

Taís Letícia Oliva de Carvalho

Invariantes Espectrais dos Grafos Diamantes

Volta Redonda, RJ

2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BAVR
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C331i Carvalho, Taís Letícia Oliva de
Invariantes Espectrais dos Grafos Diamantes / Taís Letícia
Oliva de Carvalho ; Francisca Andrea Macedo França,
orientadora. Volta Redonda, 2021.
78 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências
Exatas, Volta Redonda, 2021.

1. Conjuntos Simétricos. 2. Algoritmo da Decomposição
Simétrica. 3. Grafos Anéis de Diamantes. 4. Grafos Quase
Diamantes. 5. Produção intelectual. I. França, Francisca
Andrea Macedo, orientadora. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Ciências Exatas. III. Título.

CDD -

Taís Letícia Oliva de Carvalho

Invariantes Espectrais dos Grafos Diamantes

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Volta Redonda, RJ, 03 de Maio de 2021:

Prof^a. Dr^a. Francisca Andrea Macedo França – UFF
Orientadora

Prof. Dr. André Ebling Brondani – UFF

Prof^a. Dr^a. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa –
Colégio Pedro II

Volta Redonda, RJ
2021

Este trabalho é dedicado aos sonhadores.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, pois sem Ele nada sou, e sem Ele nada disso faria sentido. Foi Ele quem me sustentou nos momentos mais difíceis e arduos durante a graduação, me dando todo o apoio e suporte necessários. Aos meus pais, Nereu e Madalena, e minha irmã Tamires Carvalho que embarcaram comigo nessa jornada, sonhando junto comigo durante todo o processo, me incentivando sempre desde a educação básica, estudando junto comigo e me orientando para o meu crescimento em conhecimento, me apoiando financeiramente e emocionalmente, sem vocês eu não estaria aqui, muito Obrigada.

A minha orientadora, Francisca Andrea Macedo por compartilhar comigo sua paixão por Teoria Espectral de Grafos durante todos os nossos encontros de estudos, por todas as horas de estudos juntas. Por ser uma profissional exemplar que nos inspira de uma maneira única. Pelas as orientações que tivemos ao decorrer desses anos, seja acadêmica ou não acadêmica, por todas as conversas sobre experiência de vida, pela orientação neste trabalho e pela enorme confiança no meu potencial.

A todos os professores do ICEX que contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal, por todo o tempo destinado preparando e lecionando as aulas, pelo tempo extra fora do horário de aula retirando dúvidas de listas e exercícios, e por todas as conversas sobre a experiência de cada um, e por sempre estarem abertos para ouvir nossos pedidos e desabaços. Sou grata por conhecer e aprender com vocês, mesmo aqueles em que não tive o prazer de participar de uma aula estavam sempre disponíveis para nos ouvir.

Aos meus amigos, Guilherme Barros, Guilherme Saroka, João Pedro Vasconcellos, Joel Marques, Mariana Macedo, Nelson de Assis, Patrick Alves e Rayan Gustavo, por serem a melhor turma e os melhores colegas de aula do mundo. Muito obrigada pela companhia, pelas trocas de listas de exercícios, nas longas horas de estudos, pelos almoços no BK, por todas as horas em que passamos juntos, pelas zueiras e noite de jogos, pelos conselhos que davamos uns aos outros, obrigada por fazerem desses meus 4 anos os melhores, sou grata pela amizade que vai além da UFF. Com certeza, vocês tornaram tudo isso muito mais leve, obrigada pelo companheirismo e amizade.

Aos meus familiares e amigos, que foram suporte para mim, me dando conselhos e sendo meu ombro amigo nos momentos difíceis, e nos momentos alegres celebrando todas as conquistas e barreiras quebradas ao longo do caminho.

Aos membros desta banca que aceitaram prontamente o convite.

"Pois a mensagem da cruz é loucura para os que estão perecendo, mas para nós, que estamos sendo salvos, é o poder de Deus."(Bíblia Sagrada, 1 Coríntios 1:18)

Resumo

Em 2016, Fritscher e Trevisan apresentaram Algoritmo da Decomposição Simétrica que decompõe o espectro de uma matriz como a união do espectro de matrizes de menor ordem, a partir da existência de certas simetrias. Através da Teoria Espectral de Grafos, utilizamos tal algoritmo no estudo do espectro dos grafos Anéis de Diamantes, que são grafos cúbicos sem garras, e dos subgrafos desta família denominados grafos Quase Diamantes.

Palavras-chave: Conjuntos Simétricos. Algoritmo da Decomposição Simétrica. Grafos Anéis de Diamantes. Grafos Quase Diamantes.

Abstract

In 2016, Fritscher and Trevisan presented a Symmetric Decomposition Algorithm that decomposes the spectrum of a matrix as the union of the spectrum of matrices of lesser order, from the existence of certain symmetries. Through the Spectral Graph Theory, we use this algorithm in the study of the spectrum of the Diamond Rings graphs, which are cubic graphs without claws, and the subgraphs of this family called Quasi-diamond graphs.

Keywords: Symmetric Sets. Symmetric Decomposition Algorithm. Diamond Rings Graphs. Quasi-diamond Graphs.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo simples G e vizinhança do grafo G	14
Figura 2 – Tipos de vértices gêmeos	14
Figura 3 – H subgrafo de G e $G[\{v_2, v_4, v_5\}]$ subgrafo induzido de G	15
Figura 4 – Caminho P_4 e Ciclo C_4	15
Figura 5 – Grafo conexo e grafo desconexo, respectivamente	16
Figura 6 – Grafos isomorfos	16
Figura 7 – Grafo G e seu complementar \overline{G}	17
Figura 8 – Grafo 3-regular e Grafo K_5	17
Figura 9 – Grafo Bipartido e Grafo Bipartido Completo $K_{3,2}$	17
Figura 10 – Soma e remoção de arestas no grafo G	18
Figura 11 – Soma e remoção de vértices em G	18
Figura 12 – Grafo ponderado generalizado, ver[1]	26
Figura 13 – (G, p, \mathcal{E}) com três conjuntos simétricos, ver [1].	28
Figura 14 – Grafo ponderado decomposto com o mesmo espectro, ver [1].	32
Figura 15 – Grafo G com dois conjuntos simétricos, ver [1].	32
Figura 16 – Grafo ponderado desconectado com o mesmo espectro de G , ver [1].	33
Figura 17 – $K_{1,3}$, Grafo com garra e Grafo livre de garra, respectivamente.	34
Figura 18 – K_4 e $K_4 \setminus e$, respectivamente	34
Figura 19 – Grafo $AD(2)$	35
Figura 20 – Grafo $AD(3)$	35
Figura 21 – $(AD(2), p, \mathcal{E})$	36
Figura 22 – $(AD(2), p, \mathcal{E})$ após 1º passo.	39
Figura 23 – $(AD(2), p, \mathcal{E})$ após 2º passo.	40
Figura 24 – Grafo $AD(2)$ ponderado após aplicar o algoritmo	40
Figura 25 – GWG $AD(3)$ após aplicar o algoritmo	45
Figura 26 – Grafo quase-diamante com 3 diamantes	55
Figura 27 – Grafo quase-diamante com 2 diamantes $QD(2)$	55
Figura 28 – Grafo ponderado $QD(2)$ após aplicar o algoritmo	58
Figura 29 – Grafo ponderado $QD(3)$ após aplicar o algoritmo	62

Lista de tabelas

Tabela 1 – Espectro anéis de diamantes via python	53
Tabela 2 – Polinômio característicos dos anéis de diamantes via python	54
Tabela 3 – Espectro quase diamantes via python	69
Tabela 4 – Polinômio característico dos quase diamantes via python	70

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	CONCEITOS INICIAIS	3
2.1	Teoria de Matrizes	3
2.2	Teoria de Grafos	13
2.3	Teoria Espectral de Grafos	18
3	ALGORITMO DA DECOMPOSIÇÃO SIMÉTRICA	21
3.1	Grafo Ponderado Generalizado - (GWG)	25
3.2	Conjuntos Simétricos de Vértices	26
3.3	Algoritmo	30
4	GRAFOS ANÉIS DE DIAMANTES	34
4.1	Testes Computacionais via Python	49
5	GRAFOS QUASE DIAMANTES	55
5.1	Testes Computacionais via Python	66
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	72
	ANEXOS	74
	ANEXO A – PROGRAMAS	75
A.1	Anéis de Diamantes	76
A.2	Quase Diamantes	77

1 Introdução

Seja $G = G(V, E)$ um *grafo simples*, ou simplesmente um grafo constituído por um conjunto finito e não vazio V cujos elementos são denominados vértices e um conjunto $E(G) = \{\{v_i, v_j\}; i \neq j, v_i, v_j \in V\}$, cujos elementos são denominados arestas. Dois vértices v_i e v_j são ditos *adjacentes* se existe uma aresta $\{v_i, v_j\} \in E$ que os conecta. Se v_i é adjacente a v_j , a aresta $\{v_i, v_j\}$ é dita ser *incidente* a v_i e a v_j . Aos grafos podemos associar diversas matrizes, por exemplo a *matriz de adjacência* $A = [a_{ij}]$ de um grafo com n vértices, que é uma matriz quadrada de ordem n , cuja a entrada a_{ij} é igual a 1 ou a 0, se houver ou não uma aresta conectando os vértices i e j , respectivamente.

A Teoria Espectral de Grafos surgiu nos anos 1950 e 1960, e estuda a relação entre as propriedades estruturais e espectrais de grafos. Mais tarde foi descoberto uma conexão de estudos entre essa área e a química quântica. Um dos desafios enfrentados na Teoria Espectral de Grafos é a caracterização dos grafos através do espectro de suas matrizes associadas. Uma estratégia apresentada em 2016, por Fritscher e Trevisan, [1], visa diminuir a dificuldade desse desafio, pois não possuímos um método algébrico geral para encontrar as raízes de um polinômio de grau maior ou igual a 5. Contudo, essa estratégia visa de modo a reduzir o espectro de uma matriz à união do espectro de matrizes de ordens menores, tudo isso acontece se o grafo em questão possuir um certo tipo de simetria.

Um grafo cúbico, é um grafo em que cada vértice incide três arestas. Uma bissecção de um grafo cúbico G é uma partição do seu conjunto de vértice V em dois subconjuntos distintos de mesma cardinalidade. Em 2017, Marien Abreu e alguns outros pesquisadores ([2]), responderam uma conjectura. Tal teorema é apresentado a seguir, onde este teorema aplica a família anéis de diamantes olhando para a estrutura desse grafo para responder um problema extremal em Teoria Espectral de Grafos. Para mais referências, ver [3], [4], [5],[6] e [7].

Teorema 1.1 (Marien Abreu et al. (2017) [2]). *Seja G um grafo livre de garras e sem pontes. Então, G admite uma 2-bissecção.*

Neste trabalho, estamos focados no estudo espectral dos grafos anéis de diamantes utilizando o Algoritmo da Decomposição Simétrica. No Capítulo 2 apresentamos os conceitos gerais de Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e da Teoria Espectral de Grafos necessário à compreensão do texto. O Capítulo 3 é dedicado à apresentação do Algoritmo da Decomposição Simétrica, bem como a algumas definições, resultados apresentados em [1] e exemplos de aplicação. Nos Capítulos 4 e 5, apresentamos os grafos anéis de diamantes e quase-diamantes e fizemos a análise espectral sobre essas famílias, bem como

alguns resultados e conjecturas que foram formuladas ao longo do estudo. E por último, no Capítulo 6 apresentamos as considerações finais.

2 Conceitos iniciais

A Teoria Espectral de Grafos tem como objetivo principal a descrição de propriedades estruturais de um grafo a partir dos espectros das matrizes que lhe podem ser associadas em particular da matriz de adjacência. Neste capítulo, iremos ver alguns conceitos iniciais em Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e Teoria Espectral de Grafos.

2.1 Teoria de Matrizes

Nesta seção, iremos abordar alguns conceitos de Álgebra Linear e Teoria de Matrizes, necessários para o trabalho. As definições e resultados listados a seguir podem ser encontrados em [8], [9], [10], [11], [12], [13] e [14].

Seja \mathbb{K} um corpo. Se m e n são inteiros positivos, uma matriz de tamanho $m \times n$ A sobre \mathbb{K} é dada por $m \times n$ valores $a_{ij} \in \mathbb{K}$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Usualmente, uma matriz é apresentada como um arranjo com m linhas e n colunas. Um elemento de \mathbb{K} (uma entrada), é cada ponto da interseção entre uma linha e uma coluna. Em geral, se A é uma matriz, denota-se por a_{ij} o elemento da interseção da i -ésima linha com a j -ésima coluna. Tal matriz é representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

que também pode ser escrita como $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. O conjunto das matrizes de tamanho $m \times n$, com entradas em \mathbb{K} , é denotado por $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Quando $m = n$ escrevemos simplesmente $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e tais matrizes são ditas *matrizes quadradas* de ordem n . A notação $A_{m \times n}$ ou $A_{m,n}$, se refere a uma matriz A de ordem $m \times n$.

Seja $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Uma *submatriz* de A é uma matriz obtida de A a partir da escolha de subconjuntos de linhas e colunas da matriz A . Sejam α e β os subconjuntos de índices tais que $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\beta \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$. A submatriz de A cujas linhas são indicadas por α e as colunas por β é denotada por $A[\alpha, \beta]$, tal matriz é obtida selecionando as entradas de A que estão nas linhas correspondentes aos índices em α e nas colunas correspondentes aos índices em β . Quando $\alpha = \beta$, a submatriz é chamada *submatriz principal* de A e neste caso, denotamos por $A[\alpha] = A[\alpha, \alpha]$. Uma *submatriz principal líder* de A é uma submatriz principal da forma $A[\alpha_k]$, onde $\alpha_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Exemplo 2.1. Dada a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 10 & -16 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Se $\alpha = \{2\}$ e $\beta = \{2, 3\}$, então temos que $A[\alpha, \beta] = A[\{2\}, \{2, 3\}] = \begin{bmatrix} 10 & -16 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.

Outro exemplo, se tomarmos $\alpha = \{1, 2\}$ e $\beta = \{1, 3\}$, teríamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -16 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}).$$

Uma *partição* de um conjunto \mathcal{S} é uma coleção de subconjuntos de \mathcal{S} de modo que cada elemento de \mathcal{S} é membro de um e apenas um dos subconjuntos, e quando reunimos os subconjuntos, obtemos o conjunto \mathcal{S} . Por exemplo, uma partição de um conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ é uma coleção de subconjuntos $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ tal que cada inteiro entre 1 e n está em um e apenas um dos conjuntos de índices. Uma *partição sequencial* de $\{1, 2, \dots, n\}$ é uma partição a qual os conjuntos de índices têm a forma especial $\alpha_1 = \{1, \dots, i_1\}$, $\alpha_2 = \{i_1 + 1, \dots, i_2\}, \dots, \alpha_t = \{i_{t-1} + 1, \dots, n\}$.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ constitui uma partição de $\{1, 2, \dots, m\}$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ constitui uma partição de $\{1, 2, \dots, n\}$, então as matrizes $A[\alpha_i, \beta_j]$ formam uma partição da matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, para $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq s$, note que se $n = m$ analisamos as partições de maneira análoga, e as matrizes que formam uma partição são matrizes quadradas. Se uma matriz é particionada por uma partição sequencial de suas linhas e colunas, a matriz particionada resultante é chamada *matriz em bloco*. Por exemplo, se as linhas e colunas da matriz A são particionadas pela mesma sequência de partição $\alpha_1 = \{1, \dots, k\}$, $\alpha_2 = \{k + 1, \dots, n\}$, o resultado da matriz em blocos é:

$$A = \begin{bmatrix} A[\alpha_1, \alpha_1] & A[\alpha_1, \alpha_2] \\ A[\alpha_2, \alpha_1] & A[\alpha_2, \alpha_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Definimos o *determinante* de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ de maneira recorrente, em relação a ordem da matriz.

Para $n = 1$, a matriz $A \in \mathbb{M}_1(\mathbb{K})$ é dada por um único elemento a_{11} . Definimos neste caso,

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Para $n = 2$, o determinante da matriz $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ é definido por

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Suponha que o determinante está definido sobre $\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ e seja $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ a submatriz de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ obtida ao se excluir a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A . Então,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ para todo } i \leq n \text{ e } j \leq n.$$

A definição acima é conhecida como *expansão de Laplace*, ou expansão em cofatores. Uma propriedade interessante a respeito do determinante é que se $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Traremos a seguir a definição e alguns resultados sobre espaços vetoriais começando pela definição.

Definição 2.2. Seja \mathbb{K} um corpo. Um espaço vetorial sobre \mathbb{K} , ou simplesmente um \mathbb{K} -espaço vetorial, é um conjunto não vazio V munido de duas operações:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V & \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v & (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades: para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- (i) $u + (v + w) = (u + v) + w$;
- (ii) $u + v = v + u$;
- (iii) existe um elemento $0 \in V$ tal que $0 + u = u$;
- (iv) dado $v \in V$, existe $w \in V$ tal que $v + w = 0$;
- (v) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ e $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
- (vi) $1 \cdot v = v$.

Os elementos de V são ditos *vetores*. O conjunto $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar de matrizes é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

Um caso particular de espaços vetoriais são os espaços vetoriais com produto interno. A definição de produto interno é dada a seguir.

Definição 2.3. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Um *produto interno* em V , é uma função que a cada par $(x, y) \in V \times V$ associa um escalar $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ de modo que as seguintes propriedades se verificam, para quaisquer $x, y, z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (i) $\langle x, x \rangle > 0$ se e somente se $x \neq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se e somente se $x = 0$;
- (ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

$$(iv) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Como $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in V$, definimos

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Este número é dito *norma euclidiana* de x . Se $\|x\| = 1$, dizemos que x é um vetor *unitário* ou que x está *normalizado*. Note que todo vetor não nulo y pode ser normalizado, fazendo-se

$$x = \frac{y}{\|y\|}.$$

Definição 2.4. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} com produto interno. Dois vetores $x, y \in V$ são ditos ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Um subconjunto \mathcal{A} de V é chamado *ortogonal* se seus elementos são ortogonais dois a dois e dizemos que \mathcal{A} é *ortonormal* se for um conjunto ortogonal e se $\|x\| = 1$, para todo $x \in \mathcal{A}$.

Definição 2.5. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

- (i) Dizemos que um vetor $v \in V$ é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i.$$

- (ii) Seja \mathcal{B} um subconjunto de V . Dizemos que \mathcal{B} é um *conjunto gerador* de V (ou que \mathcal{B} gera V) se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de \mathcal{B} .

Exemplo 2.6. Considere \mathbb{R}^3 como espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Observe que o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 pois se $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, conseguimos escrever um vetor qualquer de \mathbb{R}^3 como combinação linear dos elementos do conjunto citado.

Definição 2.7. Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e \mathcal{B} um subconjunto de V .

- (i) Dizemos que \mathcal{B} é *linearmente independente* ou (*LI*) se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, para $v_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $i = 1, \dots, k$, implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Isto é, dizemos que os vetores $v_i \in \mathcal{B}$ são linearmente independentes quando a única combinação linear que produz o vetor nulo é a combinação linear trivial.
- (ii) O conjunto \mathcal{B} é chamado *linearmente dependente* ou (*LD*) se não for linearmente independente.

Definição 2.8. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} . Dizemos que um subconjunto \mathcal{B} de V é uma *base* de V se

- (i) \mathcal{B} for um conjunto gerador de V ; e
- (ii) \mathcal{B} for linearmente independente.

Denominamos por *n -vetor coluna* (*n -vetor linha*) a matriz que possui somente uma coluna (linha) e n linhas (colunas). Neste texto, iremos considerar todos os vetores como sendo *n -vetor coluna*, que será denotado por $\mathbf{v} = (v_i)$.

Dada a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, definimos a *diagonal principal* da matriz como sendo a lista das entradas $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{qq}$, onde $q = \min\{m, n\}$. Às vezes é conveniente expressar a diagonal principal de A como um vetor $(a_{ii})_{i=1}^q$. Uma *matriz diagonal* é uma matriz de ordem n cujas entradas que não estão na diagonal principal são nulas. Sendo assim, representamos tal matriz por $\text{diag}_{(n)}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. O *posto* de uma matriz A de ordem $n \times m$, é o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes de A .

A *matriz identidade*, I_n , é a matriz cuja todas as entradas da diagonal principal são iguais a 1 e as demais entradas são zeros. Caso não seja necessário especificar a ordem, a matriz identidade será chamada simplesmente de I . Denotamos por $J_{m \times n}$ a matriz de ordem $m \times n$ cujas entradas são iguais a 1 e j_n denota o n -ésimo vetor coluna cujas coordenadas são iguais a 1.

Exemplo 2.9. *A seguir, um exemplo sobre diagonal principal de uma matriz.*

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & \pi & 25 \\ -1 & e & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & \cos(1) & -2 & \frac{\sqrt{3}}{\pi} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3,4}(\mathbb{R}), \text{ temos que } q = \min\{3, 4\} = 3.$$

Assim a diagonal principal de A é dada pelo vetor $d = (a_{ii})_{i=1}^3 = (a_{11}, a_{22}, a_{33}) = (5, e, -2)$.

A *transposta* de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é a matriz denotada por $A^T = [a_{ij}^T] \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $a_{ij}^T = a_{ji}$, isto é, as linhas da matriz A são trocadas pelas colunas e vice-versa. Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é uma *matriz simétrica* quando $A = A^T$. A matriz quadrada A de ordem n é *invertível* se existe uma matriz quadrada B de ordem n tal que $AB = BA = I$. Se tal matriz existe, esta é única e é denominada *inversa* de A , e denotamos B por A^{-1} . Se a matriz A admite inversa dizemos que A é uma *matriz inversível* ($\det(A) \neq 0$), se A não admite inversa então A , é chamada *matriz não-inversível* ou *matriz singular*, ($\det(A) = 0$). Dizemos que A é uma *matriz ortogonal* quando $AA^T = A^T A = I$, ou seja, a inversa coincide com a transposta.

Definição 2.10. Sejam $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que M é semelhante a N quando existe uma matriz invertível P tal que $M = P^{-1}NP$.

Uma matriz é *diagonalizável* se for semelhante a uma matriz diagonal. Chamamos *matriz de permutação* à matriz quadrada de ordem n onde em cada linha e coluna possuem $n - 1$ elementos nulos e um único elemento igual a 1. Esta matriz é invertível e semelhante à matriz identidade.

Definição 2.11. Seja $A \in \mathbb{M}_n$, uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que um escalar λ é um *autovalor* de A se existe um n -vetor coluna não nulo \mathbf{v} , tal que $\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}$. Neste caso, o vetor \mathbf{v} é chamado um *autovetor* de A associado ao autovalor λ .

Observe que qualquer múltiplo escalar $k\mathbf{v}$ de um autovetor \mathbf{v} , associado a λ , também é um autovetor associado a λ . De fato,

$$A(k\mathbf{v}) = k(A\mathbf{v}) = k(\lambda\mathbf{v}) = (k\lambda)\mathbf{v}.$$

Exemplo 2.12. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 \quad e \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{v}_2$$

Assim, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

Definição 2.13. O *polinômio característico* de A é definido por $p_A(x) = \det(xI - A)$ e suas raízes são exatamente os autovalores associados a matriz A .

Note que $p_A(x)$ é um *polinômio mônico* de grau n (o coeficiente do termo de maior grau é 1).

Proposição 2.14. Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um escalar. Para que λ seja autovalor de A é necessário e suficiente que λ seja raiz de $p_A(x)$.

Demonstração. Seja λ um autovalor da matriz A , então existe um n -vetor coluna não nulo \mathbf{v} tal que $\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}$. Então $\lambda\mathbf{v} - A\mathbf{v} = (\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, como \mathbf{v} é não nulo, segue que $\lambda I - A = \mathbf{0}$. Logo, $\det(\lambda I - A) = p_A(\lambda) = 0$.

Por outro lado, se $p_A(\lambda) = 0$, então $\det(\lambda I - A) = 0$, segue que $\lambda I - A$ é não inversível, ou seja, $\lambda I - A$ é singular. Da singularidade, temos que existe um n -vetor não nulo \mathbf{v} tal que $(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\lambda\mathbf{v} - A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, e portanto $\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}$. \square

A *multiplicidade algébrica* de um autovalor λ de A , $alg(\lambda)$, é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de A . Já a *multiplicidade geométrica* de λ , $geo(\lambda)$,

é o número máximo de autovetores associados a λ que são linearmente independentes. Um autovalor λ é dito *simples* se $\text{alg}(\lambda) = 1$. No caso de $\text{geo}(\lambda) = \text{alg}(\lambda)$, o autovalor λ é denominado *semi-simples*.

O *espectro* de uma matriz quadrada A , $\sigma(A)$, é o multiconjunto dos autovalores de A , ou seja, os autovalores são repetidos em $\sigma(A)$ de acordo com suas respectivas multiplicidades. Dado $\sigma^k(A)$ queremos dizer que o multiconjunto possui k cópias de $\sigma(A)$ e dado $\lambda^{(k)}$ dizemos que o autovalor λ repete k vezes no espectro, usaremos essa notação quando necessário. Denotamos por $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ o subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelos n -vetores coluna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. O subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelos autovetores associados ao autovalor λ de A é o *autoespaço associado* a λ que denotamos por E_λ .

Exemplo 2.15. A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, tem o seguinte polinômio característico

$$p_A(x) = (\lambda - 5)^2(\lambda - 4).$$

O autovalor $\lambda = 5$ tem multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1, isto é, $\text{alg}(5) = 2$ e $\text{geo}(5) = 1$, dado que $E(5) = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Já o autovalor $\lambda = 4$ tem $\text{alg}(4) = \text{geo}(4) = 1$. Além disso, $\sigma(A) = \{4, 5, 5\}$.

O teorema a seguir afirma que matrizes semelhantes possuem o mesmo espectro.

Teorema 2.16. Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Demonstração. Sejam M e N matrizes quadradas de ordem n . Suponha que, M e N são matrizes semelhantes, então existe uma matriz invertível P de ordem n tal que $M = P^{-1}NP$. Assim,

$$\begin{aligned} p_M(x) &= \det(xI - M) \\ &= \det(xI - P^{-1}NP) \\ &= \det(P^{-1}xIP - P^{-1}NP) \\ &= \det(P^{-1}(xI - N)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(xI - N)\det(P) \\ &= \det(xI - N)\det(P^{-1})\det(P) \\ &= \det(xI - N) \\ &= p_N(x) \end{aligned}$$

Logo, $p_M(x) = p_N(x)$ e portanto, matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, e consequentemente o mesmo espectro.

□

Lema 2.17. Se $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ com A e C matrizes quadradas, então

$$p_M(x) = p_A(x)p_C(x).$$

Demonstração. Da definição de polinômio característico de uma matriz, segue que

$$\begin{aligned} p_M(x) &= \det(xI - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} xI - A & B \\ 0 & xI - C \end{pmatrix} \\ &= \det(xI - A)\det(xI - C) \\ &= p_A(x)p_C(x). \end{aligned}$$

□

Dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, a *matriz conjugada* de A é matriz $\bar{A} = [b_{ij}]$ onde $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ é o conjugado do número complexo a_{ij} . A *matriz adjunta* de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é a matriz A^* dada por $A^* = (\bar{A})^T$ e $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{K}^n$. Além disso, $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$. Se A é tal que $A^*A = I$, a matriz A é dita *unitária*. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A é dita *ortogonal*. A matriz A é dita *hermitiana* se $A = A^*$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ uma matriz hermitiana também é dita *simétrica*.

Teorema 2.18 ([8]). *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz hermitiana. Então*

- (i) x^*Ax é real para todo $x \in \mathbb{C}^n$;
- (ii) Os autovalores de A são reais.

Demonstração. (i) Temos que

$$\overline{x^*Ax} = (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax,$$

então x^*Ax é igual ao seu conjugado complexo, logo é um número real.

- (ii) Seja λ um autovalor de A e $x \in \mathbb{C}^n$ um vetor unitário, tal que $Ax = \lambda x$ e $x^*x = 1$. Então

$$\lambda = \lambda x^*x = x^*\lambda x = x^*Ax$$

que pelo item (i) é um número real. Pela arbitrariedade de λ , concluímos que todos os autovalores da matriz A são reais.

□

Os resultados a seguir, são para matrizes reais, isto é quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 2.19. *Seja M uma matriz real simétrica. Se \mathbf{u} e \mathbf{v} são autovetores de M com diferentes autovalores, então \mathbf{u} e \mathbf{v} são ortogonais.*

Demonstração. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de M e \mathbf{u} , \mathbf{v} seus respectivos autovetores. Observe que é necessário que M seja simétrica na terceira e última igualdade, então

$$\lambda_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda_2 \mathbf{v} \rangle = \overline{\lambda_2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Assim temos que $\lambda_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \lambda_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Como λ_1 e λ_2 são distintos, segue que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Portanto, os autovetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são ortogonais. \square

Teorema 2.20. *Seja M uma matriz real simétrica de ordem n . Então \mathbb{R}^n possui uma base ortonormal de autovetores de \mathbb{R}^n .*

Os próximos resultados referem-se a certas matrizes particionadas em blocos.

Proposição 2.21 ([15]). *Seja $P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$ uma matriz particionada em blocos. Então λ é um autovalor de P se, e somente se, λ é um autovalor de $A + B$ ou de $A - B$.*

Demonstração. Seja λ um autovalor de $A + B$ com correspondente autovetor \mathbf{x} , ou seja $(A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Considere o vetor $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}_{2n \times 1}$. Temos:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B)\mathbf{x} \\ (B + A)\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{x} \\ \lambda\mathbf{x} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Logo, λ é um autovalor de P com $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$ o autovetor associado.

Por outro lado, se λ é um autovalor de $A - B$ com correspondente autovetor \mathbf{x} , ou seja, $(A - B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, então:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - B)\mathbf{x} \\ (B - A)\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{x} \\ -\lambda\mathbf{x} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Portanto, λ é um autovalor de P com $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix}$ o autovetor associado.

Reciprocamente, seja λ um autovalor de P com $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ o autovetor associado. Então,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \\ B\mathbf{x} + A\mathbf{y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Do sistema

$$\begin{cases} A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \\ B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \end{cases}, \text{ obtemos :}$$

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \implies (A + B)\mathbf{x} + (A + B)\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \implies (A + B)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \text{ e}$$

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} - B\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y} \implies (A - B)\mathbf{x} - (A - B)\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \implies (A - B)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Assim, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ então λ é um autovalor de $A - B$. E se, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ então λ é um autovalor de $A + B$.

□

Teorema 2.22 ([16]). *Seja M uma matriz simétrica de ordem n definida por*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} \end{bmatrix},$$

onde M_{ij} , $1 \leq i, j \leq k$, é uma submatriz de ordem $n_i \times n_j$ tal que as linhas das submatrizes M_{ij} têm somas constantes iguais a c_{ij} . Se $\overline{M} = [c_{ij}]$, então os autovalores de \overline{M} também são os autovalores de M . Mais ainda, se \mathbf{w} é um autovetor de \overline{M} associado a um autovalor λ então $\mathbf{v} = (w_1 \mathbf{1}_{n_1} \quad w_2 \mathbf{1}_{n_2} \quad \cdots \quad w_k \mathbf{1}_{n_k})^T$ é um autovetor de M associado a λ .

Teorema 2.23 ([11]). *Se A e D são matrizes quadradas, então*

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} \det(A)\det(D - CA^{-1}B) & \text{quando } A^{-1} \text{ existe,} \\ \det(D)\det(A - BD^{-1}C) & \text{quando } D^{-1} \text{ existe.} \end{cases}$$

As matrizes $D - CA^{-1}B$ e $A - BD^{-1}C$ são chamados *complementos de Schur* de A e D .

2.2 Teoria de Grafos

Um *grafo simples* $G = G(V, E)$ com n vértices e m arestas consiste de um conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e um conjunto de arestas por $E(G) = \{\{v_i, v_j\}; i \neq j, v_i, v_j \in V\}$, sendo que há no máximo uma aresta $\{v_i, v_j\}$ para cada $v_i, v_j \in V$. Indicamos por $|V| = n$ e $|E| = m$, respectivamente, a *ordem* de G (que também chamamos de número de vértices) e o *número de arestas* de G . Se G não possui arestas dizemos que G é um *grafo vazio*. Quando V é um conjunto unitário e $E = \emptyset$, chamamos G de *grafo trivial*. Duas arestas são ditas *adjacentes* em G se possuem um vértice em comum, caso contrário elas são não adjacentes. Dois vértices v_i e v_j são ditos *adjacentes* se existe uma aresta $\{v_i, v_j\} \in E$ que os conecta. Se v_i é adjacente a v_j , a aresta $\{v_i, v_j\}$ é dita ser *incidente* a v_i e a v_j . A *vizinhança* de um vértice v_i de um grafo G , é o conjunto

$$N_G(v_i) = \{v_j \in V | \{v_i, v_j\} \in E\}.$$

Definimos o *grau* de um vértice $v_i \in V$, como sendo o número de arestas que incidem em v_i . Denotamos o grau do vértice v_i como sendo $d_G(v_i)$, ou simplesmente, $d(v_i)$, note que é a cardinalidade da sua vizinhança, $N_G(v_i)$, isto é, $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Os graus mínimo e máximo de G são denotados por $\delta(G) = \min\{d(v_i) | v_i \in V\}$ e $\Delta(G) = \max\{d(v_i) | v_i \in V\}$, respectivamente. O *vetor de graus* $d(G)$ é formado por cada um dos $d(v_i)$ de tal forma que $d(v_i) \geq d(v_{i+1})$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Exemplo 2.24. Considere o grafo $G = G(V, E)$ dado na figura a seguir, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, de ordem $|V| = 6$ a seguir a $G(V, E)$ e o conjunto de arestas

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_2, v_6\}\},$$

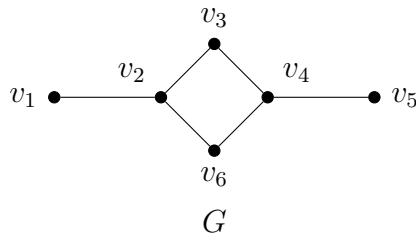
com número de arestas $|E| = 7$, a seguir a, *Figura 1*. O grau dos vértices são: $d_G(v_1) = 1$, $d_G(v_2) = 3$, $d_G(v_3) = 2$, $d_G(v_4) = 3$, $d_G(v_5) = 1$ e $d_G(v_6) = 2$ e o vetor de graus é $d(G) = (3, 3, 2, 2, 1, 1)$. Além disso, $\delta(G) = d(v_1) = d(v_5) = 1$ e $\Delta(G) = d(v_2) = d(v_4) = 3$. A vizinhança dos vértices é dada.

Teorema 2.25. Seja G um grafo de ordem n com um número de arestas m então,

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

Demonstração. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $d(v_i)$ é o número de arestas que incidem no vértice v_i , ou seja, $d(v_i)$ conta cada aresta duas vezes, uma para cada vez que é incidente a um vértice. \square

Definição 2.26. Dado G um grafo com n vértices, sejam v_i, v_j vértices distintos. Dizemos que v_i e v_j são *vértices gêmeos* quando $N_G(v_i) - \{v_j\} = N_G(v_j) - \{v_i\}$, o que implica $d(v_i) = d(v_j)$.



- $N_G(v_1) = \{v_2\}$
- $N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_6\}$
- $N_G(v_3) = \{v_2, v_4\}$
- $N_G(v_4) = \{v_3, v_5, v_6\}$
- $N_G(v_5) = \{v_4\}$
- $N_G(v_6) = \{v_2, v_4\}$

Figura 1: Grafo simples G e vizinhança do grafo G

Exemplo 2.27. O grafo G ilustrado na Figura 2 possui vértices gêmeos. A vizinhança e os pares de vértices gêmeos, são respectivamente:

Vizinhanças: $N_G(v_1) = \{v_2, v_3\}$; $N_G(v_2) = \{v_1, v_3\}$; $N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$;
 $N_G(v_4) = \{v_3, v_5, v_6, v_7\}$; $N_G(v_5) = \{v_4\}$; $N_G(v_6) = \{v_4\}$ e $N_G(v_7) = \{v_4\}$.

Vértices Gêmeos:

- $N_G(v_1) = \{v_2, v_3\}$ e $N_G(v_2) = \{v_1, v_3\}$, de modo que $N_G(v_1) \setminus \{v_2\} = N_G(v_2) \setminus \{v_1\} = \{v_3\}$. Logo, $\{v_1, v_2\}$ são vértices gêmeos.

- Os vértices v_5, v_6, v_7 não são adjacentes, porém possuem a mesma vizinhança. Observe:

$N_G(v_5) = N_G(v_6) = N_G(v_7) = \{v_4\}$. Logo, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_5, v_7\}$ e $\{v_6, v_7\}$ são pares de vértices gêmeos.

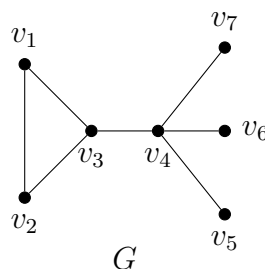


Figura 2: Tipos de vértices gêmeos

Definição 2.28. Um *subgrafo* de $G = G(V, E)$ é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. E denotamos por $H \subseteq G$.

Se H é subgrafo de G , então G é um *supergrafo* de H . Diz-se que H é um *subgrafo induzido* de G , se dois vértices de H , adjacentes em G , são necessariamente adjacentes em

H . Quando H é um subgrafo induzido de G com conjunto de vértices S , denotamos por: $H = G[S]$, e com isso estamos dizendo que H é um subgrafo de G induzido por S .

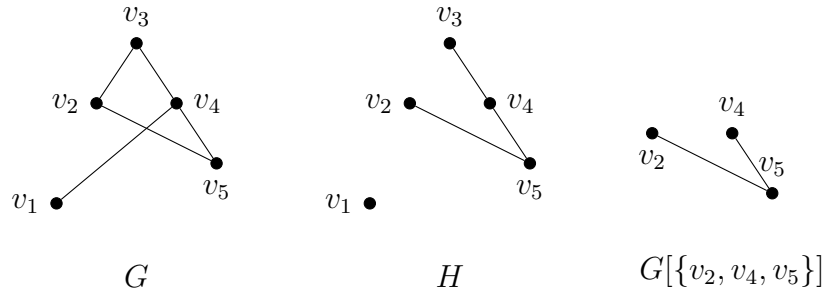


Figura 3: H subgrafo de G e $G[\{v_2, v_4, v_5\}]$ subgrafo induzido de G

Seja uma sequência finita $i_1i_2 \cdots i_k$ de vértices de um grafo $G = G(V, E)$ com n vértices, onde $\{i_j, i_{j+1}\} \in E$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ é dita uma *cadeia* de i_1 a i_k no grafo G . Dizemos que $i_1i_2 \cdots i_k$ é uma *cadeia fechada* (respectivamente *cadeia aberta*) em G se $i_1 = i_k$ (respectivamente, $i_1 \neq i_k$). Um *caminho* em um grafo G é uma cadeia em que todos os vértices são distintos. Um *ciclo* é um caminho $i_1i_2 \cdots i_k$ ao qual se acrescenta a aresta $\{i_1, i_k\}$. O *comprimento de um caminho* é o número de arestas que ligam seus vértices. Denotamos o caminho e o ciclo com n vértices, respectivamente por P_n e C_n . Em particular, chamamos o ciclo C_3 de triângulo.

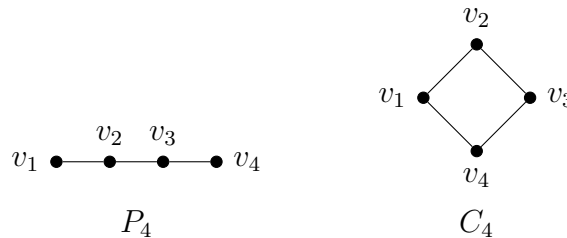


Figura 4: Caminho P_4 e Ciclo C_4

O grafo $G = G(V, E)$ é dito *conexo* se o conjunto V possui ordem 1, ou se cada par de vértices distintos de G for unido por um caminho em G . Caso contrário o grafo é denominado *desconexo*. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G , em outras palavras é um subgrafo induzido de G , tal que esse subgrafo induzido seja conexo, mesmo que G não seja conexo. No caso de G possuir somente uma componente conexa, dizemos que G é um grafo conexo. Note que o grafo à direita da Figura 5 é desconexo, porém possui 2 componentes conexas.

Definição 2.29. Dizemos que um grafo $G_1 = G_1(V_1, E_1)$ é *isomorfo* a $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ se houver uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G_1 e G_2 , isto é,

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

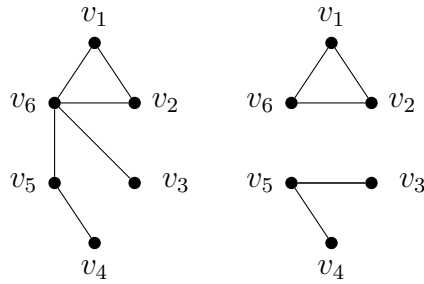


Figura 5: Grafo conexo e grafo desconexo, respectivamente

onde dois vértices $v_i, v_j \in V_1$ são adjacentes em G_1 se, e somente se, $f(v_i), f(v_j) \in V_2$ são adjacentes em G_2 . Denotamos por $G_1 \simeq G_2$.

Em outras palavras, dizer que há um isomorfismo entre dois grafos é dizer que o número de arestas, vértices e graus dos vértices são preservados. Vale observar que a igualdade destes parâmetros não garante o isomorfismo. O exemplo abaixo mostra dois grafos que são isomorfos.

Exemplo 2.30. Um isomorfismo entre G_1 e G_2 é dado por:

$$\begin{aligned} f(v_1) = w_5 & \quad f(v_2) = w_4 & \quad f(v_3) = w_2 & \quad f(v_4) = w_7 \\ f(v_5) = w_1 & \quad f(v_6) = w_8 & \quad f(v_7) = w_6 & \quad f(v_8) = w_3 \end{aligned}$$

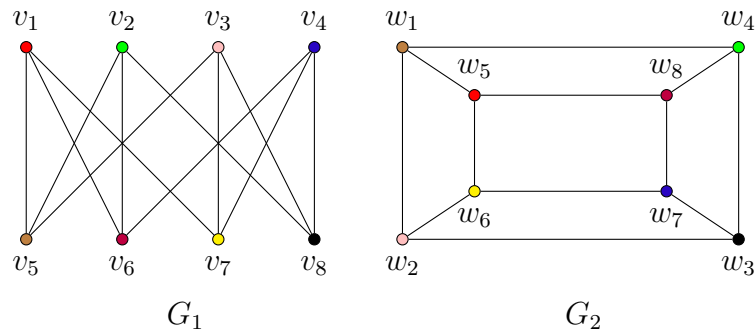


Figura 6: Grafos isomorfos

O *grafo complementar* de G é o grafo \overline{G} que possui os mesmos vértices de G , tal que dois vértices são adjacentes em \overline{G} se, e somente se, não são adjacentes em G . Em outras palavras, dizemos que o grafo G e seu grafo complementar \overline{G} compartilham o mesmo conjunto de vértices, mas se tomarmos os vértices v_i e v_j , temos que $\{v_i, v_j\} \in G$ se, e somente se, $\{v_i, v_j\} \notin \overline{G}$.

Um grafo *regular de grau k* ou *k -regular* é um grafo em que todos os vértices possuem grau k , isto é, dizemos que um grafo é regular se cada vértice do grafo, tem o mesmo número de adjacências (cada vértice possui o mesmo grau). O grafo *completo* é um

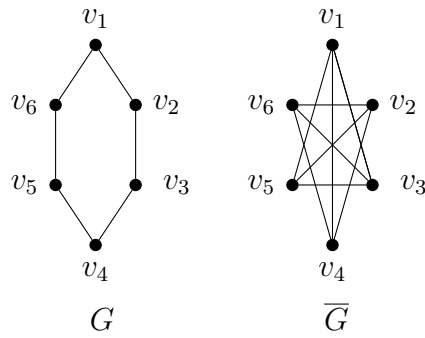


Figura 7: Grafo G e seu complementar \overline{G}

grafo no qual quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Um grafo completo com n vértices é $(n - 1)$ -regular e tal grafo é denotado por K_n . A Figura 8 exemplifica o que foi dito.

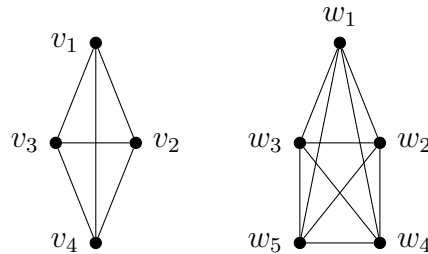


Figura 8: Grafo 3-regular e Grafo K_5

Uma *partição* de um conjunto não vazio S é uma coleção X_r constituída de r subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos de S cuja união é S . Denominamos os elementos de X_r por células. Seja X_r uma partição do conjunto de vértices de um grafo G . Tal grafo é dito *r-partido* quando os vértices que estão em uma mesma célula não são adjacentes. Assim se $r = 2$, dizemos que G é dito ser um grafo *bipartido*. Além disso, um grafo é *r-partido completo* quando, quaisquer dois vértices que pertencem a células distintas são adjacentes. Denotamos por $K_{m,n}$ um grafo *bipartido completo* com partições de tamanho m e n .

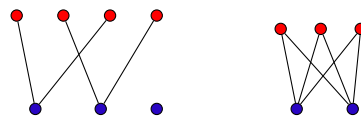


Figura 9: Grafo Bipartido e Grafo Bipartido Completo $K_{3,2}$

Podemos definir algumas operações entre grafos, que nos permitem obter grafos a partir de grafos previamente dados. Seja $\{u, v\}$ uma aresta de um dado grafo G , onde u e v são vértices desse mesmo grafo G , então $G \setminus \{\{u, v\}\}$ é um subgrafo de G obtido

pela remoção da aresta $\{u, v\}$ do grafo G . Analogamente dado v um vértice de G , temos que $G \setminus \{v\}$ é o grafo obtido a partir da remoção do vértice v do grafo G . A remoção de um vértice implica na remoção das arestas que são incidentes a ele. Do mesmo modo, definimos, $G + \{u, v\}$ e $G + v$, como se pode ver nas figuras 10 e 11.

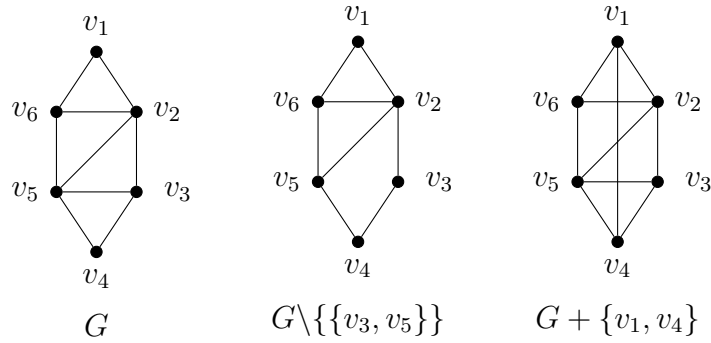


Figura 10: Soma e remoção de arestas no grafo G .

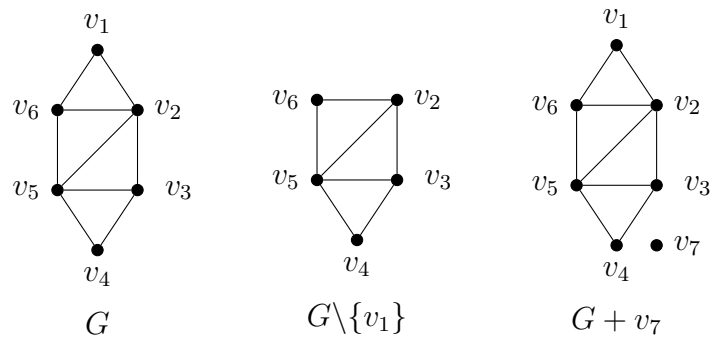


Figura 11: Soma e remoção de vértices em G .

2.3 Teoria Espectral de Grafos

Nesta seção apresentaremos a teoria espectral de grafos, cujo estudo principal são as propriedades dos grafos pela análise do espectro de matrizes que o representam. Sugerimos [17], [11] e [16]. A partir dessa seção consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

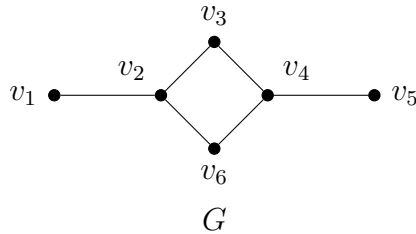
Definição 2.31. Seja $G = G(V, E)$ um grafo de ordem n . A *matriz de adjacência* de G , dada por $A(G) = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tem linhas e colunas correspondendo aos vértices de G , cujas as entradas são dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, como estamos trabalhando com grafos simples, isto é, grafos que não possuem *loops*, nem arestas paralelas e são não direcionados, todas as entradas da diagonal

principal da matriz de adjacência são nulas. Como $\{i, j\}$ é uma aresta de G , se, e somente se $\{j, i\}$ também é uma aresta de G , então $A(G)$ é uma matriz simétrica e, portanto, pelo Teorema 2.18, todos os seus autovalores são reais. Para cada vértice $v_i \in V$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = d(v_i)$.

Exemplo 2.32. Para o grafo da Figura 1, a matriz de adjacência é



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada a matriz de adjacência A de um grafo G , os seus autovalores são chamados *autovalores* de G . Denotamos por $\sigma(G)$, o multiconjunto dos autovalores do grafo G . O *polinômio característico* de G , $p_G(x)$, é o polinômio característico da matriz de adjacência do grafo G . A menos que seja dito ao contrário, consideramos que os n autovalores de um grafo G são apresentados em ordem não crescente $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{min}$, algumas vezes denotados por $\lambda_i(G)$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. O maior autovalor de G é dito ser o *índice do grafo* G . Os autovetores associados aos autovalores de G são denominados *autovetores do grafo*. O subespaço vetorial de \mathbb{R}^n contendo o vetor nulo e os autovetores associados ao autovalor λ é o *autoespaço associado a λ* , denotado por $E_G(\lambda)$.

Vale lembrar que o polinômio característico de $A(G)$ é unicamente determinado, pois, apesar da matriz $A(G)$ depender da ordenação dos vértices de G , essas outras matrizes de adjacência são semelhantes, e como vimos no Teorema 2.16, possuem o mesmo polinômio característico.

Os resultados a seguir foram muito importantes para estudarmos uma certa família de grafos que veremos nos próximos capítulos.

Proposição 2.33 ([16]). *Seja G um grafo k -regular. Então:*

- (i) k é um autovalor de G ;
- (ii) G é conexo se e somente se a multiplicidade de k é um;
- (iii) Qualquer autovalor λ de G satisfaz $|\lambda| \leq k$.

Teorema 2.34 ([18]). *Seja G um grafo com n vértices tal que i, j são vértices gêmeos de G .*

- (i) *Se $\{i, j\} \notin E$ então $0 \in \sigma(G)$;*
- (ii) *Se $\{i, j\} \in E$ então $-1 \in \sigma(G)$.*

Teorema 2.35 ([17]). *Um grafo G é bipartido se e somente se G não tem ciclo de tamanho ímpar.*

3 Algoritmo da Decomposição Simétrica

Neste capítulo, iremos abordar o Algoritmo da Decomposição Simétrica apresentado por Fritscher e Trevisan em [1].

A decomposição do espectro de uma matriz como a união do espectro de matrizes menores apresentada em [1] foi inspirada em algumas outras técnicas, quando um grafo tem um tipo especial de simetria, podemos escrever a matriz associada ao grafo da seguinte forma:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta^T & B & C & \dots & C \\ \beta^T & C & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C \\ \beta^T & C & \dots & C & B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde \mathcal{M} é uma matriz de ordem n e $A \in \mathbb{M}_t(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{M}_{t \times s}(\mathbb{R})$ e $B, C \in \mathbb{M}_s(\mathbb{R})$ tal que $n = t + cs$. Podemos expressar o espectro desta matriz como a união dos espectros de matrizes de ordem menor.

No começo dessa seção, iremos apresentar alguns resultados sobre o espectro de uma matriz que possui uma certa estrutura. Considere a matriz simétrica \mathcal{M} de ordem n dada em (3.1). Ela consiste de um bloco $A \in \mathbb{M}_t(\mathbb{R})$, blocos $\beta \in \mathbb{M}_{t \times s}(\mathbb{R})$ e blocos $B, C \in \mathbb{M}_s(\mathbb{R})$, tal que $n = t + cs$, onde c é o número de cópias do bloco B . Dizemos que o bloco β é a matriz de relação entre os blocos A e B , e chamamos os blocos C da matriz de relação entre os blocos B . Pela simetria de \mathcal{M} , os blocos A , B e C também são simétricos.

A proposição a seguir nos auxilia na demonstração do Teorema 3.3, onde o vetor $\mathbf{w} = (0, \mathbf{v}, -\mathbf{v})$ é autovetor associados ao autovalor λ de G , onde \mathbf{v} é um autovetor associado ao mesmo autovalor λ de um subgrafo H de G .

Proposição 3.1 ([1]). *Seja γ um parâmetro real, e seja A , β , B e C as submatrizes da matriz \mathcal{M} em (3.1). Para as matrizes simétricas M_1 e M_2 abaixo, de ordem $t + 2s$ e $t + s$ respectivamente, temos que $\sigma(M_1) = \sigma(M_2) \cup \sigma(B - C)$.*

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & \gamma \cdot \beta & \beta \\ \gamma \cdot \beta^T & B + (\gamma^2 - 1) \cdot C & \gamma \cdot C \\ \beta^T & \gamma \cdot C & B \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & \sqrt{\gamma^2 + 1} \cdot \beta \\ \sqrt{\gamma^2 + 1} \cdot \beta^T & B + \gamma^2 \cdot C \end{bmatrix}$$

Demonstração. Seja M_1 uma matriz com submatrizes $A \in \mathbb{M}_t(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{M}_{t \times s}(\mathbb{R})$, B e

$C \in \mathbb{M}_s(\mathbb{R})$. Considere um autovetor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^s$ associado com o autovalor λ_i da matriz $B - C$. Como $B - C$ é simétrico, pois B e C são matrizes simétricas, temos um espectro real e uma base ortogonal de autovetores \mathbf{v}_i .

Considere vetores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{t+2s}$ escritos como $\mathbf{w} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, onde $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^t$ e $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^s$. Seja $\mathbf{w}_i = (0, \mathbf{v}_i, -\gamma\mathbf{v}_i)$. Então quando multiplicamos M_1 por \mathbf{w}_i , obtemos:

$$M_1 \cdot \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \gamma\beta \cdot \mathbf{v}_i - \gamma\beta \cdot \mathbf{v}_i \\ B \cdot \mathbf{v}_i + (\gamma^2 - 1)C \cdot \mathbf{v}_i - \gamma^2 C \cdot \mathbf{v}_i \\ \gamma C \cdot \mathbf{v}_i - \gamma B \cdot \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \cdot \mathbf{v}_i - C \cdot \mathbf{v}_i \\ \gamma C \cdot \mathbf{v}_i - \gamma B \cdot \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_i \mathbf{v}_i \\ -\gamma \lambda_i \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \lambda_i \mathbf{w}_i$$

Portanto, o autovalor λ_i é um autovalor de M_1 . Como o conjunto de vetores \mathbf{v}_i são linearmente independentes, também são os vetores \mathbf{w}_i e portanto temos que todos λ_i , com $1 \leq i \leq s$, são autovalores de M_1 . E de fato, a única forma de obtermos $\sum_i \alpha_i \mathbf{w}_i = 0$ é se tivermos $\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = 0$. Logo $\sigma(B - C) \subset \sigma(M_1)$.

Os $t + s$ autovalores restantes estão associados a autovetores ortogonais a \mathbf{w}_i . Afim de que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_i = 0$, precisamos ter $\mathbf{x}_2 = \gamma\mathbf{x}_3$ em \mathbf{w} , quando esse está na forma $\mathbf{w} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Considere a matriz M_2 dada acima, e seja

$$\mathbf{w}'_k = (\mathbf{x}_k, \sqrt{\gamma^2 + 1} \mathbf{y}_k) \in \mathbb{R}^{s+t}$$

um autovetor de M_2 associado com o autovalor μ_k de M_2 , onde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^t$ e $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^s$. Então,

$$\begin{bmatrix} A \cdot \mathbf{x}_k + (\gamma^2 + 1)\beta \cdot \mathbf{y}_k \\ \sqrt{\gamma^2 + 1}(\beta^T \cdot \mathbf{x}_k + B \cdot \mathbf{y}_k + \gamma^2 C \cdot \mathbf{y}_k) \end{bmatrix} = M_2 \cdot \mathbf{w}'_k = \mu_k \mathbf{w}'_k = \begin{bmatrix} \mu_k \mathbf{x}_k \\ \sqrt{\gamma^2 + 1} \mu_k \mathbf{y}_k \end{bmatrix}.$$

Usando esse vetor \mathbf{w}'_k construímos o vetor $\mathbf{w}_{k+s} \in \mathbb{R}^{t+2s}$, escrito como

$$\mathbf{w}_{k+s} = (\mathbf{x}_k, \gamma\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k).$$

Note que este vetor é ortogonal ao autovetor \mathbf{w}_i para $i \leq s$. Quando multiplicamos a matriz M_1 por \mathbf{w}_{k+s} obtemos:

$$M_1 \cdot \mathbf{w}_{k+s} = \begin{bmatrix} A \cdot \mathbf{x}_k + \gamma^2 \beta \cdot \mathbf{y}_k + \beta \cdot \mathbf{y}_k \\ \gamma \beta^T \cdot \mathbf{x}_k + \gamma B \cdot \mathbf{y}_k + \gamma^3 C \cdot \mathbf{y}_k \\ \beta^T \cdot \mathbf{x}_k + \gamma^2 C \cdot \mathbf{y}_k + B \cdot \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_k \mathbf{x}_k \\ \gamma \mu_k \mathbf{y}_k \\ \mu_k \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \mu_k \mathbf{w}_{k+s}$$

para qualquer $1 \leq k \leq t + s$. Como os \mathbf{w}'_k são linearmente independentes, também são os \mathbf{w}_{k+s} , e portanto o espectro de M_2 é um subconjunto do espectro de M_1 . Logo, $\sigma(M_2)$ é o conjunto restante de autovalores igual a $\sigma(M_1) \setminus \sigma(B - C)$. \square

Abaixo daremos um exemplo de aplicação da proposição anterior.

Exemplo 3.2. Seja M_1 a primeira matriz da Proposição 3.1 com $\gamma = 1$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,
e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$M_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right]$$

De acordo com a proposição, o espectro de M_1 é igual a união de $\sigma(B-C) = \{2, -3\}$ e $\sigma(M_2) = \{7.145, 1.895, -1.27, -4.769\}$, onde

$$B - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } M_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{8} \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ \hline \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3 & 4 \\ \sqrt{8} & 0 & 4 & -2 \end{array} \right]$$

Dois autovetores associados aos autovalores 2 e -3 de M_1 são $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 2, 1, -2, -1)$ e $\mathbf{w}_2 = (0, 0, 1, -2, -1, 2)$, respectivamente, enquanto dois autovetores associados aos autovalores 2 e -3 de $B - C$ são $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$, respectivamente. Observe que a relação $\mathbf{w}_i = (0, \mathbf{v}_i, -\gamma \mathbf{v}_i)$ está sendo mantida.

Agora um autovetor associado ao autovalor 7.145 de M_1 é \mathbf{w}_3 , enquanto um autovetor associado ao mesmo autovalor de M_2 é \mathbf{w}'_1 , com

$$\mathbf{w}_3 = (0.551, -0.188, 0.481, 0.331, 0.481, 0.331) \text{ e } \mathbf{w}'_1 = (0.551, -0.188, 0.680, 0.468).$$

Note que, se escrevemos $\mathbf{w}_3 = (\mathbf{x}_1, \gamma \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)$, temos $\mathbf{w}'_1 = (\mathbf{x}_1, \sqrt{2} \mathbf{y}_1)$. $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^2$. Assim as duas primeiras coordenadas tanto de \mathbf{w}_3 e \mathbf{w}'_1 estão relacionadas ao vetor \mathbf{x}_1 , ou seja, $\mathbf{x}_1 = (0.551, -0.188)$, e com isso $\mathbf{w}'_1 = (0.551, -0.188, \sqrt{2} \cdot 0.481, \sqrt{2} \cdot 0.331)$.

Teorema 3.3 ([1]). Seja \mathcal{M} uma matriz com a forma dada em (3.1), com $c \geq 1$ cópias do bloco B . Então

(i) $\sigma(B - C) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ com multiplicidade $c - 1$;

(ii) $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \sigma^{(c-1)}(B - C) = \sigma(M')$ é o conjunto dos $t + s$ autovalores restantes de \mathcal{M} , onde

$$M' = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c} \cdot \beta \\ \sqrt{c} \cdot \beta^T & B + (c-1)C \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Em outras palavras, estamos dizendo que podemos expressar o espectro de \mathcal{M} como uma união dos espectros de matrizes menores:

$$\sigma(\mathcal{M}) = \sigma^{(c-1)}(B - C) \cup \sigma(M').$$

Demonstração. A prova segue por indução em c .

O caso $c = 1$ segue imediatamente, pois (i) não se aplica e o espectro da matriz M' em (ii) é o espectro de \mathcal{M} .

O caso $c = 2$ segue da Proposição 3.1 usando $\gamma = 1$. De fato, a matriz \mathcal{M} , para esse caso, tem ordem $t + 2s$, e como podemos observar $\mathcal{M} = M_1$ e $M' = M_2$, e então o resultado segue pela proposição.

Suponha que o resultado vale para $c - 1 \geq 1$ cópias do bloco B . Seja A_* a matriz simétrica de ordem $t + s$ tal que $A_* = \begin{bmatrix} A & \beta \\ \beta^T & B \end{bmatrix}$.

Agora aplicamos a hipótese de indução em \mathcal{M} com $c - 1 \geq 1$ cópias do bloco B , onde $\begin{bmatrix} \beta \\ C \end{bmatrix}$ é a matriz de relação entre os blocos A_* e B . Assim \mathcal{M} agora é apresentada da seguinte forma:

$$\mathcal{M} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta^T & B & C & \dots & C \\ \hline \beta^T & C & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C \\ \hline \beta^T & C & \dots & C & B \end{array} \right]$$

Então o espectro de \mathcal{M} é a união de $c - 2$ cópias do $\sigma(B - C)$ e do espectro de

$$M_* = \left[\begin{array}{cc|c} A & \beta & \sqrt{c-1}\beta \\ \beta^T & B & \sqrt{c-1}C \\ \hline \sqrt{c-1}\beta^T & \sqrt{c-1}C & B + (c-2)C \end{array} \right].$$

Seja P a matriz de permutação que troca a $(t + i)$ -ésima e a $(t + s + i)$ -ésima linhas e colunas, respectivamente para todo $1 \leq i \leq s$. Também temos que $M^* = P^{-1}M_*P$, cujo

o espectro é o mesmo de M_* . Agora temos uma matriz que pode ser escrita da seguinte forma:

$$M^* = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c-1}\beta & \beta \\ \sqrt{c-1}\beta^T & B + (c-2)C & \sqrt{c-1}C \\ \beta^T & \sqrt{c-1}C & B \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Proposição 3.1 com $\gamma = \sqrt{c-1}$, obtemos que M^* (e também M_*) tem um espectro igual a $\sigma(M') \cup \sigma(B-C)$. Agora precisamos incluir nesse conjunto outras $c-2$ cópias do $\sigma(B-C)$ e o resultado segue. \square

Usando esse resultado, foi desenvolvido um algoritmo que trabalha diretamente em grafos com pesos em suas arestas e em seus vértices, onde os pesos são atribuídos de tal maneira que podemos representá-los por uma matriz.

3.1 Grafo Ponderado Generalizado - (GWG)

O algoritmo trabalha com grafos que possuem pesos, essa seção é dedicada para falar sobre eles, ou seja, os grafos ponderados generalizados, ou do inglês, *generalized weighted graph* - (GWG).

Definição 3.4. Um GWG é um grafo com pesos em seus vértices e arestas. É escrito como um triplo (G, p, \mathcal{E}) , onde $G = G(V, E)$ é um grafo simples, p é a função peso dos vértices $p : V \rightarrow \mathbb{R}$, e \mathcal{E} é a função peso das arestas $\mathcal{E} : E \rightarrow \mathbb{R}$. Esses valores são chamados peso dos vértices e peso das arestas, respectivamente.

Assim, temos que a função peso dos vértices atribui um valor real aos vértices do grafo simples G e a função peso das arestas atribui um valor real às arestas do grafo G .

Definição 3.5. A matriz $\mathcal{N} = [n_{i,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de um grafo ponderado, (G, p, \mathcal{E}) , possui as seguintes entradas:

$$n_{i,j} = \begin{cases} p(v_i), & \text{se } i = j; \\ \mathcal{E}(\{v_i, v_j\}), & \text{se há uma aresta entre os vértices } i \neq j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O peso 0 da aresta significa que a mesma não existe. No caso em que todas as arestas têm peso 1 e todos os vértices têm peso 0, a matriz do grafo ponderado é a matriz de adjacência do grafo associado.

Definição 3.6. O espectro do grafo ponderado é o conjunto dos autovalores da matriz \mathcal{N} associada ao grafo.

Observe que a matriz \mathcal{N} de um grafo ponderado generalizado é simétrica, e cada matriz simétrica pode representar um grafo ponderado, pois a definição de grafo ponderado e sua matriz é semelhante ao conceito de grafo de uma matriz como vimos no Capítulo 2, onde dois vértices de um grafo com n vértices são adjacentes se, e somente se, (i, j) -entrada da matriz $n \times n$ não é zero. No entanto, para os grafos ponderados, os valores das posições são importantes, não apenas a propriedade de ser zero ou não.

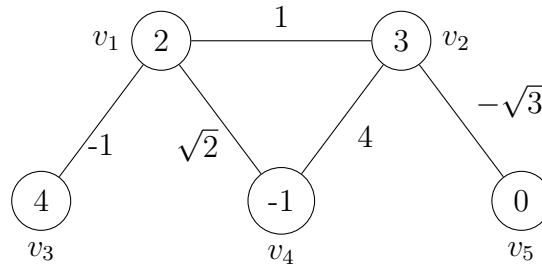


Figura 12: Grafo ponderado generalizado, ver[1]

Exemplo 3.7. Da Figura 12 temos que, os pesos associados aos vértices e as arestas, são respectivamente:

- $p(v_1) = 2$, $p(v_2) = 3$, $p(v_3) = 4$, $p(v_4) = -1$ e $p(v_5) = 0$;
- $\mathcal{E}(\{v_1, v_2\}) = 1$, $\mathcal{E}(\{v_1, v_3\}) = -1$, $\mathcal{E}(\{v_1, v_4\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}(\{v_2, v_4\}) = 4$ e $\mathcal{E}(\{v_2, v_5\}) = -\sqrt{3}$.

A matriz \mathcal{N} associada ao grafo da Figura 12 é

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & -\sqrt{3} \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os pesos dos vértices e das arestas podem ser muito úteis para encontrar subconjuntos do espectro da matriz associada a grafos ponderados, desde que existam alguns conjuntos simétricos de vértices no grafo.

3.2 Conjuntos Simétricos de Vértices

Nessa seção, iremos tratar sobre o que são conjuntos simétricos de vértices e como esses conjuntos influenciam nos grafos ponderados generalizados.

Definição 3.8. Dois conjuntos (ordenados) de vértices S_1 e S_2 de um grafo ponderado, (G, p, \mathcal{E}) , são chamados *simétricos* se eles tiverem o mesmo número de vértices e, para todo $i, j \leq |S_1|$,

- (i) o i -ésimo vértice de S_1 e S_2 têm o mesmo peso;
- (ii) o i -ésimo vértice de S_1 e S_2 têm os mesmos vizinhos em $G \setminus (S_1 \cup S_2)$ e eles estão conectados com arestas de mesmo peso; ou seja, um vértice $u \in G \setminus (S_1 \cup S_2)$ é adjacente ao i -ésimo vértice de S_1 com uma aresta pesando w se e somente se u é adjacente ao i -ésimo vértice de S_2 com uma aresta também pesando w ;
- (iii) o i -ésimo vértice de S_1 é adjacente ao j -ésimo vértice de S_1 com uma aresta de peso w se e somente se, o i -ésimo vértice de S_2 é adjacente ao j -ésimo vértice de S_2 com uma aresta de peso w também;
- (iv) o i -ésimo vértice de S_1 é adjacente ao j -ésimo vértice de S_2 com uma aresta de peso w se e somente se, o j -ésimo vértice de S_1 é adjacente ao i -ésimo vértice de S_2 com uma aresta de peso w também.

As arestas entre os vértices v_p e v_q de um mesmo conjunto S_k são chamadas de *arestas internas*. Arestas entre os vértices v_p de S_1 e v_q de S_2 são chamadas de *arestas diretas* se $i = j$ ou *arestas cruzadas* se $i \neq j$. Se S_1 e S_2 são conjuntos simétricos, observamos que S_1 e S_2 possuem as mesmas arestas internas pelo item (iii) da definição acima. Além disso, pares de arestas cruzadas e diretas têm o mesmo peso pelo item (iv) da definição. Note que, quando dizemos i -ésimo e j -ésimo vértice estamos referindo a um vértice que ocupa a posição i -ésima do conjunto S_k , ou j -ésima do conjunto S_k que está sendo avaliado, não com a rotulação do vértice.

Se considerarmos os conjuntos ordenados $S_1 = \{h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, \dots, h_r^{(1)}\}$, $S_2 = \{h_1^{(2)}, h_2^{(2)}, \dots, h_r^{(2)}\}$, então S_1 e S_2 são conjuntos simétricos se as quatro relações a seguir forem satisfeitas:

- (i) $p(h_i^{(1)}) = p(h_i^{(2)})$ para todo $1 \leq i \leq r$;
- (ii) $\mathcal{E}(\{h_i^{(1)}, u\}) = \mathcal{E}(\{h_i^{(2)}, u\})$ para todo $1 \leq i \leq r$ e $u \notin S_1 \cup S_2$;
- (iii) $\mathcal{E}(\{h_i^{(1)}, h_j^{(1)}\}) = \mathcal{E}(\{h_i^{(2)}, h_j^{(2)}\})$ para todo $1 \leq i < j \leq r$;
- (iv) $\mathcal{E}(\{h_i^{(1)}, h_j^{(2)}\}) = \mathcal{E}(\{h_j^{(1)}, h_i^{(2)}\})$ para todo $1 \leq i, j \leq r$.

Para um grafo G , podem haver vários conjuntos simétricos de vértices.

Definição 3.9. Seja $S = \{S_1, S_2, \dots, S_c\}$ uma coleção de c conjuntos ordenados de vértices de um GWG. Dizemos que S é uma coleção de c conjuntos simétricos se S_i e S_j são conjuntos simétricos, para $i, j \in \{1, \dots, c\}$.

Abaixo daremos um exemplo sobre conjuntos simétricos, ver [1].

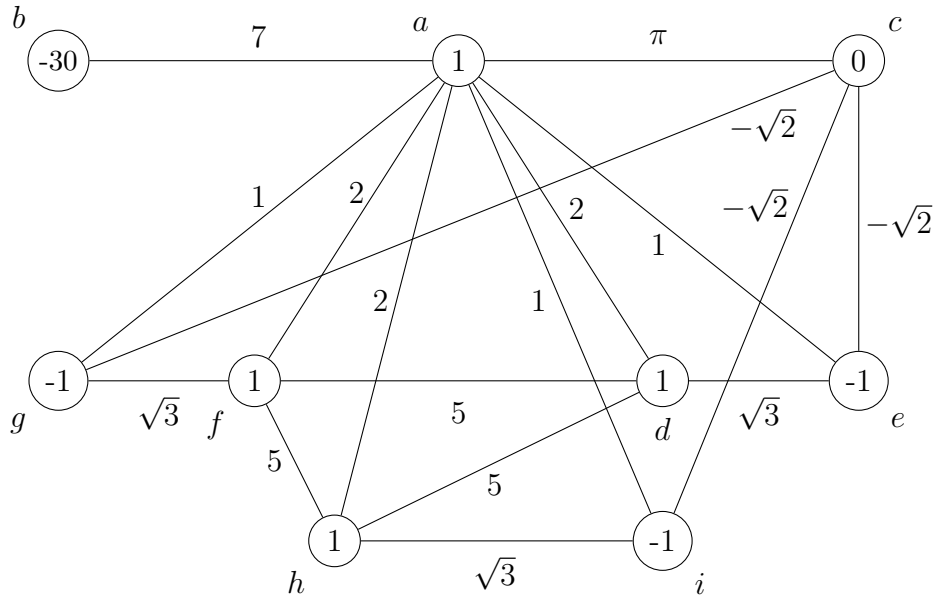


Figura 13: (G, p, \mathcal{E}) com três conjuntos simétricos, ver [1].

Exemplo 3.10. Considere o grafo ponderado da Figura 13, onde o número dentro do vértice representa seu respectivo peso e as letras ao lado de fora indica o rótulo do vértice. Podemos ver que os três conjuntos ordenados $S_1 = \{d, e\}$, $S_2 = \{f, g\}$, e $S_3 = \{h, i\}$ compõem uma coleção de três conjuntos simétricos de vértices.

De fato, esses conjuntos satisfazem os quatro itens da Definição 3.8:

- (i) Olhando para os vértices dos conjuntos S_1 , S_2 e S_3 temos que os i -ésimos vértices desses conjuntos, isto é, d , f e h possuem os mesmos pesos. O mesmo acontece para os vértices e , g , i ;
- (ii) $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{d, e, f, g, h, i\}$, então $G \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \{a, b, c\}$. Assim, tomando o vértice a temos que a é adjacente ao vértice d de S_1 com uma aresta de peso 2, ao mesmo tempo que a é adjacente ao vértice f de S_2 com uma aresta de peso 2 e o mesmo acontece ao vértice h de S_3 . Por outro lado, tomando o vértice c , temos que c é adjacente aos vértices e , g , i . Logo, os vértices desses conjuntos que se encontram nas mesmas posições, possuem os mesmos vizinhos em $G \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$.
- (iii) O vértice d de S_1 é adjacente ao vértice e de S_1 com uma aresta de peso $\sqrt{3}$, o mesmo acontece para os vértices dos conjuntos S_2 e S_3 e as arestas internas desses conjuntos possui peso $\sqrt{3}$.

(iv) O vértice d não é adjacente ao vértice g nem ao vértice i , o mesmo ocorre para os vértices dos conjuntos S_2 e S_3 . Por outro lado, o vértice e não é adjacente nem a f nem a h , e ocorre exatamente a mesma coisa para S_2 e S_3 , quando analisamos essas posições nos conjuntos. Portanto por negação o item está sendo satisfeito. Repare que, quando olhamos para os vértices que ocupam a primeira posição desses conjuntos temos as arestas diretas de peso $\sqrt{5}$, e quando olhamos para os vértices que ocupam a segunda posição desses conjuntos, as arestas cruzadas que não existem pois possuem peso zero.

Lema 3.11. Dada uma coleção de c conjuntos simétricos $\{S_k\}$, o conjunto dos i -ésimos vértices de todos os S_k induz um GWG fornecido pelo grafo completo (K_c) ou pelo grafo trivial (cK_1).

Essa propriedade se deve ao fato de que, pela definição de conjuntos simétricos, se os i -ésimos vértices de dois conjuntos simétricos são adjacentes, quando um terceiro vértice adjacente a um desses dois vértices, também é adjacente ao outro vértices com o mesmo peso (transitividade). Um argumento similar é válido para os vértices não adjacentes. No exemplo anterior, o subgrafo induzido pelos primeiros vértices de cada S_k , ou seja, os vértices d, f, h , é K_3 , enquanto o subgrafo induzido pelos vértices e, g, i é o grafo trivial de três vértices.

Com a definição de conjuntos simétricos, podemos encontrar uma matriz semelhante a matriz \mathcal{N} associada ao grafo ponderado com c conjuntos simétricos de vértices (disjuntos) $\{S_k\}$, com $1 \leq k \leq c$, que possuirá a mesma estrutura da matriz (3.1), dada abaixo

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta^T & B & C & \dots & C \\ \beta^T & C & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C \\ \beta^T & C & \dots & C & B \end{bmatrix}$$

O bloco A representa os vértices em $G \setminus (\cup S_k)$; cada bloco B representa a adjacência de um conjunto S_k . Note que cada bloco B tem a mesma matriz por causa dos itens (i) e (iii) da Definição 3.8. De fato, o bloco B é a matriz do subgrafo G_k induzido por S_k ($G|_{S_i} = G|_{S_j}$). O bloco β representa as arestas entre um conjunto S_k e $G \setminus (\cup S_k)$ e são todos iguais por causa do item (ii). O bloco C representa as arestas entre pares de conjuntos S_i e S_j e é simétrico por causa do item (iv). Além disso, as arestas entre S_i e S_j são independentes de i e j , pois nesse caso, quando analisamos as arestas entre os conjuntos simétricos olhamos para todos os vértices pertencentes a esses conjuntos, não somente o i -ésimo vértice de S_i e o j -ésimo vértice de S_j . Um exemplo disso, é a aresta de peso cinco

entre o vértice d de S_1 e o vértice f de S_2 da Figura 13, ambos estão na primeira posição dos elementos de seus respectivos conjuntos.

Exemplo 3.12. O grafo ponderado com três conjuntos simétricos mostrado na Figura 13 tem a seguinte matriz M associada:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & \pi & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \end{array} \right]$$

Lembrando: $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{d, e\} \cup \{f, g\} \cup \{h, i\}$ e então $G \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \{a, b, c\}$. Note que M tem a mesma estrutura de \mathcal{M} .

3.3 Algoritmo

Considere um grafo ponderado dado por um grafo $G(V, E)$ e funções de peso p e \mathcal{E} . Se um par de vértices v_i e v_j é não adjacente, definimos $\mathcal{E}(\{v_i, v_j\}) = 0$. Seja $\{S_k\}$ uma coleção de c conjuntos simétricos disjuntos.

O Algoritmo da Decomposição Simétrica altera os pesos de uma determinada coleção de conjuntos simétricos e elimina arestas para desconectar o GWG em componentes menores, sem mudar seu espectro.

Dado um grafo ponderado generalizado, com c conjuntos simétricos, no primeiro passo multiplicamos por \sqrt{c} o peso de todas as arestas entre S_1 e $G \setminus (\cup S_k)$. No segundo passo, se existem arestas diretas entre os vértices de S_1 e S_2 (ou qualquer outro par de conjuntos simétricos), o peso do vértice em S_1 é aumentado em $c - 1$ vezes o peso da aresta direta, enquanto os vértices em S_k , para $2 \leq k \leq c$, tem seu peso diminuído pelo peso da aresta direta. No terceiro passo do algoritmo, se existem pares de arestas cruzadas entre vértices não correspondentes i de S_1 e j de S_2 , então o peso da aresta interna (entre i e j) em S_1 será aumentado em $c - 1$ vezes o peso da aresta cruzada, enquanto as arestas internas (entre i e j) em S_k , para $2 \leq k \leq c$, terão seus pesos diminuído pelo peso da aresta cruzada. Finalmente, no quarto passo, eliminamos todas as arestas entre S_k e $G \setminus S_k$, para $2 \leq k \leq c$, desconectando o GWG.

Quando o peso de uma aresta muda de zero para não zero, o que pode acontecer no terceiro passo, é precisarmos adicionar essa aresta ao conjunto E . Quando o peso de uma aresta muda de não zero para zero, o que pode ocorrer no terceiro passo, é precisarmos eliminar tal aresta de E .

O Algoritmo decompõem um grafo ponderado em uma união de grafos ponderados com uma quantidade de vértices menor; mantém o número total de vértices de tal forma que o grafo ponderado original e a união (dos grafos ponderados menores) têm ambos o mesmo espectro. A ocorrência do algoritmo é baseado no Teorema 3.3. Abaixo enunciaremos o teorema do algoritmo da decomposição simétrica e sua demonstração se encontra na referência.

Teorema 3.13 ([1]). *Algoritmo da Decomposição Simétrica transforma um GWG com $c \geq 1$ seletos conjuntos simétricos S_i em outro GWG com o mesmo espectro.*

Observe que a soma dos pesos dos vértices não muda quando o algoritmo da decomposição simétrica é aplicado. Isso acontece, pois o peso dos vértices é invariante para grafos ponderados com mesmo espectro.

Observação 3.14. *Dado (G, p, \mathcal{E}) , após aplicar o algoritmo da decomposição simétrica, o novo grafo ponderado com o mesmo espectro será denotado por $(G^*, p^*, \mathcal{E}^*)$ e a matriz associada a esse novo grafo ponderado terá a estrutura dada abaixo, onde essa estrutura respeita a construção da matriz \mathcal{M} .*

$$M^* = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c}\beta & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{c}\beta^T & B + (c-1)C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B - C & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B - C \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Exemplo 3.15. *Considere aplicar o algoritmo ao GWG da Figura 13 com os seguintes conjuntos simétricos $S_1 = \{d, e\}$, $S_2 = \{f, g\}$, e $S_3 = \{h, i\}$.*

O primeiro passo consiste em multiplicar por $\sqrt{3}$ o peso das arestas $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, e $\{c, e\}$. Uma vez que existe arestas diretas entre vértices correspondentes em distintos conjuntos simétricos (por exemplo $\{d, f\}$), o peso do vértice d é aumentado em 2-1 vezes o peso da aresta direta que no caso é 5, ou seja o $p^*(d) = 11$, enquanto o peso dos vértices f e h são diminuídos em 5. Como não existe aresta cruzada o peso de todas as arestas internas de cada S_k continua o mesmo. O quarto passo remove as arestas entre:

- S_2 e $G \setminus S_2$, ou seja, $\{a, f\}$, $\{d, f\}$, $\{f, h\}$, $\{a, g\}$, $\{c, g\}$;

- S_3 e $G \setminus S_3$, ou seja, $\{a, h\}, \{d, h\}, \{a, i\}, \{c, i\}$;

O resultado da Figura 14 tem o mesmo espectro que o grafo inicial da Figura 13, como o Teorema 3.13 estabelece. Enfatizamos que o espectro do GWG da Figura 13 é a união do espectro dessas três componentes conexas do GWG da Figura 14.

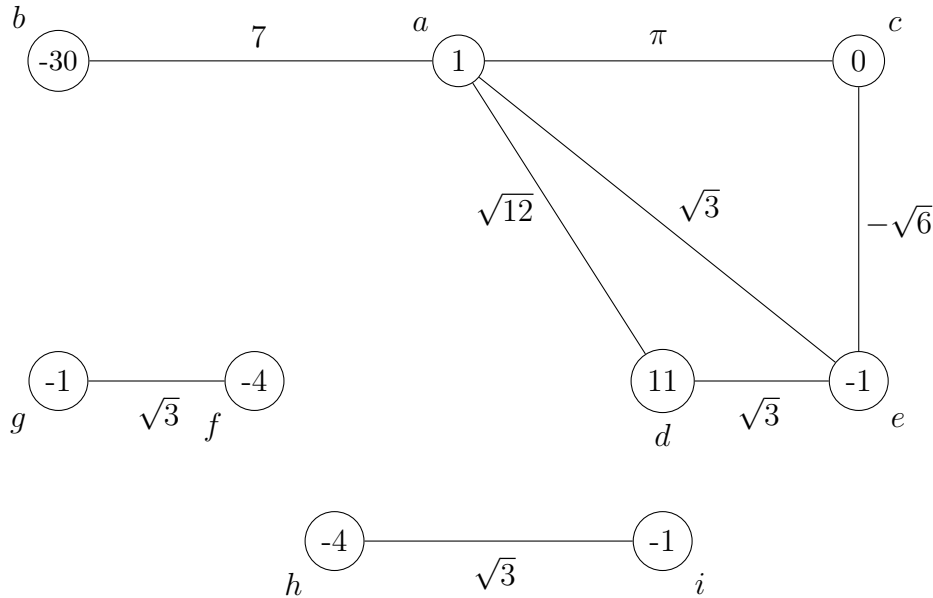


Figura 14: Grafo ponderado decomposto com o mesmo espectro, ver [1].

Exemplo 3.16. Considere o grafo G de seis vértices da Figura 15. Suponha que estamos interessados em encontrar o espectro da matriz de adjacência de G usando o algoritmo da decomposição simétrica. Então, precisamos pegar o grafo ponderado dado por G , onde os vértices possuem peso zero e arestas peso um, nesse caso a matriz associada ao grafo ponderado é a matriz de adjacência $A(G)$. Os conjuntos $S_1 = \{c, d\}$ e $S_2 = \{e, f\}$ são simétricos.

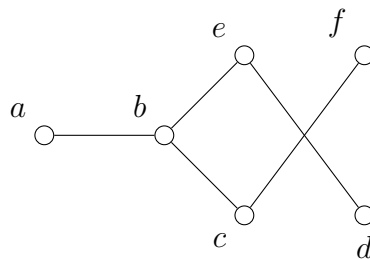


Figura 15: Grafo G com dois conjuntos simétricos, ver [1].

Seguindo os passos do algoritmo, aresta entre b e c tem seu peso multiplicado por $\sqrt{2}$. Todos os vértices mantêm seus pesos pois não existem arestas diretas entre os vértices c, e ou entre d e f .

Como existem arestas cruzadas entre vértices não correspondentes, precisamos aumentar o peso da aresta interna $\{c, d\}$ por 1 e diminuir o peso da aresta interna $\{e, f\}$ por 1, isso significa que criaremos arestas com pesos 1 e -1 , respectivamente. E finalmente, eliminamos as arestas entre $\{b, e\}$, $\{d, e\}$, e $\{c, f\}$.

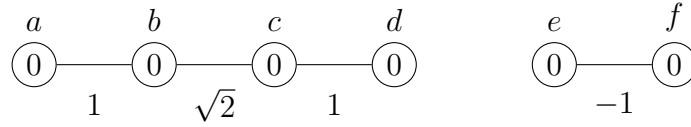


Figura 16: Grafo ponderado desconectado com o mesmo espectro de G , ver [1].

O espectro de G é igual ao espectro do grafo ponderado da Figura 16. Uma escolha diferente dos conjuntos simétricos, $S'_1 = \{c, f\}$ e $S'_2 = \{e, d\}$, nos leva a um grafo ponderado desconexo diferente, mas ainda sim com o mesmo espectro de G .

Note que se a matriz associada a um grafo ponderado generalizado \mathcal{N} não está dividida em blocos como a matriz \mathcal{M} , procuramos conjuntos simétricos para reescrevermos \mathcal{N} afim de obter a mesma estrutura de \mathcal{M} . Para podermos aplicar o algoritmo em grafos não ponderados, aplicamos peso 0 aos vértices e peso 1 as arestas do grafo. Para fins de compreensão, nos próximos capítulos utilizaremos a notação \mathcal{M}_G , M'_G e M^*_G para nos referir as matrizes (3.1), (3.2) e (3.3), respectivamente, que estão associadas a um grafo G .

4 Grafos Anéis de Diamantes

Neste capítulo, trabalharemos com os grafos diamantes e anéis de diamantes. Para mais informações, indicamos as seguintes referências [2], [3], [4], [5], [6] e [7].

Definição 4.1. Seja G um grafo de ordem n . O grafo bipartido completo $K_{1,3}$ é conhecido como *grafo garra*. Um grafo é dito *livre de garras* quando não admite uma garra como um subgrafo induzido.

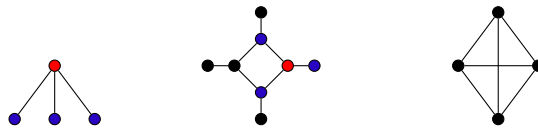


Figura 17: $K_{1,3}$, Grafo com garra e Grafo livre de garra, respectivamente.

Definição 4.2. Os vértices dos grafos cúbicos que são livres de garras pertencem a pelo menos um triângulo e no máximo três. Se v pertence a 2 triângulos de G , então o subgrafo D de G constituído por tais triângulos é isomorfo a $K_4 \setminus e$. O subgrafo D é chamado de *grafo diamante*. Na figura abaixo, foram escolhidos os seguintes triângulos, um composto pelos vértices v_1, v_2, v_3 e o outro composto por v_1, v_3, v_4

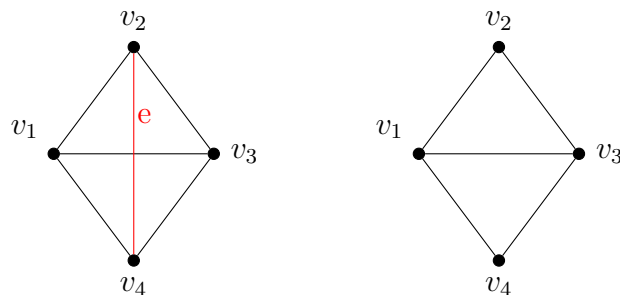


Figura 18: K_4 e $K_4 \setminus e$, respectivamente

Definição 4.3. Um grafo cúbico é denominado *anel de diamante*, quando é livre de garra e conexo, de modo que cada um de seus vértices pertence a D e existem vértices adjacentes de um diamante a outro. Denotamos por $AD(k)$ o anel de diamante com k diamantes. Chamamos de *arestas de conexões* do anel de diamante, arestas que ligam um diamante a outro.

Considere as seguintes arestas $\{v_2, v_8\}$ e $\{v_4, v_6\}$ do grafo da Figura 19, essas arestas são arestas de conexões. A matriz de adjacência associada ao grafo $AD(2)$ é exibida abaixo.

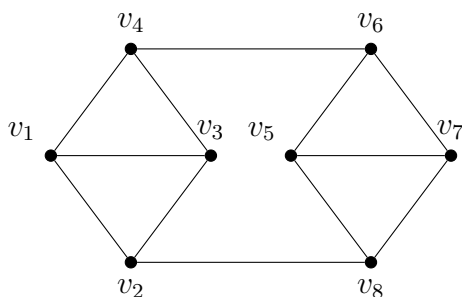


Figura 19: Grafo $AD(2)$

$$A(AD(2)) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Já um anel de diamantes com 3 diamantes, que denotamos por $AD(3)$, é dado por

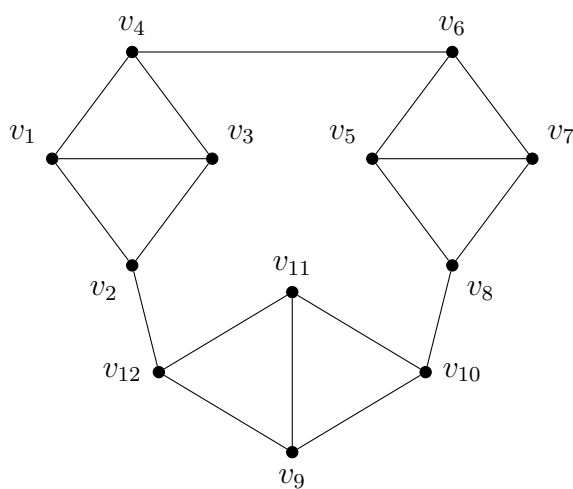


Figura 20: Grafo $AD(3)$

Cuja matriz de adjacência é dada por

$$A(AD(3)) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Agora, iremos aplicar o Algoritmo da Decomposição Simétrica aos anéis de diamantes. Atendendo à ordem das matrizes desses grafos iremos aplicar o algoritmo para $AD(2)$ e $AD(3)$.

Como sabemos um grafo ponderado generalizado, é um grafo que possui pesos em seus vértices e arestas. Os anéis de diamantes são grafos não ponderados porém, aplicando peso zero em cada vértice e peso um em cada aresta, trabalhamos com os grafos anéis de diamantes com peso em seus vértices e arestas.

O grafo $AD(2)$ e sua respectiva matriz de adjacência são dados na Figura 19. Agora, considere os seguintes conjuntos $S_1 = \{v_1, v_5\}$ e $S_2 = \{v_3, v_7\}$, vamos verificar se esses conjuntos são simétricos. Para isso, iremos verificar se a Definição 3.8 é satisfeita. Para fins de compreensão vamos identificar os conjuntos escolhidos no grafo da Figura 19, porém com os respectivos pesos atribuídos. Vértices que ocupam a mesma posição nos seus respectivos conjuntos, suas rotulações estão coloridas com a mesma cor, ver Figura 21.

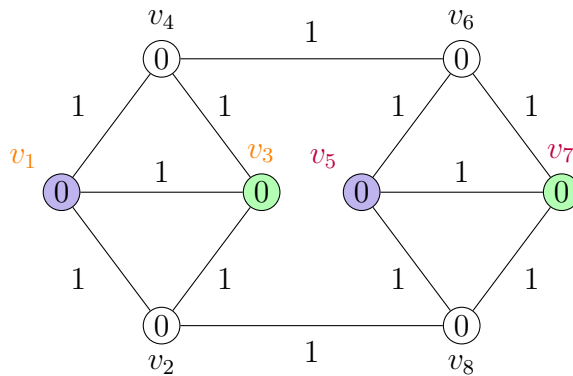


Figura 21: $(AD(2), p, \mathcal{E})$

Como $S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, então $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2) = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$, que são

os vértices que não estão coloridos na Figura 21.

Os vértices v_1 de S_1 e v_3 de S_2 têm o mesmo peso. Já os vértices v_5 de S_1 e v_7 de S_2 também têm o mesmo peso. Portanto, o item (i) é satisfeito.

Dado $v_1 \in S_1$ e $v_3 \in S_2$, e dado $v_2 \in AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ temos que, v_2 é adjacente a v_1 com uma aresta de peso um, e v_2 é adjacente a v_3 com uma aresta de peso um também. Agora, dado $v_4 \in AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ segue que, v_4 é adjacente a v_1 com uma aresta de peso um, e v_4 é adjacente a v_3 com uma aresta de peso um também.

Considere agora, $v_6 \in AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ percebemos que tanto v_1 quanto v_3 não são adjacentes a v_6 , mas $v_5 \in S_1$ e $v_7 \in S_2$ são adjacentes a v_6 com uma aresta de peso um, o mesmo ocorre quando analisamos $v_8 \in AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Logo, um determinado vértice pertencente a $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ é adjacente a v_1 com uma aresta de peso um se e somente se esse mesmo vértice for adjacente a v_3 com aresta de peso um também.

Portanto, pela análise que fizemos, concluímos que o primeiro vértice de S_1 e S_2 , possuem os mesmo vizinhos em $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e estão conectados por arestas de mesmo peso. Para o segundo vértice de S_1 e S_2 a análise segue de maneira análoga. Logo, o item (ii) é satisfeito.

Dado $v_1, v_5 \in S_1$ e $v_3, v_7 \in S_2$ temos que, v_1 não é adjacente a v_5 e v_3 não é adjacente a v_7 . Portanto, por negação, o item (iii) é satisfeito. O item não seria satisfeito se, por exemplo, existisse uma aresta entre v_1 e v_5 mas, não existisse uma aresta entre v_3 e v_7 . Como verificamos que não existe aresta entre v_1 e v_5 , e o mesmo ocorre aos vértices v_3 e v_7 , o item é satisfeito.

Dados, novamente, $v_1, v_5 \in S_1$ e $v_3, v_7 \in S_2$. Para este item, iremos fazer duas análises, uma para quando $i = j$ e outra, para quando $i \neq j$, isto é, para quando os vértices estão na mesma posição do seu respectivo conjunto e outra para quando não estão.

Quando $i = j$, v_1 é adjacente a v_3 , como estamos trabalhando com grafos não direcionados, temos que v_3 é adjacente a v_1 também, e são adjacentes v_5 e v_7 também. Analisando agora para quando $i \neq j$, temos que v_1 não é adjacente a v_7 , e v_5 não é adjacente a v_3 . Como o grafo é não direcionado, não precisamos analisar o segundo vértice de S_1 com o primeiro vértice de S_2 .

Portanto, o item (iv) é satisfeito pois, quando existe aresta entre o i -ésimo vértice de S_1 e o j -ésimo vértice de S_2 , também existe essa mesma aresta entre j -ésimo vértice de S_1 e o i -ésimo vértice de S_2 .

Logo, como os quatro itens são satisfeitos segue que S_1 e S_2 são conjuntos simétricos. Como estamos trabalhando com o grafo $AD(2)$ ponderado e mostramos que o conjunto que escolhemos é simétrico, podemos agora aplicar o Teorema 3.13, isto é, aplicar os passos do algoritmo da decomposição simétrica, mas antes de aplicar iremos associar a matriz \mathcal{N}

do grafo $AD(2)$ ponderado com a estrutura dada em \mathcal{M} .

O bloco A representa a matriz de adjacência entre os vértices que estão em $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$, isto é, a matriz de adjacência entre os vértices desse conjunto $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$. Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada bloco B representa adjacência de um conjunto S_r , para $r \in \{1, 2\}$. Mais preciso, o bloco B é a matriz do subgrafo G_r induzido por S_r . Assim,

$$B_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O bloco β representa as arestas entre um conjunto S_r e $AD(2) \setminus (\cup S_r)$, para $r \in \{1, 2\}$.

- matriz entre $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e S_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- matriz entre $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e S_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, o bloco C representa as arestas entre pares de conjuntos simétricos.

- matriz entre S_1 e S_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- matriz entre S_2 e S_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, com o auxílio dos conjuntos simétricos conseguimos construir uma matriz com a estrutura dada em \mathcal{M} (3.1), que é semelhante a matriz de adjacência do grafo $AD(2)$ dado na Figura 19.

$$\mathcal{M}_{AD(2)} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sabemos que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, pelo Teorema 2.16. Iremos aplicar o Algoritmo da Decomposição Simétrica no grafo $(AD(2), p, \mathcal{E})$.

Utilizaremos a notação p^* para representar a função peso dos vértices e \mathcal{E}^* para representar a função peso das arestas do grafo G^* , como dado na Observação 3.14. No primeiro passo, multiplicamos por $\sqrt{2}$ o peso de todas as arestas entre S_1 e $AD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$: $\mathcal{E}^* (\{v_1, v_2\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_1, v_4\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_5, v_6\}) = \sqrt{2}$ e $\mathcal{E}^* (\{v_5, v_8\}) = \sqrt{2}$.

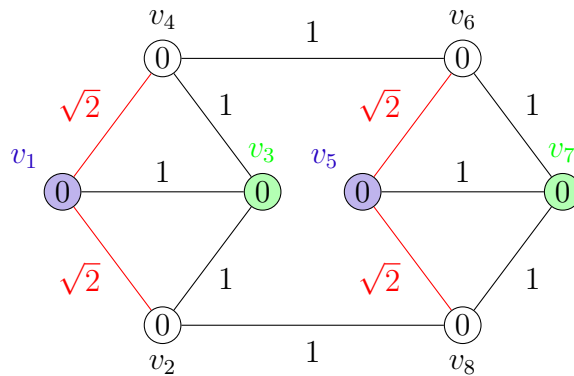


Figura 22: $(AD(2), p, \mathcal{E})$ após 1º passo.

Agora, aplicando o segundo passo, visto que existem arestas diretas (exemplo a aresta $\{v_1, v_3\}$), o peso do vértice v_1 é aumentado em $2 - 1$ vezes o peso da aresta direta que é 1, ou seja, o peso do vértice v_1 passa a ser $p^*(v_1) = 0 + (2 - 1) \cdot 1 = 1$. Enquanto, os vértices em S_2 , que possuem aresta direta com v_1 , têm seus pesos diminuídos pelo da

aresta direta que é 1, isto é, $p^*(v_3) = -1$. O mesmo ocorre para a aresta direta $\{v_5, v_7\}$, os pesos dos vértices passam a ser: $p^*(v_5) = 1$ e $p^*(v_7) = -1$.

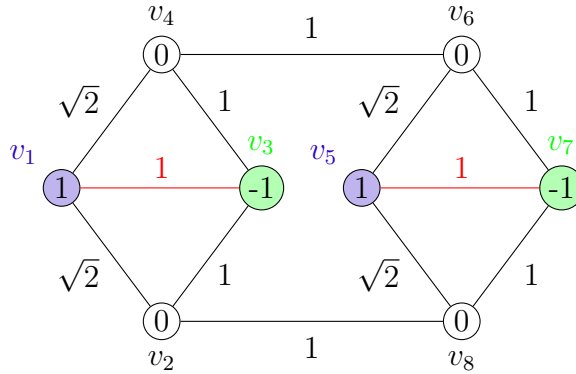


Figura 23: $(AD(2), p, \mathcal{E})$ após 2º passo.

No terceiro passo, como não existem arestas cruzadas ou, mais preciso, $i \in S_1$ não é adjacente a $j \in S_2$, para $i \neq j$. Então o peso de todas as arestas internas continuam o mesmo, pois o terceiro passo não é aplicado.

E finalmente, no último passo, eliminamos todas as arestas entre S_2 e $AD(2) \setminus S_2$. Então precisamos remover as seguintes arestas: $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_7\}$, $\{v_6, v_7\}$, e $\{v_7, v_8\}$, o peso de todas essas arestas passam a ser zero, e com isso desconectando o $(AD(2), p, \mathcal{E})$. Abaixo exibimos o grafo $AD(2)$ ponderado desconectado.

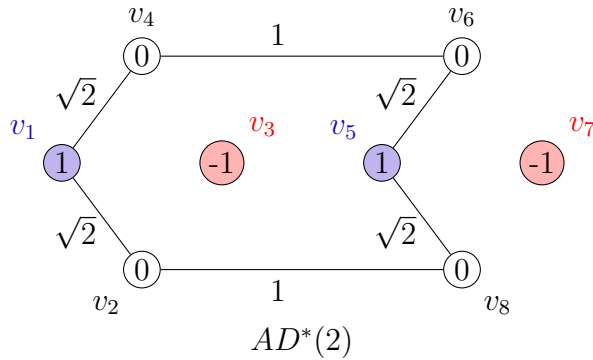


Figura 24: Grafo $AD(2)$ ponderado após aplicar o algoritmo

Como a matriz \mathcal{N} associada ao grafo $AD^*(2)$ é semelhante a matriz $M_{AD(2)}^*$, segue que o espectro de $AD^*(2)$ e o espectro de $M_{AD(2)}^*$ são iguais. Vamos trabalhar em cima da matriz $M_{AD(2)}^*$ que é exibida abaixo:

$$M_{AD(2)}^* = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Pelo Teorema 3.13, segue que o espectro de $AD^*(2)$ é o mesmo de $AD(2)$. Vale ressaltar que pelo Teorema 3.3 obtemos o espectro de $\mathcal{M}_{AD(2)}$ como a união de uma cópia do espectro do bloco $B - C$, que é o bloco $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e o espectro da matriz $M'_{AD(2)}$, que é o outro bloco restante:

$$M'_{AD(2)} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Como a matriz $M_{AD(2)}^*$ é diagonal em blocos, seu espectro é a união do espectro dos seus blocos, isso é exatamente o espectro de $AD(2)$. Utilizando o software *SageMath* verificamos que o espectro das matrizes $\mathcal{M}_{AD(2)}$ e $M_{AD(2)}^*$ são iguais.

Agora, seguindo os mesmos processos vamos aplicar o algoritmo ao grafo $AD(3)$. Vamos atribuir peso zero aos vértices e peso um as arestas do grafo $AD(3)$ afim de que seja ponderado. O grafo $AD(3)$ e sua respectiva matriz de adjacência são dados na Figura 20.

Considere os seguintes conjuntos $S_1 = \{v_1, v_5, v_9\}$ e $S_2 = \{v_3, v_7, v_{11}\}$, vamos verificar se esses conjuntos são simétricos. Para isso, iremos verificar se a Definição 3.8 é satisfeita. Note $S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{11}\}$, então $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2) = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}\}$.

Os vértices v_1 de S_1 e v_3 de S_2 têm o mesmo peso, os vértices v_5 de S_1 e v_7 de S_2 têm o mesmo peso, e os vértices v_9 de S_1 e v_{11} de S_2 também têm o mesmo peso. Portanto, o item (i) é satisfeito.

Dado $v_1 \in S_1$, $v_3 \in S_2$, e $v_2, v_4 \in AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$, temos pela análise do caso anterior que esses vértices possuem os mesmos vizinhos em $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Considere os vértices $v_5 \in S_1$, $v_7 \in S_2$, e $v_6, v_8 \in AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$, que novamente pela análise do caso anterior, possuem os mesmos vizinhos em $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$.

E por último, dado os vértices $v_9 \in S_1$, $v_{11} \in S_2$, e $v_{10} \in AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ temos que, v_{10} é adjacente a v_9 com uma aresta de peso um, e v_{10} é adjacente a v_{11} com uma aresta de peso um também, o mesmo ocorre se olharmos para o vértice v_{12} .

Logo, um determinado vértice $u \in AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ é adjacente ao i -ésimo vértice de S_1 com uma aresta de peso um se e somente se u é adjacente ao i -ésimo vértice de S_2 com uma aresta de peso um também, ou seja, os i -ésimos vértices dos conjuntos S_1 e S_2 , com $1 \leq i \leq 3$, possuem os mesmos vizinhos em $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e estão conectados por arestas de mesmo peso. Logo, o item (ii) é satisfeito.

Dado $v_1, v_5, v_9 \in S_1$ e $v_3, v_7, v_{11} \in S_2$ temos que, v_1 não é adjacente a v_5 e v_3 não é adjacente a v_7 , v_5 não é adjacente a v_9 e v_7 não é adjacente a v_{11} , e o mesmo ocorre com os vértices v_1 e v_9 e, v_3 e v_{11} . Portanto, por negação, o item (iii) é satisfeito. O item não seria satisfeito se, por exemplo, existisse uma aresta entre v_1 e v_5 mas, não existisse uma aresta entre v_3 e v_7 , por exemplo. Como verificamos, analisando os vértices dois a dois, que não existe aresta entre i e j de S_1 , e isso ocorre também aos vértices das posições i e j de S_2 , o item está sendo satisfeito.

Repare que como os grafos são não direcionados temos que se v_p é adjacente a v_q , v_q também é adjacente a v_p .

E finalmente, dado $v_1, v_5, v_9 \in S_1$ e $v_3, v_7, v_{11} \in S_2$ temos que v_1 não é adjacente a v_7 e, v_5 não é adjacente a v_3 ; v_1 não é adjacente a v_{11} e, v_9 não é adjacente a v_3 ; e por último, v_5 não é adjacente a v_{11} e, v_9 não é adjacente a v_7 . Por outro lado, quando analisamos vértices que estão na mesma posição, v_1 é adjacente a v_3 , v_5 é adjacente a v_7 , e v_9 é adjacente a v_{11} .

Com isso, o item (iv) é satisfeito pois, quando existe aresta entre o i -ésimo vértice de S_1 e o j -ésimo vértice de S_2 , também vai existir essa mesma aresta entre o j -ésimo vértice de S_1 e o i -ésimo vértice de S_2 .

Assim, S_1 e S_2 são conjuntos simétricos. Como temos $AD(3)$ ponderado com dois conjuntos simétricos, iremos associar a matriz \mathcal{N} do grafo $AD(3)$ ponderado com a estrutura dada em \mathcal{M} . O bloco A representa a matriz de adjacência entre os vértices que estão em $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cada bloco B representa a matriz de adjacência de um conjunto S_r , para $r \in \{1, 2\}$. Mais

preciso, o bloco B é a matriz do subgrafo G_r induzido por S_r . Assim:

$$B_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O bloco β representa as arestas entre um conjunto S_r e $AD(3) \setminus (\cup S_r)$, para $r \in \{1, 2\}$.

- Matriz entre $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e S_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz entre $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e S_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, o bloco C representa as arestas entre pares de conjuntos simétricos.

- Matriz entre S_1 e S_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz entre S_2 e S_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, com o auxílio dos conjuntos simétricos conseguimos construir uma matriz \mathcal{M} com a estrutura dada em (3.1), que é semelhante a matriz de adjacência do grafo $AD(3)$ dado na Figura 20.

$$\mathcal{M}_{AD(3)} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sabemos que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico. Agora, podemos agora aplicar o Teorema 3.13, isto é, aplicar os passos do Algoritmo da Decomposição Simétrica no grafo $AD(3)$ ponderado.

Primeiro passo, multiplicamos por $\sqrt{2}$ o peso de todas as arestas entre S_1 e $AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$: $\mathcal{E}^* (\{v_1, v_2\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_1, v_4\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_5, v_6\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_5, v_8\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_9, v_{10}\}) = \sqrt{2}$ e $\mathcal{E}^* (\{v_9, v_{12}\}) = \sqrt{2}$.

No segundo passo, como existem arestas diretas (exemplo a aresta $\{v_1, v_3\}$), o peso do vértice v_1 é aumentado em $c - 1 = 2 - 1$ vezes o peso da aresta direta que é 1, ou seja, o peso do vértice v_1 passa a ser $p^*(v_1) = 1$. Enquanto, os vértices em S_2 , que possuem aresta direta com v_1 , têm seus pesos diminuídos pelo peso da aresta direta que é 1, isto é, $p^*(v_3) = -1$. O mesmo ocorre para as arestas direta $\{v_5, v_7\}$ e $\{v_9, v_{11}\}$, os pesos dos vértices passam a ser: $p^*(v_5) = 1$, $p^*(v_7) = -1$, $p^*(v_9) = 1$, e $p^*(v_{11}) = -1$, respectivamente.

No terceiro passo, como não existem arestas cruzadas o peso de todas as internas continuam o mesmo. E finalmente, no quarto passo, eliminamos todas as aresta entre S_2 e $AD(3) \setminus S_2$. Então precisamos remover as seguintes arestas: $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_7\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_9, v_{11}\}$, $\{v_{10}, v_{11}\}$ e $\{v_{11}, v_{12}\}$ ou seja, o peso de todas essas arestas passa a ser zero e assim desconectando o grafo $AD(3)$ ponderado. Abaixo exibimos $AD^*(3)$

O espectro de $AD^*(3)$ é o mesmo do espectro da matriz $M_{AD^*(3)}^*$, pois são matrizes semelhantes.

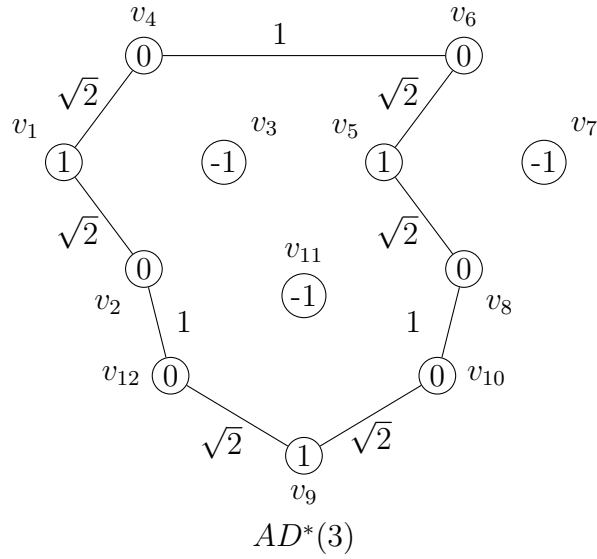


Figura 25: GWG $AD(3)$ após aplicar o algoritmo

$$M_{AD(3)}^* = \left[\begin{array}{cccccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

E pelo Teorema 3.13 segue que o espectro de $AD^*(3)$ é o mesmo de $AD(3)$. Utilizando o software *SageMath* verificamos que o espectro das matrizes $\mathcal{M}_{AD(3)}$ e $M_{AD(3)}^*$ são iguais.

Após analisarmos esses dois grafos ($AD(2)$ e $AD(3)$), observamos um padrão. Para $k \geq 2$ escolheremos sempre dois conjuntos simétricos, onde S_1 é formado pelos vértices com a seguinte rotulação $1 + 4p$, já S_2 é formado pelos vértices com a seguinte rotulação $3 + 4p$, onde $0 \leq p \leq k - 1$, onde k é a quantidade de diamantes no grafo. Tanto o conjunto S_1 quanto S_2 são formados por vértices com rotulação ímpar. E o conjunto formado pelos vértices de rotulação par é $AD(k) \setminus (S_1 \cup S_2)$, e os elementos que estão nesse conjunto são da forma $2q$, com $1 \leq q \leq 2k$.

O bloco A para k diamantes será da forma:

$$A = \begin{array}{c|cccccccc} & v_2 & v_4 & v_6 & v_8 & v_{10} & \dots & v_{4n-4} & v_{4n-2} & v_{4n} \\ \hline v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{4n-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ v_{4n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ v_{4n} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad 2k \times 2k$$

O bloco B representa a adjacência do conjunto S_r , com $r \in \{1, 2\}$. Como nesses conjuntos, seus elementos não são adjacentes entre si, o bloco B é uma matriz de ordem k cuja todas suas entradas são zero, e por causa do item (i) e (iii) da Definição 3.8 essas matrizes são iguais para os dois conjuntos simétricos. Logo temos duas repetições do bloco B .

O bloco β representa as arestas entre um conjunto $AD(k) \setminus (\cup S_r)$ e S_r , com $r \in \{1, 2\}$. Assim, o bloco β é dado da seguinte forma, as linhas representam os vértices que estão no conjunto $AD(k) \setminus (\cup S_r)$ e as colunas os vértices que estão no conjunto S_r . Vale lembrar que temos dois conjuntos simétricos, mas pelo item (ii) da Definição 3.8, essas matrizes associadas a S_1 e a S_2 são iguais. Então β é da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad 2k \times k$$

E finalmente, o bloco C representa as arestas entre os conjuntos S_1 e S_2 . Vale lembrar que é simétrico (analisar tanto S_1 e S_2 quanto S_2 e S_1) por causa do item (iv) da Definição 3.8. Observe que esses conjuntos possuem adjacência entre si quando estamos analisando vértices na mesma posição do conjunto. Portanto, o bloco C é a matriz identidade de ordem k .

Generalizando, pelo Teorema 3.13 o espectro de $AD^*(k)$ é o mesmo de $AD(k)$. E

pelo Teorema 3.3, obtemos que o espectro de \mathcal{M} , que é o mesmo espectro de $AD(k)$, como uma união de uma cópia do espectro de $B - C$, e o espectro da matriz M' .

Utilizando o Teorema 2.23, vamos fazer alguns cálculos afim de obtermos o polinômio característico associado a matriz M' . Considere M' como dada em (3.2)

$$M' = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c}\beta \\ (\sqrt{c}\beta)^T & (B + (c - 1)C) \end{bmatrix},$$

onde c é a quantidade de conjuntos simétricos, e as matrizes em blocos A , β , B e C , são as matrizes em blocos estudadas no capítulo anterior.

Para os grafos anéis de diamantes, pela construção que escolhemos, temos que $c = 2$, as matrizes A , β , B e C são como dadas acima, variando a ordem de acordo com a quantidade de diamantes do grafo. Calculemos o polinômio característico associado a $M'_{AD(k)}$:

$$xI - M'_{AD(k)} = \begin{bmatrix} xI - A & -\sqrt{2}\beta \\ -(\sqrt{2}\beta)^T & xI - (B + C) \end{bmatrix},$$

onde como sabemos a matriz B é a matriz nula e a matriz C é a matriz identidade. Logo $B + C = I$.

Note que $xI - I$ é invertível, pois o número de linhas linearmente independentes é k , assim o posto da matriz $xI - I$ é justamente k , e com isso a nulidade da matriz é zero, e portanto não temos zero como autovalor da matriz. Assim, pelo complemento de Schur, temos:

$$\begin{aligned} \det(xI - I) \cdot \det((xI - A) - (-\sqrt{2}\beta(xI - I)^{-1}(-\sqrt{2}\beta)^T)) &= \det((x - 1)I) \cdot \det((xI - A) - 2\beta((x - 1)I)^{-1}\beta^T) \\ &= (x - 1)^k \cdot \det((xI - A) - 2(x - 1)^{-1}\beta\beta^T) \\ &= (x - 1)^k \cdot \det\left(\frac{x(x - 1)I - (x - 1)A - 2\beta\beta^T}{(x - 1)}\right) \\ &= (x - 1)^k \cdot \frac{1}{(x - 1)^{2k}} \cdot \det(x(x - 1)I - (x - 1)A - 2\beta\beta^T) \\ &= (x - 1)^{-k} \cdot \det(x(x - 1)I - (x - 1)A - 2\beta\beta^T) \end{aligned}$$

Assim, resta calcularmos o determinante acima, onde as matrizes tem as respectivas ordens I_{2k} , A_{2k} e $(\beta\beta^T)_{2k}$. A construção dessas matrizes é dada para $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$:

$$x(x - 1)I = \begin{bmatrix} x(x - 1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x(x - 1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x(x - 1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x(x - 1) \end{bmatrix}$$

$$(x-1)A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (x-1) \\ 0 & 0 & (x-1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x-1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (x-1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (x-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (x-1) & 0 & 0 \\ (x-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\beta\beta^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, o determinante a ser calculado é

$$\det \begin{pmatrix} x(x-1)-2 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(x-1) \\ -2 & x(x-1)-2 & -(x-1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(x-1) & x(x-1)-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x(x-1)-2 & -(x-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(x-1) & x(x-1)-2 & -2 \\ -(x-1) & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & x(x-1)-2 \end{pmatrix}$$

Para $n = 2$, o polinômio característico associado a matriz $M'_{AD(2)}$ é:

$$p_{M'_{AD(2)}}(x) = (x-1)^{-2} \cdot \det \left(x(x-1)I - (x-1)A - 2\beta\beta^T \right).$$

Note que

$$\det \left(x(x-1)I - (x-1)A - 2\beta\beta^T \right) = \det \begin{pmatrix} x(x-1)-2 & -2 & 0 & -(x-1) \\ -2 & x(x-1)-2 & -(x-1) & 0 \\ 0 & -(x-1) & x(x-1)-2 & -2 \\ -(x-1) & 0 & -2 & x(x-1)-2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o *software wxMaxima* para calcular o determinante acima, obtemos:

$$(x - x(x - 1) - 1) (x - x(x - 1) + 3) (x + x(x - 1) - 5) (x + x(x - 1) - 1).$$

Fatorando o polinômio, temos:

- $(x - x(x - 1) - 1) = (-x^2 + 2x - 1) = -(x - 1)^2$
- $(x - x(x - 1) + 3) = (-x^2 + 2x + 3)$
- $(x + x(x - 1) - 5) = (x + x^2 - x - 5) = (x^2 - 5)$
- $(x + x(x - 1) - 1) = (x + x^2 - x - 1) = (x^2 - 1)$

Logo, $p_{M'_{AD(2)}}(x) = (x - 1)^{-2} \left(-(x - 1)^2 \right) (-x^2 + 2x + 3) (x^2 - 5) (x^2 - 1)$. Portanto,

$$p_{M'_{AD(2)}}(x) = -(-x^2 + 2x + 3) (x^2 - 5) (x^2 - 1) \text{ e } \sigma(M'_{AD(2)}) = \{3, \sqrt{5}, 1, -1, -1, -\sqrt{5}\}.$$

Como a matriz associada ao grafo $AD(k)$ ponderado após aplicarmos o Algoritmo da Decomposição Simétrica é uma matriz diagonal em blocos, então o espectro dessa matriz é a união do espectro dos seus blocos, ou seja, $\sigma(M_{AD(k)}^*) = \sigma(B - C) \cup \sigma(M'_{AD(k)})$. Como $B - C = -I$, segue que $\sigma(-I) = \{-1^{(k)}\}$. Pelo Teorema do Algoritmo 3.13 temos que espectro de $M_{AD(k)}^*$ é o mesmo espectro de $\mathcal{M}_{AD(k)}$, onde $\mathcal{M}_{AD(k)}$ é semelhante a matriz de adjacência de $AD(k)$. Logo, $\sigma(AD(2)) = \{3, \sqrt{5}, 1, -1, -1, -1, -1 - \sqrt{5}\}$.

Pelas escolhas que fizemos, o espectro da matriz $AD(k)$ terá uma cópia do espectro de $B - C$ união ao espectro da matriz $M'_{AD(k)}$, onde utilizamos o Teorema 2.23 para reduzir os cálculos do polinômio característico, como podemos verificar na próxima seção.

4.1 Testes Computacionais via Python

O *SageMath* é um software de matemática, que é escrito principalmente em Python e Cython, que possui recursos que abrange muitas áreas incluindo, álgebra, combinatória, análise numérica, teoria dos números, cálculo e grafos.

O *Jupyter*, conhecido como notebook jupyter, surgiu do Projeto IPython em 2014, e é um ambiente computacional de código aberto que permite criar e compartilhar documentos que contenham um código iterativo, equações e fórmulas matemáticas renderizadas pelo LaTeX, visualizações de imagens, gráficos e textos explicativos. Neste trabalho utilizamos o SageMath no ambiente Jupyter para compilar a família de grafos apresentada acima. Primeiro vamos apresentar a ideia para o código e após uma tabela com as compilações.

Criamos um grafo vazio a partir do comando $Graph()$ e a nossa família de grafos possui a seguinte construção, aqui é importante a rotulação dos vértices. Considere $p, r \in \mathbb{R}$,

tal que $0 \leq p \leq k-1$ e $2 \leq r \leq 2^{k-1}$, onde k é a quantidade de diamantes no grafo. Assim, a adjacência entre dois vértices acontece da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 1, & \text{se } i \in \{1+4p, 3+4p\}, \quad 1+4p \leq j \leq 4(p+1), \quad i \neq j \text{ e } 0 \leq p \leq k-1; \\ 1, & \text{se } i = 2 \text{ e } j = 4k; \\ 1, & \text{se } i = 2r \text{ e } j = 2(r+1), \quad 2 \leq r \leq 2^{k-1}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seguindo a construção criamos um código em *python* onde entramos com a quantidade de diamantes que queremos e obtemos como retorno a matriz de adjacência, o espectro e o polinômio característico, ver anexo [A.1](#).

Baseadas nas tabelas a seguir, apresentamos os seguintes resultados e conjecturas.

Proposição 4.4. *O maior autovalor do grafo $AD(n)$ é 3.*

Demonstração. De fato, como $AD(n)$ é um grafo 3-regular para qualquer n , temos pela Proposição [2.33](#) que 3 é um autovalor de $AD(n)$ e é o maior dentre todos os autovalores de $AD(n)$. \square

Proposição 4.5. *Se n é par então $\lambda = 1$ é autovalor.*

Demonstração. Para evitar carregar a notação chamaremos o grafo $AD(n)$ de G .

Considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ escrito como $\mathbf{x} = (0, \mu, 0, -\mu)^T$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu \neq 0$. Seja $\mathbf{v} = (\mathbf{x}, -\mathbf{x})^T$, autovetor associado ao autovalor 1 do grafo G . A construção de \mathbf{v} é dada por, a cada quatro coordenadas repetimos \mathbf{x} e $-\mathbf{x}$ até completarmos o vetor \mathbf{v} . De modo que a quantidade de repetições de \mathbf{x} e $-\mathbf{x}$ seja a mesma. Note que, a ordem da matriz para os grafos anéis de diamantes é $4n$.

Seja n seja par, então $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos que o grafo G em questão possui $8k$ vértices. Logo, pela construção do vetor \mathbf{v} temos que, $8k/4 = 2k$, ou seja, temos k repetições de \mathbf{x} e k repetições de $-\mathbf{x}$.

A matriz de adjacência associada ao grafo anel de diamantes, para $n > 2$ representada em blocos é:

$$\begin{bmatrix} T & S & 0 & S^T \\ S^T & T & S & 0 \\ 0 & S^T & T & S \\ S & 0 & S^T & T \end{bmatrix},$$

onde $T \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, $S \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ e $0 \in \mathbb{M}_{4 \times 4n-12}(\mathbb{R})$.

As matrizes T e S são dadas da seguinte forma: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim,

$$A(G)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} T & S & 0 & S^T \\ S^T & T & S & 0 \\ 0 & S^T & T & S \\ S & 0 & S^T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\mathbf{x} - S\mathbf{x} - S^T\mathbf{x} \\ S^T\mathbf{x} - T\mathbf{x} + S\mathbf{x} \\ -S^T\mathbf{x} + T\mathbf{x} - S\mathbf{x} \\ S\mathbf{x} + S^T\mathbf{x} - T\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\mathbf{x} - (S + S^T)\mathbf{x} \\ -T\mathbf{x} + (S + S^T)\mathbf{x} \\ T\mathbf{x} - (S + S^T)\mathbf{x} \\ -T\mathbf{x} + (S + S^T)\mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Note que $T\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0)^T$ e $(S + S^T)\mathbf{x} = (0, -\mu, 0, \mu)^T = -\mathbf{x}$. Logo,

$$A(G)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} T\mathbf{x} - (S + S^T)\mathbf{x} \\ -T\mathbf{x} + (S + S^T)\mathbf{x} \\ T\mathbf{x} - (S + S^T)\mathbf{x} \\ -T\mathbf{x} + (S + S^T)\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{v}.$$

Portanto, $\lambda = 1$ é autovalor associado ao autovetor \mathbf{v} quando n é par. □

Proposição 4.6. *A multiplicidade do autovalor $\lambda = -1$ é maior ou igual a n .*

Demonstração. Note que os grafos $AD(n)$ contém pelo menos n vértices gêmeos. Pelo Teorema 2.34, concluímos que -1 estará no $\sigma(AD(n))$ pelo menos n vezes. Portanto, garantimos a multiplicidade do -1 pelo menos n vezes. □

Conseguimos garantir pela Proposição 4.6 que $\lambda = -1$ aparece pelo menos n vezes no espectro, mas pelos testes temos a seguinte conjectura com relação a multiplicidade do autovalor $\lambda = -1$.

Conjectura 4.7. *A multiplicidade do autovalor $\lambda = -1$ é $n + 2$.*

Conjectura 4.8. *Todos os autovalores $AD(n)$, exceto $-1, 0, 1, 3$ e $\sqrt{5}$ quando pertencer ao espectro do grafo, possuem multiplicidade 2.*

k	Espectro
2	$\{3, 2.236, 1, -1^{(4)}, -2.236\}$
3	$\{3, 2.514^{(2)}, 0.571^{(2)}, -1^{(5)}, -2.086^{(2)}\}$
4	$\{3, 2.709^{(2)}, 2.236, 1, 0.193^{(2)}, -1^{(6)}, -1.903^{(2)}, -2.236\}$
5	$\{3, 2.809^{(2)}, 2.358^{(2)}, 0.823^{(2)}, -0.047^{(2)}, -1^{(7)}, -1.761^{(2)}, -2.18^{(2)}\}$
6	$\{3, 2.86^{(2)}, 2.514^{(2)}, 2.236, 1, 0.571^{(2)}, -0.210^{(2)}, -1^{(8)}, -1.655^{(2)}, -2.086^{(2)}, -2.236\}$
7	$\{3, 2.901^{(2)}, 2.628^{(2)}, 2.303^{(2)}, 0.905^{(2)}, 0.361^{(2)}, -0.327^{(2)}, -1^{(9)}, -1.573^{(2)}, -1.989^{(2)}, -2.208^{(2)}\}$
8	$\{3, 2.923^{(2)}, 2.709^{(2)}, 2.414^{(2)}, 2.236, 1, 0.737^{(2)}, 0.193^{(2)}, -0.414^{(2)}, -1^{(10)}, -1.509^{(2)}, -1.903^{(2)}, -2.151^{(2)}, -2.236\}$
9	$\{3, 2.939^{(2)}, 2.767^{(2)}, 2.514^{(2)}, 2.277^{(2)}, 0.941^{(2)}, 0.571^{(2)}, 0.060^{(2)}, -0.481^{(2)}, -1^{(11)}, -1.458^{(2)}, -1.827^{(2)}, -2.086^{(2)}, -2.219^{(2)}\}$
10	$\{3, 2.951^{(2)}, 2.809^{(2)}, 2.594^{(2)}, 2.358^{(2)}, 2.236, 1, 0.823^{(2)}, 0.426^{(2)}, -0.047^{(2)}, -0.535^{(2)}, -1^{(12)}, -1.415^{(2)}, -1.761^{(2)}, -2.021^{(2)}, -2.181^{(2)}, -2.236\}$
11	$\{3, 2.959^{(2)}, 2.841^{(2)}, 2.658^{(2)}, 2.440^{(2)}, 2.264^{(2)}, 0.960^{(2)}, 0.694^{(2)}, 0.301^{(2)}, -0.136^{(2)}, -0.578^{(2)}, -1^{(13)}, -1.380^{(2)}, -1.704^{(2)}, -1.959^{(2)}, -2.135^{(2)}, -2.224^{(2)}\}$
12	$\{3, 2.965^{(2)}, 2.866^{(2)}, 2.709^{(2)}, 2.514^{(2)}, 2.324^{(2)}, 2.236, 1, 0.873^{(2)}, 0.571^{(2)}, 0.193^{(2)}, -0.210^{(2)}, -0.614^{(2)}, -1^{(14)}, -1.350^{(2)}, -1.655^{(2)}, -1.903^{(2)}, -2.086^{(2)}, -2.198^{(2)}, -2.236\}$
13	$\{3, 2.970^{(2)}, 2.885^{(2)}, 2.749^{(2)}, 2.576^{(2)}, 2.392^{(2)}, 2.256^{(2)}, 0.971^{(2)}, 0.771^{(2)}, 0.460^{(2)}, 0.101^{(2)}, -0.273^{(2)}, -0.645^{(2)}, -1^{(15)}, -1.325^{(2)}, -1.612^{(2)}, -1.851^{(2)}, -2.037^{(2)}, -2.163^{(2)}, -2.228^{(2)}\}$
14	$\{3, 2.974^{(2)}, 2.901^{(2)}, 2.782^{(2)}, 2.628^{(2)}, 2.456^{(2)}, 2.303^{(2)}, 2.236, 1, 0.905^{(2)}, 0.669^{(2)}, 0.361^{(2)}, 0.021^{(2)}, -0.327^{(2)}, -0.671^{(2)}, -1^{(16)}, -1.303^{(2)}, -1.573^{(2)}, -1.804^{(2)}, -1.989^{(2)}, -2.125^{(2)}, -2.208^{(2)}, -2.236\}$
15	$\{3, 2.978^{(2)}, 2.913^{(2)}, 2.809^{(2)}, 2.672^{(2)}, 2.514^{(2)}, 2.358^{(2)}, 2.251^{(2)}, 0.978^{(2)}, 0.823^{(2)}, 0.571^{(2)}, 0.272^{(2)}, -0.0476^{(2)}, -0.373^{(2)}, -0.694^{(2)}, -1^{(17)}, -1.284^{(2)}, -1.539^{(2)}, -1.761^{(2)}, -1.945^{(2)}, -2.086^{(2)}, -2.181^{(2)}, -2.230^{(2)}\}$
16	$\{3, 2.980^{(2)}, 2.923^{(2)}, 2.831^{(2)}, 2.709^{(2)}, 2.564^{(2)}, 2.414^{(2)}, 2.288^{(2)}, 2.236, 1, 0.926^{(2)}, 0.737^{(2)}, 0.482^{(2)}, 0.193^{(2)}, -0.108^{(2)}, -0.414^{(2)}, -0.713^{(2)}, -1^{(18)}, -1.267^{(2)}, -1.509^{(2)}, -1.723^{(2)}, -1.903^{(2)}, -2.046^{(2)}, -2.151^{(2)}, -2.214^{(2)}, -2.236\}$
17	$\{3, 2.982^{(2)}, 2.932^{(2)}, 2.850^{(2)}, 2.740^{(2)}, 2.608^{(2)}, 2.466^{(2)}, 2.334^{(2)}, 2.248^{(2)}, 0.983^{(2)}, 0.859^{(2)}, 0.652^{(2)}, 0.399^{(2)}, 0.123^{(2)}, -0.162^{(2)}, -0.449^{(2)}, -0.730^{(2)}, -1^{(19)}, -1.252^{(2)}, -1.482^{(2)}, -1.687^{(2)}, -1.863^{(2)}, -2.008^{(2)}, -2.119^{(2)}, -2.193^{(2)}, -2.231^{(2)}\}$

k	Espectro
18	$\{3, 2.984^{(2)}, 2.939^{(2)}, 2.866^{(2)}, 2.767^{(2)}, 2.647^{(2)}, 2.514^{(2)}, 2.382^{(2)}, 2.277^{(2)}, 2.236, 1, 0.941^{(2)}, 0.786^{(2)}, 0.571^{(2)}, 0.324^{(2)}, 0.060^{(2)}, -0.210^{(2)}, -0.481^{(2)}, -0.746^{(2)}, -1^{(20)}, -1.238^{(2)}, -1.458^{(2)}, -1.655^{(2)}, -1.827^{(2)}, -1.971^{(2)}, -2.086^{(2)}, -2.169^{(2)}, -2.219^{(2)}, -2.236\}$
19	$\{3, 2.986^{(2)}, 2.945^{(2)}, 2.879^{(2)}, 2.789^{(2)}, 2.680^{(2)}, 2.556^{(2)}, 2.429^{(2)}, 2.316^{(2)}, 2.245^{(2)}, 0.986^{(2)}, 0.885^{(2)}, 0.712^{(2)}, 0.496^{(2)}, 0.256^{(2)}, 0.0036^{(2)}, -0.253^{(2)}, -0.509^{(2)}, -0.759^{(2)}, -1^{(21)}, -1.226^{(2)}, -1.436^{(2)}, -1.625^{(2)}, -1.793^{(2)}, -1.936^{(2)}, -2.053^{(2)}, -2.142^{(2)}, -2.202^{(2)}, -2.232\}$
20	$\{3, 2.987^{(2)}, 2.951^{(2)}, 2.891^{(2)}, 2.809^{(2)}, 2.709^{(2)}, 2.594^{(2)}, 2.473^{(2)}, 2.358^{(2)}, 2.270^{(2)}, 2.236, 1, 0.952^{(2)}, 0.823^{(2)}, 0.640^{(2)}, 0.426^{(2)}, 0.193^{(2)}, -0.047^{(2)}, -0.292^{(2)}, -0.535^{(2)}, -0.772^{(2)}, -1^{(22)}, -1.215^{(2)}, -1.415^{(2)}, -1.598^{(2)}, -1.761^{(2)}, -1.903^{(2)}, -2.021^{(2)}, -2.114^{(2)}, -2.181^{(2)}, -2.222^{(2)}, -2.236\}$

Tabela 1: Espectro anéis de diamantes via python

k	Polinômio Característico
2	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^4(x^2 - 5)$
3	$(x - 3)(x + 1)^5(x^3 - x^2 - 5x + 3)^2$
4	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^6(x^2 - 5)(x^3 - x^2 - 5x + 1)^2$
5	$(x - 3)(x + 1)^7(x^6 - 2x^5 - 9x^4 + 14x^3 + 21x^2 - 20x - 1)^2$
6	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^8(x^2 - 5)(x^3 - x^2 - 5x - 1)^2(x^3 - x^2 - 5x + 3)^2$
7	$(x - 3)(x + 1)^9(x^9 - 3x^8 - 12x^7 + 34x^6 + 50x^5 - 120x^4 - 76x^3 + 126x^2 + 5x - 13)^2$
8	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^{10}(x^2 - 5)(x^2 - 2x - 1)^2(x^3 - x^2 - 5x + 1)^2(x^4 - 8x^2 - 4x + 7)^2$
9	$(x - 3)(x + 1)^{11}(x^3 - x^2 - 5x + 3)^2(x^9 - 3x^8 - 12x^7 + 32x^6 + 54x^5 - 102x^4 - 104x^3 + 84x^2 + 45x - 3)^2$
10	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^{12}(x^2 - 5)(x^6 - 2x^5 - 9x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 5)^2(x^6 - 2x^5 - 9x^4 + 14x^3 + 21x^2 - 20x - 1)^2$
11	$(x - 3)(x + 1)^{13}(x^{15} - 5x^{14} - 15x^{13} + 97x^{12} + 77x^{11} - 749x^{10} - 131x^9 + 2881x^8 - 109x^7 - 5567x^6 + 595x^5 + 4675x^4 - 785x^3 - 1215x^2 + 175x + 43)^2$
12	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^{14}(x^2 - 5)(x^3 - x^2 - 5x - 1)^2(x^3 - x^2 - 5x + 1)^2(x^3 - x^2 - 5x + 3)^2(x^6 - 2x^5 - 9x^4 + 12x^3 + 23x^2 - 10x - 11)^2$
13	$(x - 3)(x + 1)^{15}(x^{18} - 6x^{17} - 15x^{16} + 138x^{15} + 50x^{14} - 1326x^{13} + 326x^{12} + 6850x^{11} - 3028x^{10} - 20242x^9 + 9296x^8 + 33214x^7 - 13298x^6 - 26650x^5 + 9290x^4 + 8278x^3 - 2253x^2 - 640x + 79)^2$
14	$(x - 3)(x - 1)(x + 1)^{16}(x^2 - 5)(x^9 - 3x^8 - 12x^7 + 30x^6 + 58x^5 - 84x^4 - 124x^3 + 34x^2 + 45x - 1)^2(x^9 - 3x^8 - 12x^7 + 34x^6 + 50x^5 - 120x^4 - 76x^3 + 126x^2 + 5x - 13)^2$

k	Polinômio Característico
15	$(x-3)(x+1)^{17}(x^3-x^2-5x+3)^2(x^6-2x^5-9x^4+14x^3+21x^2-20x-1)^2(x^{12}-4x^{11}-14x^{10}+58x^9+85x^8-304x^7-308x^6+652x^5+619x^4-412x^3-398x^2+10x+31)^2$
16	$(x-3)(x-1)(x+1)^{18}(x^2-5)(x^2-2x-1)^2(x^3-x^2-5x+1)^2(x^4-8x^2-4x+7)^2(x^{12}-4x^{11}-14x^{10}+60x^9+79x^8-328x^7-244x^6+760x^5+415x^4-628x^3-222x^2+140x+17)^2$
17	$(x-3)(x+1)^{19}(x^{24}-8x^{23}-12x^{22}+234x^{21}-140x^{20}-2996x^{19}+3892x^{18}+22098x^{17}-35699x^{16}-103888x^{15}+179640x^{14}+324036x^{13}-546736x^{12}-670600x^{11}+1018488x^{10}+881636x^9-1126453x^8-665992x^7+697044x^6+248850x^5-210820x^4-36708x^3+23508x^2+1290x-409)^2$
18	$(x-3)(x-1)(x+1)^{20}(x^2-5)(x^3-x^2-5x-1)^2(x^3-x^2-5x+3)^2(x^9-3x^8-12x^7+32x^6+54x^5-102x^4-104x^3+84x^2+45x-19)^2(x^9-3x^8-12x^7+32x^6+54x^5-102x^4-104x^3+84x^2+45x-3)^2$
19	$(x-3)(x+1)^{21}(x^{27}-9x^{26}-9x^{25}+287x^{24}-322x^{23}-4038x^{22}+7818x^{21}+33074x^{20}-80197x^{19}-175523x^{18}+484197x^{17}+636461x^{16}-1879004x^{15}-1617300x^{14}+4797900x^{13}+2875516x^{12}-7976009x^{11}-3429615x^{10}+8327777x^9+2481913x^8-5155202x^7-937926x^6+1707210x^5+147250x^4-249555x^3-5445x^2+10275x-37)^2$
20	$(x-3)(x-1)(x+1)^{22}(x^2-5)(x^3-x^2-5x+1)^2(x^6-2x^5-9x^4+10x^3+25x^2-5)^2(x^6-2x^5-9x^4+14x^3+21x^2-20x-1)^2(x^{12}-4x^{11}-14x^{10}+60x^9+79x^8-328x^7-248x^6+768x^5+451x^4-676x^3-314x^2+180x+61)^2$

Tabela 2: Polinômio característicos dos anéis de diamantes via python

5 Grafos Quase Diamantes

Neste capítulo, iremos falar sobre uma subfamília dos grafos anéis de diamantes, onde no decorrer do trabalho verificamos que essa subfamília possui algumas observações interessantes.

Definição 5.1. Chamamos de *grafos quase-diamantes* os grafos obtidos dos grafos anéis de diamantes de modo que substituímos cada diamante pelo ciclo C_4 . Denotamos por $QD(n)$ o grafo quase-diamante com n ciclos C_4 .

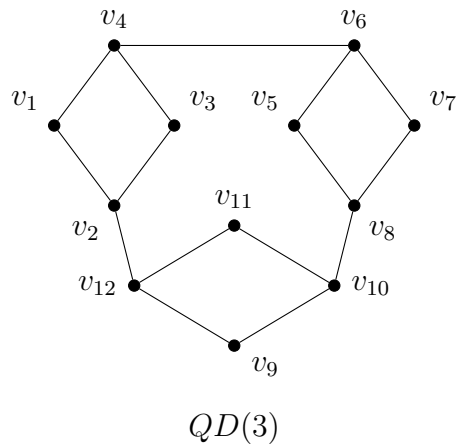


Figura 26: Grafo quase-diamante com 3 diamantes

Como as matrizes desses grafos são extensas, iremos analisar para $QD(2)$ e $QD(3)$.

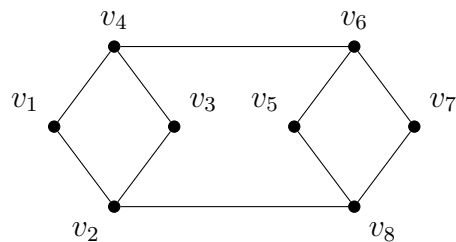


Figura 27: Grafo quase-diamante com 2 diamantes $QD(2)$

Lembrando, um grafo ponderado generalizado, é um grafo que possui pesos em seus vértices e arestas. Assim, vamos tomar o grafo quase diamantes ponderado, isto é atribuímos peso zero em seus vértices e peso um em suas arestas. O $QD(2)$ é dado pela Figura 27 e sua respectiva matriz de adjacência é dada abaixo:

$$A(QD(2)) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Iremos reescrever a matriz associada ao grafo ponderado $QD(n)$ com a estrutura dada em (3.1), para isso vamos procurar conjuntos e verificar se os mesmos são simétricos.

Considere os seguintes conjuntos $S_1 = \{v_1, v_5\}$ e $S_2 = \{v_3, v_7\}$, verificaremos se a Definição 3.8 é satisfeita. Note que $S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ e $QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2) = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$.

Os vértices $v_1 \in S_1$ e $v_3 \in S_2$ têm o mesmo peso. Já os vértices $v_5 \in S_1$ e $v_7 \in S_2$ também têm o mesmo peso. Portanto, o item (i) da definição está sendo satisfeito.

O i -ésimo vértice de S_1 e S_2 tem a mesma vizinhança em $G \setminus (S_1 \cup S_2)$ e estão conectados por uma aresta de mesmo peso. De fato, olhando para os vértices $v_1 \in S_1$ e $v_3 \in S_2$, que são os primeiros vértices de seus respectivos conjuntos, e dado $v_2 \in QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$, temos que v_2 é adjacente a v_1 com uma aresta de peso um, e v_2 é adjacente a v_3 com uma aresta de peso um também. Agora, se considerarmos o vértice $v_4 \in QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$, temos que v_4 é adjacente a v_1 com uma aresta de peso um, e v_4 é adjacente a v_3 com uma aresta de peso um também. Logo, v_1 e v_3 tem a mesma vizinhança em $QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$.

Agora, se considerarmos o vértice $v_6 \in QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$, temos que v_6 é adjacente a v_5 com uma aresta de peso um, e v_6 é adjacente a v_7 com uma aresta de peso um também, onde $v_5 \in S_1$ e $v_7 \in S_2$, são os segundos vértices dos seus respectivos conjuntos. O mesmo ocorre ao analisarmos o vértice v_8 . Portanto, após a análise, verificamos que o item (ii) da definição está sendo satisfeito.

Vale ressaltar que, o item (ii) não seria satisfeito se, por exemplo, $v_2 \in QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ fosse adjacente a v_1 e não fosse a v_3 ou, se o peso das arestas que conecta os i -ésimos vértices de S_1 e S_2 com os vértices de $QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$ fossem diferentes.

Dados $v_1, v_5 \in S_1$ e $v_3, v_7 \in S_2$. Temos que, v_1 não é adjacente a v_5 , e v_3 não é adjacente a v_7 . Logo, pela contrapositiva, o item (iii) é satisfeito.

Dados, novamente, $v_1, v_5 \in S_1$ e $v_3, v_7 \in S_2$. Para este item, iremos fazer duas análises, uma para quando $i = j$ e outra, para quando $i \neq j$, isto é, para quando os vértices estão na mesma posição do seu respectivo conjunto e outra para quando não estão.

Assim, v_1 não é adjacente a v_3 , como estamos trabalhando com grafos não direcionados, temos que v_3 não é adjacente a v_1 também e o mesmo ocorre quando analisamos os vértices v_5 e v_7 . Analisando agora para quando $i \neq j$, temos que v_1 não é adjacente a v_7 , e v_5 não é adjacente a v_3 . Assim, pela contrapositiva, o item (iv) é satisfeito.

Concluimos então que S_1 e S_2 são conjuntos simétricos de vértices. Iremos associar a matriz do grafo $QD(2)$ ponderado com a estrutura dada em \mathcal{M} . Para isso vamos analisar cada bloco separadamente.

O bloco A representa a matriz associada aos vértices que estão em $QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O bloco B é a matriz associada ao subgrafo induzido por S_k , para $k \in \{1, 2\}$. E essa matriz é a mesma para todos os conjuntos simétricos por causa do item (i) e (iii) da Definição 3.8. Assim,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O bloco β é a matriz associada quando analisamos o conjunto S_k , para $1 \leq k \leq 2$, e $QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Pelo item (ii) da Definição 3.8, temos que essa matriz é a mesma quando analisamos para todos os conjuntos simétricos. Abaixo, segue o bloco

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E por último, o bloco C é a matriz associada quando analisamos pares de conjuntos simétricos, e pelo item (iv) da Definição 3.8 temos que a matriz associada é a mesma para todos os pares de conjuntos simétricos.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com a definição de conjuntos simétricos, encontramos uma matriz semelhante a matriz de adjacência associada ao grafo $QD(2)$ com dois conjuntos simétricos de vértices

(disjuntos) $\{S_k\}$, $1 \leq k \leq 2$, que possui a mesma estrutura da matriz (3.1),

$$\mathcal{M}_{QD(2)} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A matriz $\mathcal{M}_{QD(2)}$ obtida é semelhante a matriz de adjacência do grafo $QD(2)$. Aplicaremos agora os passos do algoritmo referente ao Teorema 3.13. O primeiro passo é multiplicar por $\sqrt{2}$ o peso das arestas entre S_1 e $QD(2) \setminus (S_1 \cup S_2)$: $\mathcal{E}^* (\{v_1, v_2\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_1, v_4\}) = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^* (\{v_5, v_6\}) = \sqrt{2}$ e $\mathcal{E}^* (\{v_5, v_8\}) = \sqrt{2}$.

O segundo e terceiro passo não são aplicados, visto que não existem nem arestas diretas e nem arestas cruzadas. E o quarto passo e último, eliminamos todas as arestas entre S_2 e $QD(2) \setminus S_2$, que são elas: $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_6, v_7\}$ e $\{v_7, v_8\}$, como removemos essas arestas colocamos peso zero nas mesmas, e assim desconectamos o grafo ponderado $QD(2)$. Abaixo exibimos o novo grafo ponderado $QD^*(2)$ e a matriz M^* associada que é semelhante a matriz associada ao grafo $QD^*(2)$ e respeita a estrutura da matriz \mathcal{M} . Pelo Teorema 3.13 temos que o espectro de $QD(2)$ e $QD^*(2)$ é o mesmo.

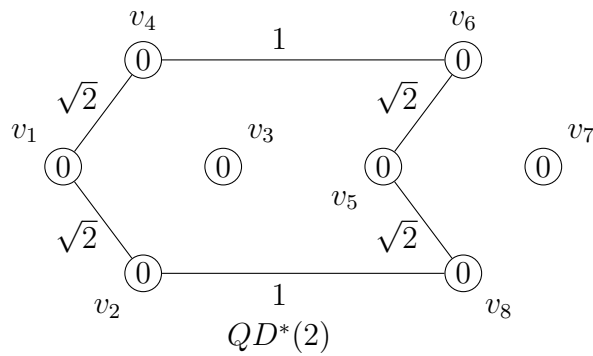


Figura 28: Grafo ponderado $QD(2)$ após aplicar o algoritmo

$$M^* = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para o grafo $QD(3)$, que é dado pela Figura 26. A matriz de adjacência associada a esse grafo exibimos abaixo:

$$A(QD(3)) = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Antes de selecionarmos conjuntos e verificar se são simétricos, atribuímos peso zero aos vértices de $QD(3)$ e peso um às arestas de $QD(3)$. Assim, temos o grafo $QD(3)$ ponderado. Considere os seguintes conjuntos de vértices $S_1 = \{v_1, v_5, v_9\}$ e $S_2 = \{v_3, v_7, v_{11}\}$, vamos verificar se esses conjuntos são simétricos. Note, $S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{11}\}$ e $QD(3) \setminus (S_1 \cup S_2) = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}\}$.

Os vértices v_1 de S_1 e v_3 de S_2 têm o mesmo peso, os vértices v_5 de S_1 e v_7 de S_2 têm o mesmo peso, e os vértices v_9 de S_1 e v_{11} de S_2 também têm o mesmo peso. Portanto, o item (i) é satisfeito.

O i -ésimo vértice de S_1 e S_2 tem a mesma vizinhança em $QD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ e estão conectados por uma aresta de mesmo peso. De fato, para $v_1, v_5 \in S_1$, $v_3, v_7 \in S_2$ já foram verificados anteriormente. Dados os vértices $v_9 \in S_1$, $v_{11} \in S_2$, que são os terceiros vértices de seus respectivos conjuntos, e $v_{10} \in AD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$ temos que, v_{10} é adjacente a v_9 com uma aresta de peso um, e v_{10} é adjacente a v_{11} com uma aresta de peso um também, o mesmo ocorre se olharmos para o vértice v_{12} . Portanto, o item (ii) é satisfeito.

Dados $v_1, v_5, v_9 \in S_1$ e $v_3, v_7, v_{11} \in S_2$. Temos que, v_1 não é adjacente a v_5 , e v_3 não é adjacente a v_7 , v_1 não é adjacente a v_9 , e v_3 não é adjacente a v_{11} , e finalmente v_5 não é adjacente a v_9 , e v_7 não é adjacente a v_{11} . Logo, pela contrapositiva, o item (iii) é satisfeito.

Dados, novamente, $v_1, v_5, v_9 \in S_1$ e $v_3, v_7, v_{11} \in S_2$. Para este item, iremos fazer duas análises, uma para quando $i = j$ e outra, para quando $i \neq j$, isto é, para quando os vértices estão na mesma posição do seu respectivo conjunto e outra para quando não estão.

Assim, v_1 não é adjacente a v_3 , como estamos trabalhando com grafos não direcionados, temos que v_3 não é adjacente a v_1 também; v_5 e v_7 não são adjacentes; v_9 e v_{11} não são adjacentes. Analisando agora para quando $i \neq j$, temos que v_1 não é adjacente a v_7 , e v_1 não é adjacente a v_{11} ; v_5 e v_3 não são adjacentes; v_5 e v_{11} não são adjacentes. Por último v_9 e v_7 não são adjacentes; e v_9 e v_3 não são adjacentes. Com isso, pela contrapositiva, o item (iv) é satisfeito.

Tomamos o grafo $QD(3)$ ponderado, e para os conjuntos que escolhemos concluímos que são simétricos. Assim, $QD(3)$ ponderado possui dois conjuntos simétricos.

Com os conjuntos simétricos, obteremos uma matriz semelhante a matriz de adjacência associada ao grafo quase-diamante, e essa matriz possui a mesma estrutura dada em (3.1). Analisando cada bloco separadamente temos:

O bloco A representa a matriz associada aos vértices que estão em $QD(3) \setminus S_1 \cup S_2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O bloco B é a matriz associada ao subgrafo induzido por S_k , $1 \leq k \leq 2$. E essa matriz é a mesma para todos os conjuntos simétricos por causa do item (i) e (iii) da Definição 3.8. Assim,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O bloco β é a matriz associada quando analisamos o conjunto S_k , $1 \leq k \leq 2$, e $QD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Pelo item (ii) da Definição 3.8, temos que essa matriz é a mesma

quando analisamos para todos os conjuntos simétricos. Assim,

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E por último, o bloco C é a matriz associada quando analisamos pares de conjuntos simétricos, e pelo item (iv) da Definição 3.8 temos que a matriz associada é a mesma para todos os pares de conjuntos simétricos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então a matriz semelhante a matriz associada ao grafo $QD(3)$ ponderado com os blocos dados acima que tem a estrutura da matriz \mathcal{M} é da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{QD(3)} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Agora, aplicaremos o Algoritmo da Decomposição Simétrica. O primeiro passo é multiplicar por $\sqrt{2}$ o peso das arestas entre S_1 e $QD(3) \setminus (S_1 \cup S_2)$, então o novo peso de cada aresta é dado por: $\mathcal{E}^*\{v_1, v_2\} = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^*\{v_1, v_4\} = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^*\{v_5, v_6\} = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^*\{v_5, v_8\} = \sqrt{2}$, $\mathcal{E}^*\{v_9, v_{10}\} = \sqrt{2}$ e $\mathcal{E}^*\{v_9, v_{12}\} = \sqrt{2}$.

O segundo e terceiro passo não são aplicados, visto que não existem nem arestas diretas e nem arestas cruzadas. E o quarto passo e último, eliminamos todas as arestas entre S_2 e $QD(3) \setminus S_2$, que são elas: $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_{10}, v_{11}\}$ e $\{v_{11}, v_{12}\}$, como removemos essas arestas o novo peso dessas arestas passa a ser zero, e assim desconectamos

o grafo ponderado $QD(3)$. Abaixo exibimos o novo grafo ponderado $QD^*(3)$ e a matriz M^* associada que respeita a estrutura de \mathcal{M} . Pelo Teorema 3.13 temos que o espectro de $QD(3)$ e $QD^*(3)$ é o mesmo.

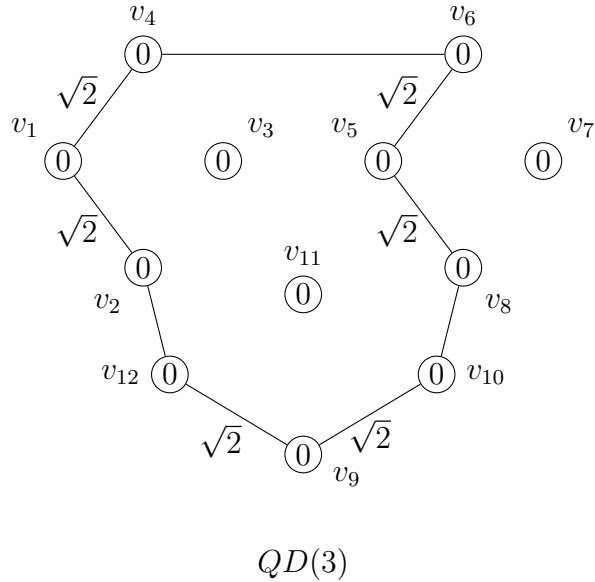


Figura 29: Grafo ponderado $QD(3)$ após aplicar o algoritmo

$$M^* = \left[\begin{array}{cccccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Após analisarmos esses dois grafos $QD(2)$ e $QD(3)$, observamos que, pela nossa escolha teremos sempre dois conjuntos simétricos, onde S_1 é formado formado pelos vértices com a seguinte rotulação $1 + 4p$, já S_2 é formado pelos vértices com a rotulação $3 + 4p$, onde $0 \leq p \leq k - 1$ e k é a quantidade de ciclos C_4 .

Tanto o conjunto S_1 quanto S_2 são formados por vértices com rotulação ímpar. E o conjunto formado pelos vértices de rotulação par é $QD(k) \setminus (S_1 \cup S_2)$, e os elementos que estão nesse conjunto são da forma $2q$, com $1 \leq q \leq 2k$.

O bloco A para k ciclos C_4 será da forma:

$$A = \begin{array}{c|cccccccc} & v_2 & v_4 & v_6 & v_8 & v_{10} & \dots & v_{4k-4} & v_{4k-2} & v_{4k} \\ \hline v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{4k-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ v_{4k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ v_{4k} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad 2k \times 2k$$

O bloco B representa a adjacência do conjunto S_r , com $r \in \{1, 2\}$. Como nesses conjuntos, seus elementos não são adjacentes entre si, o bloco B é uma matriz de ordem k cuja todas suas entradas são zero.

O bloco β representa as arestas entre um conjunto $QD(k) \setminus (\cup S_r)$ e S_r , com $r \in \{1, 2\}$. Assim, o bloco β é dado da seguinte forma, as linhas representam os vértices que estão no conjunto $QD(k) \setminus (\cup S_r)$ e as colunas os vértices que estão no conjunto S_r . Vale lembrar que temos dois conjuntos simétricos, mas pelo item (ii) da Definição 3.8, essas matrizes são iguais. Então β é da seguinte forma:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad 2k \times k$$

E finalmente, o bloco C representa as arestas entre os conjuntos S_1 e S_2 . Observe que os vértices desses conjuntos não possuem adjacência entre si. Portanto, o bloco C é a matriz nula de ordem k .

Generalizando, pelo Teorema 3.13 o espectro de $QD^*(k)$ é o mesmo de $QD(k)$, isso acontece pois reescrevemos a matriz associada ao grafo ponderado $QD(k)$ com a estrutura dada em \mathcal{M} . E pelo Teorema 3.3, obtemos que o espectro de \mathcal{M} , que é o mesmo espectro

de $QD(k)$, como uma união de uma cópia do espectro de $B - C$, e o espectro da matriz M' . Iremos repetir os processos feitos no capítulo anterior, para a matriz M' dada agora.

$$M' = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c}\beta \\ (\sqrt{c}\beta)^T & (B + (c-1)C) \end{bmatrix}$$

onde c é a quantidade de conjuntos simétricos, e as matrizes em blocos A , β , B e C , são as matrizes em blocos estudadas no Capítulo 3.

Para os grafos quase diamantes, pela construção que escolhemos, temos que $c = 2$, as matrizes A , β , B e C são como dadas acima, variando a ordem de acordo com a quantidade de ciclos C_4 no grafo. Dessa forma, $xI - M'$ é dada por:

$$xI - M' = \begin{bmatrix} xI - A & -\sqrt{2}\beta \\ -(\sqrt{2}\beta)^T & xI - (B + C) \end{bmatrix},$$

onde as matrizes B e C são nulas. Note que xI é invertível. Assim, pelo complemento de Schur, temos:

$$\begin{aligned} \det(xI) \cdot \det\left((xI - A) - (-\sqrt{2}\beta(xI)^{-1}(-\sqrt{2}\beta)^T)\right) &= \det(xI) \cdot \det\left((xI - A) - 2\beta(xI)^{-1}\beta^T\right) \\ &= x^k \cdot \det\left((xI - A) - 2x^{-1}\beta\beta^T\right) \\ &= x^k \cdot \det\left(\frac{x^2I - xA - 2\beta\beta^T}{x}\right) \\ &= x^k \cdot \frac{1}{x^{2k}} \cdot \det\left(x^2I - xA - 2\beta\beta^T\right) \\ &= x^{-k} \cdot \det\left(x^2I - xA - 2\beta\beta^T\right). \end{aligned}$$

Resta calcular o determinante acima, onde a ordem de cada matriz é I_{2k} , A_{2k} e $(\beta\beta^T)_{2k}$, respectivamente. A construção dessas matrizes é dada para $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$:

$$x^2I = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x^2 \end{bmatrix}$$

$$xA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\beta\beta^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, calculando o determinante, temos:

$$\det \begin{pmatrix} x^2 - 2 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & -x \\ -2 & x^2 - 2 & -x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x^2 - 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 - 2 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x^2 - 2 & -2 \\ -x & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & x^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Para $k = 2$, o polinômio característico associado a matriz $M'_{QD(2)}$ é:

$$p_{M'_{QD(2)}}(x) = x^{-2} \cdot \det(x^2I - xA - 2\beta\beta^T).$$

Note que

$$\det(x^2I - xA - 2\beta\beta^T) = \det \begin{pmatrix} x^2 - 2 & -2 & 0 & -x \\ -2 & x^2 - 2 & -x & 0 \\ 0 & -x & x^2 - 2 & -2 \\ -x & 0 & -2 & x^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o *software wxMaxima* para calcular o determinante acima. Temos que o polinômio característico associado é

$$p_{M'_{QD(2)}}(x) = x^{-2} (x-1) x^2 (x+1) (x^2 - x - 4) (x^2 + x - 4). \text{ Portanto,}$$

$$\sigma(M'_{QD(2)}) = \{2.561, 1.561, 1, -1, -1.561, -2.561\}.$$

A matriz associada ao grafo $QD(n)$ ponderado após aplicarmos o Algoritmo da Decomposição Simétrica é uma matriz diagonal em blocos, então o espectro dessa matriz é a união do espectro dos seus blocos, ou seja, $\sigma(M_{QD(n)}^*) = \sigma(B-C) \cup \sigma(M'_{QD(n)})$. Como $B-C$ é a matriz nula, segue que $\sigma(B-C) = \{0^{(k)}\}$. Portanto, pelo Teorema do Algoritmo 3.13 temos que o espectro de $M_{QD(n)}^*$ é o mesmo que o espectro de $\mathcal{M}_{QD(n)}$, onde $\mathcal{M}_{QD(n)}$ é semelhante a matriz de adjacência de $QD(n)$. Logo $\sigma(QD(2)) = \{2.561, 1.561, 1, 0, 0, -1, -1.561, -2.561\}$.

Pelas escolhas que fizemos, o espectro da matriz $QD(k)$ terá uma cópia do espectro de $B-C$ união ao espectro da matriz $M'_{QD(k)}$, onde utilizamos o Teorema 2.23 para reduzir os cálculos do polinômio característico, como podemos verificar na próxima Seção 5.1.

5.1 Testes Computacionais via Python

Como feito no capítulo anterior, iremos mostrar duas tabelas, uma relacionada ao espectro dos grafos quase diamantes e outro aos respectivos polinômios característicos associados. Faremos a simulação até $k = 20$, e o código do programa encontra-se em anexo, ver A.2. Seguindo a construção criamos um código via *python* onde entramos com a quantidade de ciclos que queremos e obtemos o mesmo retorno do código para os grafos anéis de diamantes.

Criamos um grafo vazio a partir do comando $Graph()$ e a nossa família de grafos possui a seguinte construção, aqui notamos novamente que a rotulação dos vértices é importante. Considere $p, r \in \mathbb{R}$, tal que $0 \leq p \leq k-1$ e $2 \leq r \leq 2^{k-1}$, onde k é a quantidade de ciclos C_4 no grafo. Assim, a adjacência entre dois vértices acontece da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 1, & \text{se } i \in \{1+4p, 3+4p\}, 1+4p \leq j \leq 4(p+1), i \neq j, j \notin \{1+4p, 3+4p\} \text{ e } 0 \leq p \leq k-1; \\ 1, & \text{se } i = 2 \text{ e } j = 4k; \\ 1, & \text{se } i = 2r \text{ e } j = 2(r+1), 2 \leq r \leq 2^{k-1}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Baseadas nas tabelas dessa seção apresentamos os seguintes resultados e conjectura:

Proposição 5.2. *O autovalor $\lambda = 0$ tem multiplicidade maior ou igual a n .*

Demonstração. Observe que os grafos $QD(n)$ admite pelo menos n vértices gêmeos. Assim pelo Teorema 2.34 concluímos que $0 \in \sigma(QD(n))$, pois para esse grafo vértices que possuem os mesmos vizinhos não são adjacentes. Portanto, a multiplicidade de zero é pelo menos n . \square

Proposição 5.3. $QD(n)$ é bipartido se e somente se n é par.

Demonstração. Seja n a quantidade de ciclos C_4 em $QD(n)$.

Pela construção de $QD(n)$, temos que a quantidade total de arestas no grafo é $5n$, onde $4n$ é a quantidade de arestas de cada ciclo e n é o número de arestas de conexões. Note que em $QD(n)$ existem somente dois ciclos de tamanhos distintos, o C_4 e o C_{3n} .

Desta forma, o grafo $QD(n)$ possuirá um ciclo de tamanho ímpar se e somente se n for um número ímpar, ou seja, $QD(n)$ é um grafo bipartido se e somente se n é um número par. \square

Conjectura 5.4. Se n for um múltiplo de quatro, então a multiplicidade do zero como autovalor é $n + 2$.

k	Espectro
2	$\{2.561, 1.561, 1, 0^{(2)}, -1, -1.561, -2.561\}$
3	$\{2.561, 2^{(2)}, 0.414^{(2)}, 0^{(3)}, -1, -1.561, -2.414^{(2)}\}$
4	$\{2.561, 2.236^{(2)}, 1.561, 1, 0^{(6)}, -1, -1.561, -2.236^{(2)}, -2.561\}$
5	$\{2.561, 2.350^{(2)}, 1.785^{(2)}, 0.722^{(2)}, 0^{(5)}, -0.250^{(2)}, -1, -1.561, -2.100^{(2)}, -2.508^{(2)}\}$
6	$\{2.561, 2.414^{(2)}, 2^{(2)}, 1.561, 1, 0.414^{(2)}, 0^{(6)}, -0.414^{(2)}, -1, -1.561, -2^{(2)}, -2.414^{(2)}, -2.561\}$
7	$\{2.561, 2.452^{(2)}, 2.141^{(2)}, 1.695^{(2)}, 0.838^{(2)}, 0.179^{(2)}, 0^{(7)}, -0.528^{(2)}, -1, -1.561, -1.924^{(2)}, -2.320^{(2)}, -2.534^{(2)}\}$
8	$\{2.561, 2.478^{(2)}, 2.236^{(2)}, 1.866^{(2)}, 1.561, 1, 0.611^{(2)}, 0^{(10)}, -0.611^{(2)}, -1, -1.561^{(2)}, -1.866^{(2)}, -2.236^{(2)}, -2.478^{(2)}, -2.561\}$
9	$\{2.561, 2.495^{(2)}, 2.302^{(2)}, 2^{(2)}, 1.649^{(2)}, 0.895^{(2)}, 0.414^{(2)}, 0^{(9)}, -0.139^{(2)}, -0.674^{(2)}, -1, -1.561, -1.821^{(2)}, -2.163^{(2)}, -2.414^{(2)}, -2.544^{(2)}\}$
10	$\{2.561, 2.508^{(2)}, 2.350^{(2)}, 2.100^{(2)}, 1.785^{(2)}, 1.561, 1, 0.722^{(2)}, 0.250^{(2)}, 0^{(10)}, -0.250^{(2)}, -0.722^{(2)}, -1, -1.561, -1.785^{(2)}, -2.100^{(2)}, -2.350^{(2)}, -2.508^{(2)}, -2.561\}$
11	$\{2.561, 2.517^{(2)}, 2.386^{(2)}, 2.176^{(2)}, 1.903^{(2)}, 1.623^{(2)}, 0.926^{(2)}, 0.558^{(2)}, 0.114^{(2)}, 0^{(11)}, -0.340^{(2)}, -0.761^{(2)}, -1, -1.561, -1.756^{(2)}, -2.046^{(2)}, -2.290^{(2)}, -2.462^{(2)}, -2.550^{(2)}\}$
12	$\{2.561, 2.524^{(2)}, 2.414^{(2)}, 2.236^{(2)}, 2^{(2)}, 1.732^{(2)}, 1.561, 1, 0.792^{(2)}, 0.414^{(2)}, 0^{(14)}, -0.414^{(2)}, -0.792^{(2)}, -1, -1.561, -1.732^{(2)}, -2^{(2)}, -2.236^{(2)}, -2.414^{(2)}, -2.524^{(2)}, -2.561\}$
13	$\{2.561, 2.529^{(2)}, 2.435^{(2)}, 2.282^{(2)}, 2.077^{(2)}, 1.835^{(2)}, 1.607^{(2)}, 0.946^{(2)}, 0.655^{(2)}, 0.288^{(2)}, 0^{(13)}, -0.096^{(2)}, -0.476^{(2)}, -0.817^{(2)}, -1, -1.561, -1.712^{(2)}, -1.959^{(2)}, -2.186^{(2)}, -2.366^{(2)}, -2.490^{(2)}, -2.553^{(2)}\}$
14	$\{2.561, 2.534^{(2)}, 2.452^{(2)}, 2.320^{(2)}, 2.141^{(2)}, 1.924^{(2)}, 1.695^{(2)}, 1.561, 1, 0.838^{(2)}, 0.528^{(2)}, 0.179^{(2)}, 0^{(14)}, -0.179^{(2)}, -0.528^{(2)}, -0.838^{(2)}, -1, -1.561, -1.695^{(2)}, -1.924^{(2)}, -2.141^{(2)}, -2.320^{(2)}, -2.452^{(2)}, -2.534^{(2)}, -2.561\}$
15	$\{2.561, 2.537^{(2)}, 2.466^{(2)}, 2.350^{(2)}, 2.193^{(2)}, 2^{(2)}, 1.785^{(2)}, 1.596^{(2)}, 0.958^{(2)}, 0.722^{(2)}, 0.414^{(2)}, 0.083^{(2)}, 0^{(15)}, -0.250^{(2)}, -0.572^{(2)}, -0.856^{(2)}, -1, -1.561, -1.681^{(2)}, -1.893^{(2)}, -2.100^{(2)}, -2.276^{(2)}, -2.414^{(2)}, -2.508^{(2)}, -2.555^{(2)}\}$
16	$\{2.561, 2.540^{(2)}, 2.478^{(2)}, 2.375^{(2)}, 2.236^{(2)}, 2.063^{(2)}, 1.866^{(2)}, 1.669^{(2)}, 1.561, 1, 0.871^{(2)}, 0.611^{(2)}, 0.312^{(2)}, 0^{(18)}, -0.312^{(2)}, -0.611^{(2)}, -0.871^{(2)}, -1, -1.561, -1.669^{(2)}, -1.866^{(2)}, -2.063^{(2)}, -2.236^{(2)}, -2.375^{(2)}, -2.478^{(2)}, -2.540^{(2)}, -2.561\}$
17	$\{2.561, 2.542^{(2)}, 2.487^{(2)}, 2.396^{(2)}, 2.272^{(2)}, 2.117^{(2)}, 1.938^{(2)}, 1.747^{(2)}, 1.589^{(2)}, 0.967^{(2)}, 0.772^{(2)}, 0.508^{(2)}, 0.221^{(2)}, 0^{(17)}, -0.073^{(2)}, -0.366^{(2)}, -0.644^{(2)}, -0.884^{(2)}, -1, -1.561, -1.658^{(2)}, -1.842^{(2)}, -2.030^{(2)}, -2.198^{(2)}, -2.338^{(2)}, -2.446^{(2)}, -2.519^{(2)}, -2.556^{(2)}\}$

k	Espectro
18	$\{2.561, 2.544^{(2)}, 2.495^{(2)}, 2.414^{(2)}, 2.302^{(2)}, 2.163^{(2)}, 2^{(2)}, 1.821^{(2)}, 1.649^{(2)}, 1.561, 1, 0.895^{(2)}, 0.674^{(2)}, 0.414^{(2)}, 0.139^{(2)}, 0^{(18)}, -0.139^{(2)}, -0.414^{(2)}, -0.674^{(2)}, -0.895^{(2)}, -1, -1.561, -1.649^{(2)}, -1.821^{(2)}, -2^{(2)}, -2.163^{(2)}, -2.302^{(2)}, -2.414^{(2)}, -2.495^{(2)}, -2.544^{(2)}, -2.561\}$
19	$\{2.561, 2.546^{(2)}, 2.502^{(2)}, 2.429^{(2)}, 2.328^{(2)}, 2.202^{(2)}, 2.053^{(2)}, 1.888^{(2)}, 1.718^{(2)}, 1.584^{(2)}, 0.973^{(2)}, 0.809^{(2)}, 0.581^{(2)}, 0.328^{(2)}, 0.066^{(2)}, 0^{(19)}, -0.197^{(2)}, -0.456^{(2)}, -0.699^{(2)}, -0.904^{(2)}, -1, -1.561, -1.641^{(2)}, -1.802^{(2)}, -1.972^{(2)}, -2.130^{(2)}, -2.268^{(2)}, -2.382^{(2)}, -2.469^{(2)}, -2.528^{(2)}, -2.557^{(2)}\}$
20	$\{2.561, 2.548^{(2)}, 2.508^{(2)}, 2.441^{(2)}, 2.350^{(2)}, 2.236^{(2)}, 2.100^{(2)}, 1.947^{(2)}, 1.785^{(2)}, 1.635^{(2)}, 1.561, 1, 0.913^{(2)}, 0.722^{(2)}, 0.494^{(2)}, 0.250^{(2)}, 0^{(22)}, -0.250^{(2)}, -0.494^{(2)}, -0.722^{(2)}, -0.913^{(2)}, -1, -1.561, -1.635^{(2)}, -1.785^{(2)}, -1.947^{(2)}, -2.100^{(2)}, -2.236^{(2)}, -2.350^{(2)}, -2.441^{(2)}, -2.508^{(2)}, -2.548^{(2)}, -2.561\}$

Tabela 3: Espectro quase diamantes via python

k	Polinômio Característico
2	$(x - 1)(x + 1)x^2(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)$
3	$(x + 1)(x - 2)^2x^3(x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 1)^2$
4	$(x - 1)(x + 1)x^6(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)(x^2 - 5)^2$
5	$(x + 1)x^5(x^2 - x - 4)(x^6 - 10x^4 + 2x^3 + 25x^2 - 10x - 4)^2$
6	$(x - 1)(x + 1)(x - 2)^2(x + 2)^2x^6(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)(x^2 - 2x - 1)^2(x^2 + 2x - 1)^2$
7	$(x + 1)x^7(x^2 - x - 4)(x^9 - 15x^7 + 2x^6 + 75x^5 - 20x^4 - 133x^3 + 50x^2 + 40x - 8)^2$
8	$(x - 1)(x + 1)x^{10}(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)(x^2 - 5)^2(x^6 - 10x^4 + 25x^2 - 8)^2$
9	$(x + 1)(x - 2)^2x^9(x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 1)^2(x^9 - 15x^7 + 75x^5 - 137x^3 + 60x + 8)^2$
10	$(x - 1)(x + 1)x^{10}(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)(x^6 - 10x^4 - 2x^3 + 25x^2 + 10x - 4)^2(x^6 - 10x^4 + 2x^3 + 25x^2 - 10x - 4)^2$
11	$(x + 1)x^{11}(x^2 - x - 4)(x^{15} - 25x^{13} + 2x^{12} + 250x^{11} - 40x^{10} - 1266x^9 + 300x^8 + 3365x^7 - 1024x^6 - 4325x^5 + 1490x^4 + 2048x^3 - 600x^2 - 240x + 32)^2$
12	$(x - 1)(x + 1)(x - 2)^2(x + 2)^2x^{14}(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)(x^2 - 2x - 1)^2(x^2 - 5)^2(x^2 - 3)^2(x^2 + 2x - 1)^2(x^4 - 7x^2 + 4)^2$
13	$(x + 1)x^{13}(x^2 - x - 4)(x^{18} - 30x^{16} + 2x^{15} + 375x^{14} - 50x^{13} - 2520x^{12} + 500x^{11} + 9775x^{10} - 2532x^9 - 21750x^8 + 6730x^7 + 25721x^6 - 8650x^5 - 13460x^4 + 4096x^3 + 2400x^2 - 480x - 64)^2$
14	$(x - 1)(x + 1)x^{14}(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 4)(x^9 - 15x^7 - 2x^6 + 75x^5 + 20x^4 - 133x^3 - 50x^2 + 40x + 8)^2(x^9 - 15x^7 + 2x^6 + 75x^5 - 20x^4 - 133x^3 + 50x^2 + 40x - 8)^2$

k	Polinômio Característico
15	$(x+1)(x-2)^2x^{15}(x^2-x-4)(x^2+2x-1)^2(x^6-10x^4+2x^3+25x^2-10x-4)^2(x^{12}-20x^{10}-2x^9+150x^8+30x^7-516x^6-150x^5+785x^4+282x^3-400x^2-160x+16)^2$
16	$(x-1)(x+1)x^{18}(x^2-x-4)(x^2+x-4)(x^2-5)^2(x^6-10x^4+25x^2-8)^2(x^{12}-20x^{10}+150x^8-516x^6+785x^4-400x^2+32)^2$
17	$(x+1)x^{17}(x^2-x-4)(x^{24}-40x^{22}+2x^{21}+700x^{20}-70x^{19}-7028x^{18}+1050x^{17}+44590x^{16}-8798x^{15}-185500x^{14}+44950x^{13}+507740x^{12}-143250x^{11}-892300x^{10}+279070x^9+951625x^8-311050x^7-558140x^6+174000x^5+156400x^4-40512x^3-16000x^2+2560x+256)^2$
18	$(x-1)(x+1)(x-2)^2(x+2)^2x^{18}(x^2-x-4)(x^2+x-4)(x^2-2x-1)^2(x^2+2x-1)^2(x^9-15x^7+75x^5-137x^3+60x-8)^2(x^9-15x^7+75x^5-137x^3+60x+8)^2$
19	$(x+1)x^{19}(x^2-x-4)(x^{27}-45x^{25}+2x^{24}+900x^{23}-80x^{22}-10532x^{21}+1400x^{20}+79870x^{19}-14056x^{18}-410550x^{17}+89180x^{16}+1452836x^{15}-371000x^{14}-3520900x^{13}+1015480x^{12}+5699625x^{11}-1784600x^{10}-5874405x^9+1903250x^8+3569200x^7-1116280x^6-1146000x^5+312800x^4+161280x^3-32000x^2-6400x+512)^2$
20	$(x-1)(x+1)x^{22}(x^2-x-4)(x^2+x-4)(x^2-5)^2(x^6-10x^4-2x^3+25x^2+10x-4)^2(x^6-10x^4+2x^3+25x^2-10x-4)^2(x^{12}-20x^{10}+150x^8-520x^6+825x^4-500x^2+80)^2$

Tabela 4: Polinômio característico dos quase diamantes via python

6 Considerações finais

De acordo com o Algoritmo da Decomposição Simétrica, dado em [1], podemos decompor as matrizes associadas a certos grafos, que possuem conjuntos simétricos associados, em matrizes de ordem menor, mas sem alterar o espectro desses grafos. Dessa forma, trabalhamos com uma matriz diagonal em blocos, mas sem alterar o espectro da matriz.

Após escolhermos conjuntos simétricos para essas famílias de grafos apresentadas nesse trabalho, anéis de diamantes e quase-diamantes, chegamos a uma generalização da matriz de adjacência desses grafos, porém agora com uma estrutura que respeita a estrutura dada em \mathcal{M} . E assim, após usar o Algoritmo da Decomposição Simétrica, temos uma matriz diagonal em blocos, onde o espectro dessa matriz é a união do espectro dos seus blocos. Com isso conhecemos uma parte do espectro dessas famílias dado pela matriz $B - C$, associada a cada família respectivamente.

A outra parte do problema é calcular o polinômio característico associado a matriz M' dada, uma solução foi aplicar a desigualdade de Schur, e com isso chegamos a um determinante, cuja as matrizes envolvidas foram generalizadas. Uma discussão futura é chegar a uma generalização do polinômio característico que vem justamente desse cálculo.

Fizemos simulações das famílias anéis de diamantes e quase-diamantes em *software* como: *python* e *newGraph*, e após essas simulações obtivemos resultados sobre o espectro dessas famílias e conjecturamos outros resultados. Para trabalhos futuros, sugerimos determinar o espectro dessas famílias e mais outras possíveis aplicações.

Referências

- 1 FRITSCHER, E.; TREVISAN, V. Exploring symmetries to decompose matrices and graphs preserving the spectrum. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 37, p. 260–289, jan. 2016. Citado 10 vezes nas páginas [viii](#), [1](#), [21](#), [23](#), [26](#), [28](#), [31](#), [32](#), [33](#) e [71](#).
- 2 ABREU, M. et al. A note on 2-bisections of claw-free cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 244, p. 214–217, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [34](#).
- 3 SANG-IL, O. Perfect matchings in claw-free cubic graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, v. 18, 2011. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [34](#).
- 4 PALMER, E.; READ, R.; ROBINSON, R. Counting claw-free cubic graphs. *SIAM J. Discrete Math*, n. 16, p. 62–73, 2002. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [34](#).
- 5 MINTY, G. J. On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Ser*, v. 28, p. 284–304, 1980. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [34](#).
- 6 MAFFRAY, F.; REED, B. A description of claw-free perfect graphs. *J. Combinatorial Theory, Ser*, v. 75, p. 134–156, 1999. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [34](#).
- 7 GILES, R.; TROTTER, L. On stable set polyhedra for $k_1,3$ -free graphs. *J. Combinatorial Theor, Ser*, v. 31, p. 313–326, 1981. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [34](#).
- 8 HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1992. Citado 2 vezes nas páginas [3](#) e [10](#).
- 9 SO, W. Commutativity and spectra of hermitian matrices. *Linear Algebra Appl.*, v. 212–213, p. 121–129, 1994. Citado na página [3](#).
- 10 LÜTKEPOHL, H. *Handbook of Matrices*. 1. ed. New York: Wiley & Sons, 1996. Citado na página [3](#).
- 11 MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado 3 vezes nas páginas [3](#), [12](#) e [18](#).
- 12 BUENO, H. P. *Álgebra Linear: Um Segundo Curso*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado na página [3](#).
- 13 FIEDLER, M. *Special Matrices and their Applications in Numerical Mathematics*. 2. ed. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2008. Citado na página [3](#).
- 14 FALLAT, S. M.; JOHNSON, C. R. *Totally Nonnegative Matrices*. Princeton and Oxford: University Press, 2011. Citado na página [3](#).
- 15 ALHEVAZ, A. et al. On the distance signless laplacian spectrum of graphs. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, v. 42, p. 2603–2621, 2019. Citado na página [11](#).
- 16 CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [18](#) e [19](#).

-
- 17 MERRIS, R. Laplacian graph eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications*, v. 278, p. 221–236, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- 18 BRONDANI, A. et al. A -spectrum of a firefly graph. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 346, p. 209–219, 08 2019. Citado na página 20.

Anexos

ANEXO A – Programas

A.1 Anéis de Diamantes

```

1 import numpy as np
import os.path as arc
3
#Criando D(1)
5 G=Graph()
G.add_vertices([1,2,3,4])
7 G.add_edge((1,2))
G.add_edge((1,3))
9 G.add_edge((1,4))
G.add_edge((2,3))
11 G.add_edge((3,4))

13 aux_arestas=G.edges()
aux_vertices=G.vertices()
15 k=int(input("\n Quantidade de diamantes:"))

17 #quantidade de arestas de D(1) vezes o numero de diamantes +k que sao as
    conexoes dos diamantes
a=k*(len(aux_arestas))+k
19 print("\n Quantidade de arestas", a, "\n")

21 #quantidade de vertices de D(1) vezes o numero de diamantes, da a
    quantidade de D(k)
v=k*(len(aux_vertices))
23 print("\n Quantidade de vertices",v, "\n")

25
#Como nao foi passado nenhum argumento nao temos multigrafo, para tal segue
    o comando: Graph(multiedges=True)
27 G_new=Graph()

29 p=0 #iniciando p, o responsavel por dizer quem sao os elementos do conjunto
    de vertices impares

31 q=2 #iniciando q, o responsavel por dizer quem sao os elementos do conjunto
    de vertices pares

33 for i in range (1,v+1): #v+1 para imprimir o valor de a, pois o for so
    imprime ate v-1
    if(i> (3+4*p)): #essa condicao para trocar o valor de p, quando
        comecemos a analisar os vertices impares do outro D(k)
35         p=p+1

37         for j in range (1,v+1):
            if( i in {(1+4*p),(3+4*p)} and (1+4*p)<=j <=(4*(p+1)) and i!=j and
                0<=p<=k-1):

```

```

39     G_new.add_edge(i , j)

41     #aresta de conexao entre o vertice 2 e o ultimo vertice
elif ( i==2 and j==(4*k) ) :
43     G_new.add_edge(i , j)

45     #aresta de conexao entre os vertices pares exceto o 2 e o ultimo
        vertice
elif ( i==2*q and j==2*(q+1) and 2<=q<=2^(k-1) ) :
47     G_new.add_edge(i , j)
        q=q+2
49
matriz=G_new.adjacency_matrix()
51 print(matriz)

53 autovalores=matriz.eigenvalues()
print("\n Spectrum=" , autovalores)
55
pol=matriz.characteristic_polynomial()
57 pol=pol.factor()#fatorar o polinomio
print("\n Polinomio:" , pol)
59
G_new.plot()

```

A.2 Quase Diamantes

```

1 import numpy as np
import os.path as arc
3
#Criando C4
5 G=Graph()
G.add_vertices([1 , 2 , 3 , 4])
7 G.add_edge((1 , 2))
G.add_edge((1 , 4))
9 G.add_edge((2 , 3))
G.add_edge((3 , 4))
11
aux_arestas=G.edges()
13 aux_vertices=G.vertices()

15 k=int(input("\n Quantidade de Ciclos C4:"))

17 a=k*(len(aux_arestas))+k #quantidade de arestas de C4 vezes o num de ciclos
+k que sao as conexoes dos ciclos
print("\n Quantidade de arestas" , a , "\n")
19

```



```

v=k*(len(aux_vertices)) #quantidade de vertices de C4 vezes o num de ciclos
, quantidade de vertices de QD(k)
21 print("\n Quantidade de vertices ",v, "\n")

23 #Como nao foi passado nenhum argumento nao temos multigrafo, para tal segue
o comando: Graph(multiedges=True)
G_new=Graph()
25
p=0 #iniciando p, o responsavel por dizer quem sao os elementos do conjunto
de vertices impares
27
q=2 #iniciando q, o responsavel por dizer quem sao os elementos do conjunto
de vertices pares
29
for i in range (1,v+1): #v+1 para imprimir o valor de a, pois o for
imprime ate v-1
31 if(i> (3+4*p)): #essa condicao para trocar o valor de p, quando
comecamos a analisar os vertices impares do outro C4
p=p+1
33 for j in range (1,v+1):
if( i in {(1+4*p),(3+4*p)} and (1+4*p)<=j <=(4*(p+1)) and i!=j and j
not in {(1+4*p),(3+4*p)} and 0<=p<=k-1):
35 G_new.add_edge(i,j)

37 #aresta de conexao entre o vertice 2 e o ultimo vertice
elif(i==2 and j==(4*k)):
39 G_new.add_edge(i,j)

41 #aresta de conexao entre os vertices pares exceto o 2 e o ultimo
vertice
elif(i==2*q and j==2*(q+1) and 2<=q<=2^(k-1)):
43 G_new.add_edge(i,j)
q=q+2
45
matriz=G_new.adjacency_matrix()
47 #print(matriz)

49 autovalores=matriz.eigenvalues()
autovalores.sort(reverse = True)
51 print("\n Spectrum=",autovalores)

53 pol=matriz.characteristic_polynomial()
pol=pol.factor()
55 print("\n Polinomio:", pol)

57 G_new.plot()

```