Beatriz da Silva Mello

Risco de Crédito: uma aplicação no mercado de capitais para debêntures

Niterói - RJ, Brasil

10 de maio de 2021

Universidade Federal Fluminense

Beatriz da Silva Mello

Risco de Crédito: uma aplicação no mercado de capitais para debêntures

Trabalho de Conclusão de Curso

Monografia apresentada para obtenção do grau de Bacharel em Estatística pela Universidade Federal Fluminense.

Orientador(a): Prof. Dr. Marco Aurélio Sanfins
Co-Orientador(a): Prof. Dra. Daiane Rodrigues dos Santos

Niterói - RJ, Brasil

10 de maio de 2021

Universidade Federal Fluminense

Beatriz da Silva Mello

Risco de Crédito: uma aplicação no mercado de capitais para debêntures

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título *"Risco de Crédito: uma aplicação no mercado de capitais para debêntures"*, defendida por Beatriz da Silva Mello e aprovada em 10 de maio de 2021, na cidade de Niterói, no Estado do Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Marco Aurélio dos Santos Sanfins
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dra. Daiane Rodrigues dos Santos
Departamento de Economia – Candido Mendes

Prof. Dra. Jéssica Quintanilha Kubrusly
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Wilson Calmon Almeida dos Santos
Departamento de Estatística – UFF

Niterói, 10 de maio de 2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

M527r Mello, Beatriz da Silva
Risco de Crédito: uma aplicação no mercado de capitais para debêntures / Beatriz da Silva Mello ; Marco Aurélio Sanfins, orientador ; Daiane Rodrigues dos Santos, coorientadora. Niterói, 2021.
47 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2021.

1. Debêntures. 2. Risco de crédito. 3. CreditRisk+. 4. Simulação de Monte Carlo. 5. Produção intelectual. I. Sanfins, Marco Aurélio, orientador. II. Santos, Daiane Rodrigues dos, coorientadora. III. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Resumo

Nos últimos anos as debêntures, título de renda fixa e com boa rentabilidade, tem apresentado uma grande participação no mercado de capitais, em média 45% desde 2015. Por esse motivo a análise de risco para esse produto tem se tornado cada vez mais relevante. O presente trabalho apresenta o modelo CreditRisk+ e o método de Simulação de Monte Carlo ajustados a uma carteira teórica de debêntures. O objetivo do estudo é mensurar o risco de crédito do portfólio em cenários com e sem stress, e variando o nível de confiança. Através da aplicação dos modelos, encontrou-se, empiricamente, a distribuição da variável Perdas considerando as premissas de cada método. Em seguida, calcularam-se as principais métricas utilizadas em uma análise de risco - Perda Esperada (PE), *Value at Risk* (VaR), Capital Econômico (EC) e *Expected Shortfall* (ES) - para auxiliar o investidor na mitigação das perdas que o portfólio pode apresentar. Verificaram-se diferenças entre as métricas obtidas pelo CreditRisk+ e pela Simulação de Monte Carlo, entretanto ambas as técnicas são importantes para a gestão de risco de crédito de investimentos.

Palavras-chave: Debêntures. Risco de Crédito. CreditRisk+. Simulação de Monte Carlo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador Dr. Marco Aurélio Sanfins e a minha co-orientadora Dra. Daiane Rodrigues por terem acreditado em meu potencial e me proporcionado esta oportunidade. Aos doutores Profa. Jéssica Kubrusly e Prof. Wilson, é uma honra tê-los na minha banca.

Em especial, agradeço a minha mãe, Ana Lucia, que sempre me apoiou e confiou em mim nessa caminhada, não me deixando desistir em momento algum. Ao meu pai, Floriano, que me acompanhou todas as manhãs e me ajudou nessa jornada. Aos meus irmãos, Thiago e Sergio, que estiveram ao meu lado me dando forças e palavras de incentivo. E a todos os amigos que a Estatística me deu, em especial Júlia e Gabriel, que me apoiaram e me ajudaram durante todo o curso.

Agradeço também a todos os professores dessa renomada Universidade que de alguma maneira contribuíram com os ensinamentos necessários para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Aos amigos e familiares que também confiaram em mim e me ajudaram de alguma forma, meu muito obrigada.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

O mercado financeiro pode ser entendido como um ambiente onde é permitido a compra e a venda de bens de valores mobiliários, câmbio ou mercadorias. Ele é afetado por diversos motivos como os riscos políticos e econômicos, por exemplo a desvalorização da moeda nacional, que é influenciada pela variação da inflação, uma vez que esse índice descreve o poder de compra da população.

Esses fatores exercem grande influência na mensuração do risco que uma transação apresenta à Instituição. Nos últimos anos foram observadas algumas fases de grande impacto no mundo, são essas: a Pandemia do Coronavírus (COVID-19), a guerra comercial entre China e Estados Unidos, o conflito político entre Estados Unidos e Irã, além da famosa crise financeira de 2008 precipitada pela falência do tradicional banco de investimentos estadunidense Lehman Brothers. Diante disso, uma economia instável não se torna atrativa para os investidores, visto que nesse cenário esta apresenta maiores riscos.

No âmbito financeiro, uma instituição assume alguns riscos ao realizar uma transação, segundo o Acordo de Basileia II, os principais riscos são: de reputação, legal, de liquidez, de taxa de juros, de mercado, operacional e de crédito.(CORTEZ, 2006)

O risco de reputação, também chamado de risco de imagem, é quando são publicadas informações negativas sobre a Empresa, impactando na imagem da instituição. Um exemplo desse risco é quando se torna pública uma notícia de recuperação judicial. Ele impacta diretamente na classificação de *rating* da entidade, pois as agências de riscos podem reduzir a categoria dela e isso implica na visão que o mercado tem dessa entidade.

O risco legal resulta de falhas na legislação ou de ações judiciais movidas contra a instituição que desvalorizam seus ativos ou valorizam consideralvemente os seus passivos. A título de exemplo, pode-se citar a mudança na legislação quando um novo governo é instaurado. (STOLF, 2008)

O risco de liquidez é definido pela capacidade de perda de capital e pela incapacidade que a empresa apresenta de liquidar suas dívidas no prazo estipulado.

O risco de taxas de juros é referente à exposição da entidade a mudanças adversas nas taxa de juros. Quando ocorrem grandes mudanças nas taxas é provável que ocorram quedas dos ganhos e no valor dos ativos.

O risco de mercado é definido como o risco de perdas em decorrências de alterações de acordo com as variáveis econômicas e financeiras, como preços de ações e taxas de câmbio. Um exemplo clássico desse risco é quando uma instituição adquire empréstimos e dívidas em moedas estrangeiras e ocorre uma desvalorização da taxa de câmbio. De acordo com Jorion (2000) o VaR é uma medida de risco de mercado, pois calcula a perda esperada de acordo com um nível de significância sob as condições do mercado.

O risco operacional segundo o Acordo de Basileia II é definido como o "risco da perda resultante de falhas ou inadequações de pessoas, sistemas ou processos". (CORTEZ, 2006)

O risco de crédito é o mais comum entre as instituições. Segundo Aragao (2003), ele surge quando o beneficiário de uma operação financeira não deseja ou não é capaz de cumprir com as obrigações contratuais. Corroborando com essa afirmação, Bielecki e Rutkowski (2004) fundamenta que esse risco pode ser associado a alterações na qualidade de crédito e até ao evento de *default* ou falência da cedente. No cenário de emissão de debêntures, esse é o risco mais relevante que uma entidade assume no momento da emissão desse título.

De acordo com o Boletim de Mercado de Capitais emitido pela ANBIMA (2020), as emissões de debêntures mantiveram um crescimento anual desde 2017. Ainda que em 2019 o volume emitido de debêntures tenha caído de 61,8% para 43,8%. Esse título de renda fixa ainda é uma boa alternativa para escapar das elevadas taxas de juros cobradas pelos bancos. Segundo definição dada pela CVM, as debêntures são títulos de dívidas de uma companhia que oferece a seus detentores o direito de crédito. O investidor é remunerado por meio de juros pré ou pós-fixados, a empresa pode utilizar esse recurso para financiar seus projetos ou gerenciar suas dívidas.

Com o objetivo de minimizar esse prêmio, as instituições utilizam mecanismos para mensurar o risco de crédito de cada operação que venha ser realizada. Entende-se como risco de *default*, a probabilidade do beneficiário não cumprir com as suas obrigações financeiras no prazo estipulado. Ela pode ser calculada de diferentes métodos – os principais são: KMV, CreditMetrics, CreditRisk+ e Simulação de Monte Carlo –, e sempre com o mesmo objetivo, que seja próxima de zero, visto que uma baixa probabilidade de *default* implica em investimentos de melhor qualidade.

Esse tema se torna relevante, visto que para instituições não–financeiras, a gestão de riscos tem apresentado um aumento significativo em sua importância. Segundo Silveira (2007) enquanto que as instituições financeiras priorizam o mercado de ativos e passivos, as não-financeiras focam no fluxo de caixa e nos seus riscos intrínsecos. Com isso, o VaR (*Value at Risk*) deve ser medido com precisão para não ter crédito aprovisionado desnecessariamente (SANFINS et al., 2020).

O objetivo de uma empresa é a maximização do lucro ou a minimização dos custos, por isso uma boa análise de risco se torna essencial para a mesma. Hicks (1946) define que "Lucro é o que podemos consumir numa semana e sentir-nos tão bem no fim como nos sentíamos no início ". Em uma perspectiva contábil, lucro pode ser definido como o acréscimo no valor presente do patrimônio líquido. (FUJI, 2004)

Na perspectiva de emissão de debêntures, os investidores buscam obter lucro a partir deste tipo de título, enquanto que as emissoras procuram auxílios para novos projetos ou pagamentos de dívidas.

No presente trabalho, iremos abordar o modelo de mensuração de risco de crédito, CreditRisk+ por sua fácil implementação, visto que é necessária uma pequena quantidade de informações de entrada para aplicá-lo (CROUHY; GALAI; MARK, 2000), além do método de Simulação de Monte Carlo, uma vez que este nos permite calcular perdas em diversos cenários.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é mensurar o risco de crédito envolvido nas emissões de debêntures. Para isto, utilizaremos o modelo CreditRisk+ e o método de Simulação de Monte Carlo.

O objetivo específico deste trabalho é quantificar o risco de crédito para um portfólio retirado de um banco de dados de debêntures. As metodologias adotadas para esta análise são os modelos de CreditRisk+ e Simulação de Monte Carlo a partir de aplicações no *software* R.

Essa avaliação pretende determinar as perdas esperadas e não esperadas para a carteira em estudo, que são métricas que devem ser analisadas durante uma análise de risco.

O trabalho também busca apresentar a utilização do método de *stress* nas classificações de *rating*, isto é, reduzir duas categorias de cada indivíduo da carteira com a finalidade de estudar o pior cenário. Além de demonstrar a influência da probabilidade de *default* na carteira, alterando para o cenário em que será considerado um acréscimo de 5% na probabilidade de todos os *ratings*.

1.2 Organização

Essa dissertação está organizada da seguinte forma. O capítulo 2 apresenta o material utilizado para a realização do trabalho, a metodologia do CreditRisk+ considerando as taxas de *default* fixas e variáveis, além do método de Simulação Monte Carlo ajustado pela distribuição Beta. No capítulo 3 são apresentados os resultados numéricos da aplicação da metodologia apresentada, além das análises considerando os diferentes cenários que foram apresentados na seção de Objetivos. No capítulo 4 apresentamos as considerações finais do nosso trabalho. As propriedades das distribuições de probabilidade da Gama e da Beta estão apresentadas no Apêndice 1.

2 Materiais e Métodos

2.1 Materiais

O material desse trabalho é composto por elementos da carteira teórica utilizada no cálculo do Índice de Debêntures ANBIMA (IDA). O IDA é uma família de índices que representa a evolução, a preços de mercado, da carteira de debêntures teórica, formada por empresas com *rating* superior a BB, em escala global. O objetivo principal desse índice é atender às necessidades dos mais diferentes tipos de investidores e das suas respectivas carteiras.

Para obtermos uma carteira, ou base de dados, com mais diversificação de ativos, foram incluído níveis de classificação abaixo das apresentadas no índice, com o objetivo de compor uma carteira teórica que tenha uma exposição ao risco comum a carteiras de investimentos institucionais e que são mais próximas da realidade. Os dados utilizados nesse estudo podem ser encontrados no site da ANBIMA (2021).

A metodologia presupõe o intervalo de tempo anual, em relação à exposição a cada debênture. Com o intuito de simplificar as análises, foram considerados apenas oito grandes grupos de classificações dos riscos das empresas.

Fitch Ratings	Standard & Poor's	Moody's
AAA	AAA	Aaa
AA	AA	Aa
A	A	A
BBB	BBB	Baa
BB	BB	Ba
B	B	B
CCC	CCC	Caa
CC	CC	Ca

Tabela 1: Escala de *rating*
Fonte: Garcia, Monte-Mor e Tardin (2019)

Para obter o *rating* de cada emissor, utilizamos as classificações disponibilizadas pelas três principais agências de risco internacionais do mercado, Fitch, Moody's Investor Service e Standard & Poor's.

De acordo com a Comissão de Valores Mobiliários (2020), agência de classificação de risco é uma companhia que avalia produtos financeiros ou seus emissores e classifica esses ativos ou empresas de acordo com o grau de risco de *default* no prazo firmado. Cada uma dessas agências apresenta um próprio sistema de classificação, por isso utilizamos a Tabela 1 para padronizar a escala de *rating*.

Segundo Garcia, Monte-Mor e Tardin (2019) pode-se fragmentar a Tabela 1 em quatro grandes grupos: o primeiro contém os *ratings* de AAA a A, nessa seção eles apresentam um grau de investimento com alta qualidade e baixo risco de inadimplência; o segundo grupo é formado apenas pela categoria BBB que apresenta grau de investimento com qualidade média; no terceiro, temos os *ratings* de BB a B, nessa classe temos investimentos em categoria de especulação e baixa classificação; já no último grupo, que varia de CCC a C, os investimentos apresentam um elevado risco de inadimplência e consequentemente, baixo interesse dos investidores em ativos com essas classificações.

Para a utilização do CreditRisk+ é necessário, além da exposição do devedor, a probabilidade de *default* e a volatilidade das taxas de *default*. Essas informações foram obtidas a partir de um estudo anual da Poors (2021).

Rating	PD	SD
AAA	0,00	0,00
AA	0,02	0,07
A	0,05	0,10
BBB	0,16	0,25
BB	0,63	0,99
B	3,34	3,24
CCC	28,30	11,79
CC	28,30	11,79

Tabela 2: Matriz de *Rating* em %

Note que em cada coluna da Tabela 2 conseguimos descrever o que está sendo considerado nas variáveis, na coluna "Rating"temos as categorias de *rating*, na "PD"a probabilidade de *default* e na "SD"o desvio padrão, ou volatilidade do emissor de acordo com a sua respectiva classificação.

No decorrer do trabalho foi utilizado o pacote "crp.CSFP"e o programa R (R Core Team, 2014) para extrair resultados que possibilitassem o estudo dessa base. Para a utilização desse pacote, o conjunto de dados deve conter as seguintes variáveis:

- *CPnumber*: variável que serve para identificar os indivíduos da base;
- *CPname*: indica o nome do emissor da debênture;
- *exposure* ou exposição: apresenta o saldo devedor do empréstimo;
- *loss given default* (lgd): indica o percentual que a instituição presupõe que irá perder do valor do empréstimo no momento de inadimplência;
- *maturity* ou maturidade: prazo considerado para a avaliação das estimativas;
- *rating*: variável que define a classificação de risco do emissor;
- S1: variável binária (0,1), caso o indivíduo pertença ao setor 1;
- S2: variável binária (0 ou 1), caso o indivíduo pertença ao setor 2; e
- S3: variável binária (0 ou 1), caso o indivíduo pertença ao setor 3.

Para facilitar o entendimento do trabalho, iremos supor que todos os emissores pertencem a um único setor.

De acordo com Schuermann (2004), a distribuição das perdas é bimodal com picos entre 0,25 e 0,75. Foi adotado o valor de *loss given default* (lgd) de 0,75. Essa medida é tradicionalmente indicada pelos sistemas de bancos que presupõem o percentual que a instituição irá perder do valor de exposição. Neste trabalho, estamos considerando que a entidade, ao realizar uma transação, exige garantias que assegure 25 % do valor da exposição.

A seguir, apresentamos o formato que a base de dados se encontra para as seis primeiras debêntures da carteira.

Identificador	Nome	Exposição	lgd	Maturidade	Rating	S1	S2	S3
1	BK BRASIL OPERAÇÃO E ASSESSORIA A RESTAURANTES S/A 19	395.600	0,75	365	4	1	0	0
2	B3 S/A 25	118.572,00	0,75	365	4	1	0	0
3	B3 S/A 26	359.473,00	0,75	365	4	1	0	0
4	CCR 28	664.560,47	0,75	365	5	1	0	0
5	CCR 29	391.499,76	0,75	365	5	1	0	0
6	CCR 30	211.094,42	0,75	365	5	1	0	0

Tabela 3: Formato da carteira teórica

Toda instituição financeira precisa mensurar os riscos que são assumidos quando uma transação é realizada. No presente trabalho, estudaremos o risco de crédito, que pode ser definido como a probabilidade do tomador de um empréstimo não cumprir com as suas obrigações no prazo estipulado.

Existem alguns modelos que quantificam esse risco, o CreditRisk+ é um dos mais utilizados pelos bancos. Isso se dá por sua fácil implementação, já que não são necessários muitos parâmetros de entrada. Por exemplo, essa metodologia não exige que seja informada a data exata do evento de inadimplência.

Um dos objetivos deste trabalho é comparar os resultados do modelo CreditRisk+ com aqueles encontrados a partir do método de Simulação de Monte Carlo. Essa Simulação é muito utilizada por instituições bancárias, pois ela consegue solucionar problemas complexos.

Para a realização da metodologia desse estudo, utilizamos como base o artigo de SANFINS et al. (2020).

2.2 CreditRisk+

O CreditRisk+, elaborado em 1997 pela Credit Suisse Financial Products (CSFP) tem como objetivo calcular o risco de uma carteira de crédito, como títulos e empréstimos, com base nas características individuais do tomador, incluindo montantes estimados de recuperação e classificações de crédito (*ratings*). Como consequência, o modelo determina a distribuição de probabilidade das perdas da carteira e a partir dela estima o Valor de Risco (VaR), que é uma métrica de perda potencial máxima. (IGARASHI, 2019)

Como o modelo não adota premissas sobre o evento de *default*, não é possível determinar exatamente quando este ocorreu, isto é, ele não considera a data em que o devedor deixou de cumprir com as suas obrigações. Com isso, ele considera que a quitação, ou não, da dívida ocorre apenas na data do pagamento. Portanto o devedor só pode assumir dois eventos: inadimplente ou não. Para mensurar os eventos de *default*, o CreditRisk+ (CR+) propõe o agrupamento de devedores em faixas de exposição. Outra informação de entrada necessária é o *Loss Given Default* (LGD) que é o valor do empréstimo perdido no momento de inadimplência, esse valor pode ser calculado ou extraído de outras fontes de consulta.

O modelo existe sob duas perspectivas com relação às taxas de *default*, elas podem ser fixas ou variáveis. O modelo sob taxas de *default* fixas não é muito utilizado, uma vez que este não se adequa a realidade do mercado de capitais, pois não considera a variação que essas taxas podem sofrer ao longo do tempo. Enquanto que o modelo sob taxas de default variáveis considera fatores que influenciam na variabilidade das mesmas, e por isso as instituições preferem utilizá-lo na análise de crédito.

Para encontrar a distribuição de probabilidade das perdas, devemos inicialmente analisar os eventos de default. Considere N a variável aleatória definida como Total de *defaults* na carteira. Para encontrar essa distribuição, introduzimos a Função Geradora de Probabilidades (FGP) em termos de uma variável auxiliar z, dada por:

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n \text{ defaults}) z^n \tag{2.1}$$

Como cada indivíduo pode assumir duas classificações, inadimplente ou não, podemos considerar que a variável Evento de *default* do indívíduo i é definida por uma Bernoulli com probabilidade de default dada por P_{x_i}. Com isso, a FGP de cada devedor, pode ser escrita como:

$$F_{x_i}(z) = 1 - P_{x_i} + P_{x_i} z = 1 + (z-1)P_{x_i} \tag{2.2}$$

Considerando que as taxas de *default* são constantes e os eventos são independentes, tomando o logaritmo da equação por conta de simplificações algébricas, temos:

$$\ln(F_N(z)) = \ln(\prod_{i=1}^{n} F_N(z)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + (z-1)P_{x_i} \tag{2.3}$$

Supondo P_{x_i} próximo a zero[1], temos:

$$\ln(F_N(z))) = \sum_{i=1}^{n} (z-1)P_{x_i} \rightarrow F_N(z) = exp\left(\sum_{i=1}^{n} (z-1)P_{x_i}\right) = e^{\mu(z-1)} \tag{2.4}$$

onde

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i}$$

.

Sabemos que a Função Geradora de Momentos (FGM) de uma variável aleatória que segue um distribuição $Poi(\mu)$ é dada por

$$E(Z^n) = e^{\mu(z-1)}. \tag{2.5}$$

[1]Quando x é pequeno, pode-se escrever $\ln(1+x) \approx x$.

Portanto, podemos concluir que a variável que representa o número de *defaults* na carteira segue uma distribuição Poisson(μ).

2.2.1 Taxas de Default Fixas

O primeiro passo na obtenção da distribuição de perdas, como dito anteriormente, é agrupar as exposições da carteira em faixas. Nesse cenário, usaremos as seguintes notações:

Tabela 4: Notação

Referência	Notação
Devedor	X_i
Exposição do devedor X_i	L_{x_i}
Probabilidade de default de X_i	P_{x_i}
Perda esperada de X_i	λ_{x_i}

Definiremos os seguintes valores auxiliares, para cada X_i, considerando L a exposição total da Carteira:

$$v_{x_i} = \frac{L_{x_i}}{L} \quad e \quad \varepsilon_{x_i} = \frac{\lambda_{x_i}}{L}$$

Para reduzir o número possível de exposições entre os devedores, devemos arredondar cada v_{x_i} para o inteiro mais próximo e na maioria das vezes múltiplo de 10 ou 100. Dessa forma, o portfólio é dividido em m faixas de exposição, identificadas pelo índice j. Para nos referirmos a cada faixa, usaremos as seguintes notações:

Tabela 5: Notação

Referência	Notação
Exposição comum na faixa j	v_j
Perda esperada na faixa j	ϵ_j
Número esperado de defaults na faixa j	μ_j

Com isso, temos que:

$$\varepsilon_j = v_j \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \frac{\varepsilon_j}{v_j} = \sum_{x_i \in Faixaj} \frac{\varepsilon_{x_i}}{v_{x_i}} \tag{2.6}$$

Como μ é o número total esperado de *defaults* na carteira, então pode ser escrito como,

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

Como já sabemos a distribuição dos eventos de *default*, podemos encontrar a distribuição de Perdas.

Considere $G(z)$ a Função Geradora de Probabilidade das perdas, expressada como um múltiplo da unidade de exposição (nL), então:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(perdas = nL) z^n \tag{2.7}$$

Tratando cada faixa como um portfólio, temos:

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n\ defaults) z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!} z^{nv_j} = exp\left(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}\right) \tag{2.8}$$

Portanto, como assumimos que as faixas do portfólio são independentes, assim:

$$G(z) = \prod_{j=1}^{m} exp(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}) = exp\left(-\sum_{j=1}^{m} \mu_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j z^{v_j}\right) \tag{2.9}$$

Neste momento, iremos calcular a relação recursiva para a distribuição de Perdas. Dado um inteiro n, seja A_n a probabilidade de uma perda de nL. Pela expansão de G em série de Taylor, temos:

$$p(perda = nL) = A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n}(0) \tag{2.10}$$

Porém, temos que:

$$G'(z) = \frac{d}{dz}\left(-\sum_{j=1}^{m} \mu_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j z^{v_j}\right) G(z) \tag{2.11}$$

Juntando as duas equações, podemos reescrever a equação (2.10) da seguinte forma:

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n}(0) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} K(z) G(z)}{dz^{n-1}}(0) \tag{2.12}$$

com $K(z) = \frac{d}{dz}(\sum_{j=1}^{m} \mu_j z^{v_j})$.

Para solucionar essa equação, utilizamos a Fórmula de Leibniz para calcular as derivadas. Assim,

$$\frac{1}{n!}\frac{d^nG(z)}{dz^n}(0) = \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{d^{n-k-1}G(z)}{dz^{n-k-1}}\frac{d^kK(z)}{dz^k})(0) \tag{2.13}$$

Porém, temos que:

$$\frac{d^kK(z)}{dz^k}(0) = \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(\sum_{j=1}^{m}\mu_j z^{v_j})(0) \tag{2.14}$$

E isso só é diferente de zero se $k = v_j - 1$ para algum j. Nesse caso, esse termo terá valor $\mu_j(k+1)!$. Por definição, temos:

$$\frac{d^{n-k-1}G(z)}{dz^{n-k-1}}(0) = (n-k-1)!A_{n-k-1}$$

Assim, podemos escrever:

$$A_n = \sum_{k\leq n-1 k=v_j-1}\frac{1}{n!}\binom{n-1}{k}(k+1)!(n-k-1)!A_{n-k-1}\mu_j = \sum_{j|v_j\leq n}\frac{v_j\mu_j}{n}A_{n-v_j} = \sum_{j|v_j\leq n}\frac{\varepsilon_j}{n}A_{n-v_j} \tag{2.15}$$

Note que a fórmula de recorrência se completa quando,

$$A_0 = G(0) = e^{-\mu} \tag{2.16}$$

2.2.2 Taxas de Default Variáveis

Como já foi citado anteriormente, há indícios de que as taxas de default variam com o tempo e a mudança de um fator econômico pode influenciar um grande número de devedores de maneira similar. (BALZAROTTI; FALKENHEIM; POWELL, 2002)

Para mensurar essas alterações sobre o portfólio, precisamos determinar o nível de influência desses fatos sobre o grupo de devedores. Diante disso, o portfólio é dividido em setores que são formados por indivíduos que sofrem a influência de fatores comuns a eles. Nessa conjuntura, cada setor é liderado por um fator principal que está associado a incerteza sobre as taxas de *default* de seus respectivos indivíduos. (SANFINS et al., 2020)

Supondo a divisão do portfólio em n setores, então cada setor será identificado como: S_k,$1 \leq k \leq n$.

Note que quando dividimos o portfólio em setores, pensamos em cada setor como um novo portfólio. Com isso, faremos o agrupamento em faixas, dentro de cada setor, da mesma maneira que fizemos no modelo com taxas fixas.

Nesse caso, definimos:

$$v_j^k = \frac{L_j^k}{L} \quad e \quad \varepsilon_j^k = \frac{\lambda_j^k}{L}$$

Sendo $1 \leq k \leq n \quad e \quad 1 \leq j \leq m(k))$

A esperança μ_k pode ser relacionada com a perda esperada, com isso:

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^k}{v_j^k}$$

2.2.3 Eventos de default com taxas variáveis

Com objetivo de encontrar a distribuição dos eventos de *default*, iremos utilizar a Função Geradora de Probabilidades (FGP). Por essa razão, iremos definir a seguinte família de variáveis aleatórias:

$$Y_k = \text{quantidade de defaults no setor k}$$

Com isso, o número de defaults da carteira será:

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

A partir da definição de FGP, temos:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(Y = n) z^n \tag{2.17}$$

Como cada setor é influenciado por fatores distintos e disjuntos. Então, é razoável supor independência entre os setores. Dessa maneira, podemos escrever:

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} F_k(z)$$

Dessa forma, para facilitar os cálculos, iremos trabalhar com a análise de um setor qualquer.

De acordo com o resultado que obtemos no modelo de taxas fixas e a partir da definição de $F_k(z)$, temos que:

$$F_k(z)|(X_k = x) = e^{x(z-1)} \tag{2.18}$$

Supondo que a densidade de X_k é f_k, e usando o Teorema de Bayes, temos que:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} p(Y = n|X_k = x) f_k(x_k) dx_k \tag{2.19}$$

Após a reorganização da equação, teremos:

$$F(z) = \int_0^{\infty} F_k(z)|(X_k = x) f_k(x_k) dx_k = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} f_k(x_k) dx_k \tag{2.20}$$

O modelo sugere que adotemos a distribuição Gama para encontrarmos de forma explícita a FGP, uma vez que precisamos escolher uma distribuição para X_k com média μ_k e variância σ_k^2.

2.2.3.1 Finalizando a Análise Setorial

Olhando para cada setor k, obteremos:

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \quad e \quad \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}$$

Então, substituindo a expressão da densidade da Gama na nossa conta, encontraremos:

$$F_k(z) = \int_0^{\infty} e^{x_k(z-1)} \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} e^{\frac{-x_k}{\beta_k}} {x_k}^{\alpha_k - 1} dx_k = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} \int_0^{\infty} e^{-x_k(\frac{1}{\beta_k}+1-z)} {x_k}^{\alpha_k-1} dx_k \tag{2.21}$$

Fazendo $y = x_k(\frac{1}{\beta_k} + 1 - z)$:

$$F_k(z) = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k}\Gamma(\alpha_k)} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{\frac{1}{\beta_k} + 1 - z} \right)^{\alpha_k - 1} \frac{dy}{\left(\frac{1}{\beta_k} + 1 - z \right)} \tag{2.22}$$

Após realizar alguns ajustes nessa conta, teremos:

$$F_k(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k} \tag{2.23}$$

Onde, $p_k = \left(\frac{\beta_k}{1+\beta_k} \right)$.

2.2.3.2 Cálculo da FGP

Seja $G(z)$ a Função Geradora de Probabilidade (FGP) das perdas, expressadas como um múltiplo da exposição base (nL). Temos que:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(perdas = nL) z^n$$

Como assumimos que os setores em que dividimos o portfólio são independentes, temos que:

$$G(z) = \prod_{j=1}^{n} G_j(z)$$

Sendo $G_j(z)$ a FGP das perdas no setor j. Então, precisamos encontrar a FGP de cada setor. Pelo Teorema de Bayes, temos que:

$$G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{+\infty} P(\text{perda} = nL | X_k = x) f_k(x_k) dx_k \tag{2.24}$$

Entretanto, se o valor médio de defaults é conhecido, concluimos a partir do modelo com taxas fixas, que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(perda = nL | X_k = x) z^n = \exp(-\sum_{j=1}^{m(k)} \mu_j^k + \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^k}{v_j^k} z^{v_j^k}) = e^{(x_k(R_k(z)-1))} \tag{2.25}$$

Onde,

$$x_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \mu_j^k$$

.

Para facilitar as contas, definiremos a seguinte família de polinômios:

$$R_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^k}{v_j^k} z^{v_j^k} \tag{2.26}$$

Isso nos retorna que:

$$G_k(z) = \int_0^{+\infty} e^{x_k(R_k(z)-1)} f_k(x_k) dx_k \tag{2.27}$$

Como a variável de integração é x_k, temos que:

$$G_k(z) = F_k(R_k(z)) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k R_k(z)} \right)^{\alpha_k} \tag{2.28}$$

Assim, concluimos que:

$$G_k(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-p_k}{1-p_k R_k(z)} \right)^{\alpha_k} \tag{2.29}$$

2.2.3.3 Relação geral de Recursividade

Supondo a expansão em série de G, temos que:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

Queremos encontrar esses coeficientes A_n. Então, supondo $G(z)$ tal que:

$$\frac{d(log(G(z)))}{dz} = \frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{2.30}$$

Onde, solicitamos que A e B sejam polinômios. Essa suposição é coerente uma vez que o denominador da fração que representa $G(z)$ é um polinômio. Tomaremos A e B da seguinte forma:

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_r z^r$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_s z^s$$

Assumindo isso, podemos escrever:

$$B(z)G'(z) = G(z)A(z)$$

Derivando G, e substituindo os termos, teremos a seguinte igualdade:

$$\left(\sum_{j=0}^{s} b_j z^j\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}z^n\right) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i z^i\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n\right) \tag{2.31}$$

Se efetuarmos os produtos em ambos os lados da equação, obteremos duas séries de potências em z. Então, como os coeficientes de z^n devem ser iguais, nos dois lados, qualquer que seja n, temos que :

$$\sum_{j=0}^{\min(s,n)} b_j(n-j+1)A_{n-j+1} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} \tag{2.32}$$

Expandindo a expressão, e organizando, teremos:

$$b_0(n+1)A_{n+1} + \sum_{j=1}^{\min(s,n)} b_j(n-j+1)A_{n-j+1} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} \tag{2.33}$$

Isso nos retorna que:

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)}\left[\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=1}^{\min(s,n)} b_j(n-j+1)A_{n-j+1}\right] \tag{2.34}$$

A relação de recursividade se completa quando conseguimos observar que:

$$A_0 = G(0) = \prod_{k=0}^{n}(1-p_k)^{\alpha_k}\,. \tag{2.35}$$

2.3 Simulação de Monte Carlo

O método de Simulação de Monte Carlo é uma técnica estatística onde geramos uma quantidade significativamente alta de números aleatórios com o intuito de solucionar problemas através da análise das mais diversas possibilidades. Por ser um método prático e que resolve problemas complexos, é muito utilizado no mercado financeiro. A partir dele conseguimos extrair e calcular valores numéricos relevantes para o trabalho. Segundo Bluhm (2010) a principal vantagem desse método é que ele consegue identificar correlações características do portfólio.

No presente estudo, utilizamos o método de Simulação de Monte Carlo para estimar a distribuição de Perdas de uma carteira de debêntures. Consideramos as variáveis Probabilidade de *default*, Exposição e Volatilidade da taxa de *default* para a realização das repetições. A partir da distribuição empírica das perdas, conseguimos extrair as perdas esperadas e não esperadas do portfólio. (BRITO, 2005)

Para implementar esse método é necessária a criação de um algoritmo computacional. De acordo com Brigham, Gapenski e Ehrhardt (2001), podemos considerar três etapas genéricas durante a simulação: na primeira etapa definimos as variáveis que serão utilizadas no processo; em seguida encontramos os parâmetros e definimos a distribuição dessas variáveis. Por último, determinamos a quantidade de cenários que serão produzidos, e então implementamos a simulação com a finalidade de obter amostras que se aproximem da realidade. A partir dos dados estimados iremos extrair resultados que serão de suma importância para o estudo.

É importante ressaltar que não existe um número máximo de repetições que uma simulação possa ter. Entretanto de acordo com Hair (1998) é necessário pelo menos cem repetições do algoritmo para que os resultados sejam no mínimo parecidos com a realidade. Em outros termos, essa afirmação corrobora com o entedimento de que quanto maior o número de repetições mais precisas se tornam as estimativas.

Em nosso trabalho, consideramos que a Simulação existe sob duas perspectivas, na primeira não colocamos incerteza na variável Probabilidade de *Default*, enquanto que na segunda supomos que ela exista. O objetivo da utilização deste método é encontrar a distribuição da variável Perdas para extrair métricas como o VaR, o Valor Esperado e o Valor Esperado Condicionado, que é o valor esperado acima do Var, em inglês *Expected Shortfall*.

No caso mais simples, não consideramos suposições sobre a variável Probabilidade de

Default, isso é, utilizamos os dados apresentados na Tabela 2. Para encontrar a Função de Probabilidade das Perdas, utilizamos a Bernoulli(p), com parâmetro p, como a distribuição da variável evento de *default*, onde p é definido como a probabilidade de inadimplência. Esse parâmetro serve para determinar se a debênture foi a *default* no período de um ano. Após determinar o número de simulações, conseguimos obter empiracamente a distribuição da variável Perdas da carteira de crédito estudada.

No segundo caso, adicionamos incertezas na Probabilidade de Default, essa incerteza foi colocada através de uma distribuição Beta com os parâmetros α e β. Com base nas variáveis Probabilidade de *Default* e a respectiva Volatidadade da taxa, apresentadas na 2, sendo definidas como média e desvio padrão da variável, os parâmetros da Beta foram estimados. Esses valores foram obtidos a partir de uma simples manipulação algébrica das fórmulas de média e variância da distribuição Beta, como é apresentado abaixo:

$$\alpha = \frac{(1-\mu) - \sigma^2(2-\mu)}{\sigma^2(2-\mu)^2} \tag{2.36}$$

$$\beta = \frac{(1-\mu)[(1-\mu) - \sigma^2(2-\mu)]}{\sigma^2(2-\mu)^2} \tag{2.37}$$

Após definir a distribuição da variável Probabilidade de *Default* e de encontrar os parâmetros, simulamos a partir da Bernoulli o evento de inadimplência. A partir dessa etapa, seguimos os mesmos passos do caso mais simples. Com isso, encontramos empiricamente a distribuição da variável Perdas após o número de simulações ser definido.

A distribuição Beta foi escolhida para estimar a probabilidade de *default* pois ela está definida no intervalo $[0, 1]$. Corroborando com esse fato, de acordo com SANFINS et al. (2020), a distribuição Beta é a que melhor se encaixa como distribuição a priori para a variável Probabilidade de *default*. Nesse caso, estamos empregando a Teoria Bayeasiana, uma vez que definimos uma distribuição para o parâmetro. Essa escolha está embasada no fato de que ela é a conjugada da Bernoulli.

2.4 Exemplo da Utilização do CreditRisk+

Suponha que um gerente deseja saber se a sua carteira de clientes apresenta um alto nível de risco para que ele tenha conhecimento do valor que está disposto a perder emprestando crédito para seus clientes. Considere diferentes *ratings* e consequentemente probabilidades de *default* e volatilidade das taxas.

Sabe-se que a carteira tem três devedores e que cada um tem uma classificação, considere o caso mais simples onde temos apenas a presença de um setor, entretando conforme a metodologia, os indivíduos serão alocados em faixas de exposição diferentes. Abaixo podemos ver como seria o modelo da carteira.

Devedor(x_i)	v_{x_i}	P_{x_i}
1	1	0.01
2	3	0.025
3	2	0.04
4	3	0.06

Tabela 6: Devedores fictícios

Note que o número de faixas é menor que o número de devedores, portanto iremos agregá-los de acordo com as faixas que são comuns a eles. Assim, os indivíduos 2 e 4 ficam na mesma faixa. Juntando os devedores de acordo com a parcela que elas pertencem e somando as probabilidades, temos

Faixa(j)	v_{x_j}	ϵ_{x_j}	P_{x_j}	μ_j	σ_j^2
1	1	0.3	0.01	0.3	0.05
2	2	0.4	0.04	0.2	0.02
3	3	0.38	0.085	0.13	0.04

Tabela 7: Resultados do CreditRisk+

A partir das equações apresentadas nas equações (2.33) e (2.34), é possível estimar os coeficientes que auxiliam no cálculo da recursividade. Com isso, obtemos os seguintes resultados:

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\epsilon_j}{v_j} = \sum_{j=1}^{3} \mu_j = 0.63 \tag{2.38}$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^2 = 0.11 \tag{2.39}$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1^2}{\sigma_j^1} = 3.61 \tag{2.40}$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{\mu_1} = 0.17 \tag{2.41}$$

$$p_1 = \frac{\beta_1}{1+\beta_1} = 0.14 \tag{2.42}$$

$$A_0 = G(0) = \prod_{k=1}^{1} (1-p_k)^k = (1-0.14)^{3.61} = 0.58 \tag{2.43}$$

$$A_1 = \frac{1}{1} \times 0.09 \times 0.58 = 0.0522 \tag{2.44}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times (0.102 \times 0.58 - 0.91 \times 0.0522) = 0.005829 \tag{2.45}$$

Note que é possível realizar essas contas para uma carteira que apresenta diversos setores, faixas de exposição e um maior número de indivíduos. Entretanto, para isso o ideal é utilizar um *software* para realizar as relações recursivas das fórmulas.

3 Análise dos Resultados

A carteira apresenta uma exposição total em torno de R$ 28 milhões. A base contempla 93 empresas com *rating* que variam de AAA a CC, em escala nacional. Toda a seção foi feita utilizando o programa R Core Team (2014), onde inserimos a base e extraímos as principais métricas de uma análise de risco de crédito.

Na Tabela 8 é apresentada a participação de cada classificação na carteira teórica. Note que cerca de 60% da base é composta por empresas com *rating* superior a BBB. Isso indica que a base pode ser considerada como uma carteira conservadora, uma vez que a maior parte dela não apresenta um grau elevado de ocorrência de *default*.

Rating	Participação (%)	Exposição (R$)
AAA	10,75 %	3.335.752
AA	17,20 %	4.294.875
A	32,25 %	9.527.169
BBB	15,05 %	4.704.910
BB	10,75 %	1.693.781
B	9,68 %	3.274.121
CCC	2,15 %	716.346
CC	2,15 %	537.574
Total	100 %	28.084.528

Tabela 8: Participação dos ratings na carteira

Fundamentado com a utilização das funções "init" e "crp.CSPF" do pacote crp.CSPF, e do algoritmo criado para realizar as Simulações de Monte Carlo, implementamos a metodologia apresentada e extraímos resultados relevantes para o estudo.

Em seguida são apresentados os gráficos de distribuição de Perdas a partir do Creditrisk+ e do método de Simulação de Monte Carlo, ao nível de significância de 5%.

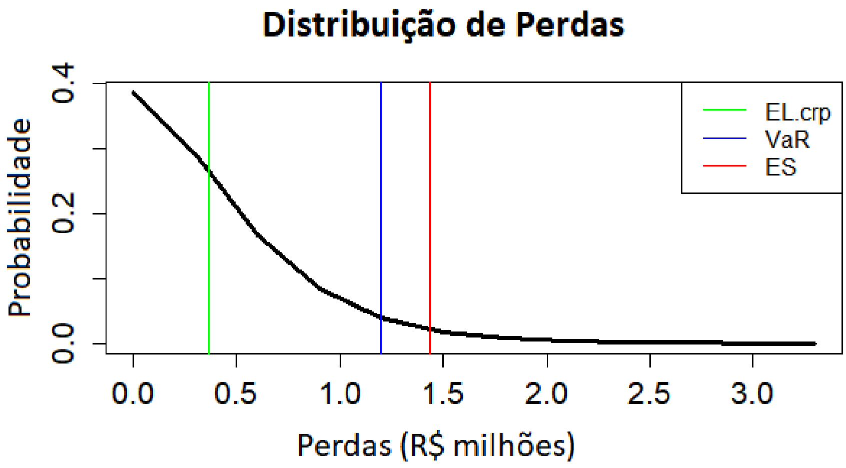
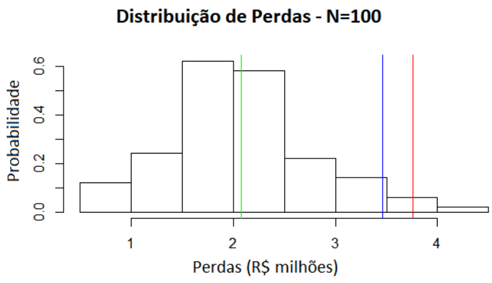


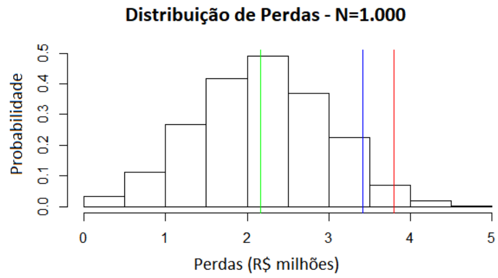
Figura 1: Distribuição das Perdas pelo CreditRisk+

A Figura 1 representa a distribuição das Perdas do portfólio utilizando as suposições do modelo CreditRisk+ com taxas variáveis, ou seja, utilizando a separação da base em faixas de exposição e definindo a distribuição Gama para a incerteza associada a exposição. Segundo o gráfico com 95% de probabilidade a perda máxima da carteira no prazo de 1 ano não supera R$ 1,2 milhões.

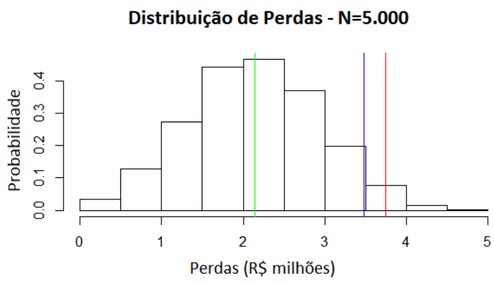
Posteriormente são apresentados os gráficos da distribuição de Perdas a partir do método de Simulação de Monte Carlo (SMC) variando o número de repetições (N), ao nível de significância de 5 %.



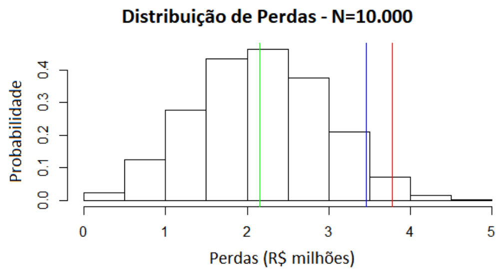
(a) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo (100 repetições)



(b) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo (1.000 repetições)



(c) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo (5.000 repetições)



(d) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo (10.000 repetições)

Figura 2: Distribuição das Perdas (R$ milhões)

Os gráficos da Figura 2 apresentam a distribuição das Perdas encontradas a partir do método de Simulação de Monte Carlo (SMC) variando o número de repetições de 100 a 10.000. Observe que nesse caso, onde modelamos a variável Perdas pela Beta conjugada com a distribuição Binomial, a perda máxima esperada ao nível de significância de 5 % é de aproximadamente R$ 3,46 milhões.

O valor da Perda Esperada (PE), isso é, o quanto a instituição espera perder é de R$ 366.280, calculado pelo CreditRisk+, enquanto que considerando o método de Monte Carlo com 10.000 simulações a perda esperada é de R$ 2,16 milhões. Nota-se que existe uma grande diferença entre os valores, indicando assim que a metodologia do CreditRisk+ subestima a carteira. Essa medida é apresentada nos gráficos pela linha verde e denominada *Expected Loss* (EL), em inglês.

Considerando o nível de confiança de 95 %, o VaR, ou seja, o valor que indica a perda máxima que uma carteira pode ter, é de R$ 1,20 milhões, pelo método de CreditRisk+. Em contrapartida, com base na Simulação de Monte Carlo para 10.000 repetições, esse valor é de R$ 1,30 milhões. É muito importante para uma instituição que empreste dinheiro ter uma gestão de risco eficiente. Nos gráficos apresentados nas Figuras 1 e 2, esse valor é ilustrado pela linha azul. O VaR também pode ser entendido como o quantil de 95% da distribuição de Perdas do portfólio.

A partir desses dois conceitos, conseguimos encontrar o Capital Econômico Alocado (EC), resultado importante para instituições no que diz respeito a alocação de crédito. Calculado pela diferença entre o VaR e a Perda Esperada, representa o valor que uma organização deve provisionar com o intuito de se proteger contra perdas não esperadas. Pelo CreditRisk+, o EC provisionado é de R$ 830.000, enquanto que pela Simulação o EC é de R$ 1,30 milhões.

A linha vermelha apresentada nas Figuras 1 e 2 representa o *Expected Shortfall* (ES). Essa métrica é definida como a perda média nos piores casos, isto é, o valor esperado da perda caso ela ultrapasse o VaR. O ES calculado a partir do método de Simulação de Monte Carlo com 10.000 repetições é de R$3,77 milhões, enquanto que pelo modelo CreditRisk+ é aproximadamente a metade desse valor, R$ 1,43 milhões.

A Tabela 9 apresenta as principais métricas estudadas durante uma análise de risco, considerando os níveis de significância de 1% e 5% para o modelo de CreditRisk+ e para o método de Simulação de Monte Carlo.

Método	PE	VaR(0,99)	EC(0,99)	ES(0,99)	VaR(0,95)	EC(0,95)	ES(0,95)
CreditRisk+	0,37	1,8	1,43	2,02	1,2	0,83	1,43
SMC 100	2,08	3,85	1,77	4,01	3,46	1,38	3,75
SMC 1.000	2,17	3,96	1,80	4,26	3,42	1,25	3,80
SMC 5.000	2,14	3,89	1,75	4,11	3,48	1,34	3,74
SMC 10.000	2,16	3,97	1,81	4,24	3,46	1,30	3,77

Tabela 9: Principais métricas (R$ milhões)

A partir da Tabela 9 nota-se uma diferença percentual média de 40 % quando comparamos os resultados encontrados para o CreditRisk+ com a variação do nível significância de 5% para 1 %. Enquanto que para o método de Simulação, com 10.000 repetições, essa diferença é de cerca de 15 % para o VaR e para o ES, porém para o EC ele varia cerca de 40 % com essa oscilação do nível de confiança.

Também é possível notar que para o método de Monte Carlo a medida que aumentamos o número de simulações, os resultados tendem a variar menos.

Além disso, percebe-se que o nível de confiança influencia em todas as métricas, com exceção da Perda Esperada que é um indicador que não considera o nível de significância em seu cálculo, e por isso ele se mantém constante.

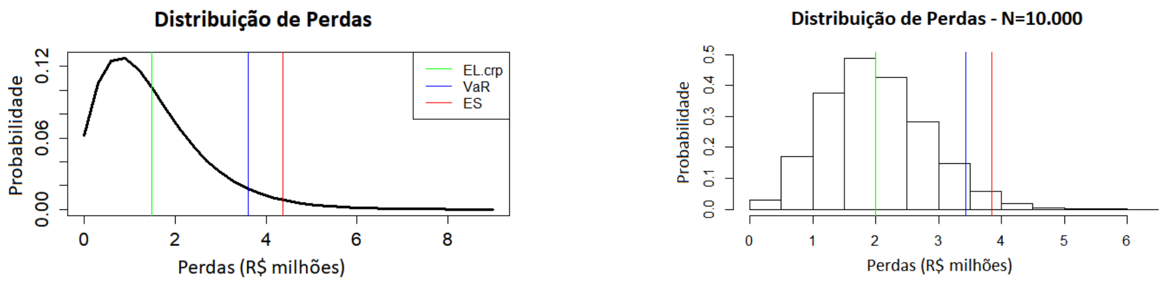
3.1 Aplicação com Stress

O objetivo dessa seção é realizar uma análise de risco de crédito considerando os piores cenários possíveis no qual as emissoras de uma carteira de debêntures podem estar inseridas. O método de stress é frequentemente aplicado no mercado financeiro a fim de avaliar se a empresa conseguirá suportar as perdas em eventos com alta incerteza.

Essa seção está dividida em três contextos distintos que ilustram o impacto que pequenas modificações na classificação de *rating* e na probabilidade de *default* ocasionam nos resultados do estudo.

Inicialmente será realizada uma análise onde cada empresa tem seu *rating* reduzido dois níveis (*downgrade*), com exceção das entidades classsificadas nos dois últimos níveis (CCC e CC, ou 7 e 8). A fim de ilustrar o processo, esse método consiste em selecionar um indivíduo da categoria 1 (AAA) e diminuir a categoria que ele está inserida para 3 (A).

A partir dessa parte da dissertação, serão apresentados apenas dois gráficos sobre a distribuição de Perdas, um de acordo com a metodologia do CreditRisk+ e outro sob a perspectiva do método de Simulação de Monte Carlo com 10.000 repetições, visto que quanto maior o número de simulações mais próximo da realidade tendem a ser os resultados.



(a) Encontrada pelo modelo CreditRisk+

(b) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo

Figura 3: Distribuição das Perdas (R$ milhões)

Com base na Figura 3 percebe-se que os gráficos estão parecidos, ainda que tenham sido calculados por metodologias distintas. Observe que mesmo com 2 *downgrades* das categorias de *rating* percebe-se que estamos num cenário muito conservador. Isso ocorre pois a maior parte da carteira apresenta baixa probabilidade de *default*.

O valor que deve ser automaticamente provisionado no momento do empréstimo, pelo método de Monte Carlo é de R$ 2 milhões, enquanto que pelo modelo CreditRisk+ é de R$ 1,49 milhões.

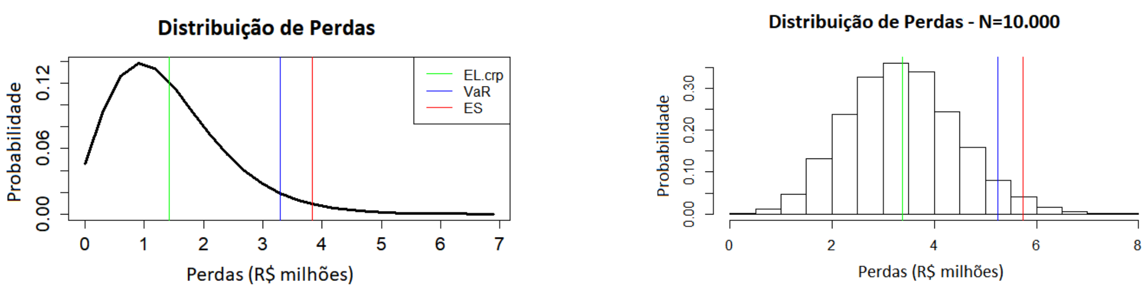
Método	PE	VaR(0,99)	EC(0,99)	ES(0,99)	VaR(0,95)	EC(0,95)	ES(0,95)
CreditRisk+	1,49	5,1	3,61	5,83	3,6	2,11	4,37
SMC 100	2,06	4,28	2,22	4,56	3,61	1,55	4,13
SMC 1.000	2,00	3,95	1,95	4,49	3,35	1,35	3,82
SMC 5.000	1,97	4,00	2,03	4,42	3,43	1,46	3,82
SMC 10.000	2,00	4,10	2,10	4,47	3,43	1,43	3,84

Tabela 10: Principais métricas (R$ milhões)

A partir da Tabela 10 verifica-se que o VaR, considerando um nível de significância de 1%, pelo método de Simulação de Monte Carlo é de R$ 4,10 milhões enquanto que pelo CreditRisk+ é de R$ 5,1 milhões. Note que estressando a carteira por essa metodologia o modelo CreditRisk+ superestima o valor da perda máxima que o portfólio pode ter. O mesmo ocorre para o ES e consequentemente para o EC.

Mediante a Tabela 10 nota-se que apenas com a alteração do nível de confiança o VaR de 99% aumenta cerca de 40% com relação ao de 95%, comparando apenas a linha referente ao CreditRisk+. Enquanto que para o método de Monte Carlo, essa diferença é de cerca de 20 %. Essa alteração é refletida no EC que tem um crescimento de aproximadamente 70 % para o CR+ e para a SMC ele cresce cerca de 50 %, apenas com a variação do nível de significância.

Neste segundo momento está sendo avaliado o efeito do acréscimo de um prêmio de 5% na probabilidade de *default* para cada categoria de classificação. Esse modelo de estudo é relevante uma vez que a partir dele é possível obter uma previsão de como se comportará a carteira em um cenário que apresenta elevado grau de incerteza.



(a) Encontrada pelo modelo CreditRisk+

(b) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo

Figura 4: Distribuição das Perdas (R$ milhões)

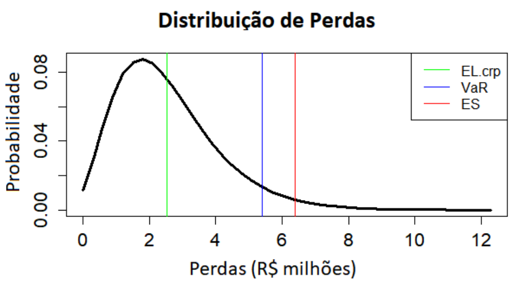
Através da Figura 4 ao nível de significância de 5 %, a perda máxima que uma carteira pode ter é de R$ 3,3 milhões a partir do CR+, enquanto que pelo método de Monte Carlo esse valor quase que dobra. Esse mesmo fenômeno acontece para a métrica ES. Nesse cenário também pode-se dizer que o CreditRisk+ está subestimando a carteira, uma vez que apresenta resultados inferiores daqueles obtidos pela Simulação.

Método	PE	VaR(0,99)	EC(0,99)	ES(0,99)	VaR(0,95)	EC(0,95)	ES(0,95)
CreditRisk+	1,42	4,2	2,78	4,69	3,3	1,88	3,83
SMC 100	3,13	5,13	2,00	5,71	4,48	1,35	4,96
SMC 1.000	3,39	6,00	2,61	6,61	5,22	1,83	5,76
SMC 5.000	3,44	6,17	2,73	6,71	5,31	1,87	5,86
SMC 10.000	3,38	6,03	2,65	6,48	5,24	1,86	5,74

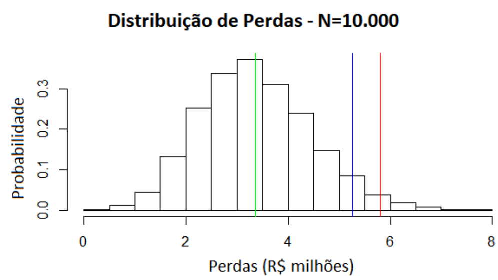
Tabela 11: Principais métricas (R$ milhões)

Baseado na Tabela 11 nota-se que a PE calculada pelo método de Monte Carlo é mais que o dobro daquela calculada pelo modelo CreditoRisk+, entretanto essa diferença não é refletida no Capital Econômico, por exemplo. Nas colunas de EC verifica-se uma cerca conformidade entre os valores encontrados, independente do nível de confiança utilizado.

Combinando as condições apresentadas anteriormente, ou seja, estressando o portfólio pela classificação de *rating* e pela probabilidade de *default*, chega-se no pior cenário que será apresentado neste trabalho. Essa análise é pertinente visto que em um momento de crise, as empresas tendem a sofrer os impactos desta fase e em razão disso a probabilidade de *default* aumenta e, por consequência, a categoria de *rating* é reduzida pelas agências de classificação.



(a) Encontrada pelo modelo CreditRisk+



(b) Encontrada pelo método Simulação de Monte Carlo

Figura 5: Distribuição das Perdas (R$ milhões)

Mediante os gráficos da Figura 6 verifica-se que ao nível de confiança de 95 % a perda máxima esperada da carteira para ambos os métodos está bem próxima, assim como o ES.

Entretanto, analisando o EC nota-se uma diferença de aproximadamente R$ 1 milhão entre o cálculo realizado pelo CreditRisk+, que apresenta um valor de R$ 2,86 milhões e pelo método de Monte Carlo, que declara o valor de R$ 1,90 milhões.

Método	PE	VaR(0,99)	EC(0,99)	ES(0,99)	VaR(0,95)	EC(0,95)	ES(0,95)
CreditRisk+	2,54	7,20	4,66	8,14	5,40	2,86	6,40
SMC 100	3,46	6,04	2,58	6,77	5,68	2,22	6,09
SMC 1.000	3,43	6,14	2,71	6,69	5,32	1,89	5,86
SMC 5.000	3,41	6,14	2,73	6,62	5,30	1,89	5,82
SMC 10.000	3,37	6,16	2,79	6,57	5,27	1,90	5,81

Tabela 12: Principais métricas (R$ milhões)

A partir da Tabela 12 é possível verificar que o EC(0,99) obtido pelo CreditRisk+ é de R$ 4,66 milhões, enquanto que pelo método de Simulação é de cerca de metade deste valor, R$ 2,79 milhões.

Percebe-se o CreditRisk+ nesse cenário está superestimando a carteira, uma vez que os resultados obtidos a partir dessa metodologia estão muito acima daqueles encontrados através das simulações.

3.2 Comparação dos resultados

Nessa seção serão realizadas comparações entre os resultados obtidos nas seções anteriores considerando as aplicações com e sem stress.

Nos gráficos a seguir, será utilizada a seguinte notação:

Referência	Notação
CreditRisk+	CR+
Simulação de Monte Carlo	SMC
Aplicação sem stress	Sem
Aplicação com stress no rating	R
Aplicação com stress na probabilidade	P
Aplicação com stress no rating e na probabilidade	R+P

Tabela 13: Notação

Primeiramente iremos dissertar sobre o indicador que não varia de acordo com o nível de significância. Nesse momento apresentaremos os resultados obtidos para a Perda Espera, como já definido anteriormente, que representa o valor que a instituição perde no momento da transação.

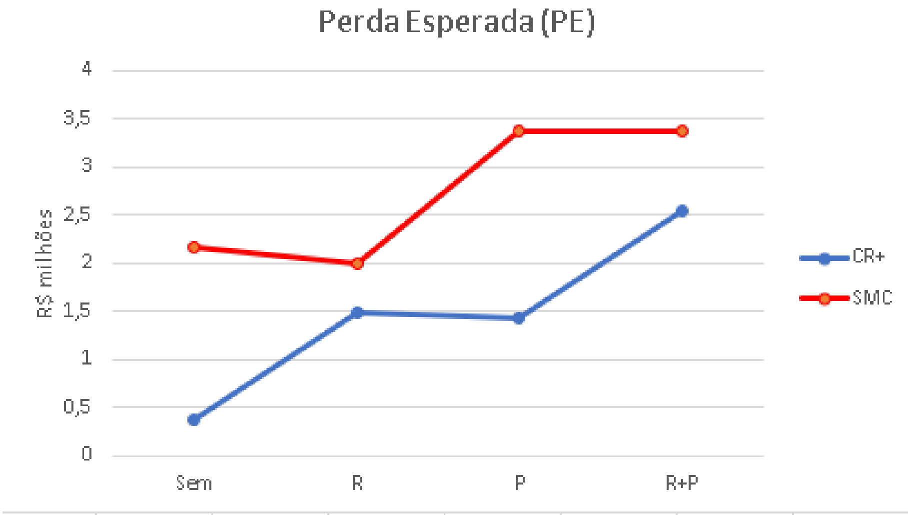
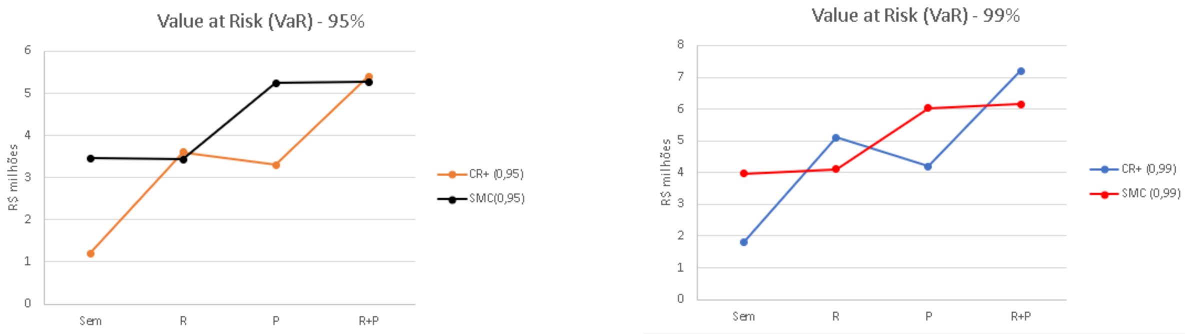


Figura 6: Comparação da Perda Esperada

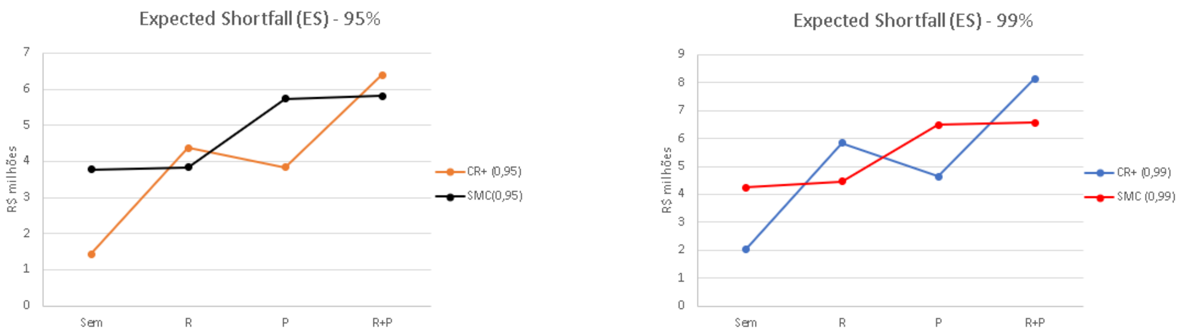
Conforme o gráfico abaixo, percebe-se que aplicar o método de stress considerando o *downgrade* de dois níveis na carteira e o aumento de um prêmio de 0,05% na probabilidade de *default* provoca um aumento de quase 7 vezes no valor da PE para o método de CreditRisk+. Em contrapartida, pelo método de Monte Carlo não é possível notar uma diferença relevante entre os valores encontrados para os diferentes cenários, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 6.



(a) Considerando 95% (b) Considerando 99 %

Figura 7: Comparação do Value-at-risk (VaR) com base nos métodos CreditRisk+ e Simulação de Monte Carlo

A partir da Figura 7 observa-se que para o modelo CreditRisk+ independente do nível de confiança, o VaR no cenário estressado é sempre superior ao sem stress. Entretanto, para o método de Simulação de Monte Carlo, percebe-se que para o contexto em que só é considerado o stress na classificação dos *ratings* das empresas, o VaR(0,95) apresenta valor inferior ao apresentado no cenário sem stress.



(a) Considerando 95% (b) Considerando 99 %

Figura 8: Comparação do Expected Shortfall (ES) com base nos métodos CreditRisk+ e Simulação de Monte Carlo

Mediante o gráfico ilustrado na Figura 8 verifica-se que o Expected Shortfall, que é o valor esperado quando a perda ultrapassa o VaR, para o CreditRisk+ nota-se um comportamento parecido com o VaR uma vez que o ES calculado no cenário com stress é sempre superior aos valores obtidos no contexto sem stress, independente do nível de significância. No entando, para o método de Simulação, o ES(0,99) para o cenário sem stress é superior ao ES(0,95) na situação em que é considerado o *downgrade* nas categorias das classificações de *rating*.

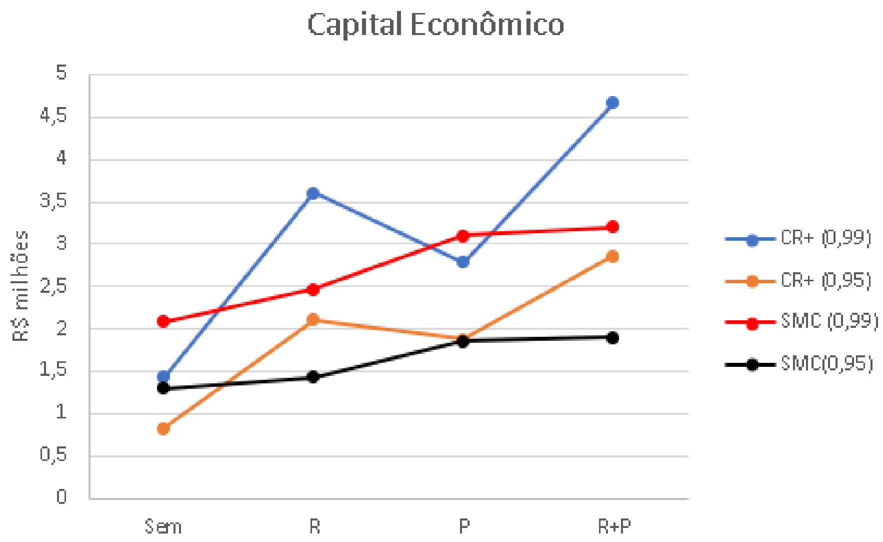


Figura 9: Comparação do Capital Econômico Alocado

Por fim, iremos analisar o EC, que é o valor que a instituição deve provisionar para se proteger contra perdas. A partir da Figura 9 verifica-se que o modelo CreditRisk+ subestima em todos os casos o valor dessa medida quando comparado com o método de Simulação. Isso pode acarretar diversos problemas para a instituição, uma vez que o gestor pode acabar montando uma carteira mais arriscada acreditando que está confortável com relação a ocorrência de perdas.

4 Conclusões

Considerando a importância que o mercado de debêntures vem assumindo na economia nos últimos anos, o presente trabalho se propôs a apresentar os conceitos dos principais riscos admitidos numa transação e a implementar o modelo CreditRisk+ e o método de Simulação de Monte Carlo para a estimação do risco de crédito de uma carteira de debêntures.

Para uma eficiente análise de crédito é de suma importância que seja monitorado cotidianamente as exposições da carteira, com a finalidade de avaliar precocemente os impactos que diferentes cenários do mercado podem causar no portfólio, para assim mitigar as perdas que a carteira pode apresentar. A perda esperada, o VaR e o EC são algumas métricas que auxiliam nesse processo.

O VaR auxilia as instituições a determinarem se possuem reservas de capital suficientes para cobrir as perdas, ou seja, esse único valor resume o risco total de um portfólio. O Capital Econômico é muito utilizado pelos investidores para se salvaguardarem contra uma situação de falência, uma vez que esse indicador auxilia na alocação ótima de capital.

Utilizou-se o *software* R para aplicar o CreditRisk+ e o método de Simulação de Monte Carlo em uma carteira teórica de debêntures. Foram considerados diferentes cenários de stress no portfólio variando os níveis de confiança com a finalidade de comparar os resultados.

A partir das análises apresentadas no capítulo Análises dos Resultados pode-se concluir que apesar do CreditRisk+ ser uma metodologia bem consagrada no mercado, como em seus cálculos são embutidas algumas aproximações, como por exemplo o agrupamento do portfólio em faixas de exposições, ela tende a subestimar as perdas da carteira. Isso é ilustrado na aplicação do modelo com e sem stress na probabilidade de *default*. Enquanto que pelo método de Simulação de Monte Carlo, como não são consideradas aproximações, é possivel encontrar resultados mais próximos da realidade, e com um custo computacional inferior, uma vez que esse método não possui uma complexidade matemática.

Os valores encontrados para as métricas de risco variam consideravelmente quando são aplicadas no método com stress. Também verifica-se esse comportamento ao aumentar o nível de confiança utilizado no cálculo desses indicadores. Essa conclusão é importante pois auxilia o gestor na hora de provisionar crédito para sua carteira.

Para trabalhos futuros, recomenda-se expandir a aplicação do CreditRisk+ e da Simulação de Monte Carlo para a análise em que exista correlação entre os setores. Além de buscar um processo que substitua as aproximações do CreditRisk+ a partir de métodos computacionais.

Referências

ANBIMA. Emissões domésticas registram aumento de 59,3% em 2019. Boletim de Mercado de Capitais, 2020. Disponível em: ⟨https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/relatorios/mercado-de-capitais/boletim-de-mercado-de-capitais/emissoes-domesticas-registram-aumento-de-59-3-em-2019.htm⟩.

ANBIMA. Lista de debêntures ativas. 2021. Disponível em: ⟨https://data.anbima.com.br/debentures⟩.

ARAGAO, C. Analisando o risco de uma carteira de crédito via simulações de monte carlo. 2003. Disponível em: ⟨https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/66/000319470.pdf?sequence=1&isAllowed=y⟩.

BALZAROTTI, V.; FALKENHEIM, M.; POWELL, A. On the use of portfolio risk models and capital requirements in emerging markets: The case of argentina. *The World Bank Economic Review*, v. 6, n. 2, p. 197–212, 2002.

BIELECKI, T.; RUTKOWSKI, M. *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* [S.l.]: Springer, 2004.

BLUHM, C. e. a. *An introduction to credit risk modeling.* 2. ed. [S.l.]: Boca Raton: Chapman Hall/CRC, 2010.

BRIGHAM, E. F.; GAPENSKI, L. C.; EHRHARDT, M. C. *Administração financeira: teoria e prática.* [S.l.]: Atlas, 2001.

BRITO, G. A. S. Mensuração de risco de portfólio para carteiras de crédito a empresas. 2005.

CORTEZ, M. C. O acordo de basileia ii e o impacto na gestão de riscos da banca e no financiamento das empresas riscos da banca e no financiamento das empresas. 2006.

CROUHY, M.; GALAI, D.; MARK, R. A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking Finance*, v. 24, n. 1-2, p. 59–117, 2000.

FUJI, A. H. O conceito de lucro econômico no âmbito da contabilidade aplicada. *Revista Contabilidade & Finanças*, scielo, v. 15, p. 74 – 86, 12 2004. ISSN 1519-7077. Disponível em: ⟨http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1519-70772004000300004&nrm=iso⟩.

GARCIA, R. T. A.; MONTE-MOR, D. S.; TARDIN, N. Can accounting-based and market-based indicators predict changes in the risk rating of brazilian banks? *Revista Brasileira de GestÃde NegÃ*, scielo, v. 21, p. 152 – 168, 01 2019. ISSN 1806-4892. Disponível em: ⟨http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-48922019000100152&nrm=iso⟩.

HAIR, J. F. e. a. *Multivariate data analysis*. 5. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1998.

HICKS, J. *Value and Capital*. [S.l.]: Oxford: Clarendon Press, 1946.

IGARASHI, D. M. Análise de risco de crédito por meio do modelo creditrisk+: uma aplicação à carteiras de crédito. 2019.

JORION, P. *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*. 2. ed. [S.l.]: MacGraw-Hill, 2000.

MOBILIáRIOS, C. de V. Agências classificadoras de risco (rating). Ministério da Economia do Brasil, 2020. Disponível em: ⟨https://www.gov.br/cvm/pt-br/assuntos/regulados/consultas-por-participante/agencias-classificadoras-de-risco-rating⟩.

POORS, S. . Default, transition, and recovery: 2020 annual global corporate default and rating transition study. 2021. Disponível em: ⟨https://www.spglobal.com/ratings/en/research/articles/210407-default-transition-and-recovery-2020-annual-global-corporate-default-and-rating-transition-s

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: ⟨http://www.R-project.org/⟩.

SANFINS, M.; RODRIGUES, B.; SANTOS, D.; OLIVEIRA, R. Credit risk calculation: An application in the brazilian market using the creditrisk+ model with uncertainties. *International Business Research*, Canadian Center of Science and Education, v. 13, 2020. ISSN 1913-9004.

SCHUERMANN, T. What do we know about loss given default? 2004.

SILVEIRA, M. A. M. Avaliação do risco de crédito agregado: Aplicação do creditrisk+ em instiuições brasileiras não-financeiras. 2007. Disponível em: ⟨https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/323/2274.PDF?sequence=1&isAllowed=y⟩.

STOLF, W. Quantificação do risco de crédito: um estudo de caso utilizando o modelo creditrisk+. 2008.

APÊNDICE 1 – Propriedades das Distribuições

1.1 Gama(α, β).

Função densidade de Probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{\frac{-x}{\beta}} x^{\alpha-1}$$

Média e Variância:

$$\mu = \alpha\beta \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Função Gama:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}$$

1.2 Beta(α, β)

Função densidade de Probabilidade:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

Média e Variância:

$$\text{Média} = \frac{a}{a+b}$$
$$\text{Variância} = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$