

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

LUCAS W. MONTEIRO

Gerenciamento Ativo de Negócios  
em Epidemias

Uma abordagem via opções reais

Niterói – RJ

2021

Lucas Wagner Monteiro Paes

Gerenciamento Ativo de Negócios em Epidemias  
Uma abordagem via opções reais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Bacharelado em Matemática da Univer-  
sidade Federal Fluminense, como requisito parcial  
para obtenção do Grau de Bacharel em Matemá-  
tica.

Orientador: Prof. Dr. Max Oliveira de Souza

Niterói – RJ

2021

Lucas Wagner Monteiro Paes

Gerenciamento Ativo de Negócios em Epidemias

Uma abordagem via opções reais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Matemática.

Aprovada em 20 de Janeiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Max oliveira de Souza - Orientador

Universidade Federal Fluminense - UFF

---

Prof. Dr. Ariel Levy

Universidade Federal Fluminense - UFF

---

Prof. Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

---

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Niterói – RJ

2021

# Resumo

Com o rápido crescimento populacional, desmatamento e mudanças climáticas, a possibilidade de novas epidemias cresce. Como já previsto pelo Centro de Controle e Prevenção de Doenças dos Estados Unidos da América e pelo Banco Mundial, o primeiro quarto do século XXI foi acometido por pandemias que causaram um grande impacto social e econômico à sociedade. Em particular, a pandemia do COVID-19, causada pelo vírus SARS-CoV-2, foi responsável pela morte de mais de 1.7 milhão de pessoas, 80 milhões de indivíduos contaminados e pela maior crise econômica desde 1930. Além disso, é previsto que pandemias se tornem cada vez mais comuns portanto, é necessário que empresas estejam aptas a operar em meio a estas crises, sem expor seus colaboradores a riscos desnecessários e mantendo uma economia estável. Como uma abordagem inicial a este problema, neste trabalho, foi proposto um modelo com mudança de regime para gerenciamento de risco operacional em epidemias. Partindo deste modelo foi descrito um método, baseado em opções reais, para maximização do lucro em meio a epidemias. Com este método foi implementado um algoritmo de programação dinâmica para otimizar o lucro líquido de uma empresa levando em conta penalidades para contaminação de seus colaboradores. Utilizando este algoritmo a empresa pode decidir sobre qual regime (pleno funcionamento, funcionamento parcial, *home office* e etc) ela deve operar para que seu lucro médio seja ótimo. Por fim, uma curva de decisão para o regime de funcionamento de uma empresa foi calculada, para o caso de dois regimes, e em seguida foi realizada uma simulação comparando o lucro de uma empresa que nunca fechou durante a pandemia e uma que seguiu a curva de decisão.

Palavras-chave: Gerenciamento de Risco. Pandemias. Opções Reais.

# Abstract

With rapid population growth, deforestation, and climate change, the possibility of new pandemics grows. As predicted by the US Center for Disease Control and Prevention, and the World Bank, many pandemics affected the first quarter of the 21st century. In particular, the COVID-19 pandemic, caused by the SARS-CoV-2 virus, was responsible for the deaths of over 1.7 million people, 80 million infected individuals, and the worst economic crisis since 1930. In addition, it is predicted that pandemics becoming more common, so companies must be able to operate amid these crises, without exposing their employees to unnecessary risks and maintaining a stable economy. As an initial approach, in this work, a regime-switching model for operational risk management in pandemics was developed. Based on this model, a real option based method was described for maximizing profit amid pandemics. With this method, a dynamic programming algorithm was implemented to optimize a company's net profit considering penalties for contamination of its employees. Using this algorithm, the company can decide which regime (full operation, partial operation, home office, etc.) it should operate to maximize its average profit. Finally, a decision curve for a company's operating regime was calculated and then a simulation was performed comparing the profit of a company that never closed during the pandemic and one that followed the decision curve.

Keywords: Risk Management. Pandemics. Real Options.

À minha família que sempre acreditou, mesmo  
quando eu não acreditava.

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama das pandemias até o século 20 . . . . .	5
4.1	Árvore binomial $M_t$ separada em etapas com $n = 3$ . . . . .	18
4.2	Árvore binomial $M_t$ separada em etapas com $n$ qualquer. . . . .	21
5.1	Curva de decisão. . . . .	27
5.2	Curva de decisão variando o custo de transição. . . . .	28
5.3	Média de tempo de execução do algoritmo. . . . .	30

## Lista de Tabelas

5.1	Tabela dos parâmetros utilizados para taxa de infectados $I_t$ . . . . .	25
5.2	Tabela dos parâmetros utilizados na função $\pi$ . . . . .	26
5.3	Tabela de comparação entre o lucro da Empresa 1 e da Empresa 2. . . . .	29



---

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivo . . . . .	2
1.3 Metodologia . . . . .	2
1.4 Estrutura do trabalho . . . . .	3
<b>2 Epidemias e opções reais</b>	<b>4</b>
2.1 Definição de pandemia . . . . .	4
2.2 Uma breve história das pandemias . . . . .	5
2.3 Opções reais . . . . .	6
2.4 Principais tipos de opções . . . . .	7
<b>3 Modelo de duas etapas para fluxo de caixa</b>	<b>9</b>
3.1 Modelo binomial para infecção . . . . .	10
3.2 Modelo com mudança de regime . . . . .	12
3.3 Modelo de fluxo de caixa com mudança de regime . . . . .	13

3.4	Maximizando o lucro . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Programação dinâmica</b>	<b>16</b>
4.1	O problema de otimização com $n = 3$ . . . . .	17
4.2	O problema de otimização com $n$ qualquer . . . . .	20
4.3	Operação ótima, uma abordagem via programação dinâmica . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>25</b>
5.1	Parâmetros utilizados . . . . .	25
5.2	Curvas de decisão . . . . .	26
5.3	Simulação de lucro . . . . .	28
5.4	Tempo de execução . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Implementação do algoritmo descrito na seção 4.2</b>	<b>36</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A pandemia do vírus SARS-CoV-2, vírus responsável pelo Covid-19, já afetou mais de 150 países, infectando milhões de indivíduos e causando a maior crise econômica desde 1930. Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), o Brasil é o terceiro país mais afetado pela pandemia, com mais de 7 milhões de casos confirmado e quase 200 mil mortes [25]. Apesar disso, alguns estados como o Rio de Janeiro e São Paulo não decretaram o fechamento completo do comércio durante toda a pandemia [14], [16]. Desta forma, cada estabelecimento deveria decidir se iria ou não continuar seu funcionamento.

Por esta razão, durante um cenário de pandemia (algo que acredite-se que será cada vez mais comum [22]) empresas precisam definir sobre qual regime vão trabalhar. Por exemplo, um restaurante deve definir se vai receber seus cliente presencialmente (assim arriscando a saúde de seus colaboradores e clientes), se vai prestar seus serviços por meio de aplicativos de *delivery* já existentes (diminuindo sua margem de lucro), se vão optar por desenvolver seu próprio aplicativo de *delivery* (fazendo um alto investimento inicial), se vão funcionar com combinações das opções anteriores e até mesmo encerrar suas atividades quando o percentual de contaminados chegar em um certo nível e reabrir quando a taxa de contaminados for suficientemente baixa.

Para resolver este problema existem modelos para gerenciamento de risco com mudança

de regime, baseados em opções reais, para decidir em qual regime a empresa deve atuar de forma a maximizar o seu lucro [5]. Neste trabalho será implementado um modelo como o supracitado, porém em tempo discreto (isso pode ser visto como o regime diário de uma empresa).

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é descrever um modelo matemático com mudança de regime, baseado em opções reais, para otimizar o lucro de uma empresa, decidindo em qual regime ela deve operar e levando em consideração penalidades por cada funcionário infectado. As principais contribuições deste trabalho são:

- Descrição de um modelo com mudança de regime para gerenciamento de risco operacional.
- Criação de um algoritmo com complexidade quadrática para a solução do problema de otimização de lucro levando em conta mudança de regime.
- Cálculo das curvas de decisão levando em conta a taxa de contaminação para que a empresa decida entre dois regimes (fechado e aberto), considerando penalidades para a mudança de regime.

## 1.3 Metodologia

Neste trabalho foi descrito um modelo de dois estágios com mudança de regime, baseado em opções reais. O primeiro estágio consiste em descrever um modelo para a taxa de infectados, o que foi feito utilizando uma árvore binomial. No segundo estágio foi descrito um modelo para o fluxo de caixa da empresa, com mudança de regime, e considerando penalidades por cada funcionário infectado (incluindo diminuição da produtividade), este foi baseado no modelo por [5].

Após isso, foi descrito um método baseado em opções reais para otimizar o lucro

esperado. Com este método foi criado um algoritmo de programação dinâmica com complexidade quadrática para a solução do problema de otimização do lucro. Utilizando o algoritmo criado é possível decidir sobre qual regime a empresa deve operar entre tempos de escolha predeterminados, algo análogo a uma opção bermudiana.

## 1.4 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2 foi feita uma breve introdução sobre o conceito de pandemia, uma revisão histórica das pandemias e foi argumentado que estas se tornarão uma constante em todo o mundo. Após a contextualização histórica foi descrito como opções reais são empregadas em cenários de pandemia e os principais tipos de opção foram definidos, assim dizendo qual deles será utilizado neste trabalho. No Capítulo 3 foi descrito o modelo de duas etapas para o fluxo de caixa de uma empresa e o problema de otimização de lucro foi proposto. No Capítulo 4 foi criado um método, baseado em opções reais, para a maximização do lucro e então, utilizando este método, um algoritmo linear baseado em programação dinâmica foi descrito. No Capítulo 5 foram mostrados resultados obtidos pelo algoritmo, seu tempo de execução e as curvas de decisão levando em conta a taxa de contaminação para que a empresa decida entre dois regimes (fechado e aberto). Por fim, no Capítulo 6 foram descritas as conclusões e sugestão para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Epidemias e opções reais

Neste trabalho será tratado um modelo binomial para gerenciamento de risco causado por epidemias e em particular, para pandemias, uma vez que toda pandemia é uma epidemia. Desta forma, será feito uma definição do conceito de pandemia e uma breve contextualização histórica.

### 2.1 Definição de pandemia

A palavra pandemia vem do Grego *pan* e *demos*, que se traduzem, respectivamente, para "todos" e "povo". A palavra pandemia tem sido comumente utilizada para se referir a epidemia de uma doença contagiosa que se espalhou por um país ou, por um ou mais continentes [9].

A definição de pandemia mais aceita atualmente foi dada no livro de John M. Last [13]. Esta diz que pandemia é uma epidemia que ocorre no mundo inteiro ou sobre uma área muito grande, cruzando barreiras internacionais e, quase sempre, afetando um grande número de indivíduos. Esta definição não inclui informações sobre a imunidade da população, virologia ou sequer sobre o quão severa é a doença. Desta forma, por definição, é possível concluir que pandemias ocorrem anualmente, uma vez que epidemias sazonais são comuns em toda região temperada dos hemisférios norte e sul, cruzando barreiras

internacionais e afetando um grande número de indivíduos. Apesar disso, epidemias sazonais não são consideradas pandemias [20]. Mesmo assim, por ser a mais aceita atualmente, esta será a definição utilizada por todo este trabalho.

## 2.2 Uma breve história das pandemias

Durante a história muitas pandemias ocorreram, entre elas as mais conhecidas são, provavelmente, as diversas epidemias de influenza (Gripe). É impossível saber com exatidão quando foi a primeira vez que alguém foi contaminado pelo vírus influenza. Apesar deste fato, diversos historiadores concordam que a primeira pandemia de influenza foi detectada por volta do ano de 1510, época em que a Europa ainda se recuperava da peste negra (1340) e ainda estava enfrentando uma epidemia de sífilis [18].

Desde então, muitas outras pandemias surgiram, apenas no século XX ocorreram ao menos quatro grandes pandemias, estas são "Gripe Espanhola" (1918-1919), "Gripe Asiática" (1957-1958), "Gripe de Hong Kong" (1968-1969) e "Gripe Aviária" (1997). No século XXI, que ainda está em seu início, diversas outras pandemias emergiram, entre elas "Ebola" (2013), "Gripe Suína" (2009), "SARS" (2002), "Gripe aviária" (2008) e, mais recentemente, "Covid-19" (2019).

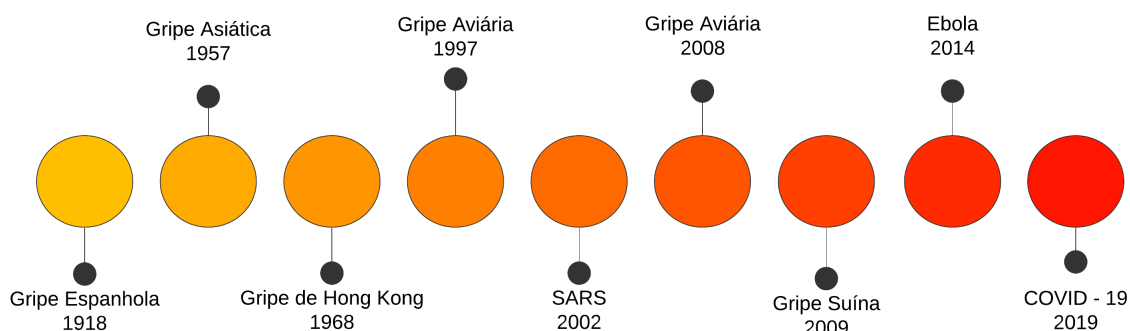


Figura 2.1: Diagrama das pandemias até o século 20

Desta forma, é possível ver que pandemias foram uma constante na história da humanidade e conjecturar que as pandemias continuarão sendo uma constante. Além disso, é possível observar que a quantidade de pandemias tem aumentado nos últimos anos e que, portanto, estas podem continuar aumentando. Sobre estas duas afirmações, existem diversos estudos que corroboram com elas. Uma das hipóteses é que a diminuição da biodiversidade e a construção de novas estruturas em áreas não exploradas aumentam a probabilidade de uma nova pandemia [22].

## 2.3 Opções reais

Como dito anteriormente, as pandemias são constantes na história da humanidade e é esperado que sua quantidade aumente, assim se tornando ainda mais presentes no dia a dia de cada indivíduo. Em 2005, o Centro de Controle e Prevenção de Doenças (CDC) estimou, mesmo em cenários moderadamente severos, a morte de 2 a 7 milhões de pessoas e tratamento médico para dezenas de milhões de indivíduos, [10]. Também em 2005, o Banco Mundial previu que o impacto de pandemias na economia internacional seria de cerca de \$800 bilhões [24]. O atual cenário causado pelo SARS-CoV-2 (o vírus responsável pelo Covid-19) confirma esta expectativa, até o momento são mais de 1.7 milhões de mortes, 80 milhões de infectados e a maior recessão desde 1930, causada, principalmente, pelo lockdown [21].

Sendo assim, é necessário entender que os eventos pandêmicos serão cada vez mais comuns. Portanto, empreendedores devem criar formas de conviver em meio a pandemias, não expondo seus colaboradores a riscos desnecessários e, ainda assim, otimizando seu lucro para evitar o desemprego em massa e outras consequências para a sociedade [8].

Uma das abordagens para a solução deste problema é utilizando opções reais, [5]. Para tratar desta abordagem é necessário fazer algumas definições para que este conceito seja entendido. No mercado financeiro uma opção de compra dá ao seu comprador o direito,



---

mas não a obrigação, de comprar um ativo em um determinado período de tempo (tempo específico ou conjunto de tempos predeterminados), tempo de maturação, por um preço predeterminado, preço de exercício. De forma similar, empreendedores precisam decidir investir ou não investir capital em sua empresa, ou decidir manter ou não seu negócio aberto. Portanto, um empreendedor com oportunidade de investimento possui uma opção análoga a uma opção de compra.

De forma geral, o termo "opção real" é utilizado para descrever qualquer situação de investimento, com certo grau de opcionalidade, em ativos reais, isto é, ativos que não são ativos financeiros (ações, depósitos bancários e títulos) [23]. O exemplo acima, onde um empreendedor precisa decidir se irá fechar ou manter aberto seu negócio é uma opção real.

Neste trabalho será criado um modelo, baseado em opções reais, onde as decisões que serão tomadas com a opção real serão os regimes de funcionamento de uma empresa durante uma pandemia.

## 2.4 Principais tipos de opções

Como dito anteriormente, opções reais possuem um análogo com ativos financeiros, isto é, cada opção real é análoga a uma opção no sentido clássico. Como neste trabalho será tratado um modelo baseado em opções reais, então, serão definidas os três principais tipos de opções de compra.

**Definição 1** (Opção Europeia). *Uma opção de compra europeia com tempo de maturação  $N > 0$  e preço de exercício  $K > 0$  dá o direito, mas não o dever, de seu comprador obter um ativo no tempo  $N$  pagando  $K$ .*

**Definição 2** (Opção Americana). *Uma opção de compra americana com tempo de maturação  $N > 0$  e preço de exercício  $K > 0$  dá o direito, mas não o dever, de seu comprador obter um ativo em qualquer tempo no intervalo de quando ocorreu a compra da opção até o tempo  $N$  pagando  $K$ .*

**Definição 3** (Opção Bermudiana). *Uma opção de compra bermudiana com tempos de exercício  $N = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}; n > 0$  e preço de exercício  $K > 0$  dá o direito, mas não o dever, de seu comprador obter um ativo em qualquer tempo no conjunto  $N$  pagando  $K$ .*

Os análogos em opções reais são imediatos. Por exemplo, a decisão de em um determinado dia abrir ou não um restaurante é uma opção real europeia, e a decisão de abrir ou não em um conjunto predeterminado de dias é uma opção real bermudiana. Assim como a decisão de comprar um forno novo para um restaurante até o fim do ano é uma opção real americana.

O objetivo deste trabalho é criar um modelo para gerenciamento de riscos em uma pandemia, portanto, a pergunta que será respondida é: "Em quais períodos de tempo com dia inicial e final entre  $N = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}; n > 0$  a empresa, não expondo seus funcionários a riscos desnecessários e maximizando seu lucro, vai abrir ou fechar?". Ou seja, o modelo deste trabalho será baseado em opções bermudianas. Será desenvolvido um algoritmo que, dados um conjunto de dias, ele está apto a decidir em qual regime uma empresa deve operar.

## Capítulo 3

# Modelo de duas etapas para fluxo de caixa

O modelo que será descrito neste capítulo é dividido em dois estágios, o primeiro deles descreverá a dinâmica da infecção que se espalha por uma determinada empresa. Essa dinâmica será descrita por um modelo binomial para a porcentagem da população que está infectada, que por sua vez será utilizado para estimar o percentual de funcionários infectados (uma empresa pode, por razões financeiras ou até mesmo de disponibilidade de testes, não conseguir decidir qual percentual de funcionários está infectados).

Quando o percentual de funcionários infectados chega a um determinado patamar o gerente pode decidir suspender temporariamente o funcionamento da empresa e dispensar os funcionários, infectados ou não. Dispensar os funcionários pode diminuir a taxa de transmissão, uma vez que eles estarão aptos a fazer isolamento social, diminuindo a transmissão externa (a contaminação que ocorre fora da empresa), e não estarão na empresa, portanto não há contaminação interna (a contaminação que ocorre dentro da empresa). Quando o percentual de funcionários contaminados diminuir a um certo patamar o gerente pode decidir retomar as atividades da empresa. Desta forma, a segunda etapa do modelo surge naturalmente, esta consistirá em definir um modelo com mudança de regime para o fluxo de caixa da empresa.

---

O fluxo de caixa pode ser diferente para regimes de funcionamento distintos, portanto, é possível definir o fluxo considerando muitos regimes, assim modelando diversas situações. Um exemplo é quando uma empresa precisa decidir se vai encerrar suas atividades por um período, se vai estar em pleno funcionamento, se fará seus funcionários trabalharem de casa ou até mesmo se respeitarão as exigências sanitárias do governo (se decidirem por não respeitar então pagarão uma multa). Como não há diferença no desenvolvimento da teoria para um modelo com muitos regimes ou apenas dois regimes, neste trabalho, para simplificação da escrita, serão tratados apenas dois regimes. Estes regimes serão,  $r = 1$  quando a empresa está em pleno funcionamento e arcando com o custo de receber os funcionários e  $r = 2$  quando a empresa não está funcionando e apenas pagará seus custos fixos.

### 3.1 Modelo binomial para infecção

Neste trabalho o modelo para infecção será bem simples. Este terá como base uma árvore binomial com fatores de crescimento e decrescimento tomados de forma  $a$ , para um determinado período de tempo, reproduzir o número de funcionários contagiados em uma determinada empresa. Este modelo não é o que descreve a dinâmica de uma infecção de forma mais realista, existem diversos outros modelos descritos na literatura que realizam esta tarefa de uma forma mais precisa, um exemplo deste é o SIR (suscetível, infeccioso e recuperado). Além dessa, existem modelos para infecções dentro de uma empresa, considerando mudanças de regime, como o descrito em [5].

Neste trabalho, para descrever o modelo binomial, serão utilizadas duas constantes provenientes de modelos para doenças infecciosas,  $R_0$  (o número de reprodução básico) e  $\gamma$  (a taxa de remoção da doenças). A primeira delas ( $R_0$ ) tem sido divulgada largamente na grande mídia, muitas vezes tratada como um indicador de severidade da doença, mas este não é exatamente seu significado [6].  $R_0$  é uma taxa per capita que representa número médio de novos casos causados diretamente por um indivíduo contaminado durante seu

período de infecção. Por sua vez,  $\gamma$  é uma taxa por dia que representa o tempo médio que um indivíduo leva até para de transmitir a infecção. O produto dessas duas constantes  $\beta = R_0\gamma$  é conhecido como a taxa de ataque da doença, este indica a taxa de contatos entre indivíduos que causou uma nova infecção.

Como dito anteriormente, a taxa de infectados será modelada por uma função de uma árvore binomial, desta forma, é necessário definir a árvore binomial ( $M_t$ ) e para tal serão definidos seus fatores de crescimento e decrescimento ( $u, d$ ).

Como dito anteriormente,  $\beta$  representa a taxa de contatos entre indivíduos que causou uma nova infecção, desta forma o fator de crescimento  $u$  e de decrescimento  $d$  serão tomados como na Eq. 3.1.

$$u = \min \left( 1 + \beta, \left( \frac{N}{S_0} \right)^{\frac{1}{T}} \right), \quad d = 1/u, \quad (3.1)$$

onde  $N$  é a quantidade de funcionários da empresa,  $T$  é o número de períodos (dias) representados na árvore e  $S_0$  é a quantidade inicial de infectados na empresa.

O fator de decrescimento poderia ser modelado de acordo com as características da doença, entretanto, como este modelo binomial é apenas um modelo inicial que pode, e deve, ser melhorado,  $d$  será tomado como  $1/u$ .

Repare que a caracterização de  $u$  como um mínimo entre duas constantes é feita pois o número de funcionários infectados não pode ser maior que a quantidade de funcionários, impondo a restrição da Eq. 3.2.

$$S_0 u^T \leq N \Rightarrow u \leq \left( \frac{N}{S_0} \right)^{\frac{1}{T}}. \quad (3.2)$$

Para caracterizar completamente a árvore binomial é necessário definir qual é a probabilidade  $p \in (0, 1)$  que ocorre o crescimento com a taxa  $u$ . Para tal existem diversas escolhas que podem ser feitas, uma delas é utilizar os dados da pandemia para estimar esta probabilidade. Outra, que por simplicidade será utilizada neste trabalho, é supor que

$p$  é dado pela medida neutra ao risco.

Para utilizar a medida neutra ao risco é necessário supor que é possível criar um *hedge* e para tal o artigo deverá ser negociável, líquido e o mercado deve ser sem arbitragem. Como neste trabalho serão tratadas opções reais, estas hipóteses nem sempre são verdadeiras, entretanto, este problema pode ser contornado utilizando um ativo financeiro líquido correlacionado para fazer o *hedge* (por exemplo, fundos imobiliários com imóveis relacionados ao negócio de interesse) [3].

Desta forma, supondo que a taxa livre de risco de curto prazo é  $\rho > 0$  e que  $0 < d < 1 + \rho < u$ , então

$$p = \frac{1 + \rho - d}{u - d}. \quad (3.3)$$

Agora que a árvore binomial  $M_t$  está completamente caracterizada basta definir a taxa de infectados como na Eq. 3.4.

$$I_t = I(t) = \frac{M_t}{N} \quad (3.4)$$

Ou seja, como  $M_t$  representa o número de funcionários infectados  $I_t$ , a normalização de  $M_t$  com respeito a quantidade total de funcionários, representa a taxa de funcionários infectados.

## 3.2 Modelo com mudança de regime

Os modelos com mudança de regime são comuns para descrever o comportamento de variáveis financeiras, como por exemplo taxa de juros e taxas de câmbio, [1] e [11]. Além disso, eles também são largamente utilizados para o apreçamento de opções reais. A história da implementação deste método pode ser traçada até 1968 no artigo [19]. Os modelos mais simples com mudança de regime são os conhecidos problemas de parada ótima para apreçamento de opções americanas, um clássico exercício para quem estuda este tema.

Em 1985, Brennan e Schwartz utilizaram a fórmula de Black-Scholes para determinar

---

o valor de uma empresa ativa ou inativa, [2]. Eles argumentaram que uma empresa inativa tinha a opção de investir e iniciar a suas atividades, portanto seu valor seria equivalente ao de uma opção de compra com preço de exercício igual ao preço para retomar suas atividades. De forma similar, o argumento foi feito para empresas ativas. Após isso diversos modelos com mudança de regime surgiram, cada vez acrescentando mais características como, por exemplo em 1993 quando Ekern relaxou a hipótese de que o valor pago para mudança de regime não podia ser recuperado, ou seja, o preço de exercício poderia ser recuperado (ao menos uma parte), [7].

### 3.3 Modelo de fluxo de caixa com mudança de regime

Esta seção será baseada no modelo de mudança de regime proposto no artigo de 2010 por Chen e Cox [5].

O modelo com mudança de regime descrito nesta seção será utilizado para decidir quando um gerente mantém aberto ou fecha uma determinada empresa de forma a maximizar seu lucro. Se o gerente decidir interromper as atividades da empresa por um certo período ele mandará todos os funcionários para casa com pagamento total, o pagamento total é feito para seguir as indicações do *CDC* e para que funcionários infectados não finjam estar saudáveis e recebam o pagamento total. Quando o gerente decide reiniciar as atividades da empresa ele convoca todos os funcionários para retornar a empresa, esta decisão é tomada para que funcionários não finjam estar doentes e recebam pagamento total sem produzir e sem estar doente.

A produção de um funcionário, individualmente, será normalizada (unitária), e se o funcionário for infectado então sua produtividade irá cair para um fator  $\xi \in (0, 1)$ . A quantidade total de funcionários na empresa é  $N$ . Considere que o preço do produto vendido pela empresa é  $P$  (se a empresa vende diversos produtos então basta tomar um preço "representante", por exemplo, se a empresa é um restaurante basta tomar o ticket médio pelo número de funcionários). Aqui também será acrescentada a hipótese de que

todos os produtos produzidos serão vendidos, ou seja, a empresa é única e está em um mercado competitivo. Também considere  $FC$  o custo fixo para a empresa e  $VC$  o custo variável por produto. Perceba que o salário dos funcionários está incluído nos custos fixos. Além disso, considere também que existe um custo de penalidade  $E$  para cada funcionário infectado, quando a empresa está em regime de funcionamento, a penalidade pode vir de funcionários que decidem não trabalhar ou estão relutantes a isto, ou até mesmo a perda de reputação da empresa. Desta forma, o fluxo de caixa de empresa, em cada período de tempo é definido como:

$$\pi(I_t, r) = \begin{cases} [\xi I(t)N + (1 - I(t))N](P - VC) - FC - EI(t)N, & \text{se } r = 1 \\ -FC, & \text{se } r = 2 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Desta forma, o fluxo de caixa da empresa depende da fração  $I_t$  de funcionários infectados e do regime (aberta ou fechada) que a empresa se encontra.

Suponha, também, que o custo para a empresa mudar do regime  $i$  para o regime  $j$  é  $C_{ij}$ , se  $i = j$  então  $C_{ij} = 0$  (não há custo de troca se não há troca), e  $C_{ij} + C_{ji} \geq 0$  (para evitar qualquer "arbitragem"). Além disso, a taxa de juros do mercado é  $\rho > 0$ .

### 3.4 Maximizando o lucro

Como dito anteriormente, o gerente deseja maximizar o seu lucro médio. Desta forma, nesta seção será desenvolvido a equação que modela este problema.

Suponha que o espaço de tempo que o gerente pode fazer decisões é de 0 até  $T$ , e os tempos que as escolhas podem ser feitas são os seguintes  $0 < m_1 < \dots < m_n < T$ . Em termos, o gerente deve decidir nos dia  $m_1, \dots, m_n$  se a empresa deve continuar aberta ou não (supondo que, no tempo 0, a empresa está aberta). A hipótese de que no tempo 0 a empresa está em pleno funcionamento implica que do tempo 0 até o tempo  $m_1$  (quando ocorre a primeira decisão) o regime é o  $r = 1$  e não há escolha.



Desta forma, considerando que a taxa livre de risco de curto prazo é  $\rho$ , então o gerente deseja escolher os regimes de forma que seu lucro descontado  $V$  seja tal que:

$$V = \max_{\mathcal{R}} \tilde{\mathbb{E}} \left\{ \sum_{t=0}^T \frac{1}{(1+\rho)^t} \pi(I_t, r_t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\rho)^{m_k}} C_{ij}^{m_k} \right\}, \quad (3.6)$$

onde a medida utilizada foi a neutra ao risco Eq. 3.3 (para denotar o valor esperado nesta medida será utilizado  $\tilde{\mathbb{E}}$ ),  $\mathcal{R}$  é o conjunto de todas as combinações possíveis de escolhas de regime  $r$  em cada tempo  $m_k$  com  $k \in \{1, \dots, n\}$  (perceba que a decisão depende dos resultados da pandemia até o tempo  $m_k$ , isto é, essas escolhas são processos adaptados e são análogas a tempos de parada) e  $C_{ij}^{m_k}$  é o custo por mudança de regime no tempo  $m_k$  (se houve mudança de regime de  $i$  para  $j$  então  $C_{ij}^{m_k} = C_{ij}$ ). Perceba que mesmo denotando o estado do modelo em um determinado tempo por  $r_t$  este não pode mudar em todos os tempos  $t \in \{1, \dots, T\}$  uma vez que as decisões sobre o estado são feitas nos tempos  $m_k$ , ou seja, se  $t \in \{m_k, \dots, m_{k+1} - 1\}$  então  $r_t$  é constante e igual a  $r_{m_k}$  com  $k \in \{1, \dots, n\}$  ( $r_t = 1$  para  $t \in \{0, \dots, m_k - 1\}$ ).

Neste modelo foi suposto que o gerente faria decisões até o tempo  $T$ , esta hipótese pode ser traduzida como impor que o gerente faça decisões sobre um período de tempo fixado (decisões de curto ou longo prazo). Diversos órgão reguladores utilizam esta abordagem, escolher um tempo máximo para tomar decisões, um exemplo é o Plano Nacional de Energia produzido pelo Ministério de Minas e Energia (MME) e pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE) [17]. Neste plano são tomadas decisões de longo e curto prazo, porém com datas prefixadas ( $m_k$ ) para ocorrência e com uma data limite para implementação ( $T$ ).

## Capítulo 4

# Programação dinâmica

No capítulo anterior foi dito que, para maximizar o lucro, é necessário resolver o seguinte problema de otimização:

$$V = \max_{\mathcal{R}} \tilde{\mathbb{E}} \left\{ \sum_{t=0}^T \frac{1}{(1+\rho)^t} \pi(I_t, r_t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\rho)^{m_k}} C_{ij}^{m_k} \right\}, \quad (4.1)$$

Ao primeiro olhar, para resolver este problema basta listar todos os elementos de  $\mathcal{R}$ , testá-los e finalmente escolher o que atinge o máximo. Este método, apesar de facilmente implementável, é computacionalmente complexo pois para tal é necessário testar todos os elementos de  $\mathcal{R}$  (da ordem de  $2^{n^2}$ ) e para cada um dos testes é necessário tempo linear em  $T$ , ou seja, o tempo necessário para execução do algoritmo é da ordem de  $T2^{n^2}$ . Além disso, um passo para aumentar a complexidade do modelo é considerar que o tempo  $T$  é infinito, ou seja, a pandemia nunca acaba. Desta forma, o método anterior não é generalizável. De outra forma, a abordagem utilizando programação dinâmica é generalizável, em [5] é utilizado uma abordagem de programação dinâmica para este tipo de problema com " $T = \infty$ " e com um modelo em tempo contínuo.

Desta forma, para resolver o problema de otimização será utilizada a abordagem de programação dinâmica. A maior vantagem desta abordagem é que utilizando-a torna-se possível dividir a decisão ótima de longo prazo (todos os  $m_k$ ) em pequenas decisões ótimas (para cada  $m_k$ ). Para desenvolver o algoritmo para este problema, primeiramente será resolvido um problema mais geral e depois as variáveis serão tomadas como no modelo da

seção anterior.

## 4.1 O problema de otimização com $n = 3$

Sejam  $f_1$  e  $f_2$  funções mensuráveis e  $M_t$  uma árvore binomial. Suponha que nos tempos  $0 < m_1 < m_2 < m_3 < T$  seja possível escolher entre os regimes  $r = 1$  e  $r = 2$  (ao mudar do regime  $i$  para o regime  $j$  é pago  $C_{ij}$ ). Além disso, defina:

$$f(t, r) = \begin{cases} f_1(I_t), & \text{se } r = 1 \\ f_2(I_t), & \text{se } r = 2 \end{cases}, \quad (4.2)$$

e considere que o pagamento a cada período de tempo  $t$  é  $f(M_t, r)$  que depende do regime e que até o tempo  $m_1$  o regime é o  $r = 1$ .

É desejado escolher os regimes de forma que  $V$  seja:

$$V = \max_{\mathcal{R}} \tilde{\mathbb{E}} \left\{ \sum_{t=0}^T \frac{1}{(1+\rho)^t} f(t, r_t) - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{(1+\rho)^{m_k}} C_{ij}^{m_k} \right\}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathcal{R}$  é o conjunto de todas as combinações possíveis de escolhas de regime  $r$  em cada tempo  $m_k$  com  $k \in \{1, \dots, 3\}$  e  $C_{ij}^{m_k}$  é o custo por mudança de regime no tempo  $m_k$  (se houve mudança de regime de  $i$  para  $j$  então  $C_{ij}^{m_k} = C_{ij}$ ). Perceba que mesmo denotando o estado do modelo em um determinado tempo por  $r_t$  este não pode mudar em todos os tempos  $t \in \{1, \dots, N\}$  uma vez que as decisões sobre o estado são feitas nos tempos  $m_k$ , ou seja, se  $t \in \{m_k, \dots, m_{k+1} - 1\}$  então  $r_t$  é constante e igual a  $r_{m_k}$  com  $k \in \{1, \dots, 3\}$  ( $r_t = 1$  para  $t \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$ ).

Este problema de otimização pode ser dividido em quatro etapas. A primeira é para  $t \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$ , a segunda de  $t \in \{m_1, \dots, m_2 - 1\}$ , a terceira para  $t \in \{m_2, \dots, m_3 - 1\}$  e a quarta para  $t \in \{m_3, \dots, T\}$ , como ilustrado na Fig. 4.1.

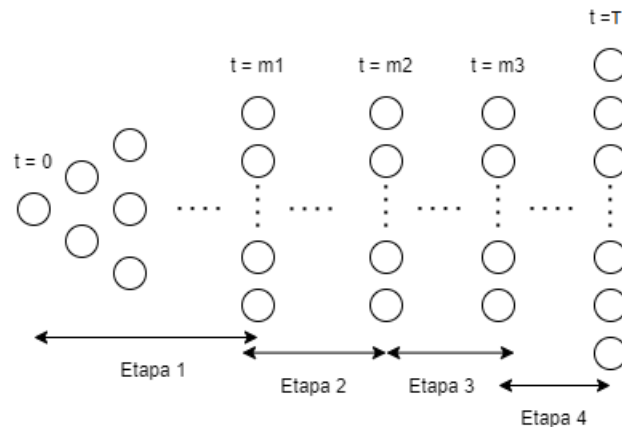


Figura 4.1: Árvore binomial  $M_t$  separada em etapas com  $n = 3$ .

A cada período da árvore binomial são conhecidos os eventos anteriores, por exemplo, no segundo período da árvore sabe-se se houve aumento ou diminuição do número de infectados no primeiro período. Durante este trabalho, cada decisão tomada em um tempo  $t$  será indicada por  $\omega_t$  tal que  $\omega_t =$  aumento do número de infectados com probabilidade  $p$  e  $\omega_t =$  diminuição do número de infectados com probabilidade  $q = 1 - p$  (novamente, utilizando a medida neutra ao risco Eq. 3.3). Portanto, as decisões tomadas do tempo 0 até o tempo  $t$  podem ser condensadas como  $\omega_0\omega_1\dots\omega_t$ .

Como dito anteriormente, para resolver este tipo de problema de otimização é possível utilizar a abordagem de programação dinâmica e separar em três pequenos problemas de otimização.

- Etapa 4:

1. Defina  $V_3^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_3$  se o regime anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$V_3^1(\omega_0\dots\omega_{m_3-1}) = \max \left\{ \sum_{t=m_3}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_3}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0\dots\omega_{m_3-1}\}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_3}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_3}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0\dots\omega_{m_3-1}\} - C_{12} \right\}$$

2. De forma análoga, defina  $V_3^2$ :

$$V_3^2(\omega_0 \dots \omega_{m_3-1}) = \max \left\{ \sum_{t=m_3}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_3}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_3-1}\} - C_{21}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_3}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_3}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_3-1}\} \right\}$$

Ou seja, nesta etapa foi tomada a decisão que gera o maior ganho ( $V_3^1(\omega_0 \dots \omega_{m_3-1})$  ou  $V_3^2(\omega_0 \dots \omega_{m_3-1})$ ) levando em consideração a informação sabida anteriormente  $\omega_0 \dots \omega_{m_3-1}$ .

• Etapa 3:

1. Defina  $V_2^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_2$  se o regime anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$V_2^1(\omega_0 \dots \omega_{m_2-1}) = \\ \max \left\{ \sum_{t=m_2}^{m_3-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_2}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_3^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{m_3-m_2}}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_2}^{m_3-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_2}} - C_{12} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_3^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{m_3-m_2}} \right\}$$

2. De forma análoga, defina  $V_2^2$ :

$$V_2^2(\omega_0 \dots \omega_{m_2-1}) = \\ \max \left\{ \sum_{t=m_2}^{m_3-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_2}} - C_{21} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_3^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{m_3-m_2}}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_2}^{m_3-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_2}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_3^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_2-1}\}}{(1+\rho)^{m_3-m_2}} \right\}$$

• Etapa 2:

1. Defina  $V_1^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_1$  se o regime

anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$V_1^1(\omega_0 \dots \omega_{m_1-1}) = \max \left\{ \sum_{t=m_1}^{m_2-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_1}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_2^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{m_2-m_1}}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_1}^{m_2-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_2}} - C_{12} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_2^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{m_2-m_1}} \right\}$$

2. Desta vez não é necessário criar a hipótese do regime anterior ser  $r = 2$  pois já é sabido que este é 1 (a empresa começa aberta).

- Etapa 1:

1. Defina  $V_0^1$  como o valor da opção no tempo 0:

$$V = V_0^1 = \sum_{t=0}^{m_1-1} \frac{1}{(1+\rho)^t} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1)\} + \frac{1}{(1+\rho)^{m_1}} \tilde{\mathbb{E}} \{V_1^1\}$$

Desta forma, ao resolver o problema de otimização (na verdade é apenas decidir qual o maior entre dois números)  $V_1^1$  já é decidido o valor de  $r_{m_2-1}$  e portanto, pela etapa 3 é decidido o valor de  $r_{m_3-1}$  e assim por diante, conseguindo todos os valores de  $r_t$  de forma a obter  $V$ .

Desta forma, para 3 tempos de escolha, o problema proposto neste trabalho está resolvido.

## 4.2 O problema de otimização com $n$ qualquer

Aqui, como no caso com  $n = 3$ ,  $f_1, f_2$  são funções mensuráveis,  $f$  é dado pela Eq. 4.2 e  $M_t$  é uma árvore binomial. Mas, desta vez existem  $n$  tempos para tomada de decisão,  $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_n < T$ . Mais uma vez, o problema de interesse é:

$$V = \max_{\mathcal{R}} \tilde{\mathbb{E}} \left\{ \sum_{t=0}^T \frac{1}{(1+\rho)^t} f(t, r_t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\rho)^{m_k}} C_{ij}^{m_k} \right\}, \quad (4.4)$$

onde todas as variáveis são como na seção anterior.

Mais uma vez, este problema pode ser dividido em etapas, mais precisamente,  $n + 1$  etapas, como na Fig. 4.2.

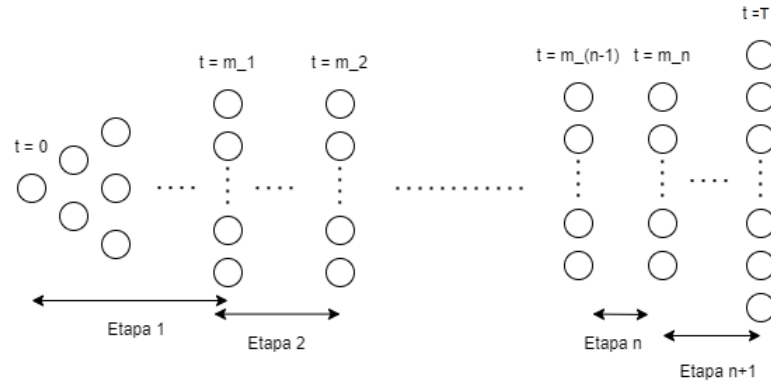


Figura 4.2: Árvore binomial  $M_t$  separada em etapas com  $n$  qualquer.

Utilizando a mesma abordagem de programação dinâmica que na seção anterior.

- Etapa  $n + 1$ :

1. Defina  $V_n^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_n$  se o regime anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$V_n^1(\omega_0 \dots \omega_{m_n-1}) = \max \left\{ \sum_{t=m_n}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_n}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_n-1}\}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_n}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_n}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_n-1}\} - C_{12} \right\}$$

2. De forma análoga, defina  $V_n^2$ :

$$V_n^2(\omega_0 \dots \omega_{m_n-1}) = \max \left\{ \sum_{t=m_n}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_n}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_n-1}\} - C_{21}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_n}^T \frac{1}{(1+\rho)^{t-m_n}} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_n-1}\} \right\}$$

- Etapa  $n$ :

1. Defina  $V_{n-1}^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_{n-1}$  se o

regime anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$\begin{aligned} & V_{n-1}^1(\omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}) = \\ \max & \left\{ \sum_{t=m_{n-1}}^{m_n-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{n-1}}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_n^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_n-m_{n-1}}}, \right. \\ & \left. \sum_{t=m_{n-1}}^{m_n-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{n-1}}} - C_{12} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_n^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_n-m_{n-1}}} \right\} \end{aligned}$$

2. De forma análoga, defina  $V_{n-1}^2$ :

$$\begin{aligned} & V_{n-1}^2(\omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}) = \\ \max & \left\{ \sum_{t=m_{n-1}}^{m_n-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{n-1}}} - C_{21} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_n^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_n-m_{n-1}}}, \right. \\ & \left. \sum_{t=m_{n-1}}^{m_n-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{n-1}}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_n^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_{n-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_n-m_{n-1}}} \right\} \end{aligned}$$

• Etapa  $k \in \{3, \dots, n-1\}$ :

1. Defina  $V_{k-1}^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_{k-1}$  se o regime anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$\begin{aligned} & V_{k-1}^1(\omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}) = \\ \max & \left\{ \sum_{t=m_{k-1}}^{m_k-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{k-1}}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_k^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_k-m_{k-1}}}, \right. \\ & \left. \sum_{t=m_{k-1}}^{m_k-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{k-1}}} - C_{12} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_k^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_k-m_{k-1}}} \right\} \end{aligned}$$

2. De forma análoga, defina  $V_{k-1}^2$ :

$$\begin{aligned} & V_{k-1}^2(\omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}) = \\ \max & \left\{ \sum_{t=m_{k-1}}^{m_k-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{k-1}}} - C_{21} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_k^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_k-m_{k-1}}}, \right. \\ & \left. \sum_{t=m_{k-1}}^{m_k-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_{k-1}}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_k^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_{k-1}-1}\}}{(1+\rho)^{m_k-m_{k-1}}} \right\} \end{aligned}$$

• Etapa 2:



1. Defina  $V_1^1$  como o problema de máximo a ser resolvido no tempo  $m_1$  se o regime anterior era  $r = 1$ , isto é:

$$V_1^1(\omega_0 \dots \omega_{m_1-1}) = \max \left\{ \sum_{t=m_1}^{m_2-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1) | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_1}} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_2^1 | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{m_2-m_1}}, \right. \\ \left. \sum_{t=m_1}^{m_2-1} \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 2) | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{t-m_2}} - C_{12} + \frac{\tilde{\mathbb{E}} \{V_2^2 | \omega_0 \dots \omega_{m_1-1}\}}{(1+\rho)^{m_2-m_1}} \right\}$$

2. Desta vez não é necessário saber criar a hipótese do regime anterior ser  $r = 2$  pois já é sabido que este é 1.

- Etapa 1:

1. Defina  $V_0^1$  como o valor da opção no tempo 0:

$$V = V_0^1 = \sum_{t=0}^{m_1-1} \frac{1}{(1+\rho)^t} \tilde{\mathbb{E}} \{f(t, 1)\} + \frac{1}{(1+\rho)^{m_1}} \tilde{\mathbb{E}} \{V_1^1\}$$

Ao resolver o problema de otimização (na verdade é apenas decidir qual o maior entre dois números)  $V_1^1$  já é decidido o valor de  $r_{m_2-1}$  e portanto, pela etapa 3 é decidido o valor de  $r_{m_3-1}$  e assim por diante, conseguindo todos os valores de  $r_t$  até  $r_{m_n}$  de forma a obter  $V$ .

Desta forma, o problema está resolvido para  $n$  qualquer.

Perceba que, de fato, não há qualquer necessidade para que  $M_t$  seja uma árvore binomial. A princípio  $M_t$  pode ser qualquer função mensurável, até mesmo uma função não aleatória (como em modelos para epidemia determinísticos).

### 4.3 Operação ótima, uma abordagem via programação dinâmica

Neste momento, o problema de otimização da Eq. 4.4 está resolvido, basta tomar  $f_1$  e  $f_2$  de forma conveniente para recuperar o problema de maximização de lucro descrito na

Eq. 3.6.

Primeiramente, tome  $f_2 \equiv -FC$ , uma função identicamente constante e portanto contínua, em particular mensurável. Tome  $f_1$  como na Eq. 4.5.

$$f_1(M_t) = [\xi I(t)N + (1 - I(t))N](P - VC) - FC - EI(t)N. \quad (4.5)$$

Portanto, como  $f_1$  é linear então é mensurável.

Desta formar,  $f$  é como na Eq. 4.6

$$f(I_t, r) = \begin{cases} [\xi I(t)N + (1 - I(t))N](P - VC) - FC - EI(t)N, & \text{se } r = 1 \\ -FC, & \text{se } r = 2 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Em conclusão,  $f(I_t, r) = \pi(I_t, r)$  e portanto a Eq. 4.4 se resume a Eq. 3.6, com isso o problema de otimização de lucro está resolvido para  $n$  qualquer utilizando o resultado da seção 4.2.

# Capítulo 5

## Resultados

Nesta seção serão apresentados alguns resultados envolvendo o modelo proposto neste trabalho. Todos os resultados foram gerados utilizando o algoritmo em anexo escrito em Python 3.

### 5.1 Parâmetros utilizados

O número de reprodução básico ( $R_0$ ) e a taxa de remoção  $\gamma$  foram tomadas seguindo os dados para H1N1 no Brasil descritos em [12]. Os parâmetros para o modelo da taxa de infectados Eq. 3.4 foram tomados como na Tab. 5.1.

Parâmetros para taxa de infectados ( $I_t$ )	
$R_0$	2.05 [ <i>pessoa</i> ] <sup>-1</sup>
$\gamma$	0.025 [ <i>dia</i> ] <sup>-1</sup>
$\rho$	.001 [ <i>dia</i> ] <sup>-1</sup>
$T$	90 [ <i>dias</i> ]

Tabela 5.1: Tabela dos parâmetros utilizados para taxa de infectados  $I_t$ .

Os parâmetros do modelo com mudança de regime Eq. 3.5 foram tomados de acordo com [5] porém com algumas mudanças para se adaptar a sensibilidade do modelo binomial.

Em particular,  $\xi$ ,  $P$ ,  $VC$  e  $FC$  foram tomados como em [5] e os custos de troca  $M$ ,  $A$  e a penalidade por cada funcionário infectado  $E$  tiveram seus valores aumentados, em comparação a [5]. Todas as constantes supracitadas podem ser encontradas na Tab 5.2.

Parâmetros para a função $\pi(I_t, i)$	
$\xi$	0.5 [pessoa] <sup>-1</sup>
$P$	3 [R\$]
$VC$	1 [R\$]
$FC$	500 [R\$]
$E$	5 [R\$]
$M$	3000 [R\$]
$A$	3000 [R\$]

Tabela 5.2: Tabela dos parâmetros utilizados na função  $\pi$ .

## 5.2 Curvas de decisão

Devido ao fato de que a função  $\pi(I_t, i)$  (Eq. 3.5) é monótona para  $i$  fixo, então para cada dia (após a infecção atingir um número mínimo de funcionários) haverá um limite máximo de infectados para que a empresa troque do regime  $r = 1$  para o  $r = 2$  (fechamento), para que seu lucro seja maximizado. O argumento é análogo para a mudança do regime  $r = 2$  para  $r = 1$  (reabertura). Calculando estes valores, distribuindo os dias para tomada de decisão a cada dois dias e utilizando os parâmetros da Tab. 5.1 e 5.2, foi obtido a curva de decisão da Fig. 5.1.

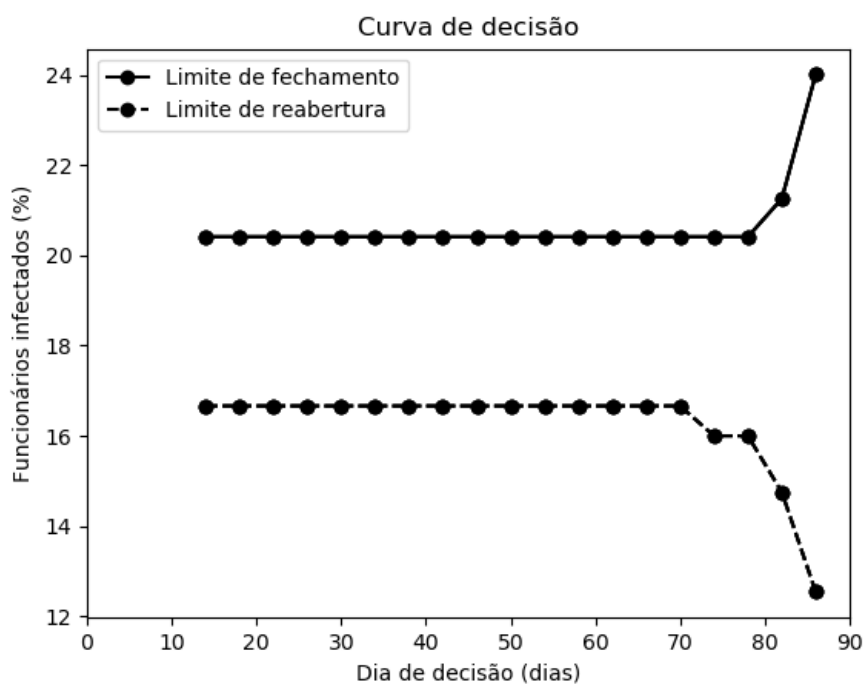


Figura 5.1: Curva de decisão.

A linha contínua indica o menor percentual de funcionários para que a empresa encerre suas atividades e a pontilhada é o maior percentual de funcionários contaminados para que a empresa possa reabrir. Ambas as curvas foram geradas utilizando o algoritmo descrito na seção 4.2 para otimização do lucro médio.

Para observar o comportamento das curvas de decisão em relação aos custos de fechamento e reabertura, a curva da Fig. 5.2 foi gerada, variando os custos de fechamento e reabertura.

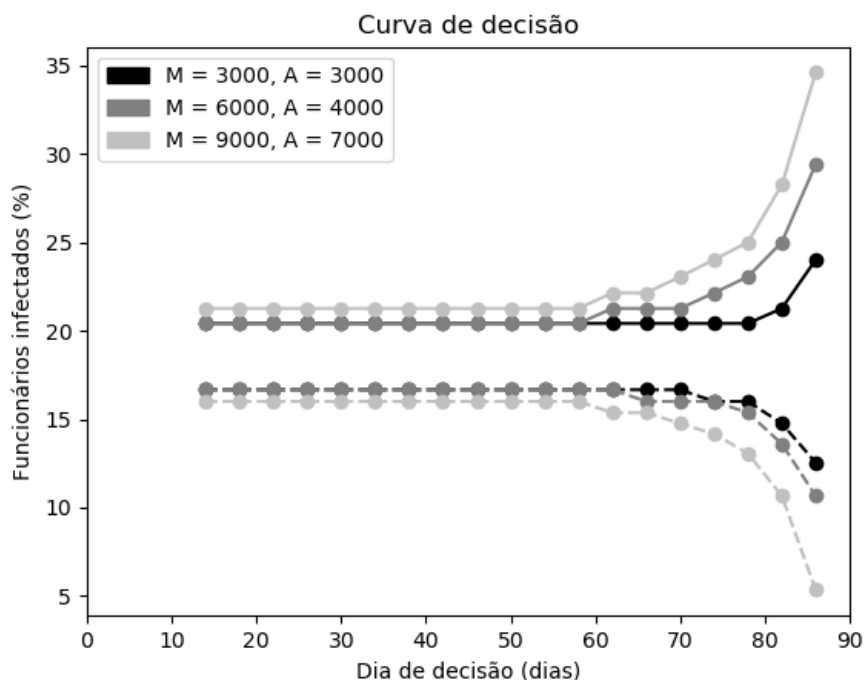


Figura 5.2: Curva de decisão variando o custo de transição.

### 5.3 Simulação de lucro

As curvas de decisão geradas utilizando o algoritmo descrito na seção 4.2 devem auxiliar uma empresa a maximizar seu lucro. Para verificar esta afirmação neste seção foram feitas simulações do lucro obtido por duas empresas distintas, a Empresa 1 funcionou durante toda a pandemia e a Empresa 2 que fechou e reabriu seguindo as curvas de decisão.

O cenário acima foi simulado 1000 vezes e a média dos resultados foi tomada, desta forma foram obtidos os resultados da Tab. 5.3.

Comparação do lucro das Empresas 1 e 2			
$M$	$A$	Lucro Empresa 1	Lucro Empresa 2
3000	3000	-99.7	-47.2
3000	1000	-102.8	-47.2
1000	1000	-100.9	-45.2

Tabela 5.3: Tabela de comparação entre o lucro da Empresa 1 e da Empresa 2.

E, portanto, a estratégia de seguir o a curva de decisão gerou um lucro maior, em comparação com a estratégia de nunca mudar de regime.

## 5.4 Tempo de execução

No início do capítulo sobre programação dinâmica 4 foi descrito, de forma breve, um algoritmo de força bruta com complexidade  $O(T2^{n^2})$ . Este algoritmo logo se torna obsoleto quando a quantidade de tempos de decisão é suficientemente grande. Desta forma, no mesmo capítulo, porém desta vez na seção 4.2, foi desenvolvido um algoritmo baseado em programação dinâmica para solução do problema de otimização. Este algoritmo precisa, apenas, realizar uma quantidade de operações proporcional a quantidade de nós da árvore para resolver o problema, ou seja, é esperado que a complexidade do algoritmo seja  $O(T^2)$ .

Para observar esta afirmação de forma empírica o algoritmo foi executado para  $T \in \{10, \dots, 200\}$  com dias para mudança de regime distribuídos de 2 em 2 dias. Esta escolha de distribuição dos tempos de decisão foi feita para obter  $n$  proporcional a  $T$  (o pior caso possível). O algoritmo foi realizado 10 vezes e a média aritmética do tempo de execução para cada  $T$  foi tomada resultando na Fig. 5.3.

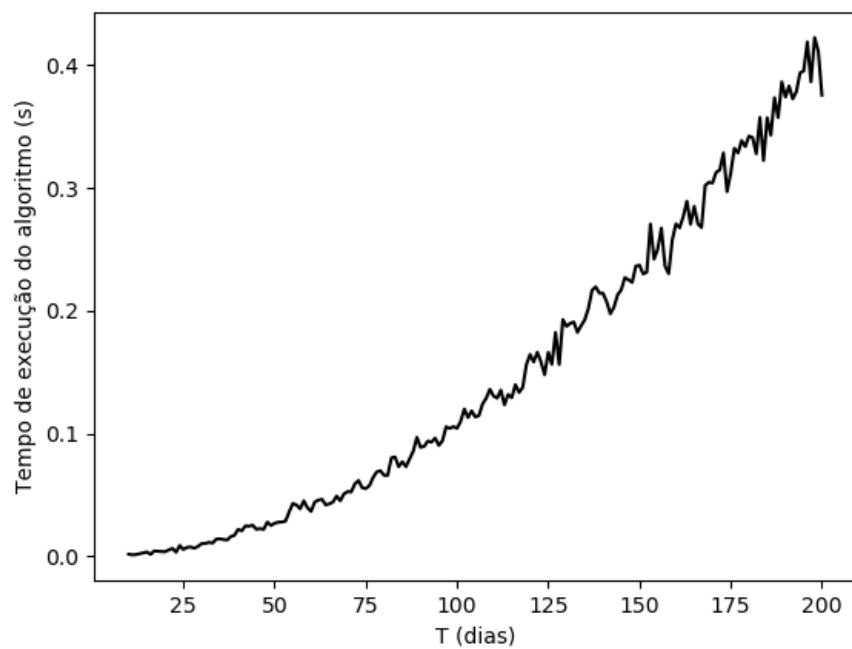


Figura 5.3: Média de tempo de execução do algoritmo.



## Capítulo 6

# Conclusão e trabalhos futuros

Neste trabalho, foi tratado um modelo de duas etapas com mudança de regime para o fluxo de caixa de uma empresa e, a partir deste modelo, foi possível descrever um método, baseado em opções reais, para otimização do lucro médio de uma empresa. Com este método foi criado um algoritmo com complexidade  $O(T^2)$  para solução do problema de otimização de lucro. Utilizando o algoritmo foram geradas curvas de decisão e ao aumentar o custo para mudança de regime foi visto que o percentual de funcionários para que a empresa encerre suas atividades aumentou e o percentual de funcionários contaminados para que a empresa possa reabrir diminuiu, como esperado. Também foi simulado o caso de duas empresas, uma que não seguiu a curva de decisão (Empresa 1) e a que seguiu (Empresa 2), como esperado, foi obtido que a Empresa 2 obteve um lucro maior que a Empresa 1.

Com relação a trabalhos futuros, destaca-se a mudança do modelo binomial da taxa de infectados para o Modelo de Markov para infecções, assim descrevendo de forma mais realista o fenômeno [15]. Também é destacado algumas mudanças na função que descreve o fluxo de caixa, entre elas, incluir um imposto corporativo e aumentar a quantidade de regimes (incluindo o fechamento definitivo do negócio e impactos causados por perda de demanda). Além disso, é possível utilizar um ativo negociável correlacionado à taxa de infecção, tornando desnecessário as hipóteses de negociabilidade e liquidez feitas para utilizar a medida neutra a risco na taxa de infecção  $I_t$ , gerando resultados mais precisos para

o apereamento da opção real tratada neste texto [3]. Também destaca-se a possibilidade de apereamento do ativo não negociável via uma abordagem por indiferença [4].

## Referências Bibliográficas

- [1] ANG. A.; BEKAERT, G. Regime Switches in Interest Rates. **Journal of Business and Economic Statistics**, Vol. 20, 2002.
- [2] BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating Natural Resource Investments. **Journal of Business**, Vol. 58, 1985.
- [3] CAPINSKI, M.; PATENA W. Real Options - Realistic Valuation. **SSRN Electronic Journal**, June, 2003.
- [4] Coelho, T. C. **Apreçamento com Ativos Não Negociáveis: Uma Abordagem por Indiferença**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2018.
- [5] CHEN, H.; and COX, S. An Option-Based Operational Risk Management Model for Pandemics. **North American Actuarial Journal**, Vol. 13, 2010.
- [6] DELAMARTE P. L et al. Complexity of the Basic Reproduction Number ( $R_0$ ). **Emerging Infectious Diseases**, Vol. 25, 2020.
- [7] EKERN, S. Entry and Exit Decisions with Restricted Switching. Working paper. **Norwegian School of Economics and Business Administration**, Department of Finance and Management Science, Oslo, 1993.
- [8] FU, M.; SHEN, H. COVID-19 and Corporate Performance in the Energy Industry - Moderating effect of Goodwill Impairment. **Energy Research Letters**, Vol. 1, 2020.
- [9] HONIGSBAUM, M. Historical keyword Pandemic. **The Lancet**, Vol. 373, June, 2009.

- 
- [10] JIA, N.; TSUI, L. Epidemic Modeling Using SARS as a Case Study. **North American Actuarial Journal**, Vol. 9, 2005.
- [11] KADAR, P. et al. Modelling Exchange Rates Using Regime Switching Models. **Sains Malaysiana**, Vol. 35 2006.
- [12] KOCK, K. et al. Calculation of Reproducibility Rates ( $R_0$ ) by Simplification of SIR Model Applied to Influenza A Epidemic (H1N1) in Brazil Occurred in 2009. **Revista de Epidemiologia e Controle de Infecção**, Vol. 7, 2017.
- [13] LAST, J. M. **A Dictionary of Epidemiology**. Fourth edition. Oxford University Press, 2000.
- [14] LEMOS, V. 'A situação preocupa muito e vai piorar': o alerta sobre avanço da covid-19 no Rio de Janeiro. **BBC News Brasil**, 11 de dezembro de 2020. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/brasil-55268151>>.
- [15] LISMAWATI, E. et al. Discrete Time Markov Chains (DTMC) Susceptible Infected Susceptible (SIS) Epidemic Model With Two Pathogens in Two Patches. **Journal of Physics : Conference Series**, Vol. 855, 2017.
- [16] MENGUE, P. Gestão Doria mantém Grande SP na fase amarela; 3 regiões regridem após alta da covid. **O Estado de São Paulo**, 08 de janeiro de 2021. Disponível em: <<https://sao-paulo.estadao.com.br/noticias/geral,governo-joao-doria-anuncia-reclassificacao-plano-sao-paulo,70003574760>>.
- [17] **Ministério de Minas e Energia** (MME). Plano Nacional de Energia 2050, 2020.
- [18] MORENS, D. et al. Pandemic Influenza's 500th Anniversary. **Clinical Infectious Diseases**, Vol. 51, 2010
- [19] MOSSIN, J. An Optimal Policy for Lay-Up Decisions. **Swedish Journal of Economics**, Vol. 70, 1968.

- [20] QIU, W. et all. The Pandemic and its Impacts. **Health, Culture, and Society**, Vol. 9-10, 2016.
- [21] SHEN, H. et all. The Impact of the COVID-19 Pandemic on Firm Performance. **Emerging Markets Finance and Trade**, Vol. 56,2020.
- [22] TOLLEFSON, J. Why Deforestation and Extinctions Make Pandemics More Likely. **Nature**, Vol. 584, 2020.
- [23] Wijst, D. **Finance : a Quantitative Introduction**. First edition. Cambridge University Press, 2013.
- [24] **WORLD BANK EAST ASIA AND PACIFIC REGION (WBEAPR)**. Spread of Avian Flu Could Affect Next Year's Economic Outlook, 2005.
- [25] **WORLD HEALTH ORGANIZATION (WHO)**. WHO Coronavirus Diseases (Covid-19) Dashboard. Disponível em: <<https://covid19.who.int/table>>.

# Apêndice A

## Implementação do algoritmo descrito na seção 4.2

```
import numpy as np

# Implementation of the pi function

## Initialization PiFunction
xi = 0.5 #Productivity of an Infective
N = 1000 #Number of Employees
P = 3 #Price of product
VC = 1 #Variable cost
FC = 500 #Fixed Cost
E = 5 #Penalty Cost
M = 3000 #Mothbaling Cost  $C_{12}$ 
A = 3000 #Reactivation Cost  $C_{21}$ 
```

---

```

def PiFunc(tI, ti):
    if ti == 1:
        Pf = (xi*tI*N + (1-tI)*N)*(P-VC) - FC - E*tI*N
    else:
        Pf = -FC + 0*tI

    return Pf
##

# Implementation of the tree
T = 90          # Number of periods
S_0 = 160       # Initial value of the tree
R_0 = 2.05      # Basic reproduction number
gamma = 0.025   # Removal Rate
u = 1 + R_0*gamma # Up factor
d = 1/u        # Down factor
r = 0.001      # Money market rate
def RiskNeutral(tu,td,tr):
    p = (1 + tr - td) / (tu - td)
    q = 1 - p
    return p,q

def LayValInfec(tu, td, tT):
    # Calculating the value in the lT layer of the infected tree (W)
    W_1 = np.cumprod(td * np.ones(tT + 1)) / td
    W_2 = np.cumprod(tu * np.ones(tT + 1)) / tu
    W = S_0 * W_1 * W_2[:, :-1] / N
    return W

```

---

```
def Back_Propagation(W, tp,tq, tr, L):
    tT = np.shape(W)[0]-1
    aW = W.copy()
    for i in range(tT, L, -1):
        for j in range(0, i):
            aW[j] = (tp*aW[j+1] + tq*aW[j])/(1+tr)

    I = aW[0:L+1]
    return I

def Main():
    # Main
    for m in range(qtdDec, 0, -1):
        Lay_2 = LayValInfec(u, d, T_Decision[m - 1])
        Aux_1 = 0 * Lay_2
        Aux_2 = 0 * Lay_2
        # Calculando o fluxo até T
        for i in range(0, T_Decision[m - 1] + 1):
            aux1 = 0
            aux2 = 0
            for l in range(0, T_Decision[m] - T_Decision[m - 1]):
                aux1 = aux1 + PiFunc(Lay_2[i] * (1 + r) ** l, 1) * (1 + r) ** (-l)
                aux2 = aux2 + PiFunc(Lay_2[i] * (1 + r) ** l, 2) * (1 + r) ** (-l)

            Aux_1[i] = aux1
            Aux_2[i] = aux2

    # if j = 1
```



---

```

Aux_11 = Aux_1 + Back_Propagation(DecFlowV[0][-1], p, q, r, T_Decision[m - 1])
Aux_12 = Aux_2 + Back_Propagation(DecFlowV[1][-1], p, q, r, T_Decision[m - 1]) - M
auxDecFlow_1 = np.maximum(Aux_11, Aux_12)
auxDec_1 = 0 * auxDecFlow_1
index = 0
for v in auxDecFlow_1:
    if v == Aux_11[index]:
        auxDec_1[index] = 1
    else:
        auxDec_1[index] = 2
index += 1

# if j = 2
Aux_21 = Aux_1 + Back_Propagation(DecFlowV[0][-1], p, q, r, T_Decision[m - 1]) - A
Aux_22 = Aux_2 + Back_Propagation(DecFlowV[1][-1], p, q, r, T_Decision[m - 1])

auxDecFlow_2 = np.maximum(Aux_21, Aux_22)
auxDec_2 = 0 * auxDecFlow_2
index = 0
for v in auxDecFlow_2:
    if v == Aux_22[index]:
        auxDec_2[index] = 2
    else:
        auxDec_2[index] = 1
index += 1

DecFlowV[0].append(auxDecFlow_1)
DecFlowV[1].append(auxDecFlow_2)
DecV[0].append(auxDec_1)

```

---

```
DecV[1].append(auxDec_2)
return DecV

# Program
p,q = RiskNeutral(u,d,r) # Calculating the risk neutral prob
T_Decision = np.append(np.arange(2, T - 1, 4), T + 1) # np.array([1, 2, 3, 10, 20,
qtdDec = np.shape(T_Decision)[0] - 1
DecFlowV = [[np.zeros(T + 1)], [np.zeros(T + 1)]]
DecV = [[], []] # Vector of Decisions [[j = 1], [j = 2]]
Main()

T_Fechar = DecV[0][::-1]
T_Abrir = DecV[1][::-1]
rateClose = np.zeros(qtdDec)
rateOpen = np.zeros(qtdDec)

# Decision curve
for i in range(0,qtdDec):
for j in range(T_Decision[i], -1, -1):
if T_Fechar[i][j] == 2:
rateClose[i] = LayValInfec(u, d, T_Decision[i])[j]
break
```