UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
CIÊNCIAS ECONÔMICAS

AMANDA ALVES DE ALBUQUERQUE

HEDGE DE PORTFÓLIO DE AÇÕES COM FUTURO DE ÍNDICE

NITERÓI, RJ
2020

AMANDA ALVES DE ALBUQUERQUE

HEDGE DE PORTFÓLIO DE AÇÕES COM FUTURO DE ÍNDICE

Monografia apresentada ao Programa de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Economia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas

Campo de Confluência: Economia e Finanças

Orientador:
Prof. Dr. André Barbosa Oliveira

Niterói, RJ

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BEC
Gerada com informações fornecidas pelo autor

A345h Albuquerque, Amanda Alves de
HEDGE DE PORTFÓLIO DE AÇÕES COM FUTURO DE ÍNDICE / Amanda Alves de Albuquerque ; André Barbosa Oliveira, orientador. Niterói, 2020.
58 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Econômicas)-Universidade Federal Fluminense, Faculdade de Economia, Niterói, 2020.

1. Economia. 2. Finanças. 3. Produção intelectual. I. Oliveira, André Barbosa, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Faculdade de Economia. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

AMANDA ALVES DE ALBUQUERQUE

HEDGE DE PORTFÓLIO DE AÇÕES COM FUTURO DE ÍNDICE

Monografia apresentada ao Programa de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Economia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas

Campo de Confluência: Economia e Finanças

Aprovada em 20 de outubro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. André Barbosa Oliveira – UFF
Orientador

____
Prof. Dr. Luis Filipe Rossi – UFF

____
Prof. Dr. Jesus Alexei Luizar Obregon – UFF

Niterói, RJ

2020

Aos meus pais, Fátima e Roberto

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por estar sempre comigo e ser a razão do meu viver. Seu amor me dá forças quando eu quero desistir dos meus sonhos e Sua presença me acompanha aonde quer que eu vá. Sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais por serem meus melhores amigos, minha vida, e por me apoiarem incondicionalmente. Obrigada por serem presentes, por sempre me ouvirem e por me acompanharem em cada etapa da faculdade e deste trabalho. Acima de tudo, obrigada pelo seu amor. Vocês me fazem feliz o tempo todo e concluem esta etapa junto comigo.

Ao meu orientador pelo incentivo, dedicação e entusiasmo com que embarcou neste projeto comigo. Sou grata pela confiança depositada no meu trabalho, por me manter motivada e por todo o conhecimento que me passou ao longo desses últimos anos. Sem dúvidas, sua orientação, assim como suas aulas, foram fundamentais para a minha vida acadêmica e profissional.

À Universidade Federal Fluminense pela qualidade do ensino que me proporcionou, pela oportunidade de realizar um intercâmbio acadêmico e por todas as atividades extracurriculares das quais pude fazer parte durante a graduação.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

RESUMO

O *hedge* ótimo de um portfólio de ações com contratos futuros de índice é o problema central da análise deste trabalho. Estudamos a otimização de uma carteira de mínima variância e sua proteção ótima com contratos futuros de Ibovespa em dois anos, um de baixa e um de alta performance da bolsa. Estimamos duas razões de *hedge* para a carteira de variância mínima, *hedge* beta e *hedge* ótimo, e comparamos com o *hedge* ótimo da carteira passiva que replica o índice Ibovespa. Como resultado, o *hedge* foi efetivo em reduzir o risco dos retornos do portfólio de ações e da carteira passiva, diminuindo a variância da CVM em 70% e a variância do Ibovespa em mais de 90%.

Palavras-chave: Otimização de Carteiras; Derivativos; Contratos Futuros; *Hedge*.

ABSTRACT

The optimal hedge of a stock portfolio with index futures contracts is the central problem of analysis of this thesis. We study the optimization of a minimum variance portfolio and its optimal protection with Ibovespa's futures in two years, one of low and another of high performance of the stock exchange. We estimate two hedge ratios for the minimum variance portfolio, beta hedge and optimal hedge, and we compare them with the optimal hedge of the passive portfolio that replicates the Ibovespa index. As a result, the hedge was effective in reducing the risk in the returns of both the stock portfolio and the passive portfolio, decreasing the variance of the MPV by 70% and the variance of the Ibovespa by more than 90%.

Keywords: Portfolio Optimization; Derivatives; Futures Contracts; Hedge.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O desafio central para investidores é a tomada de decisão sob incerteza. Ao empregar ou manter seu capital em um ativo financeiro, seja este uma ação, um título de renda fixa ou uma moeda estrangeira, o investidor faz sua escolha sem saber o que acontecerá no futuro. Independentemente do número de informações que um investidor considere ao tomar sua decisão, sempre haverá fatores indeterminados que poderão afetar a performance futura de seus investimentos.

Informações econômicas e financeiras mudam ao longo do tempo e suas consequências afetam os retornos futuros de investimentos. Ademais, influências não econômicas podem mudar o curso geral da economia, do mercado financeiro e de ativos em particular. Eventos como mudanças de políticas internas, tensões geopolíticas mundiais, mudanças climáticas e, até mesmo, epidemias são capazes de afetar a performance de investimentos sem aviso prévio.

Atualmente, a instabilidade econômica e a crise política vividas no Brasil nos anos recentes resultam em um ambiente volátil que expõe o investidor brasileiro à um cenário de maior incerteza. As grandes oscilações do mercado brasileiro são ainda agravadas por fatores externos, como a desaceleração do crescimento econômico mundial.

Diante de cenários instáveis, decisões que concernem ao processo de escolha do investidor devem ser estudadas de forma criteriosa. Deve-se primeiro delimitar os ativos disponíveis, em seguida estabelecer critérios de seleção e níveis de risco aceitáveis pelo investidor e, finalmente, solucionar o problema de forma ótima.

O objetivo de um portfólio de investimentos é alcançar um equilíbrio adequado entre risco e retorno (MARKOWITZ, 1959), de acordo com as restrições e os objetivos de cada investidor, seja ele institucional ou privado. Esta gestão deve ser feita a partir da análise de uma longa lista de ativos potenciais e deve terminar em um portfólio completo. Vale ressaltar que, durante esse processo de otimização, muitos ativos são deixados de lado e acabam não aparecendo no portfólio final.

Uma das proposições básicas da teoria de carteiras e análise de investimentos é que investidores racionais esperam altos retornos, mas não estão dispostos a correr altos riscos. A incerteza relacionada a um dado investimento pode ser usada como uma medida do seu risco. Uma das maneiras possíveis de diminuir riscos de uma carteira de ações é através da diversificação (ELTON *et al.*, 2012), caracterizada pelo investimento em ativos de diferentes setores. Entretanto, o efeito da diversificação na diminuição do risco de um portfólio de ações é limitado pelo risco sistemático, dado pela volatilidade do mercado de ações e pela conjuntura econômica.

Dessa forma, para complementar a gestão dos riscos de uma carteira ou de um ativo, investidores podem utilizar um instrumento chamado derivativo. Estes são ativos financeiros cujos preços derivam de preços ou taxas de outros ativos ou instrumentos financeiros (HULL, 2016). O processo em que um agente utiliza derivativos para proteger a sua carteira contra a oscilação dos preços dos ativos é chamado de *hedge*.

Agentes que investem em carteiras de renda variável podem proteger suas posições contra variações dos preços das ações utilizando um tipo de derivativo chamado de contrato futuro de índice do mercado de ações. É possível comprar um número ótimo de contratos para diminuir o risco de um portfólio. O *hedge* com contrato futuro de índice diminui o risco sistemático e complementa a diversificação, resultando em uma gestão de risco mais efetiva.

O objetivo deste trabalho é estimar empiricamente e testar a eficácia do *hedge* ótimo de proteção contra riscos para um portfólio de ações utilizando contratos futuros de índice. Para isso, otimizamos um portfólio de ações que servirá como base para a operação de *hedge*. Em seguida, a carteira encontrada será utilizada para testar a eficácia do uso de contratos futuros para proteção contra riscos.

Esta monografia realiza dois trabalhos empíricos: primeiro, determinar uma carteira de variância mínima (CVM) no mercado de ações brasileiro; segundo, estimar como fazer a proteção ótima dessa carteira com derivativos. O trabalho visa contribuir ao conhecimento sobre derivativos ao estimar um modelo de *hedge* ótimo para um portfólio de ações incluindo menores graus de aversão ao risco de forma a alcançar proteção da carteira. O estudo empírico será realizado com ações do mercado brasileiro como base para os ativos utilizados na alocação de uma carteira ótima. Derivativos, em especial o contrato futuro de Ibovespa, são o instrumento para operar *hedge* ótimo.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 é feito uma revisão sobre a moderna teoria do portfólio e no capítulo 2 é desenvolvida uma revisão sobre derivativos e o uso de contratos futuros para *hedge*. No capítulo 3, é apresentado a descrição dos dados e a metodologia, enquanto no capítulo 4 é realizada a análise empírica. Depois seguem as considerações finais onde são comentados os resultados do trabalho.

1 MODERNA TEORIA DO PORTFÓLIO

A moderna teoria do portfólio desenvolvida por Markowitz (1952, 1959) estabeleceu uma abordagem inovadora sobre a maneira que investidores podem maximizar seu retorno esperado de acordo para um determinado nível de risco. O resultado desta otimização é a fronteira eficiente, a partir da qual é possível estabelecer inúmeros portfólios maximizando a utilidade do investidor.

Este capítulo está desenvolvido da seguinte forma: a primeira seção apresenta as definições de retorno, risco e diversificação; a segunda seção define e ilustra a fronteira eficiente e o critério média-variância; por fim, a terceira seção apresenta dois importantes portfólios, a carteira de variância mínima e o portfólio tangente.

1.1 Retorno, Risco e Diversificação

Retornos são medidos pela soma das mudanças de preço de mercado de um ativo mais qualquer rendimento pago em um determinado prazo dividos pelo preço desse ativo no início do período. Ganhos e perdas são representados por resultados positivos e negativos, respectivamente pela expressão:

$$Retorno_t = \frac{Preço_t - Preço_{t-1} + Dividendos_t}{Preço_{t-1}}.$$

De maneira geral, o retorno futuro de um ativo depende de dois componentes: o retorno esperado, não conhecido *ex-ante*, dado pelas informações que os investidores têm sobre o ativo e de tudo que influenciará sua performance, e o retorno incerto, resultante de surpresas que não podem ser previstas. A parte inesperada do retorno é o verdadeiro risco do investimento (ROSS *et al.*, 2015).

O *retorno esperado* de um investimento está sujeito à fatores incertos e imprevisíveis, logo o resultado de qualquer ativo financeiro não é conhecido. Os resultados normalmente são representados por uma função de frequência, uma lista com todos os resultados possíveis e a probabilidade de ocorrência de cada um (ELTON *et al.*, 2012). Contudo, retornos esperados são eventos incertos e seus resultados possíveis estão sujeitos ao que investidores e analistas financeiros *acreditam ser provável* de ocorrer e não à probabilidades objetivas (MARKOWITZ, 1959).

A medida utilizada para o retorno, de um único ativo ou de uma carteira de ativos, é o valor esperado dos resultados. Estatisticamente, é a esperança ou média dos retornos. Em finanças, a média é considerada uma medida apropriada para a tendência central.

O retorno de um ativo *i* é uma variável aleatória que pode assumir um número finito de valores possíveis: R_{i1}, R_{i2}, R_{i3}, ..., R_{iM}. A probabilidade associada a cada valor finito possível de *i* é P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, ..., P_{iM}. Logo, o valor esperado do retorno de *i* pode ser expresso como:

$$\overline{R_i} = E(R_i) = R_{i1}P_{i1} + R_{i2}P_{i2} + R_{i3}P_{i3} + \cdots + R_{iM}P_{iM}.$$

Simplificando a fórmula acima, expressa-se o retorno esperado de *i* como o somatório do produto entre o *j*-ésimo retorno possível e sua probabilidade de ocorrência:

$$\overline{R_i} = E(R_i) = \sum_{j=1}^{M} R_{ij}P_{ij} \qquad (1)$$

Através da análise do quanto os resultados diferem do retorno médio, temos a dispersão da distribuição. A medida de dispersão para cada retorno possível é $R_{ij} - \overline{R_i}$. É plausível determinar uma medida geral da dispersão de um ativo i tomando a média dessas diferenças para cada resultado possível. Entretanto, a média dessas diferenças será exatamente zero, dado que os desvios positivos anulam os desvios negativos (ELTON *et al.*, 2012). Em finanças esse problema é usualmente resolvido elevando ao quadrado cada diferença antes de fazer a média, resultando assim na *variância* dos retornos.

A fórmula da variância de um ativo *i* é dado pelo somatório do produto entre o quadrado das diferenças para cada j-ésimo retorno possível e sua probabilidade de ocorrência tem a expressão:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M} [P_{ij}\left(R_{ij} - \overline{R_i}\right)^2] \qquad (2)$$

Se a dispersão for muito grande, os retornos possíveis serão muito incertos. Por outro lado, uma distribuição cujos retornos estão a poucos pontos da média será bastante concentrada, e os retornos serão menos incertos. As medidas mais comuns de dispersão são a variância e o desvio-padrão, que é simplesmente a raiz quadrada da variância e indicado como σ_i. Como o risco está altamente associado à incerteza, medidas de dispersão serão tratadas como medidas de risco.

Vários fatores podem afetar o risco de um ativo financeiro, sendo os principais: (i) a maturidade do instrumento financeiro; (ii) as características de risco e a credibilidade do emissor do investimento; (iii) a liquidez do ativo e o tipo de mercado em que ele é comercializado (ELTON *et al.*, 2012).

As estatísticas de média e variância são utilizadas para caracterizar a distribuição de frequência dos ativos e, portanto, para comparar ativos e até mesmo carteiras de investimento.

Considerando as preferências dos investidores descritas pela utilidade média-variância, agentes iriam preferir ativos que tivessem o maior retorno esperado, desde que o desvio padrão se mantivesse constante. Da mesma forma, dado um retorno esperado constante, investidores iriam preferir ativos com o menor desvio padrão, uma vez que quanto menor o desvio padrão, menor o grau de incerteza e menor o risco.

Na prática, investidores não escolhem apenas ativos individuais para alocar seu capital, mas sim uma combinação de variados ativos e instrumentos financeiros disponíveis no mercado. Ao investir seu dinheiro em uma combinação de ativos, o investidor aumenta a complexidade do problema.

O retorno de uma carteira de investimentos é simplesmente uma média ponderada do retorno dos ativos individuais, onde os retornos das ações são variáveis aleatórias e os pesos dados a cada uma dessas variáveis são fixados pelo investidor e não aleatórios. O peso de cada retorno representa o quanto da carteira foi investido em um determinado ativo. Em um portfólio com N ativos de risco, o vetor de pesos pode ser representado como:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \dots \\ W_N \end{bmatrix}$$

O retorno esperado do portfólio é a média ponderada do retorno esperado dos ativos individuais e está, inevitavelmente, entre o maior e o menor retorno médio dos ativos que o compõem. Retomando o valor esperado dos ativos individuais i e aplicando ao retorno do portfólio, encontra-se:

$$\overline{R_P} = E(R_P) = \sum_{i=1}^{N} (W_i \; \overline{R_\iota}) \qquad (3)$$

onde $\overline{R_\iota}$ é o retorno definido na equação (1) linhas acima.

Já o risco da carteira é mais complexo. A variância de um portfólio é dada pela variância de cada ativo e pela covariância de cada combinação de ativos. Com frequência, a seleção de uma combinação adequada entre ativos produz risco menor do que o risco individual de cada ativo (ELTON *et al.*, 2012). O risco da carteira pode ser muito diferente do risco dos ativos individuais que a compõem. A variância mede quão próximo do seu valor esperado é provável que uma variável aleatória esteja. No caso de finanças, a variância mede o grau de incerteza associada a um evento futuro e é a melhor medida do risco.

A fórmula da variância de um portfólio de dois ativos pode ser expressa como:

$$\sigma_P^2 = W_1^2\sigma_1^2 + W_2^2\sigma_2^2 + 2W_1W_2\sigma_{12} \tag{4}$$

onde σ_{12} representa a covariância entre o ativo 1 e o ativo 2.

Essa fórmula da variância pode ser expandida para um portfólio com mais de dois ativos, podendo ser estendida para qualquer número N de ativos. A fórmula para N ativos é definida como:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(W_j^2\sigma_j^2\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N}\left(W_jW_k\sigma_{jk}\right) \tag{5}$$

onde σ_{jk} representa a covariância dos ativos j e k.

É possível dividir o risco de um ativo em dois componentes. O primeiro é o *risco sistemático*, caracterizado por surpresas originadas no mercado em que o ativo é comercializado, como anúncios sobre taxa de juros e nível de atividade, e que influenciam um grande número de ativos, em menor ou maior grau. O segundo é o *risco específico* ou *risco não sistemático*, caracterizado por surpresas que afetam um único ativo ou um pequeno grupo de ativos, geralmente pertencentes ao mesmo setor e altamente correlacionados (ROSS *et al.*, 2015).

A covariância dos ativos j e k, representada como σ_{jk}, mostra como seus retornos se movem em conjunto. Ao dividir a covariância entre dois ativos pelo produto de seus desvios-padrão, encontra-se a correlação, expressa como:

$$\rho_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\sigma_j\sigma_k} \tag{6}$$

Esta medida é útil por mensurar uma relação linear entre dois ativos que varia entre +1 e -1. Ativos que têm resultados na mesma direção ao mesmo tempo, bons ou ruins, são positivamente correlacionados. Já ativos que têm resultados opostos ao mesmo tempo são negativamente correlacionados. Caso esses movimentos não tenham relação linear entre si, a correlação é zero. De maneira geral, ativos de um mesmo setor produtivo são positivamente correlacionados. Isso ocorre devido às semelhanças econômicas e financeiras entre suas entidades emissoras.

Em mercados onde os ativos não são independentes e suas correlações não são perfeitamente positivas, ou seja, $\rho < 1$, o risco do portfólio torna-se menor do que média ponderada dos desvios padrão dos ativos individuais (ROSS *et al.*, 2015). É intuitivo perceber que isso é verdade para ativos negativamente correlacionados, uma vez que as perdas de um ativo seriam anuladas pelos ganhos de outro, diminuindo a dispersão da distribuição da carteira. Contudo, esse efeito também ocorre quando os ativos são positivamente correlacionados, bastando que essa correlação positiva entre pares de ativos não seja perfeita. Dessa forma, a diversificação diminui o risco da carteira e é válida enquanto houver uma correlação menor do que a perfeita, $\rho < 1$.

Markowitz (1952) sugere que a diversificação, caracterizada pelo investimento em ativos de diferentes setores, seria a maneira correta de diminuir riscos não sistemáticos. Isso ocorre porque fatores surpresa afetam indústrias com diferentes características econômicas de maneiras distintas, fazendo com que o risco não sistemático de um portfólio diversificado seja menor do que o risco não sistemático dos ativos individuais. Entretanto, há um limite para a diversificação, uma vez que ela não elimina a contribuição dos termos de covariância para o risco total do portfólio (ELTON *et al.*, 2012) e não elimina o risco sistemático, caracterizado pela volatilidade do mercado em que os ativos são negociados.

1.2 Fronteira Eficiente e Critério Média-Variância

Markowitz (1952, 1959) desenvolveu um trabalho inovador que ajudou a moldar como a relação entre o risco e retorno dos ativos é pensada em finanças. Dado a regra de retornos esperados/variância dos retornos, que Markowitz define como regra (E-V), investidores devem escolher portfólios que estejam sobre a fronteira eficiente, maximizando a relação retorno/risco.

De acordo com as definições estatísticas de média e variância é possível ilustrar em um gráfico bidimensional a relação entre risco e retorno de carteiras de ativos e compará-las entre si. Cada carteira deve obedecer a uma restrição de alocação onde o somatório dos pesos de cada ativo totaliza a integralidade do montante investido. Esta regra é expressa como

$$W_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, N \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} W_i = 1 \tag{8}$$

Os portfólios possíveis são os que satisfazem as condições das expressões (7) e (8) acima. Estes portfólios são *long-only*, ou seja, não admitem ativos com pesos negativos. Nestes portfólios, o investidor está comprado nos ativos financeiros que compõem a carteira. Essa é uma restrição que facilita a otimização.

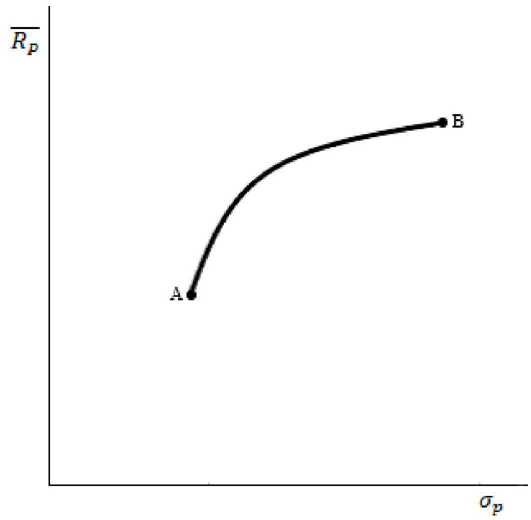
Na prática, após a seleção dos ativos nos quais deseja-se investir, o problema do investidor acaba sendo delimitado à um número finito de portfólios. Dessa forma, a representação das combinações possíveis torna-se mais fácil. A escolha dos ativos não ocorre de acordo com suas características individuais, mas sim a partir do portfólio do qual fazem parte e de como performam nele em conjunto com o restante dos ativos. Nesse sentido, deve-se pensar no portfólio como um todo e não nos ativos individualmente.

É necessário relembrar que investidores têm preferência por maiores retornos e menores riscos. Novamente, o retorno e o risco de cada carteira são representados por seus retornos esperados e variâncias. Assim, deve-se encontrar carteiras que tenham os maiores retornos para cada nível de risco e que ofereçam menores riscos para cada nível de retorno.

Delimita-se, então, os *portfólios eficientes* nos quais um investidor racional consideraria alocar seu dinheiro. Um portfólio é ineficiente se houver um outro portfólio cujo retomo possível seja maior dado o mesmo grau de variabilidade ou se for possível obter o mesmo retorno com uma menor variação.

A *fronteira eficiente* consiste na curva côncava formada por todas as carteiras entre a carteira de *variância mínima global* (ponto *A*) e a carteira de máximo retorno (ponto *B*). Os agentes desejariam investir apenas em portfólios sobre a fronteira eficiente, sendo o conjunto restrição do problema de otimização de carteiras.

Figura 1. Fronteira eficiente



Fonte: elaboração própria

O portfólio deve ser escolhido segundo os objetivos do investidor e sua aversão ao risco. Portfólios mais seguros podem apresentar retornos demasiado baixos para um perfil de investidor, por outro lado, portfólios mais rentáveis podem ser incertos demais para um outro perfil de investidor. Logo, não há apenas um portfólio ótimos ao longo da fronteira eficiente. Cada uma das carteiras possíveis podem ser a solução para o problema de diferentes investidores.

1.3 Carteira de Variância Mínima (CVM) e Portfólio Tangente

A partir da análise da fronteira eficiente feita na seção anterior, destacam-se dois importantes portfólios: a carteira de variância mínima (CVM) e o portfólio tangente.

A carteira na fronteira eficiente que apresenta menor nível de risco é chamada de carteira de variância mínima global e está localizada no ponto mais à esquerda da fronteira. Já o portfólio tangente representa a solução do problema de otimização quando há concessão e tomada de empréstimos à taxa livre de risco.

Dado um universo de N ativos com retornos médios $\mu = (\mu_1 \dots \mu_N)'$ e matriz de covariância Ω, o problema de Markowitz, que define um portfólio na fronteira eficiente que minimiza o risco, concentra-se em encontrar o vetor de pesos $w = (w_1 \dots w_N)'$ para um nível de retorno médio desejado $\bar{r}$, solucionando o problema abaixo

$$\min_{w} w'\Omega w \text{ sujeito a } \Omega_i\, w_i = 1 \text{ e } w'\mu = \bar{r}$$

A carteira de variância mínima global é obtida através da otimização do problema de Markowitz, sem que a minimização do risco esteja sujeita a um determinado retorno esperado. É CVM é expressa como o a solução do problema abaixo:

$$\min_{w} w'\Omega w \text{ sujeito a } \Omega_i\, w_i = 1$$

A identificação do portfólio tangente, portfólio ótimo de ações em uma carteira com renda fixa e renda variável, a partir da análise de ativos de risco depende da estimação precisa dos retornos esperados dos ativos que o compõem, pois os retornos esperados são um fator necessário para a escolha dos pesos do portfólio. Tal estimação pode seguir crenças de probabilidade e informações nas quais analistas e investidores baseiam suas análises. Da mesma forma, não é possível estimar corretamente retornos esperados a partir de séries históricas de retorno, visto que performances passadas não representam de forma crível performances futuras.

A estimação de carteiras eficientes na prática depende da estimação dos retornos médios e da covariância entre os ativos. Merton (1980) demonstra que erros de estimação dos retornos médios impactam na escolha dos pesos, o que compromete o desempenho dessas carteiras nos períodos subsequentes. Assim, o uso de um portfólio tangente torna-se arriscado para investidores, pois seus erros de estimação tornam sua performance esperada pouco confiável.

Por outro lado, como a variância do portfólio não depende da expectativa dos retornos, uma carteira formada a partir da solução do problema de minimização de riscos torna-se uma solução mais segura, uma vez que não apresenta erros de estimação. Jagannathan & Ma (2003) sugerem que para contornar a dificuldade de estimação dos retornos médios é possível focar na estimação da matriz de covariância, ignorando as médias.

Inúmeros estudos sugerem que a Carteira de Variância Mínima (CVM) gera retornos relativos ao risco superiores no longo prazo do que outros métodos de estimação média-variância baseados na teoria de Markowitz.

De acordo com a moderna teoria do portfólio, carteiras com maior retorno devem apresentar maior volatilidade. Entretanto, Jagannathan & Ma (2003) mostram que uma CVM formada com ativos globais tem desempenho melhor do que o de carteiras obtidas com médias históricas de retorno. Clark et al. (2006) derivam empiricamente que este modelo domina a carteira de mercado. A explicação teórica é de que a minimização da variância limita a escolha da carteira às ações com menor β e que isto seria um indício da fraca dispersão entre β e retorno, como indica Fama & French (1992).

Três trabalhos recentes estudam o desempenho de CVMs no mercado brasileiro. Thomé *et al.* (2011) estudaram o desempenho de carteiras de variância mínima formadas com as ações do IBOVESPA entre 1998 e 2008, concluindo que se for estabelecido um limite de 10% para cada ação, a CVM apresenta um desempenho superior ao índice, mas inferior a uma carteira igualmente ponderada. Santos & Tessari (2012) avaliam CVMs ao longo de um período de dois anos, dando maior ênfase a diferentes métodos de estimação da matriz de covariância. Rubesam & Beltrame (2013) avaliam ações que não fazem parte do Ibovespa utilizando diferentes métodos de estimação da matriz de covariância, concluindo que métodos mais simples de estimação produzem melhores resultados e que a carteira de variância mínima apresenta maior retorno com menor volatilidade do que o Ibovespa e outras carteiras testadas.

Resultados empíricos como os citados acima revelam implicações práticas significativas e colocam em dúvida a relação tradicional entre risco e retorno. A principal implicação sobre a gestão de investimentos é que índices de mercado como o Ibovespa podem ser superados por estratégias simples e eficazes, sendo de fácil execução para investidores não profissionais. Dessa forma, Thomé *et al.* (2011) sugere que carteiras de variância mínima global seriam melhores benchmarks para a indústria de investimentos.

Devido à superioridade da carteira de variância mínima frente ao portfólio tangente e às outras carteiras da fronteira eficiente, como foi estabelecido na literatura de finanças, é que esta monografia fará apenas a estimação da CVM para encontrar um portfólio otimizado. Visto que o objetivo principal do trabalho é proteger a carteira de ações com *hedge* ótimo e não testar diferentes métodos de estimação de portfólios, é que apenas um método será usado como base.

Os erros de estimação de retornos médios frequentemente encontrados no portfólio tangente fazem com que esse não seja um método utilizado com frequência na literatura ou na prática. Por isso, o portfólio tangente ficará de fora do presente trabalho.

2 DERIVATIVOS E HEDGE

A definição de derivativos é bastante intuitiva. Estes são instrumentos financeiros cujos preços e valores dependem das características e valores de outros ativos financeiros. Os preços dos derivativos são associados aos preços ou taxas dessas outras variáveis subjacentes (SANTOS; SILVA, 2015).

Nas últimas décadas, derivativos tornaram-se uma parte fundamental no mundo das finanças, sendo utilizados por investidores coorporativos e individuais. O mercado de derivativos é enorme quando se contabiliza o seu número de ativos subjacentes, pois eles podem depender de praticamente qualquer variável (HULL, 2016). Há diferentes tipos de derivativos para uma enorme variedade de *commodities* como soja, boi-gordo, ouro, entre outros; e ativos financeiros como índices de ações, moedas e taxas de juros do Tesouro. Estes produtos podem ser negociados em mercados de bolsa ou em mercados de balcão.

As principais características dos derivativos são a alta alavancagem e a grande liquidez com que são negociados (SANTOS; SILVA, 2015). Em todo o mundo, os valores negociados em derivativos alcançam a casa dos trilhões de dólares, tornando-os extremamente relevantes e influentes sobre a economia e os mercados financeiros mundiais. Entretanto, é importante destacar que esses são valores de referência dos contratos e não podem ser comparados com valores absolutos de outros ativos, como ações. Essa diferença será explorada mais adiante no trabalho.

Derivativos são utilizados para alterar a exposição de um investidor ao risco. Estes instrumentos podem ser usados para proteção, especulação ou arbitragem. De acordo com o objetivo dado à uma operação com derivativos, o nível de risco do investimento pode ser reduzido ou elevado. Como já foi visto, investidores buscam ativamente formas de reduzir os riscos de suas operações, porém também visam altos lucros. A existência de agentes com objetivos e interesses divergentes é um dos fatores que possibilita a alta liquidez do mercado de derivativos. Quando um investidor decide assumir uma posição em um lado do contrato, frequentemente ele encontrará alguém disposto a assumir o outro lado do contrato (HULL, 2016).

Quando derivativos são utilizados para proteger um investimento do risco gerado por possíveis movimentações futuras do mercado, esta operação é classificada como *hedge*. Por outro lado, quando derivativos são usados para aumentar a exposição de um investimento ao risco através de operações baseadas em expectativas sobre a direção futura do mercado, esta operação é classificada como *especulação*. Por fim, quando um investidor detém posições correspondentes em ativos e derivativos para alcançar lucro sem risco, esta operação é classificada como *arbitragem*.

Neste capítulo será explorado como derivativos, em especial os contratos futuros de índice, podem ser utilizados para complementar a gestão de risco de um portfólio de ações. O capítulo está desenvolvido da seguinte forma: a primeira seção apresenta os diferentes tipos de derivativos e suas características; a segunda seção discorre sobre a história dos derivativos no Brasil e no mundo; a terceira seção explora a mecânica operacional dos mercados futuros; a quarta apresenta os conceitos de *hedge* com contratos futuros; a quinta seção desenvolve um modelo para *hedge* de um portfólio de ações; e, por fim, a sexta seção apresenta maneiras de medir a eficácia do *hedge* de um portfólio de ações.

2.1 Principais Tipos de Derivativos

Há quatro principais tipos de derivativos, cada um com diferentes características e peculiaridades. São estes os contratos a termo, contratos futuros, swaps e opções.

Contratos a termo são um tipo de derivativo relativamente simples com o qual pode-se comprar ou vender um ativo em uma data futura a um preço específico previamente firmado. A parte comprada do contrato concorda em comprar o ativo em uma data predeterminada a um preço específico, enquanto a parte vendida do contrato concorda em vender na mesma data e pelo mesmo preço. Ambas as partes determinam as características do contrato, de forma que estes são customizados. Embora estas características sejam acordadas no momento da celebração do contrato, o pagamento e a entrega do ativo ocorrem apenas na data futura estabelecida. A principal propriedade dos contratos a termo é uma consequência desse processo: o risco de crédito é da contraparte. Se uma das partes desistir de cumprir o contrato, caberá à outra parte defender seus direitos (SANTOS; SILVA, 2015). Contratos a termo são negociados no mercado de balcão.

Contratos futuros são normalmente negociados no mercado de bolsa, o que torna seus contratos padronizados. Assim como um contrato a termo, um contrato futuro negocia a compra ou venda de um ativo no futuro a um preço predeterminado. Além disso, nos contratos futuros as duas partes não necessariamente se conhecem, de forma que a bolsa atua como um agente intermediário. A bolsa estipula as caraterísticas do contrato e regulamenta as operações, exigindo de ambas as partes uma garantia de que o contrato será honrado. Esta garantia é chamada de margem. Desta forma, o risco de crédito deixa de ser da contraparte. De maneira geral, contratos futuros são considerados uma evolução dos contratos a termo, pois desempenham funções similares de forma mais padronizada e garantida.

Opções são derivativos um pouco mais complexos do que contratos a termo e futuros. Podem ser negociadas tanto nos mercados de bolsa quanto nos de balcão. Existem dois tipos de opção. Uma opção de compra, também chamada de *call*, dá ao seu detentor o direito de comprar um ativo a um preço específico em determinada data futura. Uma opção de venda, também chamada de *put*, dá ao seu detentor o direito de vender um ativo a um preço específico em uma determinada data futura. A principal diferença entre este tipo de derivativo e contratos a termo e futuros é que o detentor da opção possui o direito, mas não a obrigação, de exercer o contrato. Por outro lado, o vendedor do contrato tem a obrigação de cumpri-lo caso a ponta compradora o faça. Outra grande diferença entre opções os demais derivativos é que não há custos, além do ajuste de margem, para firmar um contrato a termo ou futuro, mas há custos para adquirir uma opção (HULL, 2016). Caso o titular da opção desista de exercer seu direito, perderá o montante pago para adquirir o contrato.

Swaps são um tipo de contrato a termo negociados no mercado de balcão. São contratos com os quais os agentes trocam rentabilidades de um ativo por outro com o objetivo de fazer *hedge*, obter lucro ou arbitrar mercados. Neste tipo de contrato, uma parte concorda em trocar o ganho que teria no ativo A pelo ganho do ativo B, enquanto a outra parte faz exatamente o oposto, trocando o ganho do ativo B pelo ganho do ativo A (SANTOS; SILVA, 2015). O tamanho do contrato, datas de vencimento e outras características são acordadas entre as partes, tornando este um tipo de derivativo menos padronizado. Apesar disso, as negociações de swaps devem seguir as regras e os limites impostos pelos órgãos reguladores (SANTOS; SILVA, 2015). Os principais tipos de swap são swaps de taxa de juros, swaps de moedas e swaps de crédito.

Contratos futuros são negociados em bolsa, contratos a termo são negociados em mercado de balcão e opções podem ser negociadas em balcão ou bolsa. O *mercado de bolsa* é definido por um processo centralizado de negociações de contratos padronizados que foram definidos pela bolsa. Sua principal característica é a existência de uma câmara de compensação (*clearing house*) que se posiciona entre as duas partes da operação e gerencia os riscos, obrigando ambas as partes a depositar fundos para garantir que cumprirão suas obrigações.

O *mercado de balcão* é menos formalizado do que o mercado de bolsa. Uma supervisão menor é inerente aos mercados de balcão, uma vez que ele é caracterizado pela negociação direta entre as duas partes do contrato, que podem celebrá-lo bilateralmente ou através de um intermediário.

2.2 História dos Mercados de Derivativos no Brasil e no Mundo

As origens dos mercados de derivativos remontam à Antiguidade, porém a história dos mercados com características modernas começa em 1848 com a fundação da *Chicago Board of Trade* (CBOT). Inicialmente criada para padronizar as quantidades e qualidades dos grãos negociados. Logo foi desenvolvido, em 1865, um produto semelhante ao contrato futuro moderno, chamado de *to-arrive contract* (HULL, 2016).

Em 1919, surge uma bolsa de futuros concorrente, a *Chicago Mercantile Exchange* (CME) que cria, em 1972, o primeiro contrato futuro financeiro sobre moedas. Em 1975, a CBOT cria o primeiro contrato futuro de taxa de juros e, em 1981, a CME inova ao criar o primeiro contrato futuro sem entrega física. Mais tarde, ambas as bolsas se fundiram para formar o *CME Group*.

A partir dos anos 1970 diversas bolsas de futuro proliferaram pelo mundo. Hoje estas bolsas estão espalhadas pelo mundo todo. Da mesma forma, os mercados de balcão (OTC – *over-the-counter*) ganharam impulso com o surgimento dos contratos de swap nos anos 1980 e com o desenvolvimento dos swaps de crédito nos anos 1990.

Já os mercados de opções têm suas origens traçadas desde o século XIX, com a criação de opções sobre produtos agrícolas na Inglaterra e nos Estados Unidos (SANTOS; SILVA, 2015). Durante todo o século XX já existia um grande mercado de balcão de opções, mas apenas em 1973 foram criadas as primeiras opções de compra com contratos bem definidos sobre ações na *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE). Os contratos de venda de ações foram criados em 1977.

No Brasil os mercados de derivativos começaram com a fundação da Bolsa de Mercadorias de São Paulo (BMSP), em 1917, que logo ficou conhecida pela negociação de contratos a termo de produtos agropecuários, principalmente café, boi-gordo e algodão. Nos anos 1970 foi criado o Sistema Nacional de Compensação de Negócios a Termo onde ocorriam as operações com derivativos (HULL, 2016). Na mesma década a Bolsa de Valores de São Paulo, Bovespa, e a Bolsa de Valores do Rio de Janeiro, BVRJ, começaram a negociar contratos de opções sobre ações (ROSS *et al.*, 2012).

Em 1984, a BVRJ fundou a Bolsa Brasileira de Futuros e, em 1986, a Bovespa fundou a Bolsa Mercantil & de Futuros. Ambas iniciaram a negociação de contratos futuros no país, com destaque para futuros de produtos financeiros como câmbio, juros e índices de ações (SANTOS; SILVA, 2015). Em 1991, houve a fusão entre a Bolsa de Mercadorias de São Paulo e a Bolsa Mercantil & de Futuros, unindo suas atividades operacionais. Em 1997, houve a incorporação da Bolsa Brasileira de Fundos, dando origem à Bolsa de Mercadorias e Futuros

(BM&F) (ROSS *et al.*, 2012). Também em 1997 surge a Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia (CBLC), principal câmara de compensação brasileira responsável por intermediar operações executadas em bolsa.

Em 2008, a Bolsa de Valores de São Paulo, que foca no mercado à vista de ações, e a BM&F integraram-se e desta união surgiu a BM&F Bovespa. A atual bolsa possui mercados de bolsa e balcão nos quais se pode negociar ações, títulos privados e públicos, moedas, e contratos de derivativos (HULL, 2016). A liquidação das operações realizadas em seus mercados ocorre em suas *clearings* de ações e de derivativos. Em 2017 a BM&F Bovespa integrou-se ainda à Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos (Cetip), formando a Brasil, Bolsa e Balcão (B3). Atualmente a B3 é uma das principais empresas de mercado financeiro no mundo. É ainda uma sociedade de capital aberto (B3, 2020).

2.3 Mecânica Operacional do Mercado Futuro

Um contrato futuro é um instrumento financeiro que negocia a compra e venda futura a um preço predeterminado. Estes contratos são padronizados e negociados em bolsa. Para isso, o mercado de futuros possui uma mecânica própria que possibilita o acordo entre duas partes, ao mesmo tempo em que transfere o risco de crédito para uma terceira entidade, a bolsa.

Quando desenvolve um novo contrato, a bolsa estipula cada detalhe e a natureza dos direitos e obrigações das partes envolvidas. Em especial, contratos futuros especificam o ativo negociado, o tamanho do contrato, os procedimentos de entrega e liquidação, seja ela física ou financeira, e o vencimento do contrato.

Além disso, uma das principais funções da bolsa é prevenir a inadimplência, seja porque uma das partes desistiu do negócio, seja porque um dos investidores simplesmente não tem recursos financeiros para honrar o contrato. Para isso, a bolsa intermedia todos os contratos feitos no mercado futuro, instituindo as contas de margem e o ajuste diário (SANTOS; SILVA, 2015). Uma vez que a bolsa intermedia os contratos, as negociações de futuros deixam de ocorrer entre as partes e passam a ser entre a bolsa e os agentes. Isso significa que o risco de crédito deixa de ser da contraparte e passa a ser da bolsa, dado que ela é a responsável por realizar os repasses de ganhos aos participantes do mercado de futuros.

A *margem* é o montante que cada investidor deve possuir para entrar em uma posição em contrato futuro, estabelecido como um percentual do valor negociado. É importante ressaltar que a margem não é equivalente a um pagamento para firmar um contrato, mas sim uma espécie de garantia depositada junto à bolsa e devolvida quando o investidor encerra sua posição ou ao vencimento do contrato. No Brasil, a margem é controlada diretamente pela bolsa junto a cada cliente final. A margem é cobrada tanto do comprador quanto do vendedor, pois ambos representam risco de inadimplência (SANTOS; SILVA, 2015).

No mercado futuro, ao final de cada dia de negociação, as posições são ajustadas para refletir os ganhos ou perdas diárias. Esse mecanismo é chamado de *ajuste diário* ou *marcação a mercado*. Todos os dias, a bolsa calcula o preço médio das últimas negociações feitas para um dado vencimento de um determinado contrato futuro. Todos os contratos são então marcados a mercado contra esse preço chamado de preço de ajuste, F^{aj}.

O ajuste diário ocorre a partir do fechamento no primeiro dia em que um investidor entra em um contrato e continua ocorrendo em todos os dias subsequentes, até que o investidor encerre sua posição ou ao vencimento do contrato, liquidando perdas e ganhos. Como esse mecanismo ocorre diariamente, o preço de referência para as partes sempre será o último preço de ajuste daquele contrato e não mais o preço original negociado. Na prática, um contrato futuro é encerrado e relançado a um novo preço todos os dias.

A fórmula do ajuste diário para uma posição comprada em futuros é expressa por:

$$A(t)_{compra} = \left(F^{aj}(t,T) - F^{aj}(t-1,T)\right) * p * M$$

A notação $F^{aj}(t,T)$ representa o preço futuro definido na data t para um contrato que vence na data T. Nesta fórmula, p é o multiplicador do contrato e M é a quantidade de contratos negociados.

O ajuste diário de uma posição vendida em futuros é expresso como o inverso do ajuste diário para uma posição comprada, segundo o mesmo mecanismo de ajuste de preços.

$$A(t)_{venda} = -A(t)_{compra}$$

Um investidor comprado em contrato futuro tem ganhos quando o preço sobe de um fechamento para o outro. Isso porque ele comprou barato uma coisa que ficou mais cara. Por outro lado, um investidor vendido em contrato futuro tem ganhos quando o preço cai de um fechamento para o outro, pois ele vendeu caro algo que ficou mais barato. Dessa forma, pode-se dizer que os ganhos e perdas entre compradores e vendedores são opostos, pois uma variação no preço do contrato que resulta em ganhos para um, resulta, na mesma proporção, em perdas para o outro.

Quando há uma redução no preço futuro, a parte comprada é debitada na conta da corretora no valor da perda diária; a bolsa então, repassará esse montante para a conta da outra parte com posição vendida (SANTOS; SILVA, 2015). Simetricamente, o mesmo ocorre quando há um aumento no preço futuro. Os investidores com posição vendida pagam à câmara de compensação da bolsa que, por sua vez, repassa o dinheiro aos investidores com posição comprada.

A parte da bolsa responsável por gerir e regular as transações feitas em contratos futuros é chamada de câmara de compensação (*clearing house*). Ela garante o desempenho de cada uma das partes de um contrato futuro. A bolsa também conta com um fundo garantidor formado pelas corretoras do mercado e pelo seu próprio capital para garantir o bom funcionamento do sistema de margens em caso de inadimplência generalizada (SANTOS; SILVA, 2015). O objetivo principal do sistema de margem é garantir que sempre haverá fundos suficientes para pagar aos agentes quando estes realizarem algum lucro.

Poucos contratos futuros firmados são carregados até o vencimento com entrega do ativo subjacente na liquidação física. Entretanto, o preço futuro é determinado pela possibilidade de entrega. Para que o mercado seja eficiente, o preço futuro e o preço à vista devem ser iguais no vencimento do contrato. À medida que se aproxima a data de vencimento do contrato futuro, o preço futuro converge para o preço à vista do ativo subjacente. No período de entrega, o preço futuro é igual, ou muito próximo, do preço à vista (HULL, 2016).

Isso ocorre porque se houvesse diferença entre os preços futuros e à vista no vencimento, haveria oportunidade de arbitragem. Se o preço futuro estivesse acima do preço à vista, um agente poderia explorar essa oportunidade de arbitragem ao vender um contrato futuro por um preço maior (o preço futuro), comprar o ativo por um preço menor (o preço à vista) e realizar a entrega. Dessa forma, o agente realizaria um lucro igual ao montante pelo qual o preço futuro excede o preço à vista.

Quanto mais *traders* explorassem essa oportunidade de arbitragem, o preço futuro tenderia a cair, graças ao aumento na oferta de venda de contratos futuros, e o preço à vista tenderia a aumentar, devido ao aumento na demanda de compra do ativo subjacente. Se o preço futuro caísse a um nível abaixo do preço à vista, o movimento contrário aconteceria, forçando os preços a convergirem para o mesmo patamar. O resultado é que oportunidades de arbitragem se extinguem à medida que são exploradas e os preços futuro e à vista no vencimento chegam a um preço de equilíbrio, de forma que $F(T,T) = S(T)$, onde $S(T)$ é o preço a vista no vencimento do contrato.

Há dois tipos de entrega possíveis no vencimento: a entrega física e a liquidação financeira. A entrega física é a forma mais natural e intuitiva de entender, porém requer uma estrutura mais elaborada. Este tipo de entrega é mais associado à *commodities*, como boi-gordo, soja e café. Esta entrega requer uma logística apropriada de entrega, controle de qualidade do produto, custos de frete e armazenagem. A parte que aceita a entrega é responsável pelos custos de estocagem.

No caso de futuros financeiros, o padrão é a liquidação financeira (*cash settlement*) e é muito mais prática do que a entrega física. No vencimento, a bolsa simplesmente cancela todas as posições de compradores e vendedores, alocando o montante relativo ao ajuste diário em suas contas de margem.

A principal característica dos contratos futuro é que eles permitem travar um preço específico, independente do preço que o mercado a vista tenha no vencimento. Quando um investidor carrega sua posição em futuros até o vencimento, o preço que ele terá pago ao longo das negociações, ou seja, o acumulado de ajustes diários mais o gasto com o ativo subjacente no vencimento, será exatamente igual ao valor pelo qual ele queria comprar o ativo subjacente quando fez o contrato. Portanto, o mercado futuro cumpre com a sua missão de proteger os investidores de variações de preços.

Por fim, uma importante característica dos mercados futuros é a sua alta alavancagem. Estes mercados estão sujeitos à alavancagem porque não se paga nada para entrar em uma posição futura, seja ela comprada ou vendida (SANTOS; SILVA, 2015). O depósito da margem inicial não é um pagamento, mas sim uma garantia de crédito. Vale ressaltar que o montante do depósito de margem não é equivalente ao valor total do contrato (valor nocional). Por esse motivo, os dados sobre valores negociados em derivativos não podem ser comparados com valores absolutos de outros ativos.

Apesar de estarem sujeitos aos ajustes diários e às contas de margem, os participantes não pagam nada no instante em que assumem posição no contrato. Isso permite que os agentes tomem posições muito superiores às que teriam tomado se tivessem de desembolsar o valor total do contrato, resultando em alta alavancagem.

É comum que a grande maioria dos contratos futuros não sejam levados até o vencimento, dado que os participantes desse mercado não têm, de maneira geral, a intenção de vender ou receber os ativos subjacentes. Além disso, estes contratos possuem grande liquidez e são altamente negociáveis. Contratos futuros são marcados a mercado e os seus participantes podem abrir e encerrar posições a qualquer momento, sendo possível entrar e sair do mercado em apenas um dia.

2.4 Estratégias de *Hedge* com Contratos Futuros

Como foi visto anteriormente, um dos principais participantes do mercado de futuros é o *hedger*. Seu objetivo ao operar este tipo de contrato é reduzir seu risco, normalmente causado por flutuações imprevistas de preços. De modo geral, é possível definir *hedge* como uma operação de proteção contra variações de preço e, consequentemente, da riqueza dos agentes.

Na literatura sobre derivativos e contratos futuros, houveram três teorias principais que buscaram conceituar o que é *hedge* e as motivações dos agentes ao utilizar esse mecanismo: Teoria Tradicional do Hedge; Teoria de Working; e Teoria do Portfólio e Hedge (BUENO, 2002). Todas elas têm em comum a busca pelo cálculo de uma taxa ótima de *hedge* que diminuiria o risco de mercado de um ativo ou uma carteira.

A Teoria Tradicional do *Hedge*, também conhecida como *hedge* ingênuo, enfatiza o potencial do mercado futuro para diminuir totalmente os riscos de mercado. *Hedgers* devem tomar posições no mercado futuro de igual magnitude, mas com sinal oposto, às suas posições no mercado à vista, também conhecido como *mercado spot*. Argumenta-se que os mercados à vista e futuros se movimentam juntos, de forma que o risco de base é muito pequeno ou nulo.

Working (1953) aponta que um dos erros mais comuns dos investidores é acreditar que os preços à vista e futuro oscilam juntos e na mesma proporção. Como isso não acontece na prática, uma operação de *hedge* não diminui totalmente riscos advindos das flutuações de preços. O autor enfatiza que *hedgers* não são meramente minimizadores de risco e que um investidor é motivado a *hedgear* uma posição quando informações a respeito das mudanças relativas dos preços transforma o *hedge* em uma decisão lógica. Segundo Working, o *hedge* não seria um seguro, mas sim uma operação de arbitragem na qual os investidores estariam preocupados em aproveitar mudanças favoráveis de base. Isso explicaria porque agentes, ora utilizam *hedge*, ora não o utilizam.

Os principais artigos da Teoria do Portfólio e *Hedge* foram Johnson (1960) e Stein (1961), que surgiram da percepção de que as teorias existentes à época não explicavam fenômenos que aconteciam na prática.

Johnson (1960) conclui que o *hedge* é motivado pelo desejo de minimizar riscos, mas que, por outro lado, o tamanho da posição *hedgeada* seria dependente das expectativas de retorno. A motivação para *hedgear* deixa de ser os ganhos e perdas absolutos causados por mudanças de preço, e passa a ser a diminuição da variância global de uma carteira formada por ativos no mercado à vista e instrumentos de *hedge*. O conceito de *hedge* é baseado no critério média-variância e risco e a efetividade do *hedge* é medida pelo quanto a variância dos retornos diminuiu ao tomar posições nos dois mercados ao mesmo tempo.

Stein (1961) afirma que se espera que um investidor divida sua alocação entre uma porção *hedgeada* e outra não *hedgeada* dos seus ativos. O autor também afirma que a decisão de *hedgear* posições no mercado à vista depende da utilidade esperada dos retornos. O *hedge* é justificado se a atratividade de *hedgear* uma posição for maior do que a disposição a assumir riscos em posições não *hedgeadas*. O autor deriva uma solução ótima no ponto de tangência entre a razão média-variância e a função de utilidade do investidor.

Os dois autores também apresentaram as primeiras derivações da taxa de *hedge* ótima segundo a função de utilidade média variância do investidor.

O primeiro autor a estabelecer conceitos sobre *hedge* que perduram até os dias atuais foi Ederington (1979). O autor enfatiza a superioridade do mercado futuro para operações de *hedge*.

> Obviamente é possível *hedgear* ao entrar em contratos a termo fora de um mercado de futuros, mas, como Telser e Higinbotham apontam, um mercado de futuros organizado facilita tais transações ao prover um contrato padronizado e ao substituir a confiabilidade da troca pela do operador individual. (TELSER; HIGINBOTHAM, 1977 apud EDERINGTON, 1979, p.1, tradução nossa)[1].

Apenas em Ederington (1979) é derivado pela primeira vez a função de *hedge* ótimo de variância mínima em que h* é igual à razão da covariância entre a variação dos preços à vista e futuros sobre a variância dos preços futuros, como será visto mais adiante. Além disso, o autor também foi o primeiro a estimar uma medida para a efetividade do *hedge*, que é amplamente utilizada até os dias de hoje.

Ao reformular o *hedge* como uma extensão da teoria do portfólio média variância, conclui-se que um investidor compra e vende futuros pelos mesmos critérios de risco e retorno que utilizam para negociar qualquer outro ativo, de modo que investidores tendem a manter uma carteira que seja parcialmente *hedgeada*.

Como é possível observar, o *hedge* com contratos futuros não é tão simples como pode parecer. Na prática, dificilmente o *hedger* consegue remover todo o risco advindo da flutuação de preços. Hull (2016) aponta alguns motivos. O primeiro é que o ativo *hedgeado* pode não ser o mesmo que o ativo subjacente do contrato. Este tipo de *hedge* é conhecido como *cross-hedging*. O segundo é que o *hedger* pode não ter certeza da data exata em que o ativo será comprado ou vendido. O terceiro é que o contrato pode não ser levado até o vencimento, de forma que o mecanismo de travamento de preços não seja tão eficiente.

---

[1] "Obviously it is possible to hedge by entering into forward contracts outside a futures market, but, as Telser and Higinbotham point out, an organized futures market facilitates such transactions by providing a standardized contract and by substituting the trustworthiness of the exchange for that of the individual trader."

2.4.1 Hedge Ingênuo

A primeira pergunta que um investidor se faz ao assumir uma posição no mercado futuro é quantos contratos ele deve negociar para proteger cada ativo que ele mantém no mercado à vista. Este conceito inerente ao *hedge* chama-se *razão de hedge*, que nada mais é do que a razão entre o tamanho da posição assumida em futuros em relação ao tamanho da exposição em mercado à vista. Esta razão é comumente denominada como h.

A teoria tradicional de *hedge* indica que o agente deve tomar uma posição no mercado futuro em sinal contrário à sua posição no mercado à vista. Esta decisão ocorre porque os preços à vista e futuro convergem, movendo-se ao mesmo tempo e na mesma direção.

Para derivar quanto deve ser h, Santos e Silva (2015) demonstram a função ganho com *hedge*:

$$G(h) = 1 * \big(S(t+1) - S(t)\big) - h * \big(F(t+1,T) - F(t,T)\big) = 1 * \Delta S - h * \Delta F \quad (9)$$

A função nos mostra qual é o resultado total, ganho ou perda, dependendo de quantos contratos futuros (h) são negociados para cada um contrato à vista. A maneira mais simples de calcular h, neste caso, é supor que ele também deve ser 1. Ou seja, para cada contrato à vista, o investidor deveria negociar o mesmo número de contratos futuros com sinal contrário. Este *hedge*, conhecido como hedge *ingênuo*.

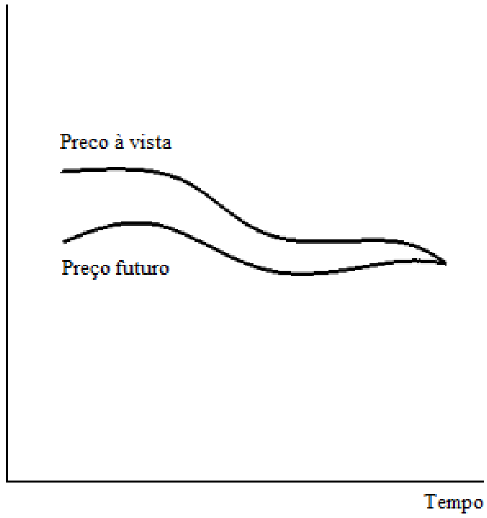
Entretanto, na prática, este *hedge* é muito difícil de funcionar, como apontam alguns autores, entre eles Bueno (2002), Hull (2016) e Santos e Silva (2015). A explicação por trás dessa falha no *hedge* ingênuo é fundamentada no fato de que, dificilmente, os contratos utilizados possuem ativos subjacentes iguais aos ativos *hedgeados*; o mecanismo de convergência de preços não é perfeito porque os ativos são diferentes. A variação dos preços à vista e futuro não é igual, havendo risco de base. Portanto, há formas de *hedge* mais eficazes.

Base é o preço à vista do ativo *hedgeado* que o investidor de fato negocia menos preço futuro do contrato usado em um tempo *t*.

$$B(t,T) = S(t) - F(t,T)$$

O investidor está sujeito a perdas se o movimento da base for desfavorável às suas posições. As mudanças de base podem fazer com que a posição do *hedger* melhore ou piore. Por isso, quando o investidor opera também no mercado à vista, ele está sujeito ao *risco de base* (SANTOS; SILVA, 2015). O risco de base é a incerteza associada à base nos tempos subsequentes à *t*. No vencimento, o risco de base acaba, dado que $F(T,T) = S(T)$. Logo, $B(T) = 0$.

Figura 2. Variação da base com o tempo



Fonte: elaboração própria

2.4.2 Hedge Ótimo

O ativo que dá origem à exposição do *hedger* pode ser, e na maior parte dos casos de fato é, diferente do ativo subjacente do contrato futuro utilizado (BUENO, 2002). Este tipo de *hedge* é conhecido como *cross-hedging*, ou *hedge* cruzado. Nele não se exige que a data de liquidação da obrigação seja igual à do ativo *hedgeado*. Essas diferenças entre ativo à vista e ativo subjacente do contrato ou entre as datas de liquidação podem levar a um aumento no risco de base (HULL, 2016). Nesse sentido, o *hedger* deve escolher uma razão de *hedge* que minimize a variância do valor da posição *hedgeada*.

Por isso, o *hedge ótimo*, h^*, pode ser definido como uma razão de *hedge* de variância mínima. Esta razão de *hedge* depende da relação entre a variação dos preços à vista, ΔS, e a variação dos preços futuros, ΔF. É possível mostrar que h^* é a inclinação da regressão linear de ΔS contra ΔF (HULL, 2016).

Ao retomar a função ganho com *hedge* como uma medida dos ganhos e perdas aos quais o investidor está sujeito ao operar nos dois mercados, à vista e futuro, pode-se dizer que o objetivo do *hedger* que queira minimizar risco é diminuir a variação desta função. Ou seja, se o risco puder ser medido pela variância da função ganho com *hedge*, devemos minimizá-la (SANTOS; SILVA, 2015).

A variância da função ganho com *hedge* é dada pela seguinte fórmula:

$$\sigma^2\big(G(h)\big) = \sigma^2(\Delta S) + h^2 * \sigma^2(\Delta F) - 2 * h * \sigma(\Delta S, \Delta F)$$
$$= \sigma^2(\Delta S) + h^2 * \sigma^2(\Delta F) - 2 * h * \rho * \sigma(\Delta S) * \sigma(\Delta F) \quad (10)$$
$$\min_h \sigma^2(G) \Rightarrow \frac{\delta\sigma^2(G)}{\delta h} = 0 \Rightarrow$$

$$h^* = \frac{\sigma(\Delta S, \Delta F)}{\sigma^2(\Delta F)} = \rho \frac{\sigma(\Delta S)}{\sigma(\Delta F)} \tag{11}$$

onde ρ é o coeficiente de correlação entre a variação dos preços à vista e a variação dos preços futuros.

É possível perceber que este resultado é exatamente a inclinação da regressão linear da variação dos preços à vista contra a variação dos preços futuros, como afirma Hull (2016). Estatisticamente, h^* é o beta da seguinte regressão:

$$\Delta S = \alpha + \beta^{hedge} * \Delta F + \varepsilon$$

$$h^* = \beta^{hedge}$$

Os parâmetros ρ, σ_S e σ_F geralmente são estimados a partir de séries históricas de ΔS e ΔF. Algumas vezes, a regressão linear que melhor se ajusta aos dados é a que utiliza as taxas de retorno das posições à vista e futuro (SANTOS; SILVA, 2015).

Para calcular a quantidade ideal N^* de contratos futuros a serem negociados, deve-se tomar o tamanho da posição sendo *hedgeada* (em unidades físicas), N_S, e o tamanho de um contrato futuro (em unidades físicas), Q_F, transformando a posição à vista em uma quantidade equivalente de contratos futuros, como segue:

$$N^* = -h^* \frac{N_S}{Q_F} = -\beta^{hedge} \frac{N_S}{Q_F}$$

2.4.3 Hedge Perfeito

Há ainda uma razão de *hedge* que resulta em variância do ganho com *hedge* igual a zero. Este tipo especial de *hedge* é conhecido como *hedge perfeito* e elimina o risco de variações de preços de mercado e o risco de base temporal (SANTOS; SILVA, 2015).

Dado que a função ganho com *hedge* deve ter variância igual a zero para que o *hedge* seja perfeito, deve-se igualar a variância a zero para encontrar a razão de *hedge* que permite esse resultado. Retomando a fórmula (10) da variância da função ganho com *hedge*:

$$\sigma^2\big(G(h)\big) = 0 \Rightarrow \sigma^2(\Delta S) + h^2 * \sigma^2(\Delta F) - 2 * h * \sigma(\Delta S, \Delta F) = 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{\sigma(\Delta S) * (\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1})}{\sigma(\Delta F)}$$

Para que *h* seja um número real, ρ deve ser igual a ±1. Portanto, a existência do *hedge* perfeito é condicionada à correlação perfeita entre a variação dos preços à vista e a variação dos preços futuros. Somente sob essa condição é possível alcançar o *hedge* perfeito, de forma a explicar porque este tipo de *hedge* é tão raro.

Portanto, a razão de *hedge* que resulta na criação do *hedge* perfeito é:

$$h = \pm \frac{\sigma(\Delta S)}{\sigma(\Delta F)} \tag{12}$$

Segundo Santos e Silva (2015), há três situações práticas em que pode existir *hedge* perfeito: (i) o horizonte de *hedge* coincide com o vencimento do contrato a termo; (ii) base no vencimento do *hedge* é conhecida *ex ante*; (iii) base é constante no período de *hedge*.

2.5 *Hedge* de Portfólio de Ações com Futuro de Índice

Uma forma de reduzir o risco do investimento em ações é manter um portfólio diversificado com empresas de vários setores. Nesse sentido, a diversificação, apesar de eficaz, apresenta limites para a gestão eficiente do risco de um portfólio de ações por causa do risco sistemático. O *hedge* com contratos futuros de índice diminui o risco sistemático e complementa a diversificação, gerando uma gestão de risco mais efetiva.

Um índice de ações é um portfólio hipotético onde o peso de cada ação que compõe a carteira, bem como a seleção dessas ações, seguem as ações mais negociadas no mercado. Os contratos futuros de índices de ações são liquidados em caixa e não apresentam entrega física do ativo subjacente. O preço de ajuste no vencimento é o preço de liquidação.

Um dos primeiros estudos sobre *hedge* e seleção de um portfólio de ações foi Figlewski e Kon (1982). Os autores afirmam que a criação de contratos futuros para instrumentos financeiros foi o mais importante desenvolvimento dos mercados futuros. Isso porque um mercado de futuros com contratos baseados em índices amplos de ações proveria uma maneira direta, de baixo custo e efetiva de gerenciar riscos de ações.

Futuros de índice permitiriam aos investidores alterar as características de risco de seus portfólios de maneira fácil e econômica, complementando a diversificação. Entretanto, apenas portfólios cujas composições sejam idênticas ao índice pode ser perfeitamente *hedgeados*. Nos outros casos, um risco de base residual permanecerá, segundo os autores. Normalmente o *hedge* ocorre através da venda de futuros quando se tem uma posição comprada no mercado à vista.

Posteriormente, estas ideias foram desenvolvidas mais profundamente em Figlewski (1984). O artigo apresenta uma teoria simplificada de *hedge* com futuros de índice na presença de risco de base e discute como um contrato futuro de índice pode diminuir o risco de mercado advindo de flutuações de preços. Ao considerar a utilização de futuros de índice, o autor aponta que em quase todos os casos ocorre *cross-hedging*. O que significa que o retorno e o risco do *hedge* dependerão do comportamento da base.

De acordo com Figlewski, o risco de base é mais significativo para futuros de índices de ações do que para outros futuros financeiros, principalmente por causa do componente idiossincrático do retorno na posição *spot*. Dado que o contrato futuro está ligado ao comportamento do índice de ações subjacente, o risco específico não pode ser *hedgeado*. Além disso, o preço futuro não é ligado ao preço *spot* do índice subjacente, exceto na data de liquidação. Flutuações diárias na diferença entre os preços *spot* e futuros levam a flutuações no retorno da posição *hedgeada*.

O efeito sobre o risco do portfólio vai depender da proporção do *hedge* e das características do contrato futuro de índice de ações utilizado. Se o índice usado for suficientemente grande, ele será um bom representante para o mercado de ações como um todo (FIGLEWSKI E KON, 1982).

Trabalhos empíricos mais recentes buscam avaliar a eficiência do *hedge* de mínima variância com índices de ações. Laws e Thompson (2005) avalia a efetividade do uso de índices de ações para *hedgear* os retornos de um portfólio, estimando o *hedge* ótimo através da regressão linear em Mínimos Quadrados Ordinários entre os retornos do portfólio e os retornos dos contrato futuros de índice FTSE 100 e FTSE 250, contratos futuros de índice da bolsa de valores de Londres. O autor conclui que a razão de *hedge* ótima apresenta alta efetividade do *hedge*, alcançando altos níveis de redução de risco.

Alexander e Barbosa (2007) argumenta que o *hedge* de mínima variância só tem resultado fora da amostra superior ao *hedge* ingênuo em mercados menos desenvolvidos, que não têm transações ativas de ETFs (*Exchange Traded Funds*) e que não funcionam em sistemas de comunicação eletrônicos. Isso porque mercados eletrônicos avançados diminuem os custos de transação associados ao *hedge* e a presença de ETFs facilita a arbitragem dos preços *spot* e futuro, aumentando a sua correlação e diminuindo o risco de base.

Qualquer investidor que busque neutralizar o risco do mercado em um portfólio pode recorrer ao *hedge* com futuro de índices, mas ao *hedgear* a exposição ao risco, o investidor também abre mão de potenciais retornos. Logo, o uso do *hedge* não é sem custo, pois há um custo de oportunidade.

As duas questões que surgem a respeito do *hedge* com futuros são: como estimar o número ótimo de futuros e como medir a eficiência do *hedge*. Essas duas questões devem ser abordadas juntas pois são integralmente relacionadas.

2.5.1 Hedge Perfeito da Carteira Passiva que Replica o Índice

Para o *hedge* perfeito de uma carteira passiva, a razão de *hedge h* é igual a 1. Desse modo, o retorno da carteira passiva completamente *hedgeada* será o retorno do mercado, representado pelo índice, menos o retorno do contrato futuro de índice:

$$R_H = R_M - R_F \tag{13}$$

Relembrando equação (9) da função ganho com *hedge*, temos:

$$G(h) = \Delta S - h * \Delta F$$

$$G(h) = (I_T - I_t) - (F_T - F_t) \tag{14}$$

Onde a variação da posição à vista é equivalente à variação do índice de mercado. Os subscritos T e t correspondem à data de vencimento e à data inicial do contrato, respectivamente. Considerando que a posição em futuros será levada até o vencimento, os preços do contrato futuro e do índice serão iguais devido à convergência. Logo, no vencimento:

$$F_T = I_T \tag{15}$$

Já no período inicial, o contrato futuro é precificado como o preço à vista, $I(t)$, de um índice de ações, com dividendos que serão pagos antes do vencimento, carregado pela taxa de juros contínuos. Este é um preço de equilíbrio, livre de arbitragem.

$$F(t,T) = F_t = I(t) * e^{(R(t)-q(t))(T-t)}$$

No Brasil, os índices são definidos de maneira que os dividendos já são incorporados aos preços à medida que são pagos (SANTOS; SILVA, 2015). Assim, a equação tem apenas a taxa de juros, que é usualmente expressa como taxa *over*. O preço inicial do contrato futuro de índice é então definido como

$$F(t,T) = F_t = I(t) * [1 + r(t)]^{du(t,T)/252} \tag{16}$$

onde *du(t,T)* é o número de dias úteis entre t e T, incluindo o dia inicial e excluindo o dia do vencimento.

Substituindo as equações (15) e (16) na equação (14) da função ganho de *hedge* temos:

$$G(h) = (I_T - I_t) - (I_T - I_t * [1 + r(t)]^{du(t,T)/252})$$

$$G(h) = I_t * [(1 * r(t))^{du(t,T)/252} - 1] \tag{17}$$

Uma vez que o retorno da posição *hedgeada*, R_H, é igual ao ganho com *hedge* dividido pelo valor do investimento inicial do portfólio no mercado à vista, então

$$R_H = \frac{G(h)}{I_t} \tag{18}$$

Substituindo a equação (17) na equação (18) temos:

$$R_H = \frac{I_t * [(1 * r(t))^{du(t,T)/252} - 1]}{I_t}$$

$$R_H = [(1 * r(t))^{du(t,T)/252} - 1] = R_f \tag{19}$$

Ou seja, quando a posição em futuros é levada até o vencimento, o retorno de uma carteira passiva completamente *hedgeada* será igual ao retorno da taxa livre de risco, R_f. Figlewski e Kon (1982) explica que isso ocorre porque toda incerteza associada à performance do índice no futuro, entre *t* e *T*, foi *hedgeada*, tornando R_H um retorno sem risco.

Como o retorno do *hedge* é igual ao retorno do mercado menos o retorno do contrato futuro, como dado pela equação (13), podemos reescrever essa relação como

$$R_H = R_M - R_F = [(1 * r(t))^{du(t,T)/252} - 1] = R_f \tag{20}$$

2.5.2 Hedge Ótimo de Portfólio de Ações com Posição em Futuros até a Maturidade

Figlewski e Kon (1982) e Figlewski (1984) demonstram o retorno do portfólio com futuros de índice de ações como:

$$R_H = R_P - hR_F$$

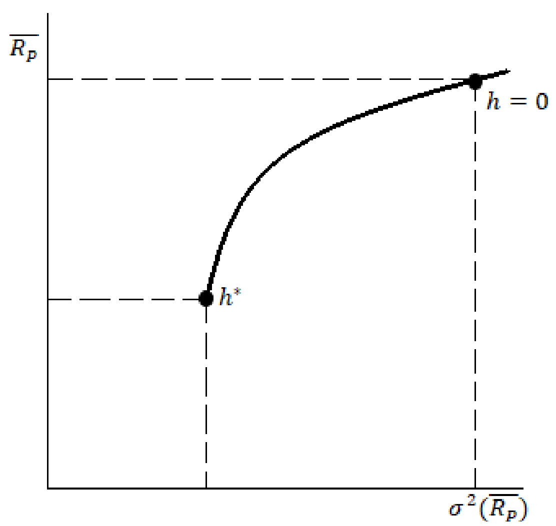
Onde R_H é o retorno do portfólio de ações com contratos futuros, R_P é o retorno do portfólio no mercado à vista (*spot*), R_F é o retorno do contrato futuro e h é a fração do portfólio que está sendo *hedgeada*. Tomando o valor esperado da equação acima, encontra-se o retorno esperado como:

$$\overline{R_H} = \overline{R_P} - h\overline{R_F} \tag{21}$$

A equação do risco é encontrada ao aplicar a variância da equação do retorno do *hedge*. Encontra-se então a seguinte fórmula para o risco:

$$\sigma_H^2 = \sigma_P^2 + h^2 * \sigma_F^2 - 2 * h * \sigma_{(P,F)} \tag{22}$$

Figura 3. Risco e retorno do portfólio com futuros



Fonte: elaboração própria

O gráfico mostra as possibilidades de risco e retorno para um portfólio com diferentes valores de h. O ponto onde h é igual a zero representa o portfólio totalmente não *hedgeado*, ou seja, inteiramente composto por ativos no mercado à vista. Neste ponto, $\overline{R_P}$ é igual a $\overline{R_S}$ e $Var\ (R_P)$ é igual a $Var\ (R_S)$. Os pontos a esquerda de h = 0 representam posições vendidas em futuros e os pontos a direita representam posições compradas em futuros.

Ao minimizar a equação da variância do portfólio com *hedge* encontramos a razão de *hedge* ótima, h^*, que minimiza o risco global do portfólio:

$$\min_h \sigma^2\,(R_P)$$

$$h^* = \frac{cov(\overline{R_P}, \overline{R_F})}{\sigma^2(\overline{R_F})} \tag{23}$$

Relembrando que o retorno do contrato futuro com *hedge* completo e mantido até o vencimento representa a relação entre o retorno do mercado menos o retorno livre de risco. Substituindo na equação (13) na equação (23) temos:

$$h^* = \frac{cov(\overline{R_P}, \overline{R_M} - \overline{R_f})}{\sigma^2(\overline{R_M} - \overline{R_f})}$$

Como R_f é constante,

$$h^* = \frac{\sigma(\overline{R_P}, \overline{R_M})}{\sigma^2(\overline{R_M})} = \beta_M \tag{24}$$

Em outras palavras, a proporção de *hedge* será o beta da regressão linear entre o retorno *spot* do portfólio de ações e o retorno do mercado. Ao vender β_M unidades de futuros de índice, o investidor *hedgear* de maneira ótima o risco de mercado, deixando apenas o risco específico do portfólio. Entretanto, este resultado só será possível caso o investidor carregue sua posição em futuros até a maturidade (FIGLEWSKI, 1984).

2.5.3 Hedge Ótimo de Portfólio de Ações Encerrando a Posição em Futuros Antes da Maturidade

Como foi observado anteriormente, a razão de *hedge* ótima só será igual ao beta de mercado quando a posição em futuros do portfólio for carregada até o vencimento dos contratos de índice. Caso o investidor resolva encerrar sua posição em futuros antes da maturidade do contrato, uma nova função de razão de *hedge* deverá ser calculada de forma que a variância global do portfólio seja minimizada.

Hull (2016) aponta que o beta de mercado pode ser usado quando o vencimento do contrato futuro for próximo do vencimento do *hedge*. Quando isso não acontece, o autor defende que a melhor razão de *hedge* é a inclinação da linha de melhor ajuste da regressão entre as mudanças percentuais diárias entre o retorno do portfólio e as mudanças percentuais diárias no preço futuro do índice. Esse coeficiente seria o h* tradicional do *hedge* ótimo de variância mínima para um ativo, dado pela equação (11):

$$h^* = \frac{\sigma(\Delta S, \Delta F)}{\sigma^2(\Delta F)} = \rho \frac{\sigma(\Delta S)}{\sigma(\Delta F)}$$

Segundo Hull (2016), essa fórmula produz bons resultados para o *hedge* ótimo de um portfólio de ações com contratos futuros de índice, mesmo quando o vencimento do contrato não coincide com a finalização da posição *hedgeada* e a posição em futuros não é levada até a maturidade.

Segunda Figlewski (1984), a razão de *hedge* de mínima variância é derivada através das equações (21) e (22), demonstradas anteriormente:

$$\overline{R_H} = \overline{R_P} - h\overline{R_F}$$

$$\sigma_H^2 = \sigma_P^2 + h^2 * \sigma_F^2 - 2 * h * \sigma_{(P,F)}$$

Para encontrar a minimização do risco do portfólio com posições em futuro, deriva-se a equação acima para obter a razão de *hedge* de mínima variância:

$$h^* = \frac{\sigma(\overline{R_P}, \overline{R_F})}{\sigma^2(\overline{R_F})} = \beta_F \tag{25}$$

Ou seja, neste caso particular onde há mudança de contrato ou encerramento de posições antes do vencimento do contrato originalmente negociado, o beta ótimo é igual ao coeficiente angular da regressão linear simples entre o retorno líquido do portfólio e o retorno líquido do contrato futuro. É o beta da regressão computado através de dados históricos.

Ao substituir h* na equação da variância do portfólio, encontra-se a seguinte relação:

$$\sigma^2 \min = \sigma_P^2 \, (1 - \rho_{P,F}^2)$$

Figlewski (1984) conclui, então, que o risco do portfólio só pode ser completamente eliminado com o *hedge* caso haja correlação perfeita entre o retorno do portfólio e o retorno do contrato futuro.

2.6 Medidas da Eficácia do *Hedge*

A medida mais tradicional de eficácia do *hedge* aplicada em inúmeros estudos empíricos. Esta medida é chamada na literatura de efetividade do *hedge* e se baseia na redução da variância do portfólio:

$$E = \frac{\sigma_p^2 - \sigma_h^2}{\sigma_p^2} \tag{26}$$

onde σ_p^2 e σ_h^2 representam a variância do portfólio não *hedgeado* e do portfólio *hedgeado*, respectivamente.

Hull (2016) afirma que a efetividade do *hedge* é o R^2 da regressão de ΔS contra ΔF e igual a ρ^2. A estimação dos parâmetros da razão de *hedge* é obtida a partir de dados históricos. O intervalo de tempo escolhido para a amostra de observações deve ser igual para as duas séries, ΔS e ΔF.

A efetividade do *hedge* tem um limite superior, porém não tem um limite inferior. O limite superior para a efetividade do *hedge* é 100%. Este seria o caso do *hedge* perfeito, onde todo o risco do portfólio é eliminado. Por outro lado, não há limite inferior para a efetividade do *hedge*. Seria intuitivo pensar que o limite inferior é 0, ou seja, o *hedge* não teve efeito e não diminuiu em nada o risco do portfólio. Porém, isto não é verdade, uma vez que o *hedge*, se feito de forma incorreta, pode aumentar o risco do portfólio, não havendo limite para esse aumento do risco. Ou seja, neste caso a efetividade do *hedge* seria negativa, sem limite inferior.

3 DESCRIÇÃO DOS DADOS E METODOLOGIA

3.1 Dados

Consideramos o desempenho do *hedge* com futuros de índice para uma carteira passiva e ativa. A carteira ativa é a CVM. A carteira passiva é o Ibovespa (IBOV). O trabalho empírico terá dois períodos diferentes de estudo: um de alta e um de baixa da bolsa. Para o período de alta, o ano analisado será 2019, quando o IBOV encerrou o ano com alta de 31,58% . Para o período de baixa, o ano analisado será o de 2015, quando o IBOV caiu 13,31%.

Os dados utilizados neste trabalho para a alocação de uma carteira de renda variável ativa dizem respeito às ações mais líquidas negociadas no índice Ibovespa. Dentre as ações mais líquidas, foram selecionados apenas papéis que estiveram presentes em todas as carteiras teóricas em 2014, 2015, 2018 e 2019. Dessa forma, o estudo utiliza a série de preços históricos de vinte e nove ações do índice. O índice Ibovespa é composto pelos papéis mais negociados e de maior volume listados na B3 (Brasil, Bolsa e Balcão S.A.).

A base de dados utilizada para o cálculo da carteira de variância mínima é composta pelas séries temporais de preços diários de fechamento das vinte e nove ações selecionadas: ABEV3, B3SA3, BBAS3, BBDC4, BRFS3, BRML3, CCRO3, CIEL3, CMIG4, COGN3, CSNA3, GGBR4, GOAU4, HYPE3, ITSA4, ITUB4, JBSS3, LAME4, LREN3, NTCO3, PETR3, PETR4, RENT3, SBSP3, UGPA3, USIM5, VALE3, VIVT4 e YDUQ3.

Os dados foram obtidos através do programa Economática. O tamanho da amostra dos dados utilizados no estudo empírico é de um ano. Ou seja, para a otimização da carteira fora da amostra de estimação em um mês *n* são utilizados dados dos 12 meses anteriores. A partir das séries diárias de preços, serão calculadas as séries de retornos históricos diários de cada ativo. A notação $R_{i,t}$ representa o retorno de cada ação *i* no dia *t*.

A partir desses dados, serão otimizadas as carteiras para quatro anos: 2014, 2015, 2018 e 2019. Como a estimação do *hedge* de uma carteira para um ano *t* é calculado com base no retorno da carteira em *t-1*, é necessário otimizar a carteira tanto para o ano em que se quer *hedgear,* quanto para o ano anterior. Nesse sentido, o *hedge* da carteira de 2015 depende da série de retornos diários de 2014 e o *hedge* da carteira de 2019 depende da série de retornos diários de 2018.

Os dados de futuros utilizados para o *hedge* das carteiras correspondem aos preços de ajuste de contratos futuros de índice no Brasil. O contrato futuro de Ibovespa é um contrato sem entrega física, somente com liquidação financeira. O preço de ajuste no vencimento é o preço de liquidação, sendo este um indicador calculado pela bolsa.

O objeto subjacente da negociação é o índice de ações da Bolsa de Valores de São Paulo e os meses de vencimento são os meses pares. De maneira geral, os contratos futuros com vencimento mais próximo são também os contratos mais líquidos (SANTOS; SILVA, 2015).

A base de dados utilizada para o *hedge* do portfólio é composta por três séries temporais: a de preços diários de ajuste do contrato futuro de índice, a cotação diária do índice Ibovespa, e a do retorno acumulado diário do portfólio. A série de preços de ajuste é formada pelos preços do contrato mais líquido a cada dia, ou seja, o preço de ajuste do contrato de vencimento mais próximo para cada dia de negociação.

Vale ressaltar que tanto o preço de ajuste do contrato futuro, quanto o preço de fechamento do índice Ibovespa são, por natureza, retornos acumulados, assim como, o retorno acumulado do portfólio, porém com diferente período inicial de investimento.

A partir das séries diárias de retorno acumulado, serão calculadas novas séries diárias de retornos líquidos e de log retornos para cada variável. Isso corresponde a T = 494 observações para o *hedge* de 2015 e T = 493 observações para o *hedge* de 2019.

A série de retorno líquido de cada variável j no dia t foi calculada a partir da seguinte equação:

$$R_{j,t} = \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) * 100$$

A série de log retorno de cada variável j no dia t foi calculada a partir da seguinte equação:

$$r_{j,t} = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) * 100 \tag{27}$$

3.2 Metodologia

Dado um universo de N ativos no qual uma carteira é representada pelo vetor de pesos $w = (w_1 \ldots w_N)$, a CVM é a solução do problema

$$\min_{w} w'\Omega w \text{ sujeito a } \Omega_i \, w_i = 1$$

onde Ω é a matriz de covariância dos ativos. Uma vez que os pesos w_i estão livres para assumir qualquer valor, desde que a soma de w seja igual a 1, ou seja, uma carteira totalmente investida, a CVM é a solução de uma otimização irrestrita. Entretanto, é comum que seja imposta uma restrição adicional às estimações utilizando CVMs: a de que só existam na carteira posições compradas, ou seja, $w_i \geq 0$ (RUBESAM; BELTRAME, 2013).

Para a otimização da carteira de renda variável, este trabalho se restringirá à estimação apenas em carteiras com posições compradas (*long-only*), ou seja, $w_i \geq 0$. Os pesos das ações serão restritos, com limite de peso máximo de 20% por papel, ou seja, $w_i \leq 0{,}2$.

Inicialmente, a matriz de covariância dos ativos, Ω, é desconhecida e sua estimação é necessária. Existem diferentes modelos para estimação de Ω, de forma que a otimização da carteira CVM depende do modelo escolhido, gerando diferentes resultados. O modelo mais simples é baseado no uso da matriz de covariância amostral.

Este modelo estatístico tradicional é centrado na hipótese de observações independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e calcula a matriz de covariância amostral usando uma amostra das séries temporais dos retornos dos ativos em um período recente. A covariância entre as ações *i* e *j* é dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

onde $R_{i,t}$ é o retorno da ação *i* no dia *t* e $\bar{R}_i$ é a média amostral dos retornos da ação na amostra.

O processo de simulação de carteiras (*backtesting*) é utilizado para testar e medir o desempenho das carteiras otimizadas. Para a alocação de uma carteira de ações será utilizado o método de rebalanceamento mensal com janela móvel de um ano.

As alocações serão feitas para os anos de 2014, 2015, 2018 e 2019 utilizando a amostra de dados com início no ano anterior a cada ano estudado. O processo de alocação consiste em otimizar as carteiras com o vetor de retornos médios e a matriz de covariância pelo método de covariância amostral no início de cada mês, utilizando os últimos doze meses de dados diários.

Em seguida, a carteira otimizada será obtida através da resolução do problema de otimização de mínima variância global, utilizando o programa R. Primeiramente, será obtido, para cada mês, o vetor de pesos de alocação nas ações que formarão a carteira vigente para o período.

A partir do vetor de pesos obtido para cada mês de alocação de cada ano, será possível determinar o retorno e o risco da carteira para cada período, assim como o retorno anual acumulado e o risco global ao qual a carteira está exposta.

O processo de *backtesting* é iniciado em janeiro de cada ano *n* e finalizado em dezembro de cada ano *n*, gerando séries temporais de retornos diários para a CVM de cada ano.

Uma vez completa a otimização da carteira de referência, a otimização do *hedge* para um portfólio de ações será feita para dois casos, seguindo as equações derivadas por Figlewski

(1984): (1) *hedge* de um portfólio cujas posições em futuro são carregadas até o vencimento; (2) *hedge* para um portfólio cujas posições são encerradas antes do vencimento.

No primeiro caso, a proporção de *hedge* de mínima variância será o beta da regressão linear entre o log retorno do portfólio de ações e o log retorno do índice Ibovespa, dados pela equação (27), segundo a seguinte equação:

$$h^{(beta)} = \frac{\sigma(r_{P,t}, r_{I,t})}{\sigma^2(r_{I,t})} = \beta \tag{28}$$

Chamaremos, daqui por diante, esta razão ótima de *hedge beta*. Entretanto, a equivalência entre a proporção de *hedge* de mínima variância e o beta de mercado do portfólio de ações só será possível caso a posição em futuros seja carregada até o vencimento do contrato.

No segundo caso, a razão de *hedge* é o coeficiente da regressão entre o log retorno do portfólio e log retorno do futuro do índice. Esse coeficiente seria o h* tradicional do *hedge* ótimo de variância mínima para um ativo. Chamaremos, ao longo deste trabalho, esta razão de *hedge ótimo*, estimado segundo a seguinte equação:

$$h^{*} = \frac{\sigma(r_{P,t}, r_{F,t})}{\sigma^2(r_{F,t})} \tag{29}$$

Para análise de robustez comparamos o desempenho do *hedge* da carteira otimizada com o *hedge* para a carteira passiva do índice Ibovespa utilizando contratos futuros de Ibovespa. Para cada um dos casos serão calculados dois tipos de *hedge*: *hedge* dentro da amostra e *hedge* fora da amostra.

O *hedge* dentro da amostra utiliza as séries de retorno do ano *t* para estimar a razão de *hedge* ótimo para proteger o próprio ano *t*. Na prática isto seria impossível, dado que não há como utilizar dados de um ano que ainda nem aconteceu. Entretanto, este tipo de estimação faz parte do teste de robustez para o *hedge* fora da amostra.

O *hedge* dentro da amostra representa o *hedge* ótimo que aconteceria se o investidor pudesse prever o futuro dos preços do ano em que ele quer se proteger. Ao comparar o resultado do *hedge* dentro da amostra com o *hedge* fora da amostra, podemos comparar o desempenho do *hedge* real (fora da amostra) com o *hedge* ideal (dentro da amostra).

O *hedge* fora da amostra estático é estimado uma única vez, no início do período de estudo *t*, com uma amostra de dados do ano anterior *t-1*. Esta razão de *hedge* estática é utilizada durante todo o ano que se quer proteger, sem mudanças. O *hedge* fora da amostra é estimado a partir de uma amostra de dados com janela móvel de um ano e rebalanceamento mensal. Ao longo do ano, o *hedge* dinâmico produz doze razões de *hedge* ótimo diferentes.

É importante ressaltar que a amostra de dados utilizada para a estimação das razões de *hedge* será denominada como amostra de estimação. Uma vez encontradas as razões de *hedge* para cada tipo de *hedge* (dentro da amostra e fora da amostra), será calculada a função ganho com *hedge*. A amostra de dados utilizada na função ganho com *hedge* será denominada amostra de análise.

A função ganho com *hedge* é a seguinte equação:

$$G(h) = 1 * R_P - h * R_F \tag{30}$$

O ganho com *hedge* é definido pelo retorno líquido do portfólio menos o produto da razão de *hedge* com o retorno líquido do contrato futuro.

Após calcular a função ganho com *hedge* para um dos tipos de *hedge* e para cada um dos casos de estudo, serão calculadas as taxas de eficiência do *hedge*, utilizando a fórmula (26):

$$E = \frac{\sigma_p^2 - \sigma_h^2}{\sigma_p^2}$$

onde σ_j^2 representa a variância do portfólio *j* não *hedgeado* e σ_h^2 representa a variância do portfólio *hedgeado*.

4 RESULTADOS EMPÍRICOS

Esta monografia realiza dois trabalhos empíricos: a determinação de uma carteira de ações de mínima variância e o *hedge* ótimo de uma carteira de renda variável com contratos futuros de índice. Para comparação também foi realizada a estimação da proteção ótima para o índice Ibovespa. O estudo empírico foi realizado com papéis do mercado brasileiro e o *hedge* foi feito com o contrato futuro de Ibovespa para dois períodos: 2014 e 2015, anos de queda da bolsa; 2018 e 2019, anos de alta da bolsa.

A Tabela 1 apresenta o resultado da otimização das carteiras de ações para os anos 2014, 2015, 2018 e 2019, para a CVM e para o Índice Ibovespa. A Tabela 2 compara o desempenho do retorno acumulado da CVM e do Ibovespa.

Tabela 1. Estatísticas dos retornos mensais: CVM e Índice Ibovespa

	CVM		Índice Ibovespa	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
2014	0.59%	4.94%	-0.05%	6.47%
2015	2.48%	4.12%	-1.03%	5.90%
2018	-1.31%	4.73%	1.36%	6.48%
2019	2.46%	4.08%	2.37%	3.55%

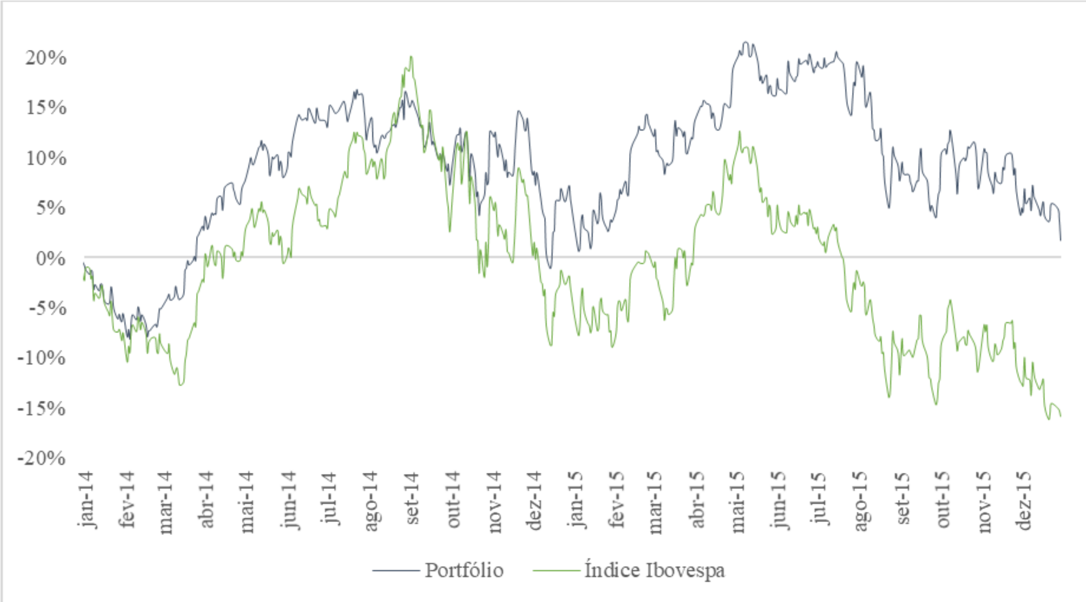
Tabela 2. Retorno acumulado anual da CVM e do Índice Ibovespa

	CVM	Ibovespa
2014	5.89%	-2.91%
2015	-3.95%	-13.31%
2018	-15.67%	15.03%
2019	32.70%	31.58%

Considerando o rendimento acumulado nos anos de baixa do mercado, a carteira de variância mínima teve melhor desempenho do que o índice em 2014 e 2015, como pode ser observado na Figura 4. Para o período de alta, no ano de 2019 o portfólio de variância mínima teve uma performance superior ao Ibov e no ano de 2018 uma performance inferior ao índice, como ilustra a Figura 5. Dos quatro anos analisados, a carteira passiva superou o portfólio de variância mínima em apenas um ano.

O desempenho inferior da carteira de variância mínima em 2018 pode ser explicado porque a série de ações teve uma quebra estrutural em relação aos parâmetros de risco e retorno utilizados na otimização com dados passados. Houve grande volatilidade em 2018 e, como a função de otimização da CVM é a minimização da volatilidade, a carteira de 2018 apresentou uma grande perda de retornos ao diminuir o risco. Contudo, é possível afirmar que o objetivo primário da otimização foi alcançado, uma vez que o desvio padrão da carteira naquele ano foi menor do que o do Ibov.

Figura 4. Retorno acumulado da CVM e do Ibovespa (Jan. 2014 – Dez. 2015)



Fonte: elaboração própria

Figura 5. Retorno acumulado da CVM e do Ibovespa (Jan. 2018 – Dez. 2019)

Fonte: elaboração própria

Após otimizar as carteiras de mínima variância, foi feito o *hedge* para o portfólio de ações. Para isso, foram calculadas séries diárias de retornos líquidos e de log retornos para os preços de ajuste do contrato futuro de índice, a cotação diária do índice Ibovespa, e o retorno acumulado do portfólio, para cada um dos anos que compõem a janela de estimação.

Chamaremos o log retorno do índice Ibovespa de r_I, o log retorno do futuro de índice de r_F, e o log retorno do portfólio de r_P. Utilizamos a transformação logarítmica para estimação da razão de *hedge* pelas suas melhores propriedades estatísticas e pela diminuição do efeito da heterocedasticidade nas regressões lineares.

Como indicado anteriormente, os retornos logarítmicos foram calculados segundo a equação (27) como $r_{j,t} = \; ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) * 100$. As estatísticas descritivas relacionadas às séries de log retornos são mostradas na Tabela 3 e 4.

Tabela 3. Estatísticas descritivas dos retornos diários (Jan. 2014 – Dez. 2015)

	Média (%)	Desvio Padrão (%)	Assimetria	Curtose
r_P	0.003%	1.16%	0.093	0.948
r_F	-0.034%	1.59%	0.268	0.675
r_I	-0.035%	1.53%	0.201	0.454

Tabela 4. Estatísticas descritivas dos retornos diários (Jan. 2018 – Dez. 2019)

	Média (%)	Desvio Padrão (%)	Assimetria	Curtose
r_P	0.023%	1.07%	-0.002	1.520
r_F	0.083%	1.30%	-0.087	0.871
r_I	0.084%	1.27%	-0.157	0.729

Em seguida, fizemos a otimização do *hedge* para os portfólios de ações em dois casos: (1) *hedge* pela estimativa de beta; (2) *hedge* pela razão de *hedge* ótimo. Em ambos os casos, a razão de *hedge* é calculada através de uma regressão linear simples usando mínimos quadrados ordinários (MQO).

Para que a regressão linear das séries temporais não seja uma regressão espúria, fazendo com que seu resultado leve à uma falsa evidência estatística, as séries envolvidas devem ser estacionárias ou, pelo menos, fracamente estacionárias, com média e variância constantes no tempo (GUJARATI, 2011).

A condição de estacionariedade pode ser testada através de um teste de raiz unitária. Uma série estacionária não apresenta raiz unitária em nível e é integrada de ordem zero. O teste utilizado é o Dickey-Fuller aumentado com a estatística de Schwarz (BIC) como critério de informação. A hipótese nula deste teste é igual a presença de raiz unitária ($\phi = 1$). É possível ainda utilizar esse teste para verificar a existência de constante (*drift*) e tendência na série (BUENO, 2011).

Tabela 5. Teste de raiz unitária (Jan. 2014 – Dez. 2015)

		Lag	Estatística-T	1%	5%	10%
r_P	Nível	0	-22.113	-2.570	-1.941	-1.616
r_F	Nível	0	-23.228	-2.570	-1.941	-1.616
r_I	Nível	0	-22.553	-2.570	-1.941	-1.616

Tabela 6. Teste de raiz unitária (Jan. 2018 – Dez. 2019)

		Lag	Estatística-T	1%	5%	10%
r_P	Nível	0	-21.877	-2.570	-1.941	-1.616
r_F	Nível	1	-17.736	-2.570	-1.941	-1.616
r_I	Nível	0	-22.262	-2.570	-1.941	-1.616

A hipótese nula é rejeitada em um nível de significância de 1% para todas as séries. Todas as séries de retorno são estacionárias. As séries não apresentam *drift* nem de tendência determinística, flutuando em torno de uma constante próxima de zero. A equação geral das séries pode ser representada como:

$$(1 - L)Yt = (\phi - 1)\, Yt - 1 + \varepsilon t$$

Como todas as variáveis são estacionárias, é apropriado seguir com a regressão em MQO para as séries temporais de log retornos.

Para cada um dos casos foram calculados três tipos de *hedge*: *hedge* dentro da amostra; *hedge* fora da amostra dinâmico com janela de estimação móvel e rebalanceamento mensal; e *hedge* fora da amostra estático, onde a razão de *hedge* estimada para janeiro do ano *t* é utilizada para todo o ano, sem rebalanceamentos mensais.

Vale destacar que os resultados apresentados são parte de um exercício teórico que desconsideram custos de transação. Na prática, custos de transação incluem taxas de corretoras de valores mobiliários, taxas de execução de ordem e taxas da B3 para negociação de contratos futuros. Na realidade, portfólios com *hedge* dinâmico incorreriam em maiores custos pois o investidor deveria executar ordens de compra e venda todos os meses para ajustar sua posição em contratos futuros.

Em nossa análise empírica buscamos determinar três coisas: primeiro, qual o melhor método de estimação do *hedge*; segundo, qual o grau de eficiência do *hedge*, ou seja, o quanto do risco do portfólio foi eliminado; terceiro, qual o melhor tipo de *hedge*, dinâmico ou estático.

No *hedge* pela estimativa de beta, o *hedge* é feito utilizando a estimação da razão de *hedge* que carrega a posição em contrato futuro de índice até a maturidade. A proporção de *hedge* de mínima variância será o beta da regressão linear entre o log retorno do portfólio de ações e o log retorno do índice Ibovespa, segundo a seguinte equação (28):

$$h^{(beta)} = \frac{\sigma(r_{P,t}, r_{I,t})}{\sigma^2(r_{I,t})} = \beta$$

No *hedge* feito considerando a estimativa de razão de *hedge* ótimo que encerra a posição em um determinado contrato futuro antes do vencimento, a razão de *hedge* é o coeficiente da regressão entre o log retorno do portfólio e log retorno do futuro do índice, segunda a equação (29):

$$h^{*} = \frac{\sigma(r_{P,t}, r_{F,t})}{\sigma^2(r_{F,t})}$$

Os resultados das regressões de estimação das razões de *hedge* estão nas tabelas a seguir. Como as razões de *hedge* foram estimadas com janela móvel de um ano de retornos diários, as razões de *hedge* são definidas apenas para 2015, utilizando dados de 2014, e 2019, utilizando os dados de 2018.

Para análise de robustez reproduzimos a mesma metodologia de estimação para *hedgear* a carteira passiva do índice Ibovespa utilizando contratos futuros de Ibovespa. Como o futuro de índice e o índice Ibovespa são altamente correlacionados, espera-se que a estimação do *hedge* ótimo resulte em uma eficiência do *hedge* ainda mais alta do que a da carteira ativa.

A equação utilizada para a estimação do *hedge* da carteira passiva é a seguinte:

$$h_I = \frac{\sigma(r_{I,t}\ , r_{F,t})}{\sigma^2(r_{F,t})} \tag{31}$$

Primeiro, encontramos a razão de *hedge* ótima entre o contrato futuro de índice e o próprio índice Ibovespa. As Tabelas 7 e 8 ilustram os resultados para os anos 2015 e 2019, respectivamente. Ao contrário da razão de *hedge* entre a carteira ativa de ações e o contrato futuro, a razão de *hedge* para proteger uma carteira passiva em Ibovespa apresenta razões de *hedge* quase iguais a 1.

Tabela 7. Razões de *hedge* (Ano 2015)

	CVM		IBOV
	h^*	$h^{(beta)}$	h^*
$h_{d.a.}$	0.655*	0.697*	0.954*
h_{jan}	0.577*	0.615*	0.931*
h_{fev}	0.593*	0.631*	0.934*
h_{mar}	0.592*	0.629*	0.932*
h_{abr}	0.601*	0.639*	0.932*
h_{mai}	0.590*	0.632*	0.931*
h_{jun}	0.591*	0.630*	0.933*
h_{jul}	0.600*	0.635*	0.937*
h_{ago}	0.603*	0.638*	0.938*
h_{set}	0.616*	0.658*	0.937*
h_{out}	0.625*	0.669*	0.937*
h_{nov}	0.675*	0.724*	0.940*
h_{dez}	0.674*	0.725*	0.941*

Tabela 8. Razões de *hedge* (Ano 2019)

	CVM		IBOV
	h^*	$h^{(beta)}$	h^*
$h_{d.a.}$	0.725*	0.743*	0.971*
h_{jan}	0.640*	0.659*	0.966*
h_{fev}	0.665*	0.683*	0.966*
h_{mar}	0.675*	0.689*	0.971*
h_{abr}	0.674*	0.691*	0.968*
h_{mai}	0.693*	0.707*	0.974*
h_{jun}	0.698*	0.713*	0.971*
h_{jul}	0.699*	0.716*	0.970*
h_{ago}	0.710*	0.728*	0.971*
h_{set}	0.719*	0.737*	0.971*
h_{out}	0.716*	0.735*	0.970*
h_{nov}	0.723*	0.745*	0.968*
h_{dez}	0.721*	0.739*	0.971*

Nas tabelas acima, * indica que o coeficiente é estatisticamente significante a um nível de 5%. O *hedge* dentro da amostra é representado por $h_{d.a.}$.

As razões de *hedge* variam pouco entre o *hedge* para o ano de 2015 e o *hedge* para o ano de 2019. Também é interessante notar que a diferença entre a razão de *hedge* ótimo, h^*, e a razão de *hedge* beta, $h^{(beta)}$, é muito pequena para todas as regressões feitas nos dois anos. Os dois métodos de estimação produziram coeficientes significantes e parecidos, então neste estágio ainda não é possível afirmar qual o método apresentou melhor ajuste. Uma análise mais aprofundada deste resultado será avaliada a partir dos resultados da função de ganho com *hedge*.

A alta razão de *hedge* do Ibovespa pode ser explicada pelo fato de que o ativo subjacente do contrato e o ativo comprado no mercado à vista são o mesmo e este *hedge* não é um *hedge* cruzado. Por conseguinte, a razão de *hedge* é maior porque estes ativos são quase perfeitamente correlacionados.

Uma vez encontradas as razões de *hedge* dentro e fora da amostra para cada caso, serão calculadas as funções ganho com *hedge*. O ganho com *hedge* é definido pelo retorno líquido do portfólio menos o produto da razão de *hedge* com o retorno líquido do contrato futuro. A função ganho com *hedge* é a dada pela equação (30), demonstrada anteriormente:

$$G(h) = 1 * R_P - h * R_F$$

O *hedge* dentro da amostra utiliza as séries de retorno do ano *t* para estimar a razão de *hedge* ótimo para proteger o próprio ano *t*. O *hedge* fora da amostra estático é estimado uma única vez, no início do período de estudo *t*, com uma amostra de dados do ano anterior *t-1*, e não é mais rebalanceado ao longo do ano. O *hedge* fora da amostra dinâmico é estimado a partir de uma amostra de dados com janela móvel de um ano e rebalanceamento mensal.

A Tabela 9 mostra as estatísticas descritivas anualizadas do resultado das séries de ganho com *hedge* para cada ano. É possível observar que as variâncias para todos os tipos de *hedge* são muito parecidas. Este pode ser considerado um indicativo preliminar de que a eficiência do *hedge* será muito próxima para todos os casos analisados.

Tabela 9. Estatísticas descritivas anualizadas do ganho com *hedge* da CVM

	2015		2019	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
$h^*_{d.a.}$	5.10%	9.84%	8.91%	8.87%
$h^*_{f.a.dinâmico}$	4.71%	9.91%	10.00%	8.93%
$h^*_{f.a.estático}$	4.21%	10.01%	11.40%	9.01%
$h^{(beta)}_{d.a.}$	5.59%	9.90%	8.41%	8.87%
$h^{(beta)}_{f.a.dinâmico}$	5.19%	9.88%	9.47%	8.91%
$h^{(beta)}_{f.a.estático}$	4.65%	9.89%	10.85%	8.95%

OBS: d.a. é abreviação de dentro da amostra de estimação; f.a. é abreviação de fora da amostra de estimação.

Tabela 10. Estatísticas descritivas anualizadas do ganho com *hedge* do Ibovespa

	2015		2019	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
$h^*_{d.a.}$	-0.96%	4.57%	1.25%	2.85%
$h^*_{f.a.dinâmico}$	-1.14%	4.59%	1.31%	2.85%
$h^*_{f.a.estático}$	-1.22%	4.60%	1.41%	2.85%

OBS: d.a. é abreviação de dentro da amostra de estimação; f.a. é abreviação de fora da amostra de estimação.

Novamente é possível observar que os *hedges* dentro da amostra, fora da amostra dinâmico e fora da amostra estático produzem funções de ganho com *hedge* com estatísticas parecidas, como mostra a Tabela 10. No *hedge* da carteira ativa, nos anos 2015 e 2019, observa-se risco semelhante, mas em 2019, com o mercado em alta, o retorno foi maior. Para o *hedge* do Ibovespa, em 2015, no período de baixa do mercado, houve maior risco do que em 2019, quando o mercado esteve em alta.

Podemos observar ainda que a carteira ativa que opera *hedge* com futuros manteve retorno positivo nos dois anos, até quando a bolsa estava em queda. No *hedge* com o Ibovespa, em 2015 houve retorno médio negativo e em 2019 retorno positivo.

Após calcular a função ganho com *hedge* para os dos tipos de *hedge* e para cada um dos casos de estudo, serão calculadas as taxas de eficiência do *hedge*, utilizando a fórmula (26):

$$E = \frac{\sigma_j^2 - \sigma_h^2}{\sigma_j^2}$$

A eficiência do *hedge* mede o quanto do risco foi eliminado pelo *hedge* em termos percentuais. A Tabela 11 ilustra os resultados obtidos para cada um dos tipos de estimação e para os dois anos de análise.

Tabela 11. Eficiência do *hedge* da CVM

	2015		2019	
	h^*	$h^{(beta)}$	h^*	$h^{(beta)}$
$h_{d.a.}$	0.717	0.714	0.691	0.691
$h_{f.a.dinâmico}$	0.713	0.715	0.687	0.688
$h_{f.a.estático}$	0.707	0.715	0.682	0.685

OBS: d.a. é abreviação de dentro da amostra de estimação; f.a. é abreviação de fora da amostra de estimação.

O resultado do desempenho do *hedge* para as carteiras ativas de renda variável foi bastante alto e muito similares nos dois anos. Como o *hedge* de ações com futuros de índice é um *hedge* cruzado, era esperado que o risco não fosse totalmente eliminado. Porém, a diminuição do risco do portfólio gira em torno de 70%, um valor satisfatório. Podemos afirmar que o grau de eficiência do *hedge* é alto.

A razão de *hedge* beta produziu para a carteira de variância mínima na análise fora da amostra resultados melhores do que a razão de *hedge* ótimo. Então, apesar de apresentarem desempenhos semelhantes, o *hedge* beta ocasionou uma redução do risco um pouco maior. Portanto, a estimação que utiliza o retorno do índice como variável independente da regressão, aparentemente, resulta em um melhor método de estimação para o *hedge*. Para a carteira de variância mínima, na análise dentro da amostra de estimação, a melhor efetividade do *hedge* foi para a razão de *hedge* ótimo.

Na comparação entre o *hedge* dinâmico e o *hedge* estático, o *hedge* dinâmico obteve maior grau de diminuição da variância da carteira. Contudo, a diferença entre a eficiência do *hedge* dinâmico e do *hedge* estático é muito pequena, para o período de análise. Portanto, a performance do *hedge* não é significativamente aumentada ao realizar rebalanceamentos mensais na posição em futuros. Se considerarmos que na prática o investidor incorre em custos de transação toda vez que rebalanceia sua posição, a pequena vantagem que o *hedge* dinâmico oferece pode não ser suficiente para contrabalançar os custos relacionados a este tipo de estratégia com *hedge*.

Tabela 12. Eficiência do *hedge* do Ibovespa

	2015	2019
$h^*_{d.a.}$	0.962	0.975
$h^*_{f.a.dinâmico}$	0.961	0.975
$h^*_{f.a.estático}$	0.961	0.975

OBS: d.a. é abreviação de dentro da amostra de estimação; f.a. é abreviação de fora da amostra de estimação.

A eficiência do *hedge* do Ibovespa é maior que 90% para todos os casos analisados nos dois anos estudados, como pode ser observado na Tabela 12. Este resultado é quase o de um *hedge* perfeito, em que todo o risco seria eliminado, levando a crer que o modelo utilizado foi bem sucedido em *hedgear* o índice.

Os resultados da eficiência do *hedge*, tanto para a carteira ativa, quanto para o Ibovespa, são condizentes com a afirmação de Figlewski (1984), que diz que há uma relação entre a diminuição do risco do portfólio e a correlação entre portfólio e o contrato futuro usado para a sua proteção. O autor expressa essa relação na equação abaixo.

$$\sigma^2 \min = \sigma_P^2\,(1 - \rho_{P,F}^2)$$

Figlewski (1984) conclui, então, que o risco do portfólio só pode ser completamente eliminado com o *hedge* caso haja correlação perfeita entre o retorno do portfólio e o retorno do contrato futuro.

Observamos agora a matriz de correlação entre os retornos líquidos das carteiras ativas, do índice Ibovespa e do contrato futuro de índice, para cada período, como mostram as Tabelas 13 e 14.

Tabela 13. Correlações (Jan. 2014 – Dez. 2015)

2014-2015	
Corr (Rp, Rf)	0.847
Corr (Rp, Ri)	0.877
Corr (Ri, Rf)	0.981

Tabela 14. Correlações (Jan. 2018 – Dez. 2019)

2018-2019	
Corr (Rp, Rf)	0.831
Corr (Rp, Ri)	0.837
Corr (Ri, Rf)	0.987

É possível perceber que a correlação entre o contrato futuro de índice e o próprio índice é quase 1, o que significa que eles são quase perfeitamente correlacionados. Além disso, a correlação entre o portfólio e o índice é maior do que entre o portfólio e o contrato futuro, o que explica porque o *hedge* beta foi mais eficaz. Estes resultados não apenas são condizentes com a teoria de Figlewski, como dão credibilidade ao nosso modelo de estimação do *hedge*.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O *hedge* com derivativos é uma importante ferramenta para investidores que desejam complementar a gestão dos riscos de uma carteira ou de um ativo. Diante de cenários econômicos e financeiros instáveis, a mensuração de um método de *hedge* ótimo de um portfólio de ações torna-se relevante para investidores, sejam eles institucionais ou privados. O *hedge* com contratos futuros de índice diminui o risco sistemático e complementa a diversificação, resultando em uma gestão de risco mais efetiva.

O objetivo desta monografia é estimar e testar empiricamente um método de proteção ótimo contra riscos para uma carteira de ações utilizando contratos futuros de índice. Além disso, buscamos otimizar um portfólio de ações para ser a base da operação de *hedge*. Foram realizados dois trabalhos empíricos: a determinação de uma carteira de mínima variância no mercado de ações brasileiros, e a estimação da proteção ótima dessa carteira com derivativos.

Consideramos o desempenho do *hedge* com futuros de índice para uma carteira passiva (Ibovespa) e ativa (CVM). O estudo empírico foi realizado com papéis do mercado brasileiro e o *hedge* foi feito com o contrato futuro de Ibovespa para dois períodos: 2015, ano de queda da bolsa; e 2019, ano de alta da bolsa.

Para cada um dos anos de análise, realizamos a estimação do *hedge* tanto para a carteira de variância mínima, quanto para o Índice Ibovespa. Foram estudados dois casos de *hedge*: (1) *hedge* pela estimativa de beta; (2) *hedge* pela razão de *hedge* ótimo. Para cada um dos casos de *hedge* foram feitos três tipos de *hedge*: *hedge* dentro da amostra; *hedge* fora da amostra dinâmico com janela de estimação móvel e rebalanceamento mensal; e *hedge* fora da amostra estático, onde a razão de *hedge* estimada para janeiro do ano t é utilizada para todo o ano, sem rebalanceamentos mensais.

O desempenho do *hedge* para a carteira de renda variável nos dois anos de análise foi bastante alto e dentro do esperado. Por se tratar de um *hedge* cruzado, era esperado que o risco do portfólio não fosse completamente eliminado. Entretanto, tanto para 2015, quanto para 2019, a diminuição do risco das carteiras ficou em torno de 70%, independentemente do método de estimação. Ambos os *hedges*, *hedge* beta e *hedge* ótimo, produziram resultados similares. É possível afirmar que a proteção da carteira de mínima variância foi alcançada, uma vez que o grau encontrado de eficiência do *hedge* é alto.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho foi alcançado. Conseguimos estimar e testar empiricamente um método de proteção ótimo contra riscos para uma carteira de renda variável. A estratégia de *hedge* ótimo de um portfólio de ações com contratos futuros proposta por Figlewski (1984), mostra-se uma estratégia promissora para o mercado brasileiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDER, Carol, BARBOSA, Andreza. Effectiveness of Minimum-Variance Hedging. *The Journal of Portfolio Management (Online)*, Pageant Media, v. 33, n. 2, p. 46-59, 2007.

BUENO, Rodrigo De L. da S. Conceitos de "*Hedge*" em Contratos Futuros. *Revista de Administração*, Universidade de São Paulo, v. 37, n. 4, p. 83-90, 2002.

BUENO, Rodrigo De L. da S. *Econometria de Séries Temporais*. 2 ed. Cengage Learning, 2011.

CLARKE, Roger, DE SILVA, Harindra, THORLEY, Steven. Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market. *The Journal of Portfolio Management (Online)*, Pageant Media, v. 33, n. 1, p. 10-24, 2006.

EDERINGTON, Louis H. The Hedging Performance of the New Futures Markets. *The Journal of Finance*, The American Finance Association, v. 34, n. 1, p. 157-170, 1979.

ELTON, Edwin J., GRUBER, Martin J., BROWN, Stephen J., GOETZMANN, William N. *Moderna Teoria de Carteiras de Análise de Investimentos*. 1 ed. Campus Elsevier, 2012.

FAMA, Eugene F., FRENCH Kenneth R. The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, The American Finance Association, v. 47, n. 2, p. 427-465, 1992.

FIGLEWSKI, Stephen, KON, Stanley J. Portfolio Managament with Stock Index Futures. *Financial Analysts Journal*, Taylor & Francis, v. 38, n. 1, p. 52-60, 1982.

FIGLEWSKI, Stephen. Hedging Performance and Basis Risk in Stock Index Futures. *The Journal of Finance*, The American Finance Association, v. 39, n. 3, p. 657-669, 1984.

GUJARATI, Damodar N. *Econometria Básica*. 5 ed. McGraw Hill, 2011.

HISTÓRICO B3. B3 Relações com Investidores, 2020. Disponível em <https://ri.b3.com.br/pt-br/b3/historico/>. Acesso em: 06 ago. 2020.

HULL, John C. *Opções, Futuros e Outros Derivativos*. 9 ed. Bookman, 2016.

JAGANNATHAN, Ravi, MA, Tongshu. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *The Journal of Finance*, The American Finance Association, v. 58, n. 4, p. 1651-1683, 2003.

JOHNSON, Leland L. The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures. *The Review of Economic Studies*, Oxford University Press, v. 27, n. 3, p. 139-151, 1960.

LAWS, Jason, THOMPSON, John. Hedging Effectiveness of Stock Index Futures. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 163, n. 1, p. 177-191, 2005.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, The American Finance Association, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, Harry. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. 1 ed. Yale University Press, 1959.

MERTON, Robert C. On Estimating the Expected Return on the Market. *Journal of Financial Economics*, North-Holland Publishing Company, v. 8, n. 4, p. 323-361, 1980.

ROSS, Stephen A., WESTERFIELD, Randolph W., JAFFE, Jeffrey, LAMB, Roberto. *Administração Financeira*. 10 ed. McGraw Hill, 2015.

RUBESAM, Alexandre, BELTRAME, André L. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. *Revista Brasileira de Finanças (Online)*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 11, n. 1, p. 81-118, 2013.

SANTOS, André A. P., TESSARI, Cristina. Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 10, n. 3, p. 369-393, 2012.

SANTOS, José C. de S., SILVA, Marcos E. *Derivativos e Renda Fixa: Teoria e Aplicações ao Mercado Brasileiro*. 1 ed. Atlas, 2015.

STEIN, Jerome L. The Simultaneous Determination of Spot and Future Prices. *The American Economic Review*, The American Economic Association, v. 51, n. 5, p. 1013-1025, 1961.

TELSER, Lester G., HIGINBOTHAM, Harlow N. Organized Futures Markets: Costs and Benefits. *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, v. 85, n. 5, p. 969-1000, 1977.

THOMÉ, César N., LEAL, Ricardo P. C., ALMEIDA, Vinício de S. Um Índice de Mínima Variância de Ações Brasileiras. *Economia Aplicada*, Universidade de São Paulo, v. 15, n. 4, p. 535-557, 2011.

WORKING, Holbrook. Trading and Hedging. *The American Economic Review*, The American Economic Association, v. 43, n. 3, p. 314-343, 1953.