

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
ESCOLA DE ENGENHARIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

RENATA DOS SANTOS CONSTANT

ESTUDO DOS DUAIS ORIENTADOS DO MODELO MORO

Niterói
2021

RENATA DOS SANTOS CONSTANT

ESTUDO DOS DUAIS ORIENTADOS DO MODELO MORO

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Produção.

Professor Orientador:

D.Sc JOÃO CARLOS CORREIA BAPTISTA SOARES DE MELLO

Niterói
2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C757e Constant, Renata dos Santos
Estudo dos duais orientados do modelo MORO / Renata dos Santos Constant ; João Carlos Correia Baptista Soares de Mello, orientador. Niterói, 2021.
73 f. : il.

Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2021.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/TPP.2021.d.12055618709>

1. Dualidade. 2. MORO. 3. Programação Linear Multiobjetivo. 4. Análise Envoltória de Dados. 5. Produção intelectual. I. Soares de Mello, João Carlos Correia Baptista, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia. III. Título.

CDD -

RENATA DOS SANTOS CONSTANT

ESTUDO DOS DUAIS ORIENTADOS DO MODELO MORO

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Produção. Área de Concentração: Sistemas, Apoio à Decisão e Logística.

Aprovada em 17 de Março de 2021.

BANCA EXAMINADORA

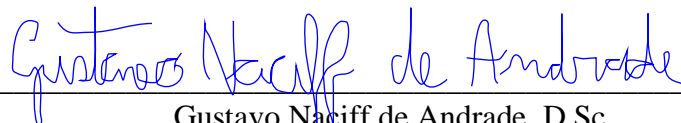


Professor Orientador: João Carlos Correia Baptista Soares de Mello, D.Sc
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof^a. Lidia Angulo Meza, D.Sc
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Marcos Costa Roboredo, D.Sc
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Deivison da Silva Pereira, D.Sc
Universidade Estácio de Sá (UNESA)



Gustavo Naciff de Andrade, D.Sc
Empresa de Pesquisa Energética, Superintendência de Estudos Econômicos e Energéticos
(EPE)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1.	ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (DEA).....	12
2.1.1.	Modelos Clássicos	13
2.1.1.1.	CCR.....	13
2.1.1.2.	BCC.....	16
2.2.	PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJETIVO (PLMO)	19
2.2.1.	Definições Iniciais	19
2.2.2.	Métodos para resolver PLMO	21
2.2.2.1.	Otimização de uma das funções objetivo restringindo as outras	21
2.2.2.2.	Otimização de uma soma ponderada das funções objetivo	22
2.2.2.3.	Distância a um ponto de referência ou ponto ideal.....	22
2.2.3.	Dualidade.....	24
2.3.	MODELO MULTIOBJETIVO PARA OTIMIZAR RAZÕES (MORO)	25
2.3.1.	MORO de Retornos Constantes (CRS)	26
2.3.2.	MORO de Retornos Variáveis (VRS)	27
2.3.3.	MORO com Dominância (D)	27
2.3.4.	MORO com Restrições Relaxadas (R)	28
2.4.	VARIAÇÕES MULTIOBJETIVO EM DEA.....	29
2.4.1.	Multiple Criteria DEA (MCDEA)	29
2.4.2.	Índice Vetorial – Eficiência Não Radial em DEA.....	30
2.4.3.	Directional Distance Function (DDF)	32
3	ABORDAGEM PROPOSTA	33
3.1.	CONTEXTO INICIAL – SOMA PONDERADA	33
3.2.	FORMULAÇÃO PROPOSTA – MODELO HÍBRIDO	43
3.2.1.	Formulação Híbrida MORO-CRS-D-R com Orientação Não Radial a <i>Input</i>	44
3.2.2.	Formulação Híbrida MORO-CRS-D-R com Orientação Não Radial a <i>Output</i> .	47
3.2.1.	Formulação Híbrida MORO-VRS-D-R com Orientação Não Radial a <i>Input</i>	49
3.2.2.	Formulação Híbrida MORO-VRS-D-R com Orientação Não Radial a <i>Output</i> .	53
3.3.	EXEMPLOS NUMÉRICOS	55
3.3.1.	Exemplo Numérico 1 - CRS - um <i>input</i> e um <i>output</i>	55
3.3.2.	Exemplo Numérico 2 - CRS - dois <i>inputs</i> e um <i>output</i>	59

3.3.3. Exemplo Numérico 3 - VRS - um <i>input</i> e um <i>output</i>	60
4 CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E PROPOSTAS FUTURAS.....	66
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação Gráfica Simplificada do Modelo CCR (SOARES DE MELLO <i>et al.</i> , 2005a)	13
Figura 2 - Representação Gráfica Simplificada do Modelo BCC (SOARES DE MELLO <i>et al.</i> , 2005a)	17
Figura 3 - Representação Gráfica de um Problema Multiobjetivo (ANTUNES <i>et al.</i> , 2016)..	20
Figura 4 - Funções de distância usando as métricas L1, L2 e L ∞ (CLÍMACO <i>et al.</i> , 2003) ..	23
Figura 5 - (a) Projeções MORO-VRS sem dominância (b) Projeções MORO-VRS com dominância (SOARES DE MELLO <i>et al.</i> , 2003)	28
Figura 6 - Exemplo Numérico 1 - Representação da Fronteira DEA CCR.....	58
Figura 7 - Exemplo Numérico 2 - Representação da Fronteira DEA BCC.....	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Formulação MORO-CRS-R (<i>inputs</i> e <i>outputs</i>) versus Modelo DEA CCR (<i>input</i>)	35
Tabela 2 - Formulação MORO-CRS-D-R (<i>inputs</i> e <i>outputs</i>) versus Modelo DEA CCR (<i>input</i>)	38
Tabela 3 - Formulação MORO-VRS-D-R (<i>inputs</i> e <i>outputs</i>) versus Modelo DEA BCC (<i>input</i>)	39
Tabela 4 - Conjunto de Dados - Gomes Junior (2010)	40
Tabela 5 - Relação Entre - Formulação MORO-VRS-D-R (<i>inputs</i> e <i>outputs</i>); Modelo DEA BCC e Índice Vetorial	41
Tabela 6 - Formulação híbrida MORO-CRS-D-R com orientação não radial a <i>input</i> versus DEA	45
Tabela 7 - Formulação híbrida MORO-CRS-D-R com orientação não radial a <i>output</i> versus DEA	48
Tabela 8 - Formulação híbrida MORO-VRS-D-R com orientação não radial a <i>input</i> versus DEA	51
Tabela 9 - Formulação híbrida MORO-VRS-D-R com orientação não radial a <i>output</i> versus DEA	54
Tabela 10 - Conjunto de Dados - Lins <i>et al.</i> (2004)	55
Tabela 11 - Exemplo Numérico 1 - DEA CCR (<i>Input</i>)	56
Tabela 12 - Exemplo Numérico 1 - DEA CCR (<i>Output</i>)	56
Tabela 13 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS <i>Input</i> - Radial ($e_j = 1$)	57
Tabela 14 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS <i>Output</i> - Radial ($e_i = 1$)	57
Tabela 15 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS <i>Input</i> - Não radial ($e_j = 5,833$)	58
Tabela 16 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS <i>Output</i> - Não radial ($e_i = 0,8333$)	58
Tabela 17 - Conjunto de Dados - Soares de Mello <i>et al.</i> (2005a)	59
Tabela 18 - Exemplo Numérico 2 - Formulação Híbrida Múltiplos <i>Inputs</i> x DEA Tradicional CCR	60
Tabela 19 - Exemplo Numérico 3 - DEA BCC Orientação a <i>Input</i>	61
Tabela 20 - Exemplo Numérico 3 - DEA BCC Orientação a <i>Output</i>	61
Tabela 21 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS <i>Input</i> - Radial ($e_j = 1$)	63
Tabela 22 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS <i>Output</i> - Radial ($e_i = 1$)	63
Tabela 23 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS <i>Input</i> - Projeção não radial da DMU C na DMU A ($e_j = 2$)	64
Tabela 24 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS <i>Output</i> - Projeção não radial da DMU C na DMU A ($e_i = 0,3333$)	64
Tabela 25 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS <i>Input</i> - Projeção não radial da DMU C fixando <i>output</i> em 15	65
Tabela 26 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS <i>Output</i> - Projeção não radial da DMU C fixando <i>input</i> em 1	65

RESUMO

O modelo MORO (*Multi-objective model for ratio optimization*) desenvolvido por Lins *et al.* (2004) e Quariguasi Frota Neto e Angulo Meza (2007) se apresenta como uma alternativa dentre os métodos de projeção na busca dos alvos e definição dos *benchmarks* nos modelos clássicos de Análise Envoltória de Dados (DEA). Este modelo, por ser um modelo não radial, minimiza as possíveis projeções nas porções ineficientes na fronteira de Pareto, um problema comum visto como uma desvantagem na aplicação de DEA. Ele se diferencia de outros modelos não radiais pela sua abordagem multiobjetivo, onde a incorporação das preferências do decisor é dada a partir das projeções de cada variável (entradas e saídas) como uma função objetivo independente, mas que são analisadas simultaneamente. Ao passo que o modelo traz inovação na busca dos *benchmarks* e dos alvos, ele não fornece duas importantes informações do ponto de vista de DEA, a eficiência e os multiplicadores das variáveis. Esta tese apresenta um método para a construção do dual do modelo MORO com o objetivo de estabelecer as bases iniciais na busca pelo índice de eficiência e para a identificação dos multiplicadores. Para este fim foram propostas as formulações primais e duais orientadas do MORO através da utilização de um modelo híbrido de escalarização que utiliza soma ponderada e restrição das funções objetivo, fornecendo assim os multiplicadores e as eficiências orientadas.

Palavras-chave: Dualidade, MORO, Programação Linear Multiobjetivo, Análise Envoltória de Dados

ABSTRACT

MORO model (Multi-objective model for ratio optimization) developed by Lins *et al.* (2004) and Quariguasi Frota Neto and Angulo Meza (2007) presents itself as an alternative among the projection methods in the search for targets and definition of benchmarks in the classic Data Envelopment Analysis (DEA) models. This model, being a non-radial model, minimizes possible projections in the inefficient portions on pareto frontier, a common problem seen as a disadvantage in DEA application. It differs from other non-radial models by its multiobjective approach, where decision maker's preferences incorporation is given from the projections of each variable (inputs and outputs) as an independent objective function, analyzed simultaneously. While the model brings innovation in the search for benchmarks and targets, it does not provide two important information for DEA point of view, efficiency and multipliers. This thesis presents a method to evaluate MORO model duality with the objective to stablish the initial bases in the search for the efficiency index and for multipliers identification. For this purpose, primary and dual oriented formulations for MORO have been proposed through a hybrid scalarization model that uses weighted sum and restriction of objective functions, thus providing the weights and oriented efficiency index.

Keywords: Duality, MORO, Multiobjective Linear Programming, Data Envelopment Analysis

1 INTRODUÇÃO

A Análise Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* - DEA) desenvolvida por Charnes *et al.* (1978) é um método não paramétrico utilizado para avaliação da eficiência de unidades produtivas (DMU – *Decision Making Unit*) que compõem um sistema qualquer. A partir dos seus insumos e produtos cada DMU escolhe livremente os pesos (multiplicadores) que maximizam a sua eficiência, dessa maneira é possível calcular um índice de eficiência, além também de estabelecer os *benchmarks* e os alvos para as unidades consideradas ineficientes.

Os modelos DEA tradicionais são radiais, sendo possível analisar cada DMU com relação a apenas uma vertente por vez (diminuição dos *inputs* ou aumento dos *outputs*), sendo assim fornecem apenas um único alvo a depender da orientação. Além disso, por ser paramétrico, a projeção na fronteira de eficiência é considerada subjetiva, visto que não há a incorporação de nenhum conceito que prove que a projeção calculada é preferível a alguma outra na fronteira, e não leva em consideração as preferências do decisor.

De acordo com Lins *et al.* (2004) um dos enfoques mais estudados na literatura com relação a determinação de alvos e projeções eficientes são modelos que utilizam estruturas de preferências fornecidas pelo decisor, dentre eles os mais conhecidos são: Modelo de Thanassoulis e Dyson (1992) e o Modelo de Zhu (1996). Ambos os modelos incluem a priori um fator de importância às variáveis em forma de pesos (que serão denominados incrementos), além de serem modelos não radiais, permitindo a variação equiproporcional de *inputs* e *outputs*. Um inconveniente apontado por Lins *et al.* (2004) com relação ao uso destes modelos é a necessidade da escolha dos incrementos por parte do decisor, o que muitas vezes é de difícil mensuração.

Com base nos modelos de estrutura de preferências e no modelo de Golany (1988), Lins *et al.* (2004) e Quariguasi Frota Neto e Angulo Meza (2007) desenvolveram o modelo multiobjetivo para otimizar razões - MORO (*Multiple Objective Ratio Optimization*). O MORO é um modelo multiobjetivo que busca avaliar simultaneamente *inputs* e *outputs*, utilizando as projeções individuais de cada variável a ser analisada como uma função objetivo independente.

O modelo MORO fornece ao decisor os *benchmarks* e os *targets*, auxiliando o mesmo a implementar o seu julgamento de valor na escolha de uma solução mais aderente às suas preferências dentro do conjunto de soluções não dominadas. No entanto, o modelo MORO não

fornece uma informação importante dentro da perspectiva da Análise Envoltória de Dados que é a eficiência; nem os pesos relacionados aos *inputs* e *outputs* na busca da melhor eficiência. Gomes Junior (2010) e Gomes Junior *et al.* (2013, 2016) desenvolveram o índice de eficiência vetorial, baseado nos conceitos vetoriais da eficiência de Soares de Mello *et al.* (2005b), que possibilita calcular a eficiência vetorial não radial, permitindo o ranking baseado em DEA segundo as melhores projeções de cada DMU na fronteira. Todavia o índice vetorial foi desenvolvido estritamente para modelos de retornos variáveis, não sendo comprovada sua possível utilização em modelos de retornos constantes.

Esta tese contribui para o estado da arte dos modelos que relacionam DEA e multiobjetivo para o cálculo de eficiência e estabelecimento de métodos alternativos *benchmarks*. Nesse sentido, apresenta um método para a construção do dual do modelo MORO com o objetivo de definir as bases iniciais na busca pelo índice de eficiência e a identificação dos multiplicadores, pois entende-se que um modelo só está amplamente estudado quando são verificadas suas formulações primal e dual.

Para este fim foram propostas as formulações primais e duais através de um modelo híbrido de escalarização, que utiliza uma combinação entre soma ponderada e restrição das funções objetivo. O modelo desenvolvido fornece as eficiências não radiais orientadas projetadas e os multiplicadores, não fornecendo a eficiência global da DMU. Nesse sentido são apresentados os modelos mono objetivo primal e dual para orientação não radial a *input* e a *output* (separadamente) para o MORO clássico e considerando suas variações: com dominância e de restrições relaxadas.

A fim de evitar confusões com relação à terminologia, o termo multiplicador será reservado para os coeficientes dos *inputs* e *outputs* em DEA e o termo peso, quando necessário, irá definir os coeficientes da função objetivo de um Problema Linear Multiobjetivo (PLMO), conforme definido por Soares de Mello *et al.* (2009).

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo são apresentados o tema e o objetivo do trabalho. No segundo capítulo é realizada a revisão bibliográfica a respeito dos principais conceitos e modelos que serão abordados ao longo do trabalho, além dos trabalhos referência para o desenvolvimento da pesquisa. No terceiro capítulo é apresentada a abordagem proposta para o desenvolvimento das formulações, as formulações primal e dual, a interpretação das variáveis criadas, sua relação com o conceito de eficiência e o comparativo com os modelo DEA tradicionais. E por fim no quarto capítulo são apresentadas as conclusões, as limitações encontradas e as propostas para trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos relacionados à Análise Envoltória de Dados (DEA), Programação Linear Multiobjetivo (PLMO), o modelo MORO-*Multi-objective model for ratio optimization* e modelos que utilizam variações de DEA em PLMO.

2.1. ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (DEA)

A Análise Envoltória de Dados é uma metodologia desenvolvida por Charnes *et al.* (1978) que utiliza programação linear para avaliar a eficiência relativa das unidades tomadoras de decisão pela análise comparativa entre seus insumos (*inputs*) e sua produção (*outputs*). A modelagem DEA é utilizada para identificar as DMUs eficientes, calcular e localizar a ineficiência, além de estimar a função de produção linear por partes que fornece o *benchmark* (referência) para as DMUs ineficientes. Além disso, os modelos DEA também permitem determinar a eficiência relativa das DMUs, analisando separadamente cada DMU com todas as outras que compõem o grupo a ser estudado. (SOARES DE MELLO *et al.*, 2005a)

Há três maneiras de tornar uma DMU ineficiente em uma eficiente. A primeira é a utilização de modelos orientados para a minimização de recursos, neste caso reduz-se os *inputs* mantendo-se constantes os *outputs*, até que a DMU analisada atinja a fronteira de eficiência. A segunda é a utilização de modelos orientados para a maximização dos produtos, neste caso maximizam-se os *outputs* e o que se mantém constante são os *inputs*. A terceira é a utilização de métodos não radiais que alteram o *input* ou o *output* de maneira não equiproporcional ou simultaneamente (SOARES DE MELLO *et al.*, 2005a).

Em DEA cada DMU tem a liberdade de escolher os multiplicadores das variáveis que geram a melhor eficiência para si. Além disso, os modelos clássicos fornecem para cada DMU apenas um alvo radial, conforme a orientação do modelo, que pode ser real (uma DMU eficiente) ou virtual (combinação linear de DMUs eficientes).

Apesar do grau de liberdade conferido às DMUs na modelagem, a projeção calculada é considerada por alguns autores como subjetiva já que não leva em consideração na formulação nenhum conceito que prove que esta projeção é preferível a qualquer outra

na fronteira, de acordo com as preferências do decisor, e também porque pode fornecer alvos que estejam na parte fracamente eficiente da fronteira (GOMES JUNIOR, 2010).

2.1.1. Modelos Clássicos

Existem dois modelos clássicos utilizados para o cálculo dos índices de eficiência em DEA; são eles: o Modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes) e o Modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper).

2.1.1.1. CCR

Este modelo foi desenvolvido por Charnes *et al.* (1978) e também é conhecido como CRS (*Constant Returns to Scale*), que em português significa Retornos Constantes de Escala. Este modelo é caracterizado pela variação equiproporcional entre *outputs* e *inputs*, ou seja, qualquer variação nos recursos resulta em uma variação proporcional nos produtos. Dessa maneira, é importante ressaltar que o modelo CCR é invariante à orientação, ou seja, o valor da eficiência é o mesmo nas duas orientações.

A Figura 1 ilustra o Modelo CCR orientado a *input*, onde o eixo x representa o recurso e o eixo y representa o produto.

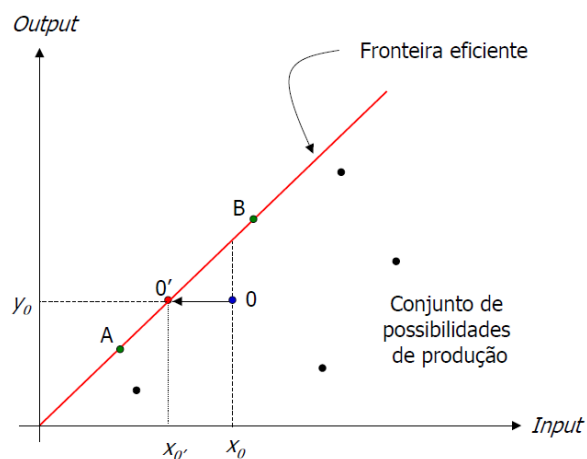


Figura 1 - Representação Gráfica Simplificada do Modelo CCR (SOARES DE MELLO *et al.*, 2005a)

Cada DMU está representada no gráfico por um ponto e a fronteira de produção é formada por uma linha reta que parte da origem e passa pelo conjunto de DMUs eficientes. Neste modelo a eficiência é calculada pela maximização da divisão entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs*, com a restrição de que este valor não seja maior que a unidade. Desta maneira, a formulação fracionária para o Modelo CCR é apresentada em (2.1):

$$\begin{aligned} \text{Max } \theta &= \left(\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jo}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{io}} \right) \\ \text{Sujeito a} & \qquad \qquad \qquad (2.1) \\ \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} &\leq 1, \forall k \\ v_i, u_j &\geq 0, \forall i, j \end{aligned}$$

Onde θ é a eficiência da DMU observada (DMU_o); v_i e u_j são as variáveis do modelo e representam os multiplicadores dos *inputs* i , $i=1, \dots, r$, e *outputs* j , $j=1, \dots, s$ respectivamente; x_{ik} e y_{jk} são constantes que representam os *inputs* i e *outputs* j da DMU_k, $k=1, \dots, n$; x_{io} e y_{jo} são os *inputs* i e *outputs* j da DMU_o.

O modelo fracionário apresentado em (2.1) pode ser transformado em um programa de programação linear (PPL), obrigando que o denominador da função objetivo seja igual a uma constante, geralmente igual à unidade. A formulação do Modelo dos Multiplicadores orientado a *input* é apresentada em (2.2):

$$\begin{aligned} \text{Max } \theta &= \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} \\ \text{Sujeito a} & \qquad \qquad \qquad (2.2) \\ \sum_{i=1}^r v_i x_{io} &= 1 \\ \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} &\leq 0, \forall k \\ v_i, u_j &\geq 0, \forall i, j \end{aligned}$$

Apesar da restrição de normalização apresentada em (2.2) ser a mais usual para simplificar o modelo fracionário original, essa restrição pode ser substituída por outras conforme demonstrado por Bana e Costa *et al.* (2016).

A este modelo se dá o nome de Modelo dos Multiplicadores, uma vez que a partir dele é possível determinar os coeficientes, denominados multiplicadores, atribuídos pelas DMUs aos seus *inputs* e *outputs*. Um inconveniente deste modelo é a possibilidade das DMUs atribuírem coeficientes nulos aos multiplicadores, o que acarretaria em distorções na análise dos resultados. Além disso, para as DMUs extremo eficientes é possível que sejam encontrados múltiplos multiplicadores que forneçam a mesma solução ótima, dificultando também a análise do problema.

Sendo o Modelo dos Multiplicadores o primal é possível desenvolver o seu dual, conhecido como Modelo do Envelope. Ambos os modelos apresentarão o mesmo valor para a função objetivo de acordo com o teorema da dualidade forte (BREGALDA e BORNSTEIN, 1981).

A formulação do Modelo do Envelope orientado a *input* é apresentada em (2.3):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{Sujeito a} \tag{2.3} \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{i_0}, \quad i = 1, \dots, r \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{j_0}, \quad j = 1, \dots, s \\
 & \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \\
 & \theta \text{ irrestrita}
 \end{aligned}$$

No Modelo do Envelope a eficiência é dada por θ , que é multiplicada por todos os *inputs* e λ_k é a contribuição da DMU_k na construção do alvo da DMU_o em avaliação. Os *benchmarks* são identificados a partir dos valores que cada DMU atribui aos valores de λ_k . É possível que esse *benchmark* seja real, uma DMU específica, ou que seja virtual, um ponto na fronteira entre duas DMUs existentes sendo refletindo numa combinação linear.

A formulação do Modelo dos Multiplicadores orientado a *output* é apresentada em (2.4):

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \theta &= \sum_{i=1}^r v_i x_{io} \\
 \text{Sujeito a} & \\
 \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} &= 1 \\
 \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} &\leq 0, \forall k \\
 v_i, u_j &\geq 0, \forall i, j
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

A formulação (2.5) apresenta o seu dual, o Modelo do Envelope orientado a *output*:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \theta & \\
 \text{Sujeito a} & \\
 x_{io} - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, r \\
 -\theta y_{jo} + \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} &\geq 0, \quad j = 1, \dots, s \\
 \lambda_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, n \\
 \theta &\text{ irrestrita}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Na orientação a *output* a função objetivo θ sempre assumiria valores maiores que a unidade, sendo assim a eficiência nos modelos orientados a *output* é dada por $\frac{1}{\theta}$.

2.1.1.2. BCC

Este modelo foi desenvolvido por Banker *et al.* (1984), e é também conhecido como VRS (*Variable Returns to Scale*), que em português significa

Retornos Variáveis de Escala. O BCC é caracterizado por ganhos ou perdas variáveis na relação *input/output*. Este modelo substitui o axioma da proporcionalidade pelo da convexidade obrigando que a fronteira eficiente seja convexa. A Figura 2 ilustra o Modelo BCC orientado a *input*, onde o eixo x representa o recurso e o eixo y representa o produto.

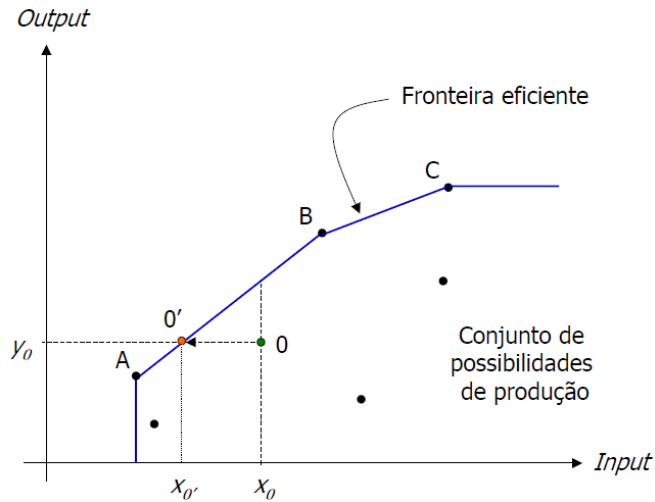


Figura 2 - Representação Gráfica Simplificada do Modelo BCC (SOARES DE MELLO *et al.*, 2005a)

Na Figura 2 cada DMU é representada por um ponto e a fronteira eficiente é a linha convexa que liga os pontos.

A formulação do Modelo dos Multiplicadores orientado a *input* é apresentada em (2.6):

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \theta &= \sum_{j=1}^s u_j y_{j0} + u_* \\
 \text{Sujeito a} & \\
 \sum_{i=1}^r v_i x_{i0} &= 1 \\
 - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} + u_* &\leq 0, \forall k \\
 v_i, u_j &\geq 0, u_* \in \Re
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Onde θ é a eficiência da DMU_o em análise; v_i e u_j são os multiplicadores dos *inputs* $i, i=1, \dots, r$, e *outputs* $j, j=1, \dots, s$ respectivamente; x_{ik} e y_{jk} são os *inputs* i e *outputs* j da DMU_k, $k=1, \dots, n$; x_{io} e y_{jo} são os *inputs* i e *outputs* j da DMU_o; u_* é uma variável dual associada à condição de convexidade da fronteira e é interpretada como fator de escala. Para retornos variáveis mantém-se a característica que ambos os modelos, primal e dual, apresentarão o mesmo valor para a função objetivo.

O Modelo do Envelope com orientação a *input* é apresentado em (2.7):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{Sujeito a} \tag{2.7} \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, r \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\
 & \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Os Modelos dos Multiplicadores e do Envelope com orientação a *outputs* são apresentados, respectivamente em (2.8) e (2.9):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta = \sum_{i=1}^r v_i x_{io} + v_* \\
 & \text{Sujeito a} \tag{2.8} \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} = 1 \\
 & - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - v_* \leq 0, \forall k \\
 & v_i, u_j \geq 0, v_* \in \mathfrak{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \theta \\
& \text{Sujeito a} \tag{2.9} \\
& \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, r \\
& \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq \theta y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s \\
& \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\
& \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

2.2. PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTI OBJETIVO (PLMO)

Em modelos de pesquisa operacional clássicos as preferências do decisor são modeladas a priori, dessa maneira todos os julgamentos são incorporados em uma única função objetivo, onde se busca a solução ótima para o problema. No entanto essas modelagens podem não ser as mais adequadas para analisar determinados problemas do mundo real. Nesse sentido a utilização de problemas multiobjetivo apresenta uma grande vantagem quando comparado aos problemas mono objetivo pois permite avaliar diferentes facetas de um mesmo problema (CLÍMACO *et al.*, 2003; ANTUNES *et al.*, 2016).

2.2.1. Definições Iniciais

Um problema de programação linear multiobjetivo pode ser formulado conforme (2.10) a seguir:

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \\
& Z_1 = Z_1(x) = \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \\
& \dots \\
& Z_p = Z_p(x) = \sum_{j=1}^n c_{pj} x_j
\end{aligned}$$

Sujeito a (2.10)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Onde p é a quantidade de funções objetivo, n a quantidade de variáveis de decisão, m a quantidade de restrições do modelo, C é a matriz de coeficientes das funções objetivo onde as linhas são os vetores c_k da função objetivo Z_k , com $k=1, \dots, p$; e b é o vetor dos termos independentes.

Num problema multiobjetivo a solução ideal é aquela que otimiza todas as funções objetivo de um determinado problema. No entanto, esta solução, também chamada de utópica, muitas vezes não está presente na região viável. Em contrapartida, a solução anti-ideal é aquela que apresenta o pior valor para cada função objetivo analisada. Soluções ideais e anti-ideais são visões opostas que levam em consideração os extremos de cada função objetivo dentro de um mesmo conjunto de soluções não dominadas (CLÍMACO *et al.*, 2003; ANTUNES *et al.*, 2016).

A Figura 3 apresenta uma representação gráfica de um conjunto de soluções de um problema multiobjetivo de maximização das funções objetivo.

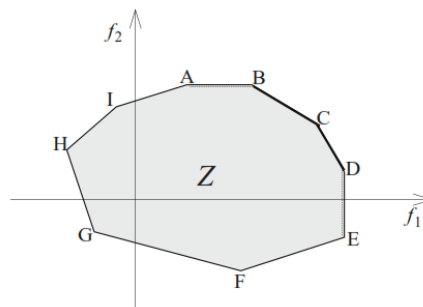


Figura 3 - Representação Gráfica de um Problema Multiobjetivo (ANTUNES *et al.*, 2016)

Através da Figura 3, é possível verificar que os segmentos entre os pontos [A,B] e [E,D] indicam soluções fracamente não dominadas, enquanto os segmentos entre [B,C] e [C,D] são rigorosamente não dominadas.

O processo de otimização em um problema mono objetivo resulta em uma solução ótima ou num conjunto de soluções ótimas com um mesmo valor. No entanto

nos problemas multiobjetivo a otimização resulta num conjunto de soluções não dominadas. As soluções fortemente não dominadas (estritamente eficientes) são soluções que não são comparáveis entre si, ou seja, não existe uma solução que seja melhor ou prevaleça à outra solução encontrada. Já as soluções fracamente eficientes, se encontram na região fracamente eficiente da fronteira, indicando que há possibilidade de melhora em algum objetivo.

Além disso, as soluções não dominadas também podem ser definidas como pareto ótimas se não existe uma outra solução viável que apresente melhora em uma função objetivo sem piorar pelo menos outra função objetivo (ANTUNES *et al.*, 2016).

Dessa maneira, na formulação multiobjetivo é necessário escolher, dentre as soluções não dominadas, aquela que assume valores satisfatórios para o decisor nos diversos objetivos analisados de modo que seja estabelecida como solução final.

2.2.2. Métodos para resolver PLMO

Dentre os métodos existentes para determinação de soluções em problemas de programação linear multiobjetivo destaca-se o processo de escalarização, que significa transformar as diversas funções objetivo em uma única função substituta, chamada de função escalarizante (LOBIANCO e ANGULO MEZA, 2007).

Os três tipos de funções escalarizantes serão descritos a seguir (STEUER, 1986; ANTUNES *et al.*, 2016; CLÍMACO *et al.*, 2003).

2.2.2.1. Otimização de uma das funções objetivo restringindo as outras

Neste método uma das funções objetivo é definida como a função objetivo substituta, a ser escolhida a critério do decisor, enquanto as outras funções objetivo se tornam restrições do problema, assumindo valores mínimos definidos também pelo decisor.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } f_i(\underline{x}) \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & f_k(\underline{x}) \geq e_k, \quad k = 1, \dots, p; k \neq i \\
 & \underline{x} \in X
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Onde \underline{x} é o vetor de variáveis de decisão, p é a quantidade de funções objetivo do problema. O termo e_k é o limite inferior (para o caso da função de maximização, de maneira que se o problema fosse de minimização seria superior); a partir das variações do limite e_k têm-se o conjunto de soluções eficientes.

Clímaco *et al.* (2003) destacam que a escolha dos limites não é uma tarefa simples para o decisor, e além disso, a função escolhida a ser fixada pode tornar o modelo pouco flexível e por consequência os resultados obtidos poderão ser muito dependentes da função escolhida e os valores definidos para e_k .

2.2.2.2. *Otimização de uma soma ponderada das funções objetivo*

Outro método que pode ser utilizado é a soma ponderada das funções objetivo, que pode ser apresentado como formulação abaixo:

$$\begin{aligned} &Max \lambda_1 f_1(\underline{x}) + \lambda_2 f_2(\underline{x}) + \dots + \lambda_p f_p(\underline{x}) \\ &Sujeito a && (2.12) \\ &\underline{x} \in X \\ &\lambda \in \Lambda, \text{ onde } \Lambda = \left\{ \lambda: \lambda \in \mathfrak{R}^p, \sum \lambda_k = 1, \lambda_k > 0, k = 1, 2, \dots, p \right\} \end{aligned}$$

Neste método cada função objetivo recebe um peso λ_p de tal maneira que a soma dos pesos seja igual a unidade. Diferentes conjuntos de pesos podem levar às mesmas soluções não dominadas, de maneira que existe uma região ou intervalo (denominado região de indiferença) em que λ_p pode variar, de forma que a solução continua eficiente (KORNBLUTH, 1974).

2.2.2.3. *Distância a um ponto de referência ou ponto ideal*

Este método busca uma solução viável que esteja o mais perto possível (a partir de uma determinada métrica a ser escolhida) dos objetivos do decisor, da solução ideal ou do ponto alvo escolhido.

Uma métrica mede a distância entre dois pontos tal que, dados dois pontos em \mathfrak{R}^n a cada par de vetores \underline{z}^1 e \underline{z}^2 , temos que um escalar $\|\underline{z}^1 - \underline{z}^2\| \in \mathfrak{R}^n$.

Desta família de métricas, pode-se destacar as métricas L_1 , L_2 e L_∞ , que correspondem respectivamente à “city block” ou “manhatan” – esta distância representa o somatório das distâncias em todas as componentes; distância euclidiana e distância de Tchebycheff – é considerada como distância a maior diferença entre as componentes dos vetores (ANTUNES *et al.*, 2016; CLÍMACO *et al.*, 2003).

Na Figura 4 a seguir, os pontos z_1 , z_2 e z_∞ são os pontos que minimizam suas distâncias até o ponto z^* utilizando respectivamente as métricas L_1 , L_2 e L_∞ .

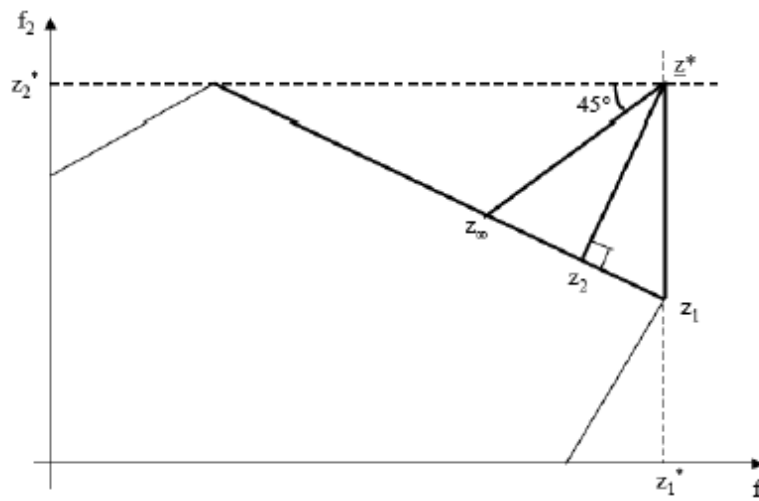


Figura 4 - Funções de distância usando as métricas L_1 , L_2 e L_∞ (CLÍMACO *et al.*, 2003)

Este método de solução é a base de vários modelos interativos de resolução de problemas multiobjetivo, como o *Step Method* - STEM (BENAYOUN *et al.*, 1971); o TRIMAP (CLÍMACO e ANTUNES, 1987, 1989); Pareto Race (KORHONEN e WALLENUS, 1988) entre outros.

De acordo com Lobianco e Angulo Meza (2007) o método da solução pela soma ponderada encontra as soluções básicas não dominadas, o que corresponde em DEA a definir como alvo as DMUs que limitam a região viável. Já os outros métodos percorrem toda a fronteira não dominada, o que equivale em DEA a percorrer toda a região de projeção, necessariamente pareto eficiente. Na primeira situação, encontra-se um conjunto finito de possíveis alvos, já na segunda encontra-se uma infinidade sendo necessária a escolha do decisor (CLÍMACO *et al.*, 2003).

2.2.3. Dualidade

Dualidade pode ser definida como a possibilidade da existência de um modelo simétrico (dual) para um modelo original (primal), que conduz à mesma solução. Problemas duais resultam da interpretação de uma mesma situação ou problema real, sob perspectivas diferentes.

O desenvolvimento da teoria da dualidade em Programação Linear foi originado no estudo de Von Neumann sobre Teoria dos Jogos (KUHN e TUCKER, 1958). Nesse sentido, se em um jogo de ganhos de soma zero estão dois jogadores, A e B, o jogador A por exemplo tem como objetivo maximizar o seu ganho. Se analisado sobre a perspectiva de B, essa mesma situação pode ser interpretada como se A tivesse como objetivo minimizar o ganho de B.

Gale *et al.* (1951) desenvolveram os primeiros estudos relacionando dualidade e otimização vetorial, estabelecendo os primeiros teoremas de dualidades em PLMO. Kornbluth (1974), Rödder (1977) e Isermann (1978) também contribuíram para o desenvolvimento de outras teorias relacionadas a dualidade. Ivanov e Nehse (1985) correlacionaram os conceitos de dualidade na otimização linear multiobjetivo.

Chaves *et al.* (2016) destaca dois trabalhos de grande contribuição para o estudo da dualidade em problemas multiobjetivo: Kornbluth (1974) e Hannan (1978). No primeiro é definido o conceito de regiões de indiferença para os pesos das funções objetivo, que permitem identificar os múltiplos pesos correspondentes às soluções não dominadas. Já no segundo é apresentada uma nova forma de construir o dual de um PLMO através de um problema linear multiparamétrico. A principal diferença entre as duas propostas, é que em Kornbluth (1974), λ - os pesos das funções objetivo é definido a priori pelo decisor, e em Hannan (1978) é calculado um vetor de λ .

Assim como na programação linear, o par de problemas primal e dual multiobjetivo são balizados pelo mesmo conjunto de parâmetros, desta maneira, se um problema tem solução, então o outro também terá, e as duas soluções são associadas de maneira que as funções objetivo multidimensionais possuem o mesmo valor (ISERMANN, 1978; ZELENY, 1982).

O problema dual é construído direta e sistematicamente através do seu problema original – primal, seguindo as seguintes propriedades:

- se a função objetivo do primal é de minimização, então a função objetivo do dual é de maximização;

- os termos independentes das restrições do primal são coeficientes da função objetivo do dual;
- os coeficientes da função objetivo do primal são os termos independentes das restrições do dual;
- o número de restrições do primal é igual ao número de variáveis do dual;
- o número de variáveis do primal é igual ao número de restrições do dual;
- a matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do primal;

Pode-se optar por solucionar um determinado problema através do primal ou do dual, a escolha deve levar em consideração o esforço computacional, número de restrições, quantidade de variáveis, etc.

Uma importante característica dos modelos clássicos de DEA é a possibilidade de análise dos seus duais, que permitem fazer avaliações da eficiência através de interpretações econômicas. Nos modelos clássicos DEA de retornos constantes o modelo do envelope traz uma interpretação geométrica e micro-econômica imediata relacionada a λ , indicando se uma DMU é ou não é *benchmark* para a DMU em análise, onde quanto maior o valor de λ , maior importância tem para a DMU ineficiente. Em contrapartida nos modelos de retornos variáveis o modelo dos multiplicadores é que traz uma interpretação geométrica importante relacionada aos fatores de escala. Através da construção dos hiperplanos suporte é possível identificar se uma DMU está sendo projetada numa região de retorno crescente, decrescente ou constante de escala (SOARES DE MELLO *et al.*, 2005a).

2.3. MODELO MULTIOBJETIVO PARA OTIMIZAR RAZÕES (MORO)

A análise envoltória de dados foi desenvolvida para determinar a eficiência de unidades produtivas, no entanto, além disso, os modelos também fornecem informações úteis para as unidades ineficientes, como por exemplo o nível de entrada ou saída que ela deve alcançar para se tornar eficiente. Nos modelos clássicos de DEA, o alvo é único, entretanto esse alvo pode não ser o mais interessante gerencialmente.

Baseado nos modelos de Thanassoulis e Dyson (1992) e Zhu (1996), Lins *et al.* (2004) e Quariguasi Frota Neto e Angulo Meza (2007) desenvolveram o modelo multiobjetivo onde cada função objetivo representa uma saída que deve ser aumentada, ou uma entrada que deve ser diminuída, de maneira separada e independente, no entanto

calculadas ao mesmo tempo dentro da programação matemática, de maneira a obter o alvo para a DMU observada. É importante citar que o MORO não leva em consideração a orientação na sua formulação original.

Este modelo permite o cálculo de alvos alternativos não radiais e apresenta uma nova maneira de incorporar a estrutura de preferência do decisor através da determinação de regiões de indiferença para cada solução eficiente ou não-dominada.

2.3.1. MORO de Retornos Constantes (CRS)

O modelo apresentado a seguir é denominado MORO-CRS (CRS - *Constants Returns to Scale*) pois otimiza de maneira proporcional as entradas e saídas sob retornos constantes de escala.

A formulação do modelo MORO-CRS é apresentada a seguir (LINS *et al.*, 2004; QUARIGUASI FROTA NETO e ANGULO MEZA; 2007):

$$Max \phi_1 \tag{2.13}$$

...

$$Max \phi_s$$

$$Min \varphi_1 \tag{2.14}$$

...

$$Min \varphi_r$$

Sujeito a

$$\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k = \phi_j y_{j0}, \forall j = 1, \dots, s \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k = \varphi_i x_{i0}, \forall i = 1, \dots, r \tag{2.16}$$

$$\phi_j, \varphi_i, \lambda_k \geq 0$$

Este modelo permite que cada variável seja calculada de forma independente e não radial, onde ϕ_j é o fator de variação para o *output* j , φ_i é o fator de variação para o *input* i , o conjunto de funções (2.13) e (2.14) representam, respectivamente, as funções objetivo relacionadas à maximização do incremento dos *outputs* e de minimização do

decrécimo dos *inputs*. As restrições (2.15) e (2.16) garantem que sejam encontradas projeções na fronteira de eficiência.

As variáveis de decisão do modelo são $\phi_j, \varphi_i, \lambda_k$. Os alvos são definidos pelas formulações (2.17) e (2.18):

$$y_{jo}^* = \phi_j^* y_{jo} \forall j \quad (2.17)$$

$$x_{io}^* = \varphi_i^* x_{io} \forall i \quad (2.18)$$

O valor final das variáveis ϕ_j^* e φ_i^* depende da escolha do decisor com relação às soluções não dominadas encontradas. Quando a solução ótima retorna $\phi_j^* = \varphi_i^* = 1 \forall j, i$; então a DMU se encontra na região pareto eficiente (não dominada).

Como resultado dos modelos MORO é possível obter todas as soluções não dominadas (neste caso projeções eficientes) para a DMU observada. Isto se apresenta como uma vantagem sobre os modelos mono objetivo onde para cada novo conjunto de pesos deve ser rodado um novo modelo. A escolha de uma das soluções não dominadas como alvo da DMU em análise representa uma forma de incorporação dos julgamentos de valor ou estrutura de preferências do decisor.

2.3.2. MORO de Retornos Variáveis (VRS)

Analogamente como acontece para os modelos DEA, o modelo MORO-VRS considera retornos variáveis de escala, e para isso é acrescentada à formulação MORO-CRS a restrição de convexidade (2.19), conforme apresentado a seguir (LINS *et al.*, 2004 ; QUARIGUASI FROTA NETO e ANGULO MEZA, 2007):

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad (2.19)$$

2.3.3. MORO com Dominância (D)

Os modelos apresentados anteriormente não impõem nenhuma restrição às variáveis de incorporação de preferências ϕ_j e φ_i . Na vida real, para alguns casos é possível que seja desejado o aumento de um *input* ou o decréscimo de um *output*, em

contrapartida para os casos em que isso não seja requerido, pode-se adicionar restrições de dominância. O modelo com dominância, denominado MORO-D inclui duas restrições (2.20) e (2.21) conforme apresentado a seguir (LINS *et al.*, 2004; QUARIGUASI FROTA NETO e ANGULO MEZA, 2007):

$$\phi_j \geq 1 \quad (2.20)$$

$$\varphi_i \leq 1 \quad (2.21)$$

As restrições (2.20) e (2.21) garantem que os *outputs* mantenham o seu nível ou aumentem, e os *inputs* mantenham o seu nível ou diminuam, dessa maneira garantindo que os alvos encontrados dominem a DMU em análise. A Figura 5 apresenta os exemplos de projeção para os modelos sem dominância (a) e com dominância (b)

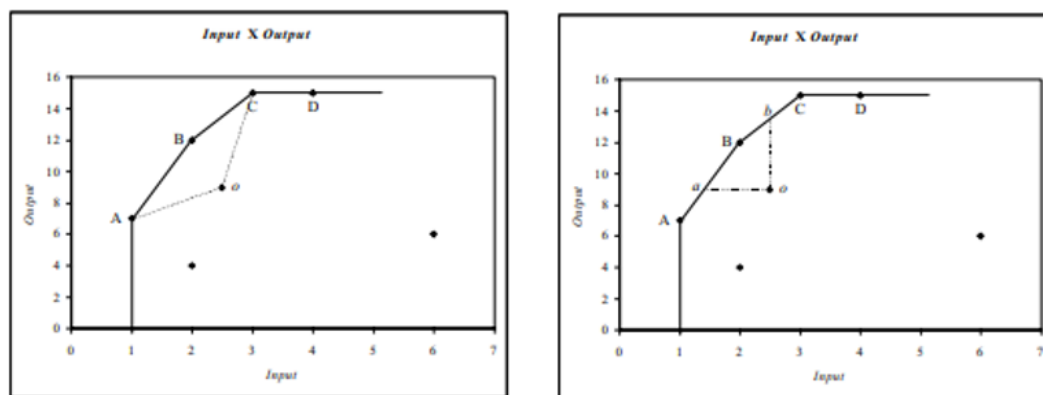


Figura 5 - (a) Projeções MORO-VRS sem dominância (b) Projeções MORO-VRS com dominância (SOARES DE MELLO *et al.*, 2003)

2.3.4. MORO com Restrições Relaxadas (R)

As restrições dos modelos MORO são semelhantes às restrições já apresentadas para o modelo DEA envelope tradicional, no entanto enquanto DEA trabalha com restrições de desigualdade os modelos MORO utiliza restrições de igualdade. O uso das restrições de igualdade garante que os alvos encontrados no MORO sejam fortemente eficientes, no entanto essa igualdade também gera alguns inconvenientes no que tange aos erros numéricos devido à quantidade de algarismos, dízimas, entre outros; que tornam algumas análises desinteressantes, como ponto ideal e ponto de nadir.

Gomes Junior *et al.* (2010) demonstra que os resultados dos modelos MORO-D e o modelo com as restrições relaxadas, denominado MORO-D-R são iguais quando a DMU ineficiente é projetada na região fortemente eficiente. Podem ser destacadas as seguintes vantagens no uso do MORO-D-R como, diminuir o trabalho computacional, evitar inviabilidade no modelo, e o fato dele possuir uma região viável maior que o modelo MORO-D.

2.4. VARIAÇÕES MULTIOBJETIVO EM DEA

Na literatura a programação multiobjetivo em DEA é aplicada na avaliação de diversos segmentos como transporte, educação, energia elétrica, aviação, ambiental, entre outros. Nesta seção serão apresentados o MCDEA – *Multiple Criteria* DEA, o Índice Vetorial e o DDF – *Directional Distance Function*; formulações que se destacam no uso de PLMO em conjunto com DEA.

2.4.1. *Multiple Criteria* DEA (MCDEA)

O MCDEA desenvolvido por Li e Reeves (1999), acrescenta duas funções objetivo ao problema DEA tradicional, a função minisoma ($Min \sum_{k=1}^n d_k$) e a função minimax ($Min M$), com o objetivo de aumentar o poder discriminatório das DMUs e permitir uma distribuição mais homogênea dos multiplicadores para os modelos CCR. Esse modelo tri-objetivo se apresenta como mais restritivo que o DEA clássico, no entanto ele não fornece o ranking, nem os *benchmarks* e alvos para as DMUs ineficientes.

A formulação (2.22) a seguir apresenta o modelo MCDEA ajustado por Soares de Mello *et al.* (2009):

$$Min d_o$$

$$Min M$$

$$Min \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k$$

Sujeito a

(2.22)

$$\sum_{i=1}^r v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + d_k = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$M - d_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad \forall j, i$$

Chaves *et al.* (2016) propuseram o primeiro estudo da dualidade do MCDEA propondo dois modelos parciais, que utilizam a função de eficiência ($Min d_o$) como a função a ser otimizada no modelo mono objetivo, transformando as outras em restrição, em separado, gerando dois modelos bi-objetivo. As funções objetivo são transformadas em restrição a partir do cálculo dos seus valores ótimos, que devem ser calculados a priori. Ao final do estudo de Chaves *et al.* (2016), como cada formulação bi-objetivo pode resultar em *benchmarks* diferentes, só é considerado efetivamente *benchmark* quando o mesmo está presente nas duas formulações.

Diferente do modelo anterior, Pereira e Soares de Mello (2021) utilizam como escalarizante a soma ponderada de todas as funções objetivo originais para o desenvolvimento do dual. A ponderação é feita em conjunto com o TRIMAP, através do cálculo do centroide das regiões de indiferença e dos extremos apresentados pelo software. A formulação proposta aplica efetivamente as características originais do modelo Li e Reeves (1999), e traz a luz o conceito de *benchmark* forte quando a referência é verificada em todos os pontos principais analisados (extremos ou centroide) e *benchmark* fraco quando é considerado na maioria dos pontos avaliados.

2.4.2. Índice Vetorial – Eficiência Não Radial em DEA

O índice vetorial foi desenvolvido como uma solução para o cálculo da eficiência para modelos não radiais, considerando propriedades vetoriais. O modelo foi desenvolvido para retornos variáveis, já que em retornos constantes as eficiências são as mesmas independente da região de projeção.

Os modelos para determinação de alvos radiais dependem da orientação do modelo, e em alguns casos podem gerar projeções em regiões fracamente eficientes da fronteira. Nesse sentido, foram desenvolvidos os modelos para determinação de alvos não radiais, no entanto esses modelos não fornecem o índice de eficiência que permite o ranqueamento das DMUs.

Alguns índices de eficiência foram desenvolvidos, no entanto muitos deles apresentam inconvenientes, conforme pode ser verificado em Gomes Junior (2010). Dessa maneira, Gomes Junior (2010) resolve as limitações encontradas por Soares de Mello *et al.* (2005b) e desenvolve um índice de eficiência não radial baseado em propriedades vetoriais chamado índice vetorial (IV). O índice vetorial para o caso multidimensional para um problema com m *inputs* e s *outputs*, considerando como alvo o ponto P de coordenadas (x_E, y_E) é apresentado na formulação (2.23):

$$IV = 1 - \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - x_{E_i}}{x_i} \right)^2 + \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \left(\frac{y_{E_j} - y_j}{y_{E_j}} \right)^2} \quad (2.23)$$

O IV possui um limite superior igual à unidade, no entanto não apresenta um limite inferior definido, eventualmente permitindo que surjam eficiências negativas. De acordo com Gomes Junior (2010) e Gomes Junior *et al.* (2013) este limite não se justifica, pois os modelos BCC admitem implicitamente eficiências negativas. Conforme Soares de Mello *et al.* (2002) e Wu *et al.* (2009) como uma das variáveis é livre, não há impedimento para que gerem eficiências negativas, já que os números negativos são evidentemente menores que a unidade.

Além das eficiências negativas inerentes do modelo de retornos variáveis, um inconveniente do índice vetorial é a sua não comprovação de utilização para modelos com retornos constantes de escala.

Constant e Soares de Mello (2017) aplicam o índice vetorial nas distribuidoras de energia elétrica brasileiras ineficientes, de maneira a identificar os *benchmarks* e alvos que fornecem a maior eficiência para a DMU analisada. Constant *et al.* (2017) também aplicam o índice vetorial para avaliação dos metrôes em todo o mundo.

2.4.3. Directional Distance Function (DDF)

A abordagem DDF foi introduzida por Chung *et al.* (1997) para trabalhar com as situações onde são avaliados simultaneamente *outputs* (ou *inputs*) desejáveis e indesejáveis. A medida de eficiência conforme DEA tradicional considera a maximização dos *outputs* quando considerada uma quantidade restrita de *inputs*. Já a abordagem DDF considera aumentar os *outputs* desejáveis e diminuir os *outputs* indesejáveis simultaneamente através de um dado vetor de direção. (CHUNG *et al.*, 1997)

De acordo com Färe e Grosskopf (2000) a utilização do DDF é mais apropriada que DEA quando se deseja avaliar simultaneamente variáveis desejáveis e indesejáveis. Enquanto a abordagem DEA orientada aos *outputs* é baseada no pressuposto da disponibilidade forte, permitindo que um produto seja produzido sem nenhum custo, a abordagem DDF assume a disponibilidade fraca para as saídas indesejáveis, pois neste caso imputa-se um custo associado à esse *output*. (FÄRE e GROSSKOPF, 2005)

Para medir a ineficiência de uma DMU com relação à tecnologia T ; o modelo DDF pode ser formulado conforme apresentado em (2.24):

$$\overrightarrow{D}_T(x, y, y'; g_y, g_{y'}) = \max \{ \omega : (y + \omega g_y; y' - \omega g_{y'}) \in T \} \quad (2.24)$$

Considerando uma DMU com x *inputs*, y *outputs* desejáveis e y' *outputs* indesejáveis, e um vetor g ; \overrightarrow{D}_T , é a função de distância da tecnologia T que busca maximizar ω que é a proporção de aumento para o *output* desejável e de diminuição para o *output* indesejável na direção de g .

Uma desvantagem apontada para a utilização do DDF é que ele não utiliza os pressupostos de DEA com relação à disponibilidade forte. Além disso, não existem técnicas para definição do vetor de direção, que deve ser definido a priori pelo decisor subjetivamente. A direção definida por ser adequada para algumas variáveis, mas inadequada para outras. Por fim o modelo DDF não leva em consideração folgas o que pode gerar índices que não consideram nos casos não radiais os excessos dos insumos e as faltas na produção. (JAHANSHALOO *et al.*, 2012; BIAN, 2008)

3 ABORDAGEM PROPOSTA

O MCDEA e o índice vetorial apresentam métodos para o cálculo de eficiência baseados nos pressupostos de DEA, no entanto o primeiro foi desenvolvido para modelos de retornos constantes e o segundo para modelos de retornos variáveis. Já o método DDF apresenta um índice de eficiência que não é baseado nos pressupostos originais de DEA. Esse trabalho apresenta um método para o cálculo do índice de eficiência e identificação dos *benchmarks*, através da proposta de um dual para o modelo MORO que pode ser utilizados tanto para problemas de retornos constantes quanto para problemas de retornos variáveis, baseado nos pressupostos originais de DEA. Nesse sentido, a abordagem proposta neste trabalho visa apresentar um método para o cálculo da eficiência e identificação dos multiplicadores, através do desenvolvimento da formulação dual do MORO-D-R com orientação.

Conforme já apresentado anteriormente, o MORO é um modelo multiobjetivo não radial para identificação de alvos alternativos, no entanto este modelo não fornece a eficiência, informação importante que permite o ranqueamento das DMUs. Até o presente momento também não foram identificados na literatura estudos com relação à dualidade do MORO que buscasse verificar os multiplicadores relacionados aos *inputs* e *outputs*. O estudo dos multiplicadores se faz importante do ponto de vista de DEA pois permite analisar como cada DMU pondera seus *inputs* e *outputs* na busca da maior eficiência possível. Um dos grandes benefícios da análise a partir do modelo dos multiplicadores é verificar se uma DMU está levando em consideração todas as suas variáveis, ou se está definindo algum coeficiente zero, ou seja, ignorando esta variável na busca da eficiência.

3.1. CONTEXTO INICIAL – SOMA PONDERADA

Nesse sentido, inicialmente foi proposta a escalarização pela soma ponderada do modelo MORO de retornos constantes e restrições relaxadas, considerando as funções objetivo relacionadas ao incremento dos *inputs* e *outputs* simultaneamente. Foi escolhido por considerar o modelo de minimização, nesse sentido, para a incorporação das funções objetivo de maximização foi utilizado o artifício de acrescentar as funções objetivo de maximização com o sinal negativo. É importante salientar que este ponto é visto como uma limitação da modelagem, pois em DEA tradicional a eficiência com relação à orientação aos *outputs* é dada pelo inverso da função objetivo ($1/\theta$).

As variáveis α_j e β_i representam os valores de ponderação das funções objetivo relacionadas aos j outputs e i inputs, não sendo variáveis de decisão, onde $\sum_{j=1}^s \alpha_j + \sum_{i=1}^r \beta_i = 1$. A formulação mono objetivo MORO-CRS-R é apresentada em (3.1):

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j \\ & \text{Sujeito a} \tag{3.1} \\ & \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k - \phi_j y_{jo} \geq 0, \forall j = 1, \dots, s \quad \text{_____} u_j \\ & - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k + \varphi_i x_{io} \geq 0, \forall i = 1, \dots, r \quad \text{_____} v_i \\ & \phi_j, \varphi_i, \lambda_k \geq 0 \end{aligned}$$

As variáveis u_j e v_i indicam as variáveis duais criadas para cada restrição para a construção da formulação dual apresentada em (3.2):

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{j=1}^s 0u_j - \sum_{i=1}^r 0v_i \\ & \text{Sujeito a} \tag{3.2} \\ & \sum_{i=1}^r v_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^r \beta_i \\ & - \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} \leq - \sum_{j=1}^s \alpha_j \\ & \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k \\ & v_i, u_j \geq 0, \forall i, j \end{aligned}$$

A Tabela 1 apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual desenvolvidas para o MORO-CRS-R e a formulação DEA tradicional CCR com orientação a input.

Tabela 1 - Formulação MORO-CRS-R (*inputs e outputs*) versus Modelo DEA CCR (*input*)

PRIMAL MORO-CRS-R	DEA CCR ENVELOPE <i>INPUT</i>
$\text{Min } \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq \varphi_i x_{io}, \forall i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq \phi_j y_{jo}, \forall j = 1, \dots, s$ $\phi_j, \varphi_i, \lambda_k \geq 0$	$\text{Min } \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$ <p>θ irrestrita</p>
DUAL MORO-CRS-R	DEA CCR MULTIPLICADORES <i>INPUT</i>
$\text{Max } \sum_{j=1}^s 0u_j - \sum_{i=1}^r 0v_i$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{i=1}^r v_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^r \beta_i$ $-\sum_{j=1}^s u_j y_{jo} \leq -\sum_{j=1}^s \alpha_j$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0, \forall i, j$	$\text{Max } \sum_{j=1}^s u_j y_{jo}$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{i=1}^r v_i x_{io} = 1$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0, \forall i, j$

Comparando a formulação primal proposta (3.1) e o modelo do envelope é possível verificar o caso particular para um *input* e um *output* que se equivale à modelagem DEA tradicional CCR fazendo as seguintes considerações:

- I. Na função objetivo $\text{Min } \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j$ remover as funções objetivo relacionadas aos *outputs* ($\alpha_j = 0$), tal que a função objetivo se resumiria a $\text{Min } \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i$

- II. Na restrição relacionadas aos *outputs* $\sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k - \phi_j y_{jo} \geq 0$; considerar os incrementos relacionados aos *outputs* (ϕ_j) constantes e iguais a unidade, de maneira que pode-se reescrever a restrição como $\sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k \geq y_{jo}$

Com essas alterações chega-se a modelagem DEA tradicional CCR com orientação a *input*, de maneira que ϕ_i poderia ser considerada a eficiência.

Com relação ao dual proposto, fazendo um comparativo com o modelo dos multiplicadores, as variáveis de decisão duais criadas u_j e v_i podem ser equiparadas aos multiplicadores dos *outputs* e dos *inputs*, respectivamente. A função objetivo no dual proposto é constante e igual a zero.

Analisando as funções objetivo no primal e no dual propostas, não é possível afirmar que a função objetivo tenha relação direta com o conceito de eficiência conforme os modelos DEA tradicionais. No modelo DEA CCR multiplicadores a função objetivo é construída a partir do conceito de eficiência do modelo fracionário dado pela razão entre *inputs* e *outputs* virtuais (ou *outputs* e *inputs*, a depender da orientação do modelo). Além disso, a eficiência representa a diminuição proporcional dos *inputs* ou o aumento proporcional dos *outputs*, não sendo possível avaliar as duas vertentes ao mesmo tempo.

As duas primeiras restrições no dual proposto poderiam ser equiparadas à restrição de normalização incluída no modelo fracionário DEA CCR, no entanto seus significados não têm relação direta já que a restrição construída no dual é relativa à forma de escalarização do problema multiobjetivo pela soma ponderada. É importante citar que a ponderação das funções no primal não interferem no dual. A terceira restrição presente no dual proposto é equivalente à segunda restrição do modelo DEA tradicional.

As restrições de dominância atuam na formulação tradicional do MORO de maneira a restringir que os alvos sejam eficientes do ponto de vista de Pareto. A formulação mono objetivo para o modelo MORO CRS de restrições relaxadas e com dominância é apresentada em (3.3):

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j \\
& \text{Sujeito a} \tag{3.3} \\
& \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k - \phi_j y_{j0} \geq 0, \forall j = 1, \dots, s \quad \text{_____} u_j \\
& - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k + \varphi_i x_{i0} \geq 0, \forall i = 1, \dots, r \quad \text{_____} v_i \\
& \phi_j \geq 1 \quad \text{_____} H_j \\
& -\varphi_i \geq -1 \quad \text{_____} h_i \\
& \phi_j, \varphi_i, \lambda_k \geq 0
\end{aligned}$$

A inserção dos dois novos conjuntos de restrições relacionados à dominância se transformará no dual na criação de dois novos conjuntos de variáveis h_i e H_j . A formulação dual é apresentada em (3.4):

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \sum_{j=1}^s H_j - \sum_{i=1}^r h_i \\
& \text{Sujeito a} \tag{3.4} \\
& + \sum_{i=1}^r v_i x_{i0} - \sum_{i=1}^r h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i \\
& - \sum_{j=1}^s u_j y_{j0} + \sum_{j=1}^s H_j \leq - \sum_{j=1}^s \alpha_j \\
& \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k \\
& v_i, u_j, h_i, H_j \geq 0, \forall i, j
\end{aligned}$$

A Tabela 2 a seguir apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual propostas para o MORO com retornos constantes de escala com dominância e restrições relaxadas e a formulação DEA tradicional CCR com orientação a *input*.

Tabela 2 - Formulação MORO-CRS-D-R (*inputs e outputs*) versus Modelo DEA CCR (*input*)

PRIMAL MORO-CRS-D-R	DEA CCR ENVELOPE <i>INPUT</i>
$\text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k - \phi_j y_{j0} \geq 0, \forall j = 1, \dots, s$ $- \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k + \varphi_i x_{i0} \geq 0, \forall i = 1, \dots, r$ $\phi_j \geq 1$ $-\varphi_i \geq -1$ $\phi_j, \varphi_i, \lambda_k \geq 0$	$\text{Min } \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{j0}, \quad j = 1, \dots, s$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$ $\theta \text{ irrestrita}$
DUAL MORO-CRS-D-R	DEA CCR MULTIPLICADORES <i>INPUT</i>
$\text{Max} \sum_{j=1}^s H_j - \sum_{i=1}^r h_i$ $+ \sum_{i=1}^r v_i x_{i0} - \sum_{i=1}^r h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i$ $- \sum_{j=1}^s u_j y_{j0} + \sum_{j=1}^s H_j \leq - \sum_{j=1}^s \alpha_j$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j, h_i, H_j \geq 0, \forall i, j$	$\text{Max} \sum_{j=1}^s u_j y_{j0}$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0, \forall i, j$

Os dois novos conjuntos de variáveis duais criadas, h_i e H_j , atuam no dual como folgas, de maneira a garantir que as soluções encontradas sejam pareto eficientes.

A formulação geral para do Modelo MORO-VRS, acrescenta na formulação CRS a restrição de convexidade $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$; essa restrição acrescentada no modelo primal, Formulações (3.1) e (3.3), corresponde a uma variável irrestrita adicional a ser criada no dual do CRS já apresentado nas Formulações (3.2) e (3.4).

A Tabela 3 a seguir apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual propostas para o MORO de retornos variáveis com dominância e restrições relaxadas e a formulação DEA tradicional BCC com orientação a *input*.

Tabela 3 - Formulação MORO-VRS-D-R (*inputs e outputs*) versus Modelo DEA BCC (*input*)

PRIMAL MORO-VRS-D-R	DEA BCC ENVELOPE <i>INPUT</i>
$\text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k - \phi_j y_{jo} \geq 0, \forall j = 1, \dots, s$ $- \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k + \varphi_i x_{io} \geq 0, \forall i = 1, \dots, r$ $\phi_j \geq 1$ $-\varphi_i \geq -1$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ $\phi_j, \varphi_i, \lambda_k \geq 0$	$\text{Min } \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$
DUAL MORO-VRS-D-R	DEA BCC MULTIPLICADORES <i>INPUT</i>
$\text{Max} \sum_{j=1}^s H_j - \sum_{i=1}^r h_i + z$ $+ \sum_{i=1}^r v_i x_{io} - \sum_{i=1}^r h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i$ $- \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + \sum_{j=1}^s H_j \leq - \sum_{j=1}^s \alpha_j$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + z \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j, h_i, H_j \geq 0, \forall i, j$ <p>z irrestrita</p>	$\text{Max } \theta = \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + u_*$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{i=1}^r v_i x_{io} = 1$ $- \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} + u_* \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0$ $u_* \in \Re$

A variável dual criada pode ser interpretada como a variável de escala, também presente nos modelos DEA tradicionais. No entanto, aqui ela se apresenta considerando as duas vertentes, *inputs* e *outputs* ao mesmo tempo, diferente do modelo DEA que considera a orientação na modelagem.

A Tabela 4 a seguir apresenta o conjunto de dados retirado de Gomes Junior (2010) que será utilizado como base para as análises com relação a consistência da utilização dos modelos considerando *inputs* e *outputs* simultaneamente.

Tabela 4 - Conjunto de Dados - Gomes Junior (2010)

DMU	Nome da DMU	Input 1	Input 2	Output 1
A	Angra dos Reis	60	6	8
B	Paracambi	72	7	9
C	Pirai	23	6	6
D	São Francisco de Itabapoana	20	5	1
E	Volta Redonda	99	10	10
F	Itaperuna	36	7	4
G	São Pedro da Aldeia	62	6	4
H	Macaé	29	6	3
M	Três Rios	60	8	3
N	Cantagalo	40	7	2
O	Saquarema	61	6	2
P	Campo Grande	62	6	1
Q	Petrópolis	79	8	1

A Tabela 5 a seguir apresenta os valores encontrados que permitem a análise da relação entre as funções o modelo mono objetivo de retornos variáveis com dominância e de restrições relaxadas considerando *inputs* e *outputs* simultaneamente, o modelo DEA tradicional e o índice vetorial.

Tabela 5 - Relação Entre - Formulação MORO-VRS-D-R (*inputs e outputs*); Modelo DEA BCC e Índice Vetorial

DMU	Eficiência DEA BCC <i>Output</i>	PRIMAL MORO	ϕ_1	φ_1	φ_2	DUAL MORO	H_1	h_1	h_2	z	v_1	v_2	u	Índice Vetorial
A	100,0%	-33,3%	1,00	1,00	1,00	33,3%	0,64			-0,31	0,01	0,06	0,12	100,0%
B	100,0%	-33,3%	1,00	1,00	1,00	33,3%	0,60			-0,26	0,00	0,05	0,10	100,0%
C	100,0%	-33,3%	1,00	1,00	1,00	33,3%	1,28		0,23	-0,71	0,01	0,09	0,27	100,0%
D	100,0%	-33,3%	1,00	1,00	1,00	33,3%		0,03	7,73	8,09	0,02	1,61	0,33	100,0%
E	100,0%	-33,3%	1,00	1,00	1,00	33,3%	1,58			-1,24	0,00	0,03	0,19	100,0%
F	58,9%	13,2%	1,50	0,64	0,86	-13,2%				-0,001	0,01	0,05	0,08	61,4%
G	50,0%	43,0%	1,50	0,37	1,00	-43,0%				-0,04	0,01	0,06	0,08	44,4%
H	47,4%	69,0%	2,00	0,79	1,00	-69,0%				-0,07	0,01	0,06	0,11	60,4%
M	36,3%	30,6%	2,67	1,00	0,75	-30,6%		0,03		-0,28	0,01	0,04	0,11	43,3%
N	28,4%	53,8%	3,52	1,00	0,91	-53,8%		0,04		-0,50	0,01	0,05	0,17	42,1%
O	25,0%	67,2%	4,00	0,98	1,00	-67,2%			0,27	-0,40	0,01	0,10	0,17	42,6%
P	12,5%	201,1%	8,00	0,97	1,00	-201,1%			1,28	-0,73	0,01	0,27	0,33	21,2%
Q	10,8%	242,9%	9,26	1,00	0,97	-242,9%		0,28		-2,15	0,01	0,04	0,33	18,5%

Através da Tabela 5 é possível verificar que através do primal do MORO mono objetivo VRS-R-D proposto foi possível encontrar uma solução ótima para as DMUs analisadas.

É possível identificar que as DMUs A, B, C, D e E se encontram na fronteira eficiente, já que os incrementos de todos os *inputs* e *outputs* encontrados são iguais a unidade. Ao correlacionar essa informação com o valor da eficiência tanto no primal quanto no dual, é possível verificar que a função objetivo desenvolvida não indica os valores de eficiência.

Ao considerar no modelo mono objetivo a função como uma soma ponderada das funções relacionadas aos *inputs* e *outputs*, considera-se que a função objetivo é um escalar, sem levar em consideração também que para a orientação a *outputs* a eficiência é o inverso da função objetivo.

De fato, não é possível verificar a relação direta entre o resultado da função objetivo e o conceito de eficiência quando analisados simultaneamente *inputs* e *outputs* e nem sua direta relação com o Índice Vetorial.

Além disso, os valores encontrados para a função objetivo não respeitam a característica de estar no intervalo entre 0 e 1. E comparando as funções objetivo no primal e no dual, verifica-se a relação: função objetivo no primal = - função objetivo no dual.

Como não foi possível verificar a relação entre as funções objetivo desenvolvidas considerando *inputs* e *outputs* simultaneamente na formulação e o conceito de eficiência conforme DEA tradicional, foi proposto desenvolver um modelo não radial orientado, que considerasse cada vertente – *input* ou *output* – separadamente.

Sendo assim, esta tese apresenta a formulação primal e dual para o modelo MORO-D-R mono objetivo orientado, considerando um modelo híbrido que utiliza duas formas de escalarização. Esta formulação permite que sejam calculados índices de eficiência orientados quando a DMU é projetada num alvo previamente escolhido pelo decisor e permite a obtenção dos multiplicadores.

3.2. FORMULAÇÃO PROPOSTA – MODELO HÍBRIDO

A formulação proposta utiliza um modelo híbrido não radial que leva em consideração duas formas de escalarização ao mesmo tempo (a depender da orientação): a soma ponderada das funções objetivo relacionadas aos incrementos dos *inputs* (ou *outputs*) e a restrição das funções objetivo relacionadas aos incrementos dos *outputs* (ou *inputs*) à uma constante $e_j(e_i)$.

Além disso, conforme já verificado por Soares de Mello *et al.* (2005b) e Gonzalez Araya (2003) o valor a eficiência por ser distorcido caso sejam utilizadas projeções não dominadas, como:

- a projeção de uma DMU em uma região não Pareto-Koopmans eficiente pode ser vista como subjetiva, não apresentando alvos que tenham sentido para a DMU;
- valor da eficiência pode ser superestimado, no sentido de não considerar a presença de folgas.

Uma DMU é dita Pareto-Koopmans eficiente se e somente se é tecnologicamente impossível aumentar qualquer *output* (e/ou reduzir qualquer *input*) sem simultaneamente reduzir outro *output* (e/ou aumentar qualquer outro *input*) (KOOPMANS, 1951). É importante citar que o índice de eficiência obtido a partir dos modelos DEA clássicos, chamado de radial, nem sempre identifica as DMUs Pareto-Koopmans eficientes.

Para o desenvolvimento da formulação será utilizado o modelo com dominância, pois garante que o alvo da DMU em análise é dominado no sentido de Pareto (LINS *et al.*, 2004; QUARIGUASI FROTA NETO e ANGULO MEZA, 2007). Além disso, Gomes Junior *et al.* (2010) prova a equivalência entre o MORO-D e o MORO-D-R, de maneira que no desenvolvimento do trabalho será utilizado o modelo de restrições relaxadas, pois permite uma simplicidade computacional no que diz respeito aos erros numéricos, visto como uma vantagem importante já que ambos os modelos fornecem o mesmo conjunto de soluções.

As constantes $e_j(e_i)$ deverão ser definidas a priori pelo decisor, e irão indicar o alvo em que a DMU analisada será projetada para o cálculo da eficiência. O modelo MORO tradicional pode ser utilizado primeiramente para a identificação dos valores ótimos de $e_j(e_i)$, a serem utilizados na modelagem proposta. Dado o valor do alvo ou o

incremento dos *outputs* (ou *inputs*) a formulação proposta retorna o melhor alvo/incremento relacionado a *inputs* (ou *outputs*), de maneira que a eficiência seja a maior e o alvo encontrado seja fortemente eficiente.

Como a proposta é que os alvos sejam dominados, o valor máximo possível de $e_j(e_i)$ será seu valor ótimo para cada DMU, caso contrário o modelo retornará inviável. Caso fossem permitidos valores indiscriminados para $e_j(e_i)$, a DMU poderia ser projetada para alvos fora da região viável, o que acarretaria valores de eficiência maiores que unidade, pois esta projeção estaria na verdade alterando a fronteira e o conjunto de soluções inicial.

A seguir são apresentadas as formulações não radiais orientadas para os modelos de retornos constantes e retornos variáveis de escala.

3.2.1. Formulação Híbrida MORO-CRS-D-R com Orientação Não Radial a *Input*

A função mono objetivo da formulação primal híbrida com orientação não radial a *input* é composta pela soma ponderada das funções objetivo com relação ao incremento dos *inputs*, tal que $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$. De maneira que β_i não são variáveis de decisão do modelo, e devem ter o mesmo valor, pois entende-se que todas as funções objetivo tem a mesma relevância na construção da função única. E o conjunto de funções referentes aos incrementos dos *outputs* serão restringidos no modelo à uma constante e_j a ser definida a priori pelo decisor, tal que $e_j \geq 1$.

A formulação primal híbrida MORO-CRS-D-R com orientação não radial a *input* é apresentada em (3.5).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k + \varphi_i x_{io} \geq 0, \forall i = 1, \dots, r \quad \text{_____} \quad v_i \\
 & \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq e_j y_{jo}, \forall j = 1, \dots, s \quad \text{_____} \quad u_j \\
 & -\varphi_i \geq -1 \quad \text{_____} \quad h_i \\
 & \varphi_i, \lambda_k \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

As variáveis u_j , v_i e h_i indicam as variáveis duais criadas para cada restrição para a construção da formulação dual apresentada em (3.6):

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{j=1}^s e_j u_j y_{j0} - h_i \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & \sum_{i=1}^r v_i x_{i0} - h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k \\
 & v_i, u_j, h_i \geq 0, \forall i, j
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

A Tabela 6 apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual híbridas desenvolvidas para o MORO-CRS-D-R com orientação não radial a *input* e formulação DEA tradicional CCR com orientação a *input*.

Tabela 6 - Formulação híbrida MORO-CRS-D-R com orientação não radial a *input* versus DEA

PRIMAL HÍBRIDO <i>INPUT</i>	DEA CCR ENVELOPE <i>INPUT</i>
$\text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq \varphi_i x_{i0}, \forall i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq e_j y_{j0}, \forall j = 1, \dots, s$ $-\varphi_i \geq -1$ $\varphi_i, \lambda_k \geq 0$	$\text{Min} \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{j0}, \quad j = 1, \dots, s$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$ $\theta \text{ irrestrita}$

DUAL HÍBRIDO <i>INPUT</i>	DEA CCR MULTIPLICADORES <i>INPUT</i>
$\text{Max} \sum_{j=1}^s e_j u_j y_{jo} - h_i$	$\text{Max} \sum_{j=1}^s u_j y_{jo}$
Sujeito a	Sujeito a
$\sum_{i=1}^r v_i x_{io} - h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i$	$\sum_{i=1}^r v_i x_{io} = 1$
$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$	$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$
$v_i, u_j, h_i \geq 0, \forall i, j$	$v_i, u_j \geq 0, \forall i, j$

Comparando a formulação primal proposta (3.5) e o modelo do envelope é possível verificar o caso particular para um *input* e um *output* que se equivale à modelagem DEA tradicional CCR fazendo as seguintes considerações:

- I. Na função objetivo $\text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i$, como está sendo considerado apenas um *input* e como $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$ então a função objetivo poderia ser reescrita como $\text{Min} \varphi_i$;
- II. Na restrição relacionadas aos *outputs* $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq e_j y_{jo}$; considerar os incrementos relacionados aos *outputs* (ϕ_j) constantes e iguais a unidade, de maneira que pode-se reescrever a restrição como
$$\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq y_{jo}$$

Com essas alterações chega-se a modelagem DEA tradicional CCR com orientação a *input*, de maneira que φ_i poderia ser considerada a eficiência. A restrição de dominância garante que a solução encontrada esteja dentro da região viável. Já as outras duas restrições do primal são equivalentes a modelagem DEA tradicional.

Com relação ao dual, fazendo um comparativo com o modelo dos multiplicadores, as variáveis de decisão duais criadas u_j e v_i podem ser equiparadas aos multiplicadores dos *outputs* e dos *inputs*, respectivamente. Já a variável h_i relativa à dominância do primal, atua na função objetivo do dual de maneira a restringir que a solução encontrada esteja dentro da região viável, assim como apontado para o primal.

Comparando a formulação (3.6) e modelo dos multiplicadores; o modelo DEA tradicional é verificado quando realizadas as seguintes alterações:

- I. Na função objetivo $Max \sum_{j=1}^s e_j u_j y_{jo} - h_i$; considera-se $e_j = 1$ e $h_i = 0$, de maneira que pode-se reescrever a função objetivo como $Max \sum_{j=1}^s u_j y_{jo}$.

É importante notar que restringir os incrementos relacionados aos *outputs* à unidade significa trabalhar numa escala radial, ou seja, verifica-se que a projeção radial é um caso particular da projeção não radial. Além disso, também é verificado que existe um caso particular onde o modelo proposto é equivalente ao modelo DEA tradicional.

3.2.2. Formulação Híbrida MORO-CRS-D-R com Orientação Não Radial a *Output*

Analogamente como realizado para a orientação não radial a *input*, a formulação primal híbrida com orientação não radial a *output* será obtida através da soma ponderada das funções objetivo com relação ao incremento dos *outputs*, tal que $\sum_{j=1}^s \alpha_j = 1$, de maneira que α_j não é considerada variável de decisão do modelo e devem possuir a mesma ponderação para todas as funções.

O conjunto de funções referentes aos incrementos dos *inputs* serão restringidos no modelo à uma constante e_i a ser definida a priori pelo decisor, tal que $e_i \leq 1$.

A formulação primal híbrida MORO-CRS-D-R com orientação não radial a *output* é apresentada em (3.7):

$$\begin{aligned}
 &Max \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq e_i x_{io}, \forall i = 1, \dots, r \quad v_i \\
 & - \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k - \phi_j y_{jo} \leq 0, \forall j = 1, \dots, s \quad u_j \\
 & \phi_j \geq 1 \quad H_j \\
 & \phi_j, \lambda_k \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

A formulação dual é apresentada em (3.8):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{i=1}^r e_i v_i x_{io} + H_j \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + H_j \geq \sum_{j=1}^s \alpha_j \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k \\
 & v_i, u_j, H_j \geq 0, \forall i, j
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

A Tabela 7 apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual híbridas desenvolvidas para o MORO-CRS-D-R com orientação não radial a *output* e formulação DEA tradicional CCR com orientação a *output*.

Tabela 7 - Formulação híbrida MORO-CRS-D-R com orientação não radial a *output* versus DEA

PRIMAL HÍBRIDO CRS <i>OUTPUT</i>	DEA CCR ENVELOPE <i>OUTPUT</i>
$\text{Max} \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq e_i x_{io}, \forall i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq \phi_j y_{jo}, \forall j = 1, \dots, s$ $\phi_j \geq 1$ $\phi_j, \lambda_k \geq 0$	$\text{Max} \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq \theta y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$ $\theta \text{ irrestrita}$

DUAL HÍBRIDO CRS <i>OUTPUT</i>	DEA CCR MULTIPLICADORES <i>OUTPUT</i>
$\text{Min} \sum_{i=1}^r e_i v_i x_{io} + H_j$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + H_j \geq \sum_{j=1}^s \alpha_j$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j, H_j \geq 0, \forall i, j$	$\text{Min} \sum_{i=1}^r v_i x_{io}$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{j=1}^s u_j y_{jo} = 1$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0, \forall i, j$

As mesmas observações verificadas na orientação não radial a *input* são observadas de maneira análoga na orientação não radial à *output*. É importante citar que, para os modelos com orientação a *output*, a eficiência em DEA tradicional é dada pelo inverso da função objetivo.

3.2.1. Formulação Híbrida MORO-VRS-D-R com Orientação Não Radial a *Input*

Conforme apresentado para os modelos de retornos constantes, a função mono objetivo da formulação primal híbrida com orientação não radial a *input* também será composta pela soma ponderada das funções objetivo com relação ao incremento dos *inputs*, tal que $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$, tal que a ponderação deverá ser igual para todas as funções objetivo, e o conjunto de funções referentes aos incrementos dos *outputs* serão restringidos no modelo à uma constante e_j a ser definida a priori pelo decisor, tal que $e_j \geq 1$. Para o modelos de retornos variáveis é necessário acrescentar a restrição de convexidade $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ na modelagem.

A formulação primal híbrida MORO-VRS-D-R com orientação não radial a *input* é apresentada em (3.9):

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i \\
& \text{Sujeito a} \tag{3.9} \\
& - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k + \varphi_i x_{io} \geq 0, \forall i = 1, \dots, r \quad \text{_____} v_i \\
& \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq e_j y_{jo}, \forall j = 1, \dots, s \quad \text{_____} u_j \\
& \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad \text{_____} z \\
& -\varphi_i \geq -1 \quad \text{_____} h_i \\
& \varphi_i, \lambda_k \geq 0
\end{aligned}$$

As variáveis u_j , v_i , h_i e z indicam as variáveis duais criadas para cada restrição para a construção da formulação dual apresentada em (3.10):

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \sum_{j=1}^s e_j u_j y_{jo} - h_i + z \\
& \text{Sujeito a} \tag{3.10} \\
& \sum_{i=1}^r v_i x_{io} - h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i \\
& \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + z \leq 0, \forall k \\
& v_i, u_j, h_i \geq 0, \forall i, j
\end{aligned}$$

A Tabela 8 apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual híbridas desenvolvidas para o MORO-VRS-D-R com orientação não radial a *input* e formulação DEA tradicional BCC com orientação a *input*.

Tabela 8 - Formulação híbrida MORO-VRS-D-R com orientação não radial a *input* versus DEA

PRIMAL VRS HÍBRIDO <i>INPUT</i>	DEA BCC ENVELOPE <i>INPUT</i>
$\text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq \varphi_i x_{io}, \forall i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq e_j y_{jo}, \forall j = 1, \dots, s$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ $-\varphi_i \geq -1$ $\varphi_i, \lambda_k \geq 0$	$\text{Min} \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$
DUAL VRS HÍBRIDO <i>INPUT</i>	DEA BCC MULTIPLICADORES <i>INPUT</i>
$\text{Max} \sum_{j=1}^s e_j u_j y_{jo} - h_i + z$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{i=1}^r v_i x_{io} - h_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + z \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j, h_i \geq 0, \forall i, j$ <p>z irrestrita</p>	$\text{Max} \theta = \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + u_*$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{i=1}^r v_i x_{io} = 1$ $-\sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} + u_* \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0$ $u_* \in \Re$

Comparando a formulação primal proposta (3.7) e o modelo do envelope é possível verificar o caso particular para um *input* e um *output* que se equivale à modelagem DEA tradicional BCC fazendo as seguintes considerações:

- I. Na função objetivo $\text{Min} \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi_i$, como esta sendo considerado apenas um *input* e como $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$ então a função objetivo poderia ser reescrita como $\text{Min} \varphi_i$;

- II. Na restrição relacionadas aos *outputs* $\sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k \geq e_j y_{j0}$; considerar os incrementos relacionados aos *outputs* (ϕ_j) constantes e iguais a unidade, de maneira que pode-se reescrever a restrição como
- $$\sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k \geq y_{j0}$$

Com essas alterações chega-se a modelagem DEA tradicional BCC com orientação a *input*, de maneira que φ_i poderia ser considerada a eficiência, assim como foi verificado para a formulação de retornos constantes. A restrição de dominância garante que a solução encontrada esteja dentro da região viável para diferentes valores de e_j . Já as outras duas restrições do primal são equivalentes a modelagem DEA tradicional.

Com relação ao dual, fazendo um comparativo com o modelo dos multiplicadores, as variáveis de decisão duais criadas u_j e v_i podem ser equiparadas aos multiplicadores dos *outputs* e dos *inputs*, respectivamente. A restrição de convexidade no primal, de reflete no dual através da variável irrestrita z , que é relativa à escala e possui o mesmo significado que no modelo DEA tradicional. Já a variável h_i relativa à dominância do primal, atua na função objetivo do dual de maneira a restringir que a solução encontrada esteja dentro da região viável, assim como apontado para o primal.

Comparando a formulação (3.8) e modelo dos multiplicadores; o modelo DEA tradicional é verificado quando realizadas as seguintes alterações:

- I. Na função objetivo $Max \sum_{j=1}^s e_j u_j y_{j0} - h_i + z$; considera-se $e_j = 1$ e $h_i = 0$, de maneira que pode-se reescrever a função objetivo como $Max \sum_{j=1}^s u_j y_{j0} + z$.

Ao restringir os incrementos relacionados aos *outputs* à unidade significa trabalhar numa escala radial, corroborando que a projeção radial é um caso particular da projeção não radial. E também foi possível verificar o caso particular em que a modelagem é equivalente ao DEA tradicional.

3.2.2. Formulação Híbrida MORO-VRS-D-R com Orientação Não Radial a *Output*

Analogamente como realizado para a orientação não radial a *input*, a formulação primal híbrida com orientação não radial a *output* será obtida através da soma ponderada das funções objetivo com relação ao incremento dos *outputs*, tal que $\sum_{j=1}^s \alpha_j = 1$. O conjunto de funções referentes aos incrementos dos *inputs* serão restringidos no modelo à uma constante e_i a ser definida a priori pelo decisor, tal que $e_i \leq 1$. E será acrescentada a restrição de convexidades para modelos de retornos variáveis.

A formulação primal híbrida MORO-VRS-D-R com orientação não radial a *output* é apresentada em (3.11):

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq e_i x_{io}, \forall i = 1, \dots, r \quad v_i \\
 & - \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k - \phi_j y_{jo} \leq 0, \forall j = 1, \dots, s \quad u_j \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad z \\
 & \phi_j \geq 1 \quad H_j \\
 & \phi_j, \lambda_k \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A formulação dual é apresentada em (3.12):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{i=1}^r e_i v_i x_{io} + H_j + z \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + H_j \geq \sum_{j=1}^s \alpha_j \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + z \leq 0, \forall k \\
 & v_i, u_j, H_j \geq 0, \forall i, j \\
 & z \text{ irrestrita}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

A Tabela 9 apresenta o comparativo entre as formulações primal e dual híbridas desenvolvidas para o MORO-VRS-D-R com orientação não radial a *output* e formulação DEA tradicional BCC com orientação a *output*.

Tabela 9 - Formulação híbrida MORO-VRS-D-R com orientação não radial a *output* versus DEA

PRIMAL VRS HÍBRIDO <i>OUTPUT</i>	DEA BCC ENVELOPE <i>OUTPUT</i>
$Max \sum_{j=1}^s \alpha_j \phi_j$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq e_i x_{io}, \forall i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq \phi_j y_{jo}, \forall j = 1, \dots, s$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ $\phi_j \geq 1$ $\phi_j, \lambda_k \geq 0$	$Max \theta$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, r$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq \theta y_{jo}, \quad j = 1, \dots, s$ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ $\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n$
DUAL HÍBRIDO VRS <i>OUTPUT</i>	DEA BCC MULTIPLICADORES <i>OUTPUT</i>
$Min \sum_{i=1}^r e_i v_i x_{io} + H_j + z$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{j=1}^s u_j y_{jo} + H_j \geq \sum_{j=1}^s \alpha_j$ $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + z \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j, H_j \geq 0, \forall i, j$ $z \text{ irrestrita}$	$Min \theta = \sum_{i=1}^r v_i x_{io} + v_*$ <p>Sujeito a</p> $\sum_{j=1}^s u_j y_{jo} = 1$ $- \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - v_* \leq 0, \forall k$ $v_i, u_j \geq 0$ $v_* \in \Re$

Fazendo as devidas analogias entre as orientações não radiais a *inputs* e a *outputs*, as mesmas observações com relação aos casos particulares, significado da função objetivo, interpretação das restrições e variáveis são aplicáveis.

3.3. EXEMPLOS NUMÉRICOS

A fim de verificar do comportamento do modelo proposto, as formulações (3.5) – (3.12) serão aplicadas em diferentes exemplos numéricos. Para os cálculos referentes a modelagem DEA tradicional foi utilizado o *software* SIAD (Sistema Integrado de Apoio à Decisão) (ANGULO MEZA *et al.*, 2005a; ANGULO MEZA *et al.*, 2005b) e para as formulações desenvolvidas foi utilizado o *software* LINDO 6.1©.

3.3.1. Exemplo Numérico 1 - CRS - um *input* e um *output*

A Tabela 10 a seguir, apresenta o conjunto de dados retirado de Lins *et al.* (2004), que será aplicado no exemplo numérico 1, para analisar o comportamento das formulações para retornos constantes de escala para um *input* e um *output*.

Tabela 10 - Conjunto de Dados - Lins *et al.* (2004)

DMU	<i>Input</i> 1	<i>Output</i> 1
A	2	12
B	4	15
C	6	6
D	2	9
E	3	15
F	1	7
G	2	4

As Tabelas 11 e 12 a seguir apresentam os valores relacionados a eficiência, os *benchmarks*, os alvos e os multiplicadores, calculados conforme DEA CCR tradicional para a orientação a *input* e a orientação a *output*, respectivamente, através do SIAD.

Analisando as Tabelas 11 e 12 é possível verificar que a eficiência em ambas a orientação é a mesma, seguindo os preceitos dos modelos CCR para DEA tradicional.

A DMU eficiente e única é a DMU F, que é apontada como *benchmark* para todas as outras DMUs independente da orientação. No entanto, apesar da eficiência ser a mesma em ambas as orientações, é possível verificar que os alvos e multiplicadores obtidos através dos modelos duais são diferentes, e dependem da forma como a DMU busca de tornar eficiente (depende da orientação).

Os modelos DEA tradicionais são radiais, fornecendo apenas um alvo radial (por orientação) para a DMU em análise. É importante citar que, para o exemplo numérico estudado, nenhum coeficiente nulo foi atribuído aos multiplicadores, o que indica que todas as DMUs estão levando em consideração todas as variáveis na busca da eficiência.

Tabela 11 - Exemplo Numérico 1 - DEA CCR (*Input*)

DMU	Eficiência DEA-CCR	Benchmark	Alvos		Multiplicadores	
		DMU F	Input 1	Output 1	v	u
A	85,71%	1,71	1,71	12,00	0,50	0,07
B	53,57%	2,14	2,14	15,00	0,25	0,04
C	14,29%	0,86	0,86	6,00	0,17	0,02
D	64,29%	1,29	1,29	9,00	0,50	0,07
E	71,43%	2,14	2,14	15,00	0,33	0,05
F	100,00%	1,00	1,00	7,00	1,00	0,14
G	28,57%	0,57	0,57	4,00	0,50	0,07

Tabela 12 - Exemplo Numérico 1 - DEA CCR (*Output*)

DMU	Eficiência DEA-CCR	Benchmark	Alvos		Multiplicadores	
		DMU F	Input 1	Output 1	v	u
A	85,71%	2,00	2,00	14,00	0,58	0,08
B	53,57%	4,00	4,00	28,00	0,47	0,07
C	14,29%	6,00	6,00	42,00	1,17	0,17
D	64,29%	2,00	2,00	14,00	0,78	0,11
E	71,43%	3,00	3,00	21,00	0,47	0,07
F	100,00%	1,00	1,00	7,00	1,00	0,14
G	28,57%	2,00	2,00	14,00	1,75	0,25

A aplicação da formulação híbrida proposta com orientação a *input* para o caso radial, que equivale ao modelo DEA tradicional é apresentado na Tabela 13. Conforme já verificado, o caso radial com orientação à *inputs* é verificado quando é fixado o valor do incremento dos *outputs*, tal que $e_j = 1$.

Tabela 13 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS *Input* - Radial ($e_j = 1$)

DMU	PRIMAL	Incrementos		Benchmark DMU F	Alvos		DUAL	v	u	h_1
		ϕ_1	φ_1		Input 1	Output 1				
A	85,71%	0,86	1,00	1,71	1,71	12,00	85,71%	0,50	0,07	0,00
B	53,57%	0,54	1,00	2,14	2,14	15,00	53,57%	0,25	0,04	0,00
C	14,29%	0,14	1,00	0,86	0,86	6,00	14,29%	0,17	0,02	0,00
D	64,29%	0,64	1,00	1,29	1,29	9,00	64,29%	0,50	0,07	0,00
E	71,43%	0,71	1,00	2,14	2,14	15,00	71,43%	0,33	0,05	0,00
F	100,00%	1,00	1,00	1,00	1,00	7,00	100,00%	1,00	0,14	0,00
G	28,57%	0,29	1,00	0,57	0,57	4,00	28,57%	0,50	0,07	0,00

Já o caso radial com orientação à *outputs* apresentado na Tabela 14 é verificado quando é fixado o valor do incremento dos *inputs*, tal que $e_i = 1$;

Tabela 14 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS *Output* - Radial ($e_i = 1$)

DMU	PRIMAL	Eff	Incrementos		Benchmark DMU F	Alvos		DUAL	Eff	v	u	H_1
			ϕ_1	φ_1		Input 1	Output 1					
A	116,67%	85,71%	1,00	1,17	2,00	2,00	14,00	116,67%	85,71%	0,58	0,08	0,00
B	186,67%	53,57%	1,00	1,87	4,00	4,00	28,00	186,67%	53,57%	0,47	0,07	0,00
C	700,00%	14,29%	1,00	7,00	6,00	6,00	42,00	700,00%	14,29%	1,17	0,17	0,00
D	155,56%	64,29%	1,00	1,56	2,00	2,00	14,00	155,56%	64,29%	0,78	0,11	0,00
E	140,00%	71,43%	1,00	1,40	3,00	3,00	21,00	140,00%	71,43%	0,47	0,07	0,00
F	100,00%	100,00%	1,00	1,00	1,00	1,00	7,00	100,00%	100,00%	1,00	0,14	0,00
G	350,00%	28,57%	1,00	3,50	2,00	2,00	14,00	350,00%	28,57%	1,75	0,25	0,00

Comparando as Tabelas 12,13 e 14, é possível verificar que para casos de um *input* e um *output*; através do modelo híbrido - que por definição é não radial; é possível chegar à modelagem DEA tradicional (radial). Dessa maneira, prova-se que o caso radial é o caso particular do modelo não radial.

No entanto o que se busca é verificar o comportamento em projeções não radiais. Dessa maneira, a Figura 6 apresenta a fronteira DEA CCR tradicional para o exemplo numérico 1, indicando a posição das DMUs no espaço de soluções.

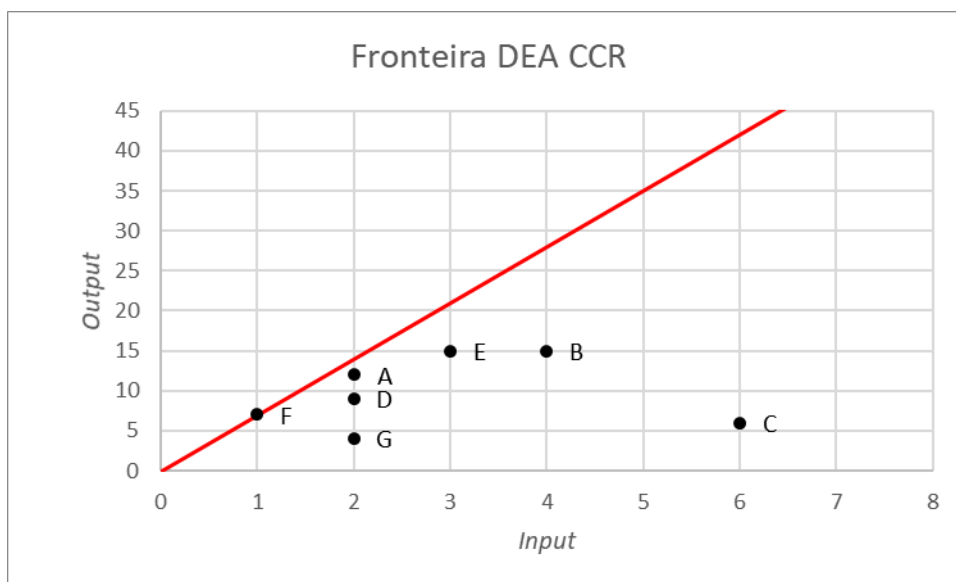


Figura 6 - Exemplo Numérico 1 - Representação da Fronteira DEA CCR

Tomando como exemplo a DMU menos eficiente, a DMU C, e projetando a mesma no ponto eficiente da fronteira, escolhido aleatoriamente, tal que $P:(5;35)$.

Ao projetar a C levando em consideração a orientação a *inputs*, será necessário fixar o *output*, tal que $e_j = 5,833$. A Tabela 15 apresenta os valores encontrados para a formulação híbrida.

Tabela 15 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS *Input* - Não radial ($e_j = 5,833$)

DMU	PRIMAL	Incrementos		Alvos		DUAL	v	u	h
		ϕ_1	φ_1	<i>Input 1</i>	<i>Output 1</i>				
C	83,33%	0,83	5,83	5,00	35,00	83,33%	0,02	0,17	0,00

Ao projetar levando em consideração a orientação a *output*, será necessário fixar $e_i = 0,8333$. A Tabela 16 apresenta os valores encontrados para a formulação híbrida.

Tabela 16 - Exemplo Numérico 1 - Formulação Híbrida CRS *Output* - Não radial ($e_i = 0,8333$)

DMU	PRIMAL	Eff	Incrementos		Alvos		DUAL	Eff	v	u	H
			ϕ_1	φ_1	<i>Input 1</i>	<i>Output 1</i>					
C	583,33%	17,14%	0,83	5,83	5,00	35,00	583,33%	17,14%	1,17	0,17	0,00

Conforme verificado nas Tabelas 15 e 16, ao projetar a DMU C (6;6) no ponto eficiente P:(5;35), utilizando assim uma projeção não radial em modelos de retornos constantes, verifica-se valores diferentes para a função objetivo.

A função objetivo representa na verdade a eficiência projetada, ou seja, a eficiência futura da DMU quando projetada. Além disso, é possível verificar que, para orientações não radiais, modelos de retornos constantes podem fornecer valores de eficiência diferentes a depender da orientação utilizada.

3.3.2. Exemplo Numérico 2 - CRS - dois *inputs* e um *output*

O conjunto de dados referente ao Exemplo numérico 2 apresentado na Tabela 17, retirado de Soares de Mello *et al.* (2005a), será aplicado para analisar o comportamento da formulação do caso particular para os casos de múltiplos *inputs*.

Tabela 17 - Conjunto de Dados - Soares de Mello *et al.* (2005a)

DMU	<i>Input1</i>	<i>Input2</i>	<i>Output 1</i>
A	4	3	1
B	26	12	4
C	16	2	2
D	4	2	1
E	6	12	3
F	20	2	2

A Tabela 18 apresenta as eficiências encontradas no modelo CCR tradicional, na formulação híbrida com orientação a *input* sem a inclusão da restrição de igualdade entre os incrementos relacionados aos *inputs* e depois com a inclusão da restrição de igualdade dos incrementos aos *inputs*.

Tabela 18 - Exemplo Numérico 2 - Formulação Híbrida Múltiplos *Inputs* x DEA Tradicional CCR

DMU	Eficiência DEA-CCR	SEM RESTRIÇÃO		COM RESTRIÇÃO DE IGUALDADE	
		PRIMAL	DUAL	PRIMAL	DUAL
A	85,7%	83,3%	83,3%	85,7%	85,7%
B	64,9%	64,1%	64,1%	64,9%	64,9%
C	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
E	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
F	100,0%	90,0%	90,0%	100,0%	100,0%

Através das Tabelas 13 e 14, foi verificado que as formulações apresentadas para o caso particular de um *input* e um *output* quando utilizados modelos radiais, realmente indicam que a função objetivo tanto no primal quanto no dual, são a eficiência, assim como acontece nos modelos DEA tradicionais. É importante notar que, ao restringir os incrementos relacionados aos *inputs* e *outputs* à unidade, transforma-se o modelo não radial em um modelo radial. Dessa maneira, verifica-se que a projeção radial é um caso particular da projeção não radial.

No entanto, através da Tabela 18 é possível verificar que, mesmo para a ponderação igual entre as funções objetivo relacionadas aos *inputs* a função objetivo na formulação proposta não apresenta o mesmo valor que o modelo DEA CCR tradicional, isso se dá pois na formulação não há restrições que garantam que os diferentes incrementos dos *inputs* estejam mantendo a proporção do modelo. Dessa maneira, para os modelos de retornos constantes com mais de um *input/output* respeitem o quesito radial e seja comparável ao modelo DEA tradicional se faz necessária a inclusão de uma restrição que garanta que os incrementos dos *inputs/outputs* são iguais.

3.3.3. Exemplo Numérico 3 - VRS - um *input* e um *output*

O mesmo conjunto de dados já apresentado na Tabela 10, será utilizado para verificação da aplicação das formulações para retornos variáveis de escala. As Tabelas 19 e 20 a seguir apresentam a eficiência, os *benchmarks*, os alvos e os multiplicadores, calculados conforme DEA BCC tradicional para as orientações a *input* e a *output*, respectivamente.

Tabela 19 - Exemplo Numérico 3 - DEA BCC Orientação a *Input*

DMU	Eficiência DEA-BCC	Benchmarks			Alvos		v	u	z
		DMU A	DMU E	DMU F	Input 1	Output 1			
A	100,00%	1,00			2,00	12,00	0,50	0,10	-0,20
B	75,00%		1,00		3,00	15,00	0,25	0,08	-0,50
C	16,67%			1,00	1,00	7,00	0,17	0,00	0,17
D	70,00%	0,40		0,60	1,40	9,00	0,50	0,10	-0,20
E	100,00%		1,00		3,00	15,00	0,33	0,11	-0,67
F	100,00%			1,00	1,00	7,00	1,00	0,14	0,00
G	50,00%			1,00	1,00	7,00	0,50	0,00	0,50

Analisando a Tabela 19, é possível identificar 3 DMUs eficientes na orientação a *input*, (A, E e F) e também é possível verificar que duas DMUs forneceram multiplicadores com coeficientes nulos, as DMUs C e G.

Tabela 20 - Exemplo Numérico 3 - DEA BCC Orientação a *Output*

DMU	Eficiência DEA-BCC	Benchmarks			Alvos		v	u	z
		DMU A	DMU E	DMU F	Input 1	Output 1			
A	100,00%	1,00			2,00	12,00	0,42	0,08	0,17
B	100,00%		1,00		3,00	15,00	0,00	0,07	1,00
C	40,00%		1,00		3,00	15,00	0,00	0,17	2,50
D	75,00%	1,00			2,00	12,00	0,33	0,11	0,67
E	100,00%		1,00		3,00	15,00	0,00	0,07	1,00
F	100,00%			1,00	1,00	7,00	1,00	0,14	0,00
G	33,33%	1,00			2,00	12,00	1,25	0,25	0,50

Analisando a Tabela 20, na orientação a *output* são verificadas quatro DMUs eficientes (A, B, E e F) e três DMUs forneceram multiplicadores com valores nulos, as DMUs B, C e E.

A Figura 7 apresenta a fronteira DEA BCC para o Exemplo Numérico 3, através dela é possível verificar os segmentos fracamente eficientes: segmento (1,0) até a DMU F e o segmento da entre as DMUs E e B.

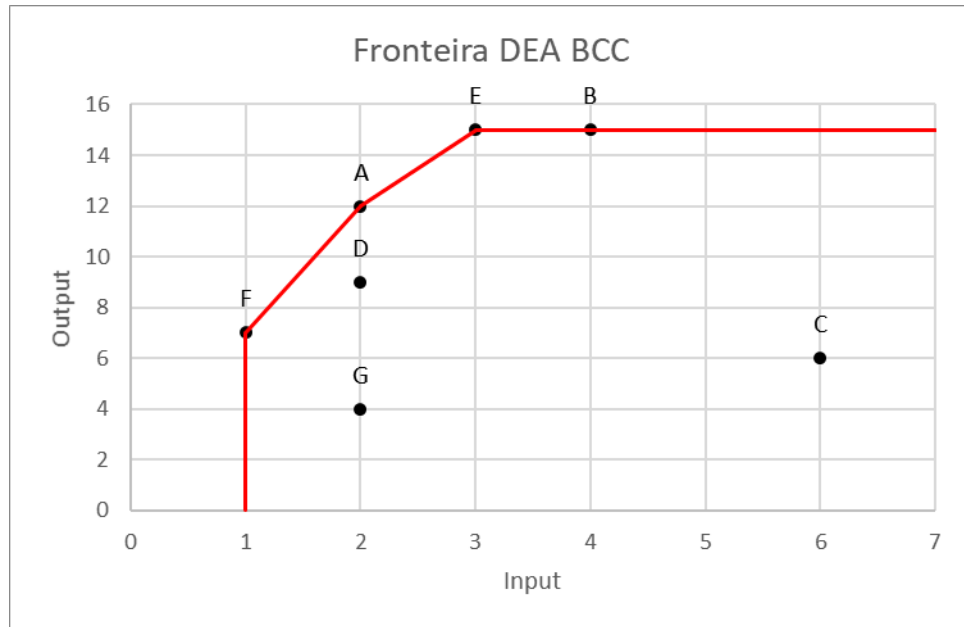


Figura 7 - Exemplo Numérico 2 - Representação da Fronteira DEA BCC

A aplicação da formulação híbrida com orientação a *input* e orientação a *output* para o caso radial, que equivale ao modelo DEA tradicional é apresentado respectivamente nas Tabelas 21 e 22. O caso radial é verificado, conforme já falado anteriormente, quando se fixa, respectivamente, o valor do incremento dos *outputs*, tal que $e_j = 1$; e o valor do incremento dos *inputs*, tal que $e_i = 1$.

Tabela 21 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS *Input* - Radial ($e_j = 1$)

DMU	PRIMAL	Incremento		Benchmarks			Alvos		DUAL	v	u	z	h
		ϕ_1	φ_1	DMU A	DMU E	DMU F	Input 1	Output 1					
A	100,00%	1,00	1,00	1,00			2,00	12,00	100,00%	0,50	0,10	-0,20	0,00
B	75,00%	0,75	1,00		1,00		3,00	15,00	75,00%	0,25	0,08	-0,50	0,00
C	16,67%	0,17	1,00			1,00	1,00	6,00	16,67%	0,17	0,00	0,17	0,00
D	70,00%	0,70	1,00	0,40		0,60	1,40	9,00	70,00%	0,50	0,10	-0,20	0,00
E	100,00%	1,00	1,00		1,00		3,00	15,00	100,00%	0,33	0,11	-0,67	0,00
F	100,00%	1,00	1,00			1,00	1,00	7,00	100,00%	1,00	0,14	0,00	0,00
G	50,00%	0,50	1,00			1,00	1,00	4,00	50,00%	0,50	0,00	0,50	0,00

Tabela 22 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS *Output* - Radial ($e_i = 1$)

DMU	PRIMAL	Eff	Incremento		Benchmarks			Alvos		DUAL	Eff	v	u	z	H
			ϕ_1	φ_1	DMU A	DMU E	DMU F	Input 1	Output 1						
A	100,00%	100,00%	1,00	1,00	1,00			2,00	12,00	100,00%	100,00%	0,42	0,08	0,17	0,00
B	100,00%	100,00%	1,00	1,00		1,00		4,00	15,00	100,00%	100,00%	0,00	0,07	1,00	0,00
C	250,00%	40,00%	1,00	2,50		1,00		6,00	15,00	250,00%	40,00%	0,00	0,17	2,50	0,00
D	133,33%	75,00%	1,00	1,33	1,00			2,00	12,00	133,33%	75,00%	0,33	0,11	0,67	0,00
E	100,00%	100,00%	1,00	1,00		1,00		3,00	15,00	100,00%	100,00%	0,00	0,07	1,00	0,00
F	100,00%	100,00%	1,00	1,00			1,00	1,00	7,00	100,00%	100,00%	1,00	0,14	0,00	0,00
G	300,00%	33,33%	1,00	3,00	1,00			2,00	12,00	300,00%	33,33%	1,25	0,25	0,50	0,00

Comparando as Tabelas 19,20,21 e 22 é possível verificar que, assim como já identificado para o caso de retornos constantes, através do modelo híbrido de retornos variáveis também é possível chegar à modelagem DEA tradicional. Dessa maneira, prova-se que o caso radial é o caso particular do modelo não radial. No entanto o que se busca é verificar o comportamento em projeções não radiais.

Dessa maneira tomando também como base da DMU C, é a menos eficiente em ambas as orientações, serão propostas a análise de algumas projeções não radiais. Primeiro, será verificada a projeção da DMU C na DMU A (2,12); tal que será fixado $e_j = 2$ na orientação a *input* e será fixado $e_i = 0,3333$ na orientação a *output*. As Tabelas 23 e 24 apresentam os valores encontrados para as formulações híbridas com orientação a *input* e a *output*, respectivamente.

Tabela 23 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS *Input* - Projeção não radial da DMU C na DMU A ($e_j = 2$)

DMU	PRIMAL	Incrementos		Alvos		DUAL	ν	u	z	h
		ϕ_1	φ_1	<i>Input 1</i>	<i>Output 1</i>					
C	33,33%	0,33	2,00	2,00	12,00	33,33%	0,17	0,00	-0,07	0,00

Analisando a Tabela 23 ao projetar a DMU C na DMU A na orientação a *input*, a eficiência da DMU aumentaria de 16,67% conforme DEA tradicional, para 33,33% de eficiência projetada, no entanto os valores dos multiplicadores com relação aos *outputs* continuariam os mesmos.

Tabela 24 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS *Output* - Projeção não radial da DMU C na DMU A ($e_i = 0,3333$)

DMU	PRIMAL	Eff	Incrementos		Alvos		DUAL	Eff	ν	u	z	h
			ϕ_1	φ_1	<i>Input 1</i>	<i>Output 1</i>						
C	200,00%	50,00%	0,33	2,00	2,00	12,00	200,00%	50,00%	0,50	0,17	1,00	0,00

Analisando a Tabela 24 ao projetar a DMU C na DMU A na orientação a *output*, a eficiência da DMU aumentaria de 40,00% conforme DEA tradicional, para 50,00% de eficiência projetada, mas ao contrário da orientação a *input*, os coeficientes dos multiplicadores não se mantiveram os mesmos.

Projetando a DMU C no segmento fracamente eficiente para *outputs*, com *output* = 15; tal que $e_j = 2$, a Tabela 25 apresenta a eficiência, o valor do *input* que fornece a maior eficiência e os multiplicadores.

Tabela 25 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS *Input* - Projeção não radial da DMU C fixando *output* em 15

DMU	PRIMAL	Incrementos		Benchmark	Alvos		DUAL	v	u	z	h
		ϕ_1	φ_1	DMU E	Input 1	Output 1					
C	50%	0,50	2,50	1,00	3,00	15,00	50,00%	0,17	0,06	-0,33	0,00

Analisando a Tabela 25 ao projetar a DMU C no segmento eficiente para *outputs*, fixando o *output* em 15, o modelo híbrido fornece como alvo a DMU fortemente eficiente do segmento de reta, a DMU E.

Projetando a DMU C no segmento eficiente para *inputs*, com *input* = 1; tal que $e_j = 0,17$; a Tabela 26 apresenta a eficiência; valor do *output* que fornece a maior eficiência e os multiplicadores.

Tabela 26 - Exemplo Numérico 3 - Formulação Híbrida VRS *Output* - Projeção não radial da DMU C fixando *input* em 1

PRIMAL	Eff	Incrementos		Benchmark	Alvos		DUAL	Eff	v	u	z	H
		ϕ_1	φ_1	DMU F	Input 1	Output 1						
116,67%	85,71%	0,17	1,17	1,00	1,00	7,00	116,67%	85,71%	0,83	0,17	0,33	0,00

Analisando a Tabela 26 ao projetar a DMU C fixando o *input* em 1, o modelo híbrido fornece como alvo a DMU fortemente eficiente do segmento de reta, a DMU F.

4 CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E PROPOSTAS FUTURAS

Neste trabalho são apresentados os estudos iniciais com relação à dualidade do modelo MORO de retornos constantes e variáveis de escala; com e sem dominância de restrições relaxadas. Para o desenvolvimento do modelo dual inicialmente foi realizada a transformação do problema multiobjetivo em mono objetivo através da utilização da soma ponderada das funções objetivo como escalarizante. Os modelos duais criados foram comparados ao modelo DEA clássico, de maneira a fazer um paralelo entre suas variáveis e significados e também a relação entre a função objetivo criada e o conceito de eficiência.

A função objetivo dual desenvolvida a partir da soma ponderada das funções objetivo para o modelo MORO-CRS apresenta um valor constante nulo, já que o modelo primal não apresenta nenhuma constante nas suas restrições. Essa informação corrobora que a proposta de dual é coerente com o modelo de retornos constantes, já que reforça que qualquer que seja a função objetivo o seu valor é constante. No entanto, do ponto de vista prático, é um indicativo de que a função objetivo não representa a eficiência, conforme o conceito de eficiência aplicado em DEA tradicional, quando são analisados conjuntamente as vertentes de *input* e *output*.

A função objetivo dual para retornos variáveis só não retorna um valor nulo pois a restrição de convexidade presente no MORO-VRS permite a criação de uma função objetivo não necessariamente nula. No entanto, aqui é também verificado que a função objetivo criada não tem um significado prático relacionado a eficiência, e sim com a variável de escala.

Quando verificados os modelos com dominância, também não foi possível verificar a relação da função objetivo criada e a eficiência quando analisados *inputs* e *outputs* em conjunto. Foi realizado um comparativo entre a formulação desenvolvida e o índice vetorial, e ambas as abordagens forneceram valores diferentes. Além do fato que a formulação proposta para o MORO forneceu valor de função objetivo maiores que um e menores que zero, infringindo uma das propriedades da eficiência: estar em zero e um.

Já que não possível verificar a relação da eficiência através da utilização da soma ponderada quando analisados *inputs* e *outputs* simultaneamente, foi proposto um modelo híbrido de escalarização, utilizando soma ponderada e restrição das funções objetivo, de maneira a construir dois modelos orientados – um a *input* e um a *output*. Para a orientação a *input*, são analisados somente o conjunto de restrições relacionadas aos incrementos dos *inputs*, enquanto são mantidos constantes os incrementos dos *outputs*; analogamente é feito para a orientação a *outputs*.

Através da construção dos modelos orientados, foi possível identificar os casos particulares que se equivalem a modelagem DEA tradicional – modelo radial – quando os incrementos restringidos são iguados a uma constante igual a unidade.

Os modelos orientados desenvolvidos permitem o cálculo de índices de eficiência projetados, quando são fixados os incrementos de *inputs* (orientação a *output*) ou são fixados os valores de *outputs* (orientação a *input*). Quando a DMU é projetada numa região fracamente eficiência, o modelo retorna como incremento o valor da DMU fortemente eficiente do segmento.

O modelo desenvolvido requer um certo conhecimento a priori do decisor para escolha de onde se deseja projetar a DMU e para a aplicação da modelagem proposta é necessário que o decisor varie os valores a fim de buscar a informação que seja mais conveniente com suas perspectivas. Dessa maneira, o decisor pode através do MORO tradicional calcular os possíveis *benchmarks* e através do modelo desenvolvido calcular as eficiências orientadas projetadas para a DMU em análise.

O modelo dual híbrido orientado proposto, também permite o cálculo da eficiência projetada, e além disso permite identificar os multiplicadores das variáveis, permitindo identificar a estratégia utilizada por cada DMU na busca da sua eficiência.

Uma limitação do modelo que incorpora as funções de *inputs* e *outputs* numa mesma função objetivo, é a não consideração da função objetivo relacionada aos *outputs* como o inverso, já que os modelos DEA tradicionais tratam a eficiência com relação aos *outputs* como o inverso da função objetivo. Como proposta para trabalhos futuros indica-se a transformação de variáveis de maneira a permitir incorporar as funções objetivo relacionadas aos *outputs* como o inverso, e assim gerar um índice global sem a necessidade de orientação.

Além disso, é importante frisar que os multiplicadores encontrados não são únicos para as DMUs extremo eficientes, conforme já apontado por diversos autores. Alguns métodos existentes na literatura como a suavização da fronteira atuam neste tópico, de maneira que podem ser desenvolvidos estudos futuros para atuar nesta questão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G. ISYDS - Integrated System for Decision Support (SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão): a software package for data envelopment analysis model. *Pesquisa Operacional*, v. 25, n.3, p. 493-503, 2005a.

ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G.; COELHO, P.H.G. Free software for decision analysis: a software package for data envelopment models. In: *7th International Conference on Enterprise Information Systems - ICEIS 2005*, v. 2, p. 207-212, 2005b.

ANTUNES, C.H.; ALVES, M.J.; CLÍMACO, J. Multiobjective Linear and Integer Programming. *EURO Advanced Tutorials on Operational Research*. Springer, 2016.

BANA E COSTA, C.A.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. A new approach to the bi-dimensional representation of the DEA efficient frontier with multiple *inputs* and *outputs*. *European Journal of Operational Research*, v. 255, n. 16, p. 175-186, 2016.

BANKER R.D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Management Science*, v.30, n.9, p.1078-1092, 1984.

BENAYOUN, R.; MONTGOLFIER, J.; TERGNY, J.; LARITCHEV, O. Linear programming with multiple objective functions: STEP method (STEM). *Mathematical Programming*, v.1, n. 1, p. 366-375, 1971.

BIAN, Y. Efficiency Evaluation with Undesirable Factors Based on DEA. *4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*, p. 1-5, 2008.

BREGALDA, P.A.O.; BORNSTEIN, C. *Introdução a Programação Linear*. Rio de Janeiro, Editora Campus, 1981.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, v.2, n. 6, p.429-444, 1978.

CHAVES, M.C.C.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B; ANGULO MEZA, L. Studies of some duality properties in the Li and Reeves model. *Journal of the Operational Research Society*, v. 67, n. 3, p. 474-482, 2016.

CHUNG, Y., FÄRE, R., GROSSKOPF, S. Productivity and Undesirable Outputs: A Directional Distance Function Approach. *Journal of Environmental Management*, v. 51, n.3, p. 229-240, 1997.

CLÍMACO J.C.N.; ANTUNES, C.H. Implementation of an user friendly software package—a guided tour of TRIMAP. *Math. and Computer Model*, v.12, n.10–11, p. 1299–1309, 1989.

CLÍMACO J.C.N.; ANTUNES, C.H. TRIMAP— an interactive tricriteria linear programming package. *Foundations of Control Engineering*, v.12, n.3, p. 101–119, 1987.

CLÍMACO, J. C. N.; ANTUNES, C. H.; ALVES, M. J. G. *Programação Linear Multiobjetivo: do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objetivo*. Coimbra: Imprensa Universidade. 2003.

CONSTANT, R. S.; MACHADO, L. G. ; SOARES DE MELLO, J. C. C. B. . ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DE TRENS METROPOLITANOS ATRAVÉS DE UM MODELO DE A NÃO RADIAL. In: *XLIX Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2017, Blumenau. XLIX Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2017.

CONSTANT, R. S.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B. Brazilian Electricity Distributors Efficiency Index Based on Non Radial Efficiency. *IEEE Latin America Transactions* , v. 15, p. 1657-1663, 2017.

FÄRE, R., GROSSKOPF, S. *New directions: efficiency and productivity*. Springer. 2005

FÄRE, R., GROSSKOPF, S. Theory and Application of Directional Distance Functions. *Journal of Productivity Analysis*, v. 13, p. 93-103, 2000.

GALE, H D.; KUHN W.; TUCKER, A. W. *Linear programming and the theory of games*, in: T. C. Koopmans (Ed.), "Activity Analysis of Production and Allocation", John Wiley & Sons, New York, 1951.

GOLANY, B. An Interactive MOLP Procedure for the Extension of DEA to Effectiveness Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, v. 39, n. 8, p. 725-734, 1988.

GOMES JUNIOR, S. F.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; ANGULO MEZA, L. DEA nonradial efficiency based on vector properties, *International Transactions in Operational Research*, v. 20, n. 3, p. 341-364, 2013.

GOMES JUNIOR, S. F.; RUBEM, A. P. S.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; Angulo Meza, L. Evaluation of Brazilian airlines nonradial efficiencies and targets using an alternative DEA approach, *International Transactions in Operational Research*, v. 23, n. 4, p. 669-689, 2016.

GOMES JUNIOR, S.F. *Índice de Eficiência Não Radial em DEA baseado em Propriedades Vetoriais*. Rio de Janeiro. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal Fluminense, 2010.

GOMES JUNIOR, S.F.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L.; CHAVES, M.C.C.; PEREIRA, E.R. Equivalências em modelos MOLP-DEA que fornecem bechmarks para unidades ineficientes – o modelo MORO-D-R, *INGEPRO*, v.2, n.3, p.14 -24, 2010.

GONZALEZ ARAYA, M. C. *Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações*. Tese (Doutorado). Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

HANNAN, E. L. Using duality theory for identification of primal efficient points and for sensitivity analysis in Multiple Objective Linear Programming. *Journal of the Operational Research Society*, v. 29, n. 7, p. 643-649, 1978.

ISERMANN H. *Duality in Multiple Objective Linear Programming*. In: Zionts S. (eds) *Multiple Criteria Problem Solving. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, v. 155, p. 274-285. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.

IVANOV, E. H.; NEHSE, R. Some results on dual vector optimization problems, *Optimization*, v. 16, n. 4, p. 505-517, 1985.

JAHANSHALOO, G.R., HOSSEINZADEH LOTFI, F., MADDAHI, R., JAFARI, Y. Efficiency and benchmarking in the presence of undesirable (bad) outputs: A DEA approach. *International Journal of Applied Mathematical Research*, v. 1, n. 2, p. 178-188. 2012

KOOPMANS, T.C. *Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities*. In: KOOPMANS, T.C. (ed), *Activity analysis of Production and Allocation*. Chapter 3, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc, 1951.

KORHONEN, P., WALLENIOUS, J. A Pareto Race. *Naval Research Logistics*, v. 35, p. 615-623, 1988.

KORNBLUTH, J. S. H. Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming, *Operational Research Quarterly*, v. 25, n. 4, p. 599-614, 1974.

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. John von Neumann's work in Theory of Games and Mathematical Economics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 64, n. 3. p. 100-122, 1958.

LI, X. B.; REEVES, G. R. A multiple criteria approach to data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, v. 115, n. 3, p. 507-517, 1999.

LINS, M. P. E.; ANGULO MEZA, L.; SILVA, A. C. E. A multiobjective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, v. 55, n. 10, p. 1090-1101, 2004.

LOBIANCO, A. T. M.; ANGULO MEZA, L. Uma comparação de métodos de solução para problemas de Programação Linear Multiobjetivo. In: X Simpósio de Pesquisa Operacional de Logística da Marinha, 2007, Rio de Janeiro. *Anais de X Simpósio de Pesquisa Operacional de Logística da Marinha*, 2007.

PEREIRA, D.S., SOARES DE MELLO, J.C.C.B. Efficiency evaluation of Brazilian airlines operations considering the Covid-19 outbreak. *Journal of Air Transport Management*, v. 91, 2021.

QUARIGUASI FROTA NETO, J.; ANGULO MEZA, L. Alternative targets for data envelopment analysis through multi-objective linear programming: Rio de Janeiro Odontological Public Health System Case Study. *Journal of the Operational Research Society*, v. 58, n.7, p. 865–873, 2007.

RÖDDER, W. A generalized saddlepoint theory; its application to duality theory for linear vector optimum problems, *European Journal of Operational Research*, v. 1, n. 1, p. 55-59, 1977.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; ANGULO MEZA, L.; GOMES, E. G.; BIONDI NETO, L. *Curso de Análise Envoltória de Dados*. Anais do XXXVII SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Gramado, RS, Brasil. 2005a.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; CLÍMACO, J. C. N.; ANGULO MEZA, L. Efficiency evaluation of a small number of DMU's: an approach based on Li and Reeves's model. *Pesquisa Operacional*, v. 29, n. 1, p. 97-110, 2009.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; ANGULO MEZA, L.; GOMES, E.G.; BIONDI NETO, L. Limites para eficiências não radiais em DEA: uma abordagem vectorial. *Investigação Operacional*, Lisboa, v.25, n.2, p.243-252, 2005b.

SOARES DE MELLO, J.C.C.B., ANGULO MEZA, L., GOMES, E.G., SERAPIÃO, B.P. LINS, M.P.E. Análise de envoltória de dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras, *Pesquisa Operacional*, v. 23, p. 325-345, 2003.

SOARES DE MELLO, J.C.C.B., LINS, M.P.E., GOMES, E.G. Construction of a smoothed DEA frontier. *Pesquisa Operacional*, v. 28, n. 2, p. 183-201, 2002.

STEUER, R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation And Application*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1986.

THANASSOULIS, E.; DYSON, R.G. Estimating preferred target input–output levels using data envelopment analysis. *European Journal of Operations Research*, v. 56, n. 1, p. 80–97, 1992.

WU, J., LIANG, L., CHEN, Y. DEA game cross-efficiency approach to Olympic rankings. *Omega*, v. 37, n. 4, p. 909-918, 2009.

ZELENY, M. *Multiple criteria decision making*. New York, USA. McGraw-Hill, 1982.

ZHU, J. Data envelopment analysis with preference structure. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, n. 1, p. 136–150, 1996.