representados em vermelho.

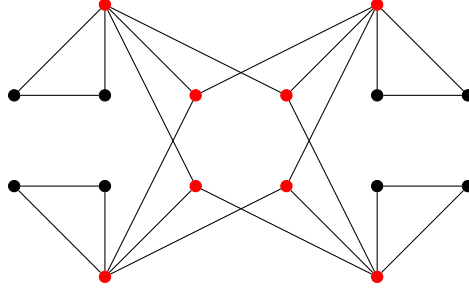


Figura 22: Grafo duplicação corona  $K_4 \boxplus K_2$

O grafo  $G \boxplus H$  é um grafo bipartido e se  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ , então  $G \boxplus H$  tem  $n_1(n_2 + 2)$  vértices e  $2m_1 + n_1(n_2 + m_2)$  arestas. Ordenaremos o conjunto de vértices de  $G \boxplus H$  da forma

$$V(G \boxplus H) = (V_1(H) \cup V_2(H) \cup \dots \cup V_{n_1}(H)) \cup V(Du(G)),$$

onde  $V_i(H)$  é o conjunto de vértices da  $i$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Com respeito a esta ordenação, a matriz de adjacência de  $G \boxplus H$  é escrita como

$$A(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes A(H) & 0 & I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ 0 & 0 & A(G) \\ I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & A(G) & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz dos graus de  $G \boxplus H$  é dada por

$$D(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes (D(H) + I_{n_2}) & 0 & 0 \\ 0 & D(G) & 0 \\ 0 & 0 & D(G) + n_2 I_{n_1} \end{pmatrix}.$$

Então,  $A_\alpha(G \boxplus H) = \alpha D(G \boxplus H) + (1 - \alpha)A(G \boxplus H)$  implica em

$$A_\alpha(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes (A_\alpha(H) + \alpha I_{n_2}) & 0 & (1 - \alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ 0 & \alpha D(G) & (1 - \alpha)A(G) \\ (1 - \alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & (1 - \alpha)A(G) & \alpha(D(G) + n_2 I_{n_1}) \end{pmatrix}.$$

No próximo resultado, apresentamos o  $A_\alpha$ -espectro do grafo  $G \boxplus H$ .

**Teorema 4.11.** *O polinômio característico de  $A_\alpha(G \boxplus H)$  é dado por*

$$p_{A_\alpha(G \boxplus H)}(x) = p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)^{n_1} p_{\alpha D(G)}(x) \left| (x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)) I_{n_1} - \alpha D(G) - (1 - \alpha)^2 A(G) (x I_{n_1} - \alpha D(G))^{-1} A(G) \right|.$$

*Demonstração.* Por definição,  $p_{A_\alpha(G \boxplus H)}(x) = |xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxplus H)|$ , ou seja, o polinômio característico de  $A_\alpha(G \boxplus H)$  é dado por

$$= \begin{vmatrix} xI_{n_1n_2} - I_{n_1} \otimes (A_\alpha(H) + \alpha I_{n_2}) & 0 & -(1-\alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ 0 & xI_{n_1} - \alpha D(G) & -(1-\alpha)A(G) \\ -(1-\alpha)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & -(1-\alpha)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(D(G) + n_2I_{n_1}) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} I_{n_1} \otimes ((x-\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)) & 0 & (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \\ 0 & xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T & (\alpha-1)A(G) & (x-\alpha n_2)I_{n_1} - \alpha D(G) \end{vmatrix}.$$

Para utilizarmos o Lema 2.14, dividiremos a matriz  $xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxplus H)$  da seguinte forma:

$$xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

onde

$$M = I_{n_1} \otimes ((x-\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)), \quad N = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J \end{pmatrix}, \\ P = \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)A(G) & (x-\alpha n_2)I_{n_1} - \alpha D(G) \end{pmatrix}.$$

Assim, pelo Lema 2.14,

$$\begin{aligned} |xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxplus H)| &= |M| |Q - PM^{-1}N| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T \end{pmatrix} (I_{n_1} \otimes ((x-\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T ((x-\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)I_{n_1} \otimes J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\alpha-1)^2 I_{n_1} \otimes J_{n_2}^T ((x-\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x-\alpha)I_{n_1} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)A(G) & (x-\alpha n_2)I_{n_1} - \alpha D(G) - (1-\alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x-\alpha)I_{n_1} \end{pmatrix} \right| \\ &= p_{A_\alpha(H)}(x-\alpha)^{n_1} |S|, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)A(G) & (x-\alpha n_2 - (1-\alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x-\alpha))I_{n_1} - \alpha D(G) \end{pmatrix}.$$

Para encontrar  $|S|$ , usaremos novamente o Lema 2.14, temos,

$$\begin{aligned}
 |S| &= |xI_{n_1} - \alpha D(G)| \left| (x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)) I_{n_1} - \alpha D(G) \right. \\
 &\quad \left. - (1 - \alpha)^2 A(G)(xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1} A(G) \right|. \\
 &= p_{\alpha D(G)}(x) \left| (x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)) I_{n_1} - \alpha D(G) \right. \\
 &\quad \left. - (1 - \alpha)^2 A(G)(xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1} A(G) \right|. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Finalmente, de (4.1) e (4.2), obtemos o resultado

$$\begin{aligned}
 p_{A_\alpha(G \boxplus H)}(x) &= p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)^{n_1} |S| \\
 &= p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)^{n_1} p_{\alpha D(G)}(x) \left| (x - \alpha n_2 - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha)) I_{n_1} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha D(G) - (1 - \alpha)^2 A(G)(xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1} A(G) \right|.
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.12.** *Se  $G$  é  $r_1$ -regular e  $H$  é  $r_2$ -regular, então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \boxplus H$  é dado pela união dos autovalores da forma*

$$\alpha + \lambda_j(A_\alpha(H)), \text{ com multiplicidade } n_1, \text{ para cada } j \in \{2, 3, \dots, n_2\}$$

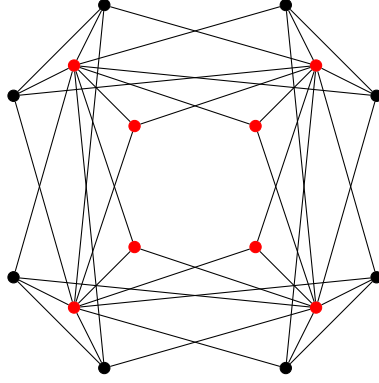
com o conjunto das raízes do polinômio  $p_{\omega A(G)^2} \left( x - \alpha(n_2 + r_1) - \frac{n_2(1 - \alpha)^2}{(x - \alpha) - r_2} \right)$ , onde

$$\omega = \frac{(1 - \alpha)^2}{x - \alpha r_1}.$$

## 4.4 Duplicação Vizinhança Corona de Grafos

**Definição 4.13** ([26]). *A duplicação vizinhança corona de  $G$  e  $H$ , denotada  $G \boxtimes H$ , é o grafo obtido tomando uma cópia de  $Du(G)$  e  $n_1$  cópias de  $H$ , e juntando os vértices adjacentes ao  $i$ -ésimo vértice de  $Du(G)$  em todo vértice na  $i$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ .*

A Figura 23 exibe o grafo duplicação vizinhança corona  $K_4 \boxtimes K_2$ , os vértices de  $Du(K_4)$  estão representados na cor vermelha.


 Figura 23: Grafo duplificação vizinhança corona  $K_4 \boxtimes K_2$ 

O grafo  $G \boxtimes H$  é um grafo bipartido e se  $V(G) \cap V(H) \neq \emptyset$ , então  $G \boxtimes H$  tem  $n_1(n_2 + 2)$  vértices e  $2m_1(n_2 + 1) + n_1m_2$  arestas. Ordenaremos o conjunto de vértices de  $G \boxtimes H$  da forma

$$V(G \boxtimes H) = (V_1(H) \cup V_2(H) \cup \dots \cup V_{n_1}(H)) \cup V(Du(G)),$$

onde  $V_i(H)$  é o conjunto de vértices da  $i$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ . Com respeito a esta ordenação, a matriz de adjacência de  $G \boxtimes H$  é escrita como

$$A(G \boxtimes H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes A(H) & 0 & A(G) \otimes J_{n_2} \\ 0 & 0 & A(G) \\ A(G) \otimes J_{n_2}^T & A(G) & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz dos graus de  $G \boxtimes H$  é dada por

$$D(G \boxtimes H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes D(H) + D(G) \otimes I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & D(G) & 0 \\ 0 & 0 & (n_2 + 1)D(G) \end{pmatrix}.$$

Então,  $A_\alpha(G \boxtimes H) = \alpha D(G \boxtimes H) + (1 - \alpha)A(G \boxtimes H)$  implica em

$$A_\alpha(G \boxtimes H) = \begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes A_\alpha(H) + \alpha D(G) \otimes I_{n_2} & 0 & (1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2} \\ 0 & \alpha D(G) & (1 - \alpha)A(G) \\ (1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2}^T & (1 - \alpha)A(G) & \alpha(n_2 + 1)D(G) \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.14.** *Se  $G$  é  $r$ -regular, então o polinômio característico de  $A_\alpha(G \boxtimes H)$  é dado por*

$$p_{A_\alpha(G \boxtimes H)}(x) = (x - \alpha r)^{n_1} p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)^{n_1} p_{\omega A(G)^2}(x - \alpha r(n_2 + 1)),$$

onde  $\omega = (1 - \alpha)^2 \left( \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r) + \frac{1}{(x - \alpha r)} \right)$ .

*Demonstração.* Por definição,  $p_{A_\alpha(G \boxtimes H)}(x) = |xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxtimes H)|$ , ou seja, o polinômio característico de  $A_\alpha(G \boxtimes H)$  é dado por

$$= \begin{vmatrix} xI_{n_1 n_2} - (I_{n_1} \otimes (A_\alpha(H) + \alpha r I_{n_2})) & 0 & -(1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2} \\ 0 & xI_{n_1} - \alpha r I_{n_1} & -(1 - \alpha)A(G) \\ -(1 - \alpha)A(G) \otimes J_{n_2}^T & -(1 - \alpha)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(n_2 + 1)rI_{n_1} \\ I_{n_1} \otimes ((x - \alpha r)I_{n_2} - A_\alpha(H)) & 0 & (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2} \\ 0 & (x - \alpha r)I_{n_1} & (\alpha - 1)A(G) \\ (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2}^T & (\alpha - 1)A(G) & (x - \alpha r(n_2 + 1))I_{n_1} \end{vmatrix}.$$

Para utilizarmos o Lema 2.14, dividiremos a matriz  $xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxtimes H)$  da seguinte forma:

$$xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxtimes H) = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

onde

$$M = I_{n_1} \otimes ((x - \alpha r)I_{n_2} - A_\alpha(H)), \quad N = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2}^T \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} (x - \alpha r)I_{n_1} & (\alpha - 1)A(G) \\ (\alpha - 1)A(G) & (x - \alpha r(n_2 + 1))I_{n_1} \end{pmatrix}.$$

Assim, pelo Lema 2.14,

$$\begin{aligned} & |xI_{n_1(n_2+2)} - A_\alpha(G \boxtimes H)| = |M| |Q - PM^{-1}N| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2}^T \end{pmatrix} (I_{n_1} \otimes ((x - \alpha r)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2}^T ((x - \alpha r)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - 1)A(G) \otimes J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - 1)^2 A(G)^2 \otimes J_{n_2}^T ((x - \alpha r)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)A(G)^2 \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| \begin{pmatrix} (x - \alpha r)I_{n_1} & (\alpha - 1)A(G) \\ (\alpha - 1)A(G) & (x - \alpha r(n_2 + 1))I_{n_1} - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)A(G)^2 \end{pmatrix} \right| \\ &= p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)^{n_1} |S|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} (x - \alpha r)I_{n_1} & (\alpha - 1)A(G) \\ (\alpha - 1)A(G) & (x - \alpha r(n_2 + 1))I_{n_1} - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)A(G)^2 \end{pmatrix}.$$



Para encontrar  $|S|$ , usaremos novamente o Lema 2.14, temos,

$$\begin{aligned}
 |S| &= \left| (x - \alpha r) I_{n_1} \left| (x - \alpha r(n_2 + 1)) I_{n_1} - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r) A(G)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (\alpha - 1) A(G) ((x - \alpha r) I_{n_1})^{-1} (\alpha - 1) A(G) \right| \right| \\
 &= (x - \alpha r)^{n_1} \left| (x - \alpha r(n_2 + 1)) I_{n_1} - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r) A(G)^2 - \frac{(1 - \alpha)^2}{(x - \alpha r)} A(G)^2 \right| \\
 &= (x - \alpha r)^{n_1} \left| (x - \alpha r(n_2 + 1)) I_{n_1} - \omega A(G)^2 \right| \\
 &= (x - \alpha r)^{n_1} p_{\omega A(G)^2}(x - \alpha r(n_2 + 1)), \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

onde  $\omega = (1 - \alpha)^2 \left( \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r) + \frac{1}{(x - \alpha r)} \right)$ . Finalmente, de (4.3) e (4.4), obtemos o resultado

$$\begin{aligned}
 p_{A_\alpha(G \boxtimes H)}(x) &= p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)^{n_1} |S| \\
 &= p_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r)^{n_1} (x - \alpha r)^{n_1} p_{\omega A(G)^2}(x - \alpha r(n_2 + 1)),
 \end{aligned}$$

onde  $\omega = (1 - \alpha)^2 \left( \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - \alpha r) + \frac{1}{(x - \alpha r)} \right)$ . □

**Corolário 4.15.** *Se  $G$  é  $r_1$ -regular e  $H$  é  $r_2$ -regular, então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \boxtimes H$  é dado pela união dos autovalores da forma*

$$\alpha r_1 + \lambda_j(A_\alpha(H)), \text{ com multiplicidade } n_1, \text{ para cada } j \in \{2, 3, \dots, n_2\}$$

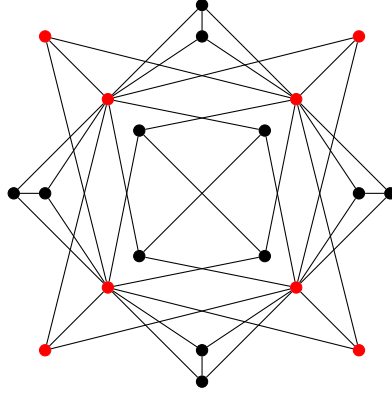
com o conjunto das raízes do polinômio  $p_{\omega A(G)^2}(x - \alpha r_1(n_2 + 1))$ , onde

$$\omega = (1 - \alpha)^2 \left( \frac{n_2}{(x - \alpha r_1) - r_2} + \frac{1}{(x - \alpha r_1)} \right).$$

## 4.5 Duplicação Aresta Corona de Grafos

**Definição 4.16** ([26]). *A duplicação aresta corona de  $G$  e  $H$ , denotada por  $G \boxplus H$ , é o grafo obtido tomando uma cópia de  $Du(G)$  e  $m_1$  cópias de  $H$ , e juntando, para cada  $e_k = \{v_i, v_j\} \in E(G)$ , os vértices  $v_i$  e  $v_j$  de  $Du(G)$  em todo vértice na  $k$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $k \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ .*

A Figura 24 ilustra o grafo duplicação aresta corona  $K_4 \boxplus K_2$ , os vértices de  $Du(K_4)$  estão representados em vermelho.


 Figura 24: Grafo duplicação aresta corona  $K_4 \boxplus K_2$ 

O grafo  $G \boxplus H$  é um grafo bipartido e se  $V(G) \cap V(H) \neq \emptyset$ , então  $G \boxplus H$  tem  $2n_1 + m_1n_2$  vértices e  $m_1(2n_2 + m_2 + 2)$  arestas. Ordenaremos o conjunto de vértices de  $G \boxplus H$  da forma

$$V(G \boxplus H) = (V_1(H) \cup V_2(H) \cup \dots \cup V_{m_1}(H)) \cup V(Du(G)),$$

onde  $V_k(H)$  é o conjunto de vértices da  $k$ -ésima cópia de  $H$ , para todo  $k \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ . Com respeito a esta ordenação, a matriz de adjacência de  $G \boxplus H$  é escrita como

$$A(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} I_{m_1} \otimes A(H) & 0 & O(G)^T \otimes J_{n_2} \\ 0 & 0 & A(G) \\ O(G) \otimes J_{n_2}^T & A(G) & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz dos graus de  $G \boxplus H$  é dada por

$$D(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} I_{m_1} \otimes (D(H) + 2I_{n_2}) & 0 & 0 \\ 0 & D(G) & 0 \\ 0 & 0 & (n_2 + 1)D(G) \end{pmatrix}.$$

Então,  $A_\alpha(G \boxplus H) = \alpha D(G \boxplus H) + (1 - \alpha)A(G \boxplus H)$  implica em

$$A_\alpha(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} I_{m_1} \otimes (A_\alpha(H) + 2\alpha I_{n_2}) & 0 & (1 - \alpha)O(G)^T \otimes J_{n_2} \\ 0 & \alpha D(G) & (1 - \alpha)A(G) \\ (1 - \alpha)O(G) \otimes J_{n_2}^T & (1 - \alpha)A(G) & \alpha(n_2 + 1)D(G) \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.17.** *O polinômio característico de  $A_\alpha(G \boxplus H)$  é dado por*

$$p_{A_\alpha(G \boxplus H)}(x) = p_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha)^{m_1} p_{\alpha D(G)}(x) \left| xI_{n_1} - \alpha(n_2 + 1)D(G) - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha) Q(G) - (1 - \alpha)^2 A(G) (xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1} A(G) \right|.$$

*Demonstração.* Por definição,  $p_{A_\alpha(G \boxplus H)}(x) = |xI_{2n_1+m_1n_2} - A_\alpha(G \boxplus H)|$ , ou seja, o polinômio característico de  $A_\alpha(G \boxplus H)$  é dado por

$$= \begin{vmatrix} xI_{m_1n_2} - (I_{m_1} \otimes (A_\alpha(H) + 2\alpha I_{n_2})) & 0 & -(1-\alpha)O(G)^T \otimes J_{n_2} \\ 0 & xI_{n_1} - \alpha D(G) & -(1-\alpha)A(G) \\ -(1-\alpha)O(G) \otimes J_{n_2}^T & -(1-\alpha)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(n_2+1)D(G) \\ I_{m_1} \otimes ((x-2\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)) & 0 & (\alpha-1)O(G)^T \otimes J_{n_2} \\ 0 & xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)O(G) \otimes J_{n_2}^T & (\alpha-1)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(n_2+1)D(G) \end{vmatrix}.$$

Para utilizarmos o Lema 2.14, dividiremos a matriz  $xI_{2n_1+m_1n_2} - A_\alpha(G \boxplus H)$  da seguinte forma:

$$xI_{2n_1+m_1n_2} - A_\alpha(G \boxplus H) = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

onde

$$M = I_{m_1} \otimes ((x-2\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H)), \quad N = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)O(G)^T \otimes J_{n_2} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha-1)O(G) \otimes J_{n_2}^T \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(n_2+1)D(G) \end{pmatrix}.$$

Assim, pelo Lema 2.14,

$$\begin{aligned} & |xI_{2n_1+m_1n_2} - A_\alpha(G \boxplus H)| = |M| |Q - PM^{-1}N| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha-1)O(G) \otimes J_{n_2}^T \end{pmatrix} (I_{m_1} \otimes ((x-2\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)O(G)^T \otimes J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha-1)O(G) \otimes J_{n_2}^T ((x-2\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)O(G)^T \otimes J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)^2 O(G)O(G)^T \otimes J_{n_2}^T ((x-2\alpha)I_{n_2} - A_\alpha(H))^{-1} J_{n_2} \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| Q - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x-2\alpha)Q(G) \end{pmatrix} \right| \\ &= |M| \left| \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(n_2+1)D(G) - (1-\alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x-2\alpha)Q(G) \end{pmatrix} \right| \\ &= p_{A_\alpha(H)}(x-2\alpha)^{m_1} |S|, \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \alpha D(G) & (\alpha-1)A(G) \\ (\alpha-1)A(G) & xI_{n_1} - \alpha(n_2+1)D(G) - (1-\alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x-2\alpha)Q(G) \end{pmatrix}.$$

Para encontrar  $|S|$ , usaremos novamente o Lema 2.14, temos,

$$\begin{aligned}
 |S| &= |xI_{n_1} - \alpha D(G)| \left| xI_{n_1} - \alpha(n_2 + 1)D(G) - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha)Q(G) \right. \\
 &\quad \left. - (\alpha - 1)A(G)(xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1}(\alpha - 1)A(G) \right| \\
 &= p_{\alpha D(G)}(x) \left| xI_{n_1} - \alpha(n_2 + 1)D(G) - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha)Q(G) \right. \\
 &\quad \left. - (1 - \alpha)^2 A(G)(xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1}A(G) \right|. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Finalmente, por (4.5) e (4.6), obtemos o polinômio

$$\begin{aligned}
 p_{A_\alpha(G \boxplus H)}(x) &= p_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha)^{m_1} |S| \\
 &= p_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha)^{m_1} p_{\alpha D(G)}(x) \left| xI_{n_1} - \alpha(n_2 + 1)D(G) \right. \\
 &\quad \left. - (1 - \alpha)^2 \Gamma_{A_\alpha(H)}(x - 2\alpha)Q(G) - (1 - \alpha)^2 A(G)(xI_{n_1} - \alpha D(G))^{-1}A(G) \right|.
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.18.** *Se  $G$  é  $r_1$ -regular e  $H$  é  $r_2$ -regular, então o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \boxtimes H$  contém a união dos autovalores da forma*

$$2\alpha + \lambda_j(A_\alpha(H)), \text{ com multiplicidade } m_1, \text{ para cada } j \in \{2, 3, \dots, n_2\}$$

com o conjunto das raízes do polinômio  $p_{\omega A(G)^2} \left( x - \alpha r_2(n_2 + 1) - \frac{r_1 n_2 (1 - \alpha)^2}{(x - 2\alpha) - r_2} \right)$ , onde

$$\omega = (1 - \alpha)^2 \left( \frac{n_2}{(x - 2\alpha) - r_2} + \frac{1}{(x - \alpha r_1)} \right).$$

## 5 Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos propriedades  $A_\alpha$ -espectrais em operações em grafos e obtivemos alguns resultados originais.

Após uma breve introdução e contextualização, no segundo capítulo, introduzimos os conceitos iniciais para o entendimento do objetivo do trabalho. Apresentamos os complementos de Schur e estudamos o Produto de Kronecker, estes foram fundamentais para a obtenção de resultados nos capítulos seguintes. O Teorema 2.40 e o Teorema 2.45 fornecem o espectro da matriz de adjacência do produto direto de grafos e o  $A_\alpha$ -espectro do produto cartesiano de grafos de forma imediata. Ainda no segundo capítulo, expomos a matriz  $A_\alpha$  e diversos resultados sobre o espectro da mesma.

No terceiro capítulo, tivemos como foco exibir o  $A_\alpha$ -espectro associado a união, junção e produto de grafos. Para quaisquer dois grafos  $G$  e  $H$ , foi explicitado em [23], o  $A_\alpha$ -espectro de  $G \times H$ , e se  $H$  é um grafo regular é possível obter um subconjunto dele dos produtos de grafos  $G \odot H$ ,  $G \otimes H$  e  $G[H]$ .

No quarto capítulo, apresentamos a operação duplicação, a operação corona e seus respectivos  $A_\alpha$ -espectros. Nossa contribuição ocorre quando apresentamos o polinômio característico da matriz  $A_\alpha$  associada às operações derivadas delas, a operação duplicação corona de grafos, operação duplicação vizinhança corona de grafos e operação duplicação aresta corona de grafos. Neste sentido, também precisamos da hipótese de regularidade sobre os grafos operados para explicitar o  $A_\alpha$ -espectro destas operações.

Concluimos que o estudo do espectro da matriz  $A_\alpha$  em operações em grafos se torna mais simples quando temos pelo menos um dos grafos operados como sendo regular, o que nos faz sugerir para trabalhos futuros estudar os casos em que não hajam grafos regulares, além de pesquisar o  $A_\alpha$ -espectro associado à outras operações em grafos que não foram abordadas neste trabalho.

# Referências

- 1 ERICH, H. Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem. *Z. Phys.*, v. 70, p. 204–286, fev. 1931. Citado na página 1.
- 2 NIKIFOROV, V. Merging the A-and Q-spectral theories. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, v. 11, 2017. Citado 8 vezes nas páginas 1, 10, 29, 31, 32, 33, 36 e 37.
- 3 HORN, R.; JOHNSON, C. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2013. (Matrix Analysis). ISBN 9780521839402. Disponível em: <<https://books.google.co.uk/books?id=5I5AYeeh0JUC>>. Citado 5 vezes nas páginas 2, 10, 24, 25 e 28.
- 4 MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado na página 2.
- 5 NATH, M.; PAUL, S. On the distance laplacian spectra of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 460, p. 97–110, 2014. Citado na página 8.
- 6 BROXSON, B. J. The kronecker product. UNF Digital Commons, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17.
- 7 ZHANG, H.; DING, F. On the kronecker products and their applications. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, v. 2013, 2013. Citado na página 11.
- 8 MERRIS, R. *Graph Theory*. New York: Wiley-Interscience, 2000. 1-20 p. Citado na página 18.
- 9 VECCHIO, R. D. et al. *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 18.
- 10 DIESTEL, R. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag Heidelberg, Electronic Edition 2005. Citado na página 18.
- 11 BALAKRISHNAN, K. R. R. *A Textbook of Graph Theory*. New York: Springer, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 18, 34, 35, 38, 39, 42 e 44.
- 12 CVETKOVIĆ, D.; DOOB, M.; SACHS, H. *Spectra of Graphs*. 3. ed. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1995. Citado na página 22.
- 13 CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. *Eigenspaces of Graphs*. United Kingdom: Cambridge University Press, 1997. v. 66. (Encyclopedia of mathematics and its applications, v. 66). Citado na página 22.
- 14 CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 22.
- 15 ABREU, N. et al. Teoria espectral de grafos - uma introdução. *Notas do IIIº Colóquio de Matemática da Região Sul, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil*, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 25, 27, 28 e 29.

- 16 CVETKOVIC, D. et al. *Spectral generalizations of line graphs: On graphs with least eigenvalue-2*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. v. 314. Citado na página 29.
- 17 NIKIFOROV, V.; ROJO, O. *A note on the positive semidefiniteness of  $A_\alpha(G)$* . [S.l.]: ELSEVIER, 2017. v. 519. 156-163 p. Citado na página 29.
- 18 LINA, H.; XUEB, J.; SHUB, J. On the eigenvalues of  $\alpha\alpha$ -spectra of graphs. *arXiv preprint arXiv:1709.00182*, 2017. Citado na página 29.
- 19 LIN, H.; LIU, X.; XUE, J. Graphs determined by their  $\alpha\alpha$ -spectra. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 342, n. 2, p. 441–450, 2019. Citado na página 29.
- 20 NINIO, F. A simple proof of the perron-frobenius theorem for positive symmetric matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 9, n. 8, p. 1281, 1976. Citado na página 32.
- 21 BARIK, S. et al. Spectra of graphs resulting from various graph operations and products: a survey. *Special Matrices*, De Gruyter, v. 6, n. 1, p. 323–342, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 34, 40, 42 e 46.
- 22 BROUWER, A. E.; HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 34.
- 23 LI, S.; WANG, S. The  $\alpha_\alpha$ -spectrum of graph product. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, v. 35, p. 473–481, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 34, 39, 40, 41, 43, 45 e 59.
- 24 FRUCHT, R.; HARARY, F. On the corona of two graphs. Birkhäuser-Verlag; Springer Science+ Business Media, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.
- 25 SAMPATHKUMAR, E. On duplicate graphs. *J. Indian Math. Soc*, v. 37, p. 285–293, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- 26 ADIGA B. R. RAKSHITH, K. N. S. K. C. Spectra of some new graph operations and some new classes of integral graphs. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, v. 13, n. 1, p. 51–65, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 46, 49, 52 e 55.
- 27 BARIK, S.; PATI, S.; SARMA, B. The spectrum of the corona of two graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, SIAM, v. 21, n. 1, p. 47–56, 2007. Citado na página 46.
- 28 MCLEMAN, C.; MCNICHOLAS, E. Spectra of coronae. *Linear algebra and its applications*, Elsevier, v. 435, n. 5, p. 998–1007, 2011. Citado na página 46.
- 29 TAHIR, M. A.; ZHANG, X.-D. Coronae graphs and their  $\alpha$ -eigenvalues. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Springer, p. 1–17, 2019. Citado na página 48.