

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

Soluções de Corda Cósmica em Teorias $f(R)$ da Gravitação

Gabriela Coutinho de Carvalho

Orientadora: Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Niterói-RJ
Julho, 2011

Gabriela Coutinho de Carvalho

Soluções de Corda Cósmica em Teorias $f(R)$ da Gravitação

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:

Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Niterói
2011

C331 Carvalho, Gabriela Coutinho de.
Soluções de corda cósmica em teorias $f(R)$ da gravitação /
Gabriela Coutinho de Carvalho ; orientador: Maria Emília
Xavier Guimarães. -- Niterói, 2011.
73 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, 2011.
Bibliografia: f. 62-63.

1.COSMOLOGIA. 2.GRAVITAÇÃO. 3.RELATIVIDADE GERAL (FÍSICA).
I.Guimarães, Maria Emília Xavier, Orientador. II.Universidade
Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição
responsável. III.Título.

CDD 523.1

Agradecimentos

Primeiro, gostaria de agradecer meus pais, Mônica Coutinho e Telmo Alves de Carvalho, que são as pessoas mais preciosas na minha vida, por tudo que fizeram por mim durante esse período de mestrado e por nunca medirem esforços para me proporcionar a melhor educação possível.

Ao meu marido Marlon Ramos que foi meu companheiro durante a Graduação e o Mestrado, sempre presente em todos os momentos, me apoiando, incentivando e fazendo os meus dias mais felizes.

À minha irmã Tainara, que inicia também essa jornada, pelo carinho, pela atenção e por ter sido um ombro amigo nas horas que estive triste.

À minha orientadora Maria Emília, que me acompanha desde a Iniciação Científica, pela orientação, pelo carinho, pela paciência e pela amizade.

Às minhas amigas-irmãs Thatyane e Marilane, pelo carinho e por sempre me apoiarem em todos os momentos difíceis.

Aos meus amigos da UFF que dividiram comigo muitos momentos de alegria e de tristeza.

Aos Professores Jürgen e Oxman que me influenciaram muito.

Por fim, agradeço ao CNPq pela ajuda financeira durante o período de mestrado.

Resumo

Nesta dissertação estudamos as soluções de vácuo cilíndricamente simétricas no contexto das teorias $f(R)$ da gravitação. Em particular, estudamos a métrica de uma corda cósmica e suas propriedades nestas teorias. Apresentamos, no final, um estudo comparativo entre os resultados encontrados nesta dissertação e os resultados obtidos previamente na literatura no contexto das teorias da Relatividade Geral e Escalares-Tensoriais da Gravitação.

Abstract

In this thesis we deal with cylindrically symmetric solutions in the context of the $f(R)$ theories of gravity. Using a particular *ansatz* we find a solution corresponding to a cosmic string. We explore the gravitational properties of this metric and, at the end, we compare our result with previous results obtained in other theories of gravity.

Sumário

Lista de Figuras	vi
Introdução	1
1 Formação dos Defeitos Topológicos	4
1.1 A Quebra Espontânea de Simetria	4
1.2 Defeitos Topológicos - Exemplos	7
1.2.1 Exemplo I- Kink	8
1.2.2 Exemplo II - Vórtices	10
1.2.3 Formação de Defeitos Topológicos no Universo Primordial	14
2 As Teorias $f(R)$ da Gravitação	17
2.1 As Equações de Campo	19
2.2 Evolução Cosmológica	22
3 Corda Cósmica em Teorias $f(R)$ da Gravitação	28
3.1 Soluções Cilindricamente Simétricas no Vácuo	29
3.2 Soluções para o Escalar de Curvatura Nulo	32
3.3 Wakes	36
4 Comparação das Cordas Cósmicas em Teorias $f(R)$ com outras Teorias de Gravitação	41
4.1 Cordas Cósmicas em Relatividade Geral	41
4.1.1 Métrica Interior	41

4.1.2	Métrica Exterior	43
4.2	Cordas Cóslicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação	45
4.2.1	Métrica Externa	48
4.2.2	Métrica Interna	50
4.3	Comparação entre as Soluções das Teorias Apresentadas	54
A	Cálculo das componentes do tensor energia-momento efetivo da teoria $f(R)$ na métrica FRLW	58
	Referências Bibliográficas	62

Lista de Figuras

1.1	Ferromagneto de Heisenberg. (a) $T > T_c$, (b) $T = T_c$ e (c) $T = 0$	5
1.2	Potencial de Higgs	6
1.3	Kink	10
1.4	Potencial Efetivo	16
3.1	Espaço-tempo cônico.	35
3.2	(a) Corda cósmica movendo-se com velocidade v_c , (b) Partículas movendo-se com velocidade v_c no referencial da corda, onde sofrem uma perturbação na velocidade ao se aproximarem da mesma.	37
3.3	Ilustração da colisão de partículas com parâmetro de impacto R e R'	38

Notação

Ao longo dessa dissertação utilizamos as seguintes notações

- Índices latinos variam de 1 a 3.
- Índices gregos variam de 0 a 3.
- A derivada parcial é denotada por $\partial_\mu A_\nu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$.
- A derivada covariante é denotada por $D_\mu A_\nu$ ou $\nabla_\mu A_\nu \equiv \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho$.
- Em geral, adotaremos $\hbar = c = 1$, a menos que seja explicitamente evidenciado o contrário.
- Utilizamos a definição da métrica dada por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.
- A conexão métrica é definida como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

- O tensor de Riemann é definido como

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \Gamma_{\kappa\sigma}^\rho.$$

- O tensor de Ricci é definido como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu}.$$

- O escalar de Ricci é definido como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

- O tensor de Einstein é definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

- As identidades de Bianchi são

$$\nabla_{\mu}G^{\mu}_{\nu} \equiv 0.$$

- A Lagrangiana a partir de uma métrica é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}.$$

- As equações de Euler-Lagrange são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\varphi} = 0.$$

- A Conexão métrica a partir de uma Lagrangiana é

$$\ddot{x}^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0$$

com forças externas nulas.

Introdução

O modelo cosmológico padrão pressupõe que o Universo em sua fase inicial era quente e denso. Além disso, apoia-se no princípio cosmológico que assume que o Universo seja homogêneo e isotrópico em larga escala. O modelo padrão de Hot Big Bang é baseado na Relatividade Geral (RG) e, apesar de ser aceito na literatura, é incompleto, pois não consegue explicar várias questões que a Cosmologia moderna e seus dados observacionais nos confrontam [1]. Tais como problema do horizonte, problema do achatamento, o problema da flutuação da densidade do Universo, entre outros. Problemas como esses, por sua vez, são resolvidos pressupondo uma era inflacionária que iniciou-se 10^{-30} segundos após o Big Bang e corresponde a um período em que o Universo expandiu exponencialmente, dirigido por um mecanismo que surge em teorias de grande unificação, conhecidas como GUTs [2]. As GUTs são teorias que tentam unificar três das quatro forças fundamentais: a força nuclear forte, a força nuclear fraca e a força eletromagnética. À medida em que o Universo foi se expandindo, sua temperatura diminuiu, passando de temperaturas da ordem de GUT para temperaturas menores, promovendo possíveis quebras espontâneas de simetrias.

Por outro lado, surgiram teorias alternativas à RG que visam explicar os recentes dados observacionais. A motivação para seu estudo vem de novos indícios da Astrofísica e Cosmologia que indicam uma expansão acelerada do Universo. Evidências dessa aceleração cósmica vêm das análises de curvas de luz de um grande número de supernovas tipo IA e outras observações, como radiação cósmica de fundo e estrutura em larga escala [3, 4]. Em concordância com essas observações, existe um modelo em que acredita-se que o Universo seja constituído de 4% de matéria bariônica, 20% de matéria escura e 76% de energia escura. A matéria escura refere-se a uma forma de matéria desconhecida que ainda não foi detectada em laboratório, mas com

propriedades de matéria ordinária, e a energia escura refere-se a alguma forma de energia que não foi detectada diretamente. Desta maneira, esse quadro inesperado de expansão acelerada transformou nossa visão de um Universo dominado por matéria em um Universo dominado por uma fonte de energia desconhecida e talvez seja um dos maiores desafios do final do século XX transportado para século XXI.

No sentido de explicar a aceleração cósmica sem introduzir fontes de energia desconhecidas, as teorias $f(R)$ retornam com muito entusiasmo. Teorias $f(R)$ consistem numa modificação na gravidade de Einstein em que substituímos o escalar de curvatura R na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária de R . O primeiro modelo desse tipo de gravidade surgiu em 1919 [5].

Existe ainda um certo número de desafios para obter uma forma funcional unívoca para $f(R)$. Vários critérios de viabilidade são tratados para encontrar um modelo fenomenologicamente consistente. Esses critérios são baseados em instabilidades na matéria e no vácuo, e em vínculos relacionados às propriedades conhecidas do sistema solar, por exemplo. Entretanto, essas observações não fornecem um único modelo, mas uma classe de modelos [6].

Acreditam-se que quebras espontâneas de simetrias no Universo primordial deram origem a objetos conhecidos como defeitos topológicos, cuja estabilidade está relacionada à topologia do espaço. Os defeitos topológicos classificam-se da seguinte forma: paredes de domínio, cordas cósmicas e monopólos. Nas décadas de oitenta e noventa, defeitos tais como cordas cósmicas eram muito populares, tendo sido estudados em teorias como a RG e Escalares-Tensoriais (ET) da Gravitação, porque acreditava-se serem os responsáveis pela formação de galáxias e aglomerados de galáxias. Contudo, essa hipótese hoje já está obsoleta devido aos dados do WMAP. No entanto, estes defeitos possuem outras características importantes em Cosmologia.

No início dos anos 2000, o interesse no estudo das cordas cósmicas retornou em razão à Teoria de Cordas. A Teoria de Cordas prevê o surgimento de cordas cósmicas devido à escala de energia. A escala na Teoria de Cordas era próxima à escala de Planck ($10^{19} GeV$) e a escala na corda cósmica é da ordem de GUT ($10^{16} GeV$) ou menor. A princípio, as cordas cósmicas e a Teoria de Cordas não tinham ligação, as escalas de energia eram muito diferentes. No entanto,

verificou-se que a escala de energia da teoria das cordas pode ser substancialmente menor e defeitos macroscópicos, tais como cordas cósmicas, são previstos na teoria [7, 8] e [9].

O objetivo principal desta dissertação é estudar as soluções de cordas cósmicas em teorias $f(R)$ da gravitação.

Quando substituimos o escalar de curvatura R pela função $f(R)$ na ação de Einstein-Hilbert, encontramos equações de campo mais complexas que as equações de campo na RG e para simplificá-las, precisamos impor certas simetrias. A gravidade $f(R)$ tem sido amplamente estudada no caso de simetrias esféricas [6]. No entanto, com o intuito de obter soluções em outra simetria, iremos estudá-las em simetrias cilíndricas utilizando as coordenadas de Weyl e veremos que, como consequência de um caso particular ($R = 0$), encontramos um espaço-tempo cônico externo a uma corda cósmica.

Esta dissertação apresenta-se da seguinte forma: no capítulo 1, fazemos uma revisão da teoria dos defeitos topológicos. No capítulo 2, apresentamos as teorias $f(R)$ da gravitação. No capítulo 3, obtemos a métrica de uma corda cósmica em teorias $f(R)$ da gravitação e estudamos suas propriedades geométricas. No capítulo 4, fazemos uma comparação entre os resultados obtidos nesta dissertação e os resultados previamente obtidos na literatura no contexto de outras teorias de gravitação, tais como RG e ET.

Finalmente, no capítulo 5, fazemos um sumário dos resultados obtidos aqui e apresentamos as conclusões deste trabalho.

Capítulo 1

Formação dos Defeitos Topológicos

Defeitos topológicos já foram amplamente estudados na Física da Matéria Condensada e na Cosmologia [10]. Esses objetos surgem em modelos que procuram entender o cenário padrão das interações (forças eletrofracas e fortes). Acredita-se que essas interações se unifiquem na escala de energia GUT (escala de grande unificação), que é da ordem de $10^{16} GeV$. O resfriamento do universo devido à sua expansão, passando de temperaturas comparáveis às da GUT para temperaturas menores, promoveu sucessivas quebras espontâneas de simetrias dando origem aos defeitos topológicos.

Existem basicamente três tipos de defeitos topológicos: monopólos (objetos puntiformes), paredes de domínio (superfícies de descontinuidade) e vórtices (linhas extensas).

Neste capítulo, discutiremos a origem dos defeitos topológicos com particular ênfase na formação dos vórtices. O estudo dos defeitos topológicos é simplificado pelo fato de suas propriedades fundamentais não dependerem dos detalhes do modelo, permitindo assim, o uso de modelos mais simples para tornar clara a visualização. Como o estudo da quebra espontânea de simetria é de fundamental importância para a compreensão da formação de objetos topológicos, a primeira seção fará uma breve revisão sobre o assunto.

1.1 A Quebra Espontânea de Simetria

O ferromagneto de Heisenberg é um exemplo clássico de quebra espontânea de simetria. Esse sistema consiste de uma rede infinita de dipolos magnéticos de spin $1/2$ com interações

spin-spin entre os primeiros vizinhos de forma a alinhar os spins. Embora o sistema seja rotacionalmente invariante, abaixo de uma temperatura crítica (temperatura de Curie T_c), o estado fundamental possui todos os spins alinhados apontando numa direção particular e, consequentemente, não obedece à simetria do sistema. Nesse exemplo, podemos ver que ao variar um parâmetro (a temperatura, no caso) até um valor crítico, o sistema não obedece à simetria original. Diz-se, então, que a simetria foi espontaneamente quebrada. Uma característica da quebra espontânea de simetria é que ela apresenta vários estados fundamentais possíveis. No caso do ferromagneto, cada estado fundamental é caracterizado pelo alinhamento dos spins numa dada direção (Veja figura 1.1).

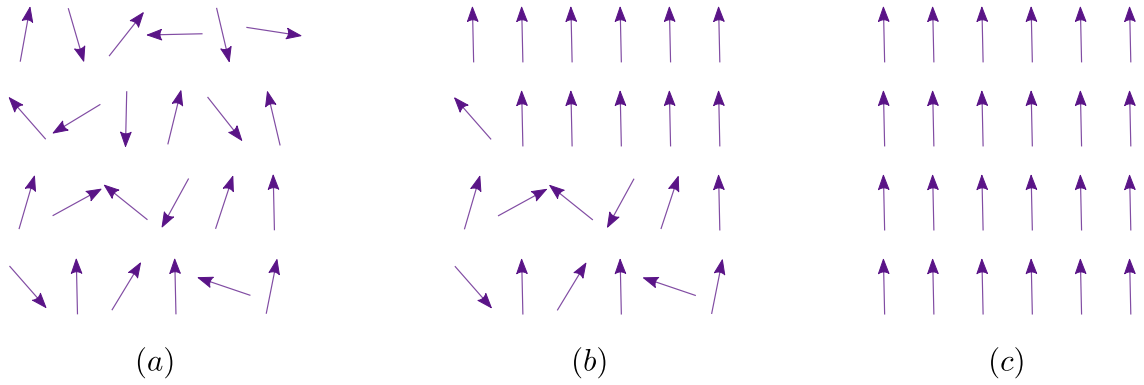


Figura 1.1: Ferromagneto de Heisenberg. (a) $T > T_c$, (b) $T = T_c$ e (c) $T = 0$

No estudo de Teorias de Campos, a quebra de simetria local é descrita em termos de campos escalares conhecidos como campos de Higgs. Para ilustrar a quebra espontânea de simetria, vamos tratar o modelo abeliano de Higgs cuja densidade Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi, \phi^*), \quad (1.1)$$

onde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético descrito em termos do potencial vetor da teoria de calibre e o potencial $V(\phi, \phi^*)$ é dado por

$$V(\phi, \phi^*) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^*\phi - \eta^2)^2, \quad (1.2)$$

sendo λ e η parâmetros positivos. A densidade Lagrangiana (1.1) é invariante sob a transformação de simetria local $U(1)$:

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda(x)}\phi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{i}{q}\partial_\mu\Lambda(x). \quad (1.3)$$

O potencial (1.2) é conhecido como *potencial de Higgs* e apresenta um mínimo em $|\phi| = \eta$ (veja a figura 1.2).

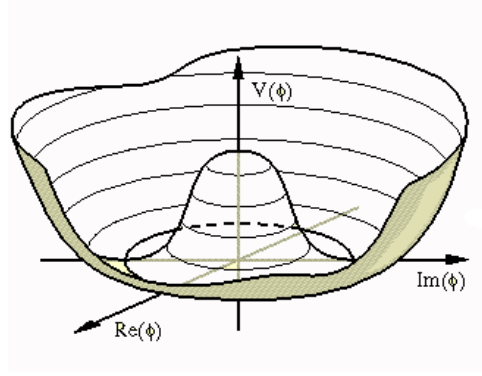


Figura 1.2: Potencial de Higgs

Sendo assim, o estado fundamental da teoria é caracterizado por um valor esperado não-nulo

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \eta e^{i\theta}, \quad (1.4)$$

onde θ é uma fase arbitrária. O valor esperado do vácuo é diferente para diferentes valores de θ , obtendo assim várias configurações possíveis de estados fundamentais que não são invariantes pelas transformações (1.3), quebrando espontaneamente a simetria. No entanto, o valor esperado do vácuo se encontra no círculo de raio η independente do θ e todos os valores possíveis para o estado fundamental são equivalentes (suas propriedades podendo ser estudadas escolhendo-se um desses valores).

Os campos físicos correspondem às excitações em torno do estado fundamental. Então podemos perturbar o vácuo (estado fundamental) da seguinte forma

$$\phi = \eta + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (1.5)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos escalares reais. Estudando o caso em que ϕ é real ($\phi_2 = 0$), a densidade

Lagrangiana (1.1) torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q^2\eta^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - 2\lambda\eta^2\phi_1^2 + \text{termos acoplados}, \quad (1.6)$$

onde os termos que acompanham $A_\mu A^\mu$ e ϕ_1^2 são as respectivas massas dos campos A_μ e ϕ_1 . O campo escalar ϕ possui um grau de liberdade e o campo A_μ , que a princípio era sem massa, possuía dois graus de liberdade. Ao ganhar massa através da quebra espontânea de simetria, o campo A_μ passa a ter três graus de liberdade, preservando assim o número de graus de liberdade do sistema: 2 campos escalares massivos + 1 fóton sem massa = 1 campo escalar massivo + 1 fóton massivo. Desta maneira, podemos dizer que o campo de calibre A_μ (fóton) absorveu um grau de liberdade do campo escalar ϕ e tornou-se massivo. Esse processo que ocorreu devido à quebra espontânea de simetria local do grupo $U(1)$ é conhecido como mecanismo de Higgs [11].

Apesar de ter tratado a simetria $U(1)$, poderíamos generalizar para um caso em que outras simetrias mais complicadas são quebradas. Para tal, considere um modelo em que a Lagrangiana seja invariante sob a ação do grupo de Lie G , onde o potencial permita uma quebra espontânea dessa simetria e o campo adquira o valor esperado de vácuo não nulo $\langle\phi\rangle = \phi_0$. Definindo um grupo de estabilidade H que consiste em todos aqueles elementos $h \in H$ em que $h\phi_0 = \phi_0 \in G/H$ (mantêm o vácuo invariante) e que corresponde a um subgrupo de G , podemos ver que a variedade \mathcal{M} formada pelos estados de vácuo é definida como um espaço quociente de G e H :

$$\mathcal{M} = \frac{G}{H}. \quad (1.7)$$

No caso particular do modelo abeliano de Higgs, $G = U(1)$ e H é o grupo identidade. Então, a variedade \mathcal{M} é topologicamente equivalente ao círculo S^1 .

1.2 Defeitos Topológicos - Exemplos

A seguir, daremos dois exemplos de soluções solitônicas: o kink e o vórtice.

1.2.1 Exemplo I- Kink

Vamos considerar a equação de sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a \sin b\phi = 0. \quad (1.8)$$

Essa equação descreve um campo escalar ϕ em uma dimensão temporal e uma dimensão espacial. Pode-se verificar que

$$\phi(x, t) = \frac{4}{b} \arctan e^{\pm\gamma(x-vt)} \quad (1.9)$$

é solução dinâmica da equação (1.8) e corresponde a uma onda solitária conhecida como *sóliton*, que se propaga sem mudar sua forma e seu tamanho, ou seja, sem dissipar energia.

Além da solução dinâmica, a equação (1.8) também possui infinitas soluções estacionárias dadas por

$$\phi = \frac{2\pi n}{b}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.10)$$

A Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi), \quad (1.11)$$

com o potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{a}{b} (1 - \cos b\phi) \quad (1.12)$$

fornece a equação (1.8) ao ser substituído nas equações de Euler-Lagrange. Podemos ver, a partir de (1.12), que existem infinitas soluções estacionárias em que $V(\phi) = 0$ e a Lagrangiana (1.11), conseqüentemente, sofre uma quebra espontânea de simetria dando origem a um sóliton estacionário.

A densidade de energia correspondente é dada pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi), \quad (1.13)$$

e a expansão em série de Taylor do potencial (1.12) é dada por

$$V(\phi) = \frac{ab}{2}\phi^2 - \frac{ab^3}{4!}\phi^4 + \dots \quad (1.14)$$

Chamando $m^2 = ab$ e $\lambda = ab^3$, temos

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \dots \quad (1.15)$$

Vamos pensar agora numa configuração estática ($\partial\phi/\partial t = 0$) onde ϕ tende a um dos zeros de $V(\phi)$ (no caso, $n = 0$) quando $x \rightarrow \infty$ e tende a outro zero (no caso, $n = 1$) quando $x \rightarrow -\infty$.

Na região entre esses dois valores temos

$$\phi \neq \frac{2\pi n}{b}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} \neq 0.$$

Consequentemente, de (1.13), vemos que nesta região a densidade de energia é positiva. Uma solução para a configuração estática da equação sine-Gordon é dada por

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi}$$

cuja integral é

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 = V(\phi). \quad (1.16)$$

De (1.13) e (1.16) podemos obter a energia do sóliton estacionário através da expressão

$$E = \int \mathcal{H} dx = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] dx$$

Essa integral é facilmente obtida utilizando-se a equação (1.12)

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{2a}{b} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi/b} (1 - \cos b\phi)^{1/2} d\phi \\ &= \frac{8m^3}{\lambda}. \end{aligned}$$

Podemos concluir dizendo que o sóliton possui energia finita e inversamente proporcional à constante de acoplamento λ .

Existe um modelo que facilita a visualização do sóliton. Nesse modelo consideramos uma corda infinita com vários pinos presos igualmente espaçados. Considere também a força gravitacional atuando em cada um dos pregos. O estado fundamental corresponde à situação em que todos os pinos se encontram na posição vertical. O sóliton encontrado quando fazemos $n : 0 \rightarrow 1$ corresponde à situação da figura 1.3. Esses sólitons são chamados *kinks*. Esse kink é estável e não pode decair para o estado fundamental porque, para tanto, precisaríamos de uma quantidade (semi-)infinita de energia para mover (semi-)infinitos pregos. Desta forma, a razão pela qual o kink é estável está ligada à condição de contorno do espaço. Podemos dizer então que o kink é um *objeto topológico*, i.e., um objeto cuja estabilidade está relacionada à topologia do espaço que, de acordo com o modelo, é a corda infinita presa aos pregos [11].



Figura 1.3: Kink

1.2.2 Exemplo II - Vórtices

Tentaremos agora fazer uma simples generalização do sóliton em uma dimensão para duas dimensões. Para tal, vamos considerar o campo escalar em um espaço bi-dimensional cujo contorno é um círculo infinito S^1 . Vamos escolher um campo escalar que no contorno ($r \rightarrow \infty$) assumo o valor

$$\phi = \eta e^{in\theta} \quad (1.17)$$

$$\nabla\phi = \frac{1}{r}(in\eta e^{in\theta})\hat{\theta},$$

onde r e θ são as coordenadas polares, η é uma constante positiva e n é inteiro, pois $\phi(\theta) = \phi(\theta + 2\pi)$.

A Lagrangiana e o Hamiltoniano são respectivamente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - V(\phi) \quad (1.18)$$

e

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + V(\phi). \quad (1.19)$$

Vamos considerar uma configuração estática do tipo

$$V(\phi) = [\eta^2 - \phi^* \phi]^2 \quad (1.20)$$

de forma tal que $V = 0$ no contorno. Então, utilizando (1.17) e (1.19), temos que em $r \rightarrow \infty$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = \frac{n^2 \eta^2}{2r^2}. \quad (1.21)$$

A energia da configuração pode ser calculada da mesma forma que no caso do sine-Gordon em uma dimensão. Assim, obtemos

$$E \approx \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathcal{H} r dr d\theta = \pi n^2 \eta^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} dr, \quad (1.22)$$

que é infinita. A conclusão desse resultado é que não podemos generalizar o kink para duas ou mais dimensões, pois $E \rightarrow \infty$.

A fim de solucionar este problema, podemos introduzir um campo de calibre onde a derivada covariante do campo escalar ϕ é dada por

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + iq A_\mu \phi, \quad (1.23)$$

e a Lagrangiana é dado por

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi, \phi^*), \quad (1.24)$$

que é igual a Lagrangiana (1.1) para um determinado λ .

Escolhemos A_μ tal que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{q} \nabla(n\theta) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.25)$$

ou seja,

$$A_r \rightarrow 0, \quad A_\theta \rightarrow -\frac{n}{qr} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.26)$$

Essa escolha é chamada de calibre puro. Temos também que

$$D_\theta \phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + iqA_\theta \phi = 0, \quad D_r \phi = 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.27)$$

i. e., $D_\mu \phi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Além disso,

$$F_{r\theta} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r = \frac{n}{qr^2} = -F_{\theta r}. \quad (1.28)$$

Portanto, $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Desta forma, podemos concluir que a Lagrangiana e o Hamiltoniano são nulos no contorno S^1 e que o calibre puro resolve o problema da energia divergente em $r \rightarrow \infty$. No entanto, além de possibilitar uma energia finita no contorno, uma das consequências do calibre puro é que o sóliton ganha um fluxo magnético. Pelo Teorema de Stokes, o fluxo no círculo S^1 é dado por

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint A_\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{q}, \quad (1.29)$$

ou seja, um fluxo quantizado (múltiplo inteiro de uma quantidade fundamental $2\pi/q$).

Até o momento, construímos uma configuração de campo em 2-dimensões, consistindo de um campo escalar acoplado a um campo de calibre que, nesse caso, é o próprio campo eletromagnético. Essa configuração carrega um fluxo magnético e, desde que $D_\mu \phi \rightarrow 0$ e $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ em $r \rightarrow \infty$, a configuração possui energia finita. Ao considerar $\phi \rightarrow \eta e^{in\theta}$, estamos assumindo que ϕ corresponde a um único valor no círculo de raio η contido no plano de mínima energia. Adicionando uma terceira dimensão, da qual ϕ não depende, essa configuração se transforma em uma linha infinita, chamada de vórtice. Uma solução de (1.17) caracterizada por um determinado n é estável porque não pode ser deformada continuamente em outra solução caracterizada por outro valor de n . Assim como no caso do kink, o vórtice é um defeito topoló-

gico porque sua estabilidade está relacionada à topologia da variedade do vácuo, neste caso, o círculo S^1 [11]. Com relação às cordas cósmicas, a analogia mais simples no espaço-tempo de Minkowski é a configuração do tipo vórtice presente no modelo abeliano de Higgs (1.1).

Como vimos, o espaço do grupo $U(1)$ é um círculo S^1 . Esse espaço é dito não simplesmente conexo porque, por exemplo, uma fita que envolve duas vezes o círculo não pode ser deformada continuamente em uma fita que o envolve uma única vez.

Seja um caminho a no espaço X definido como uma função contínua $a(s)$ do parâmetro contínuo s . Então cada valor de s pertencente ao intervalo $0 \leq s \leq 1$ corresponde a um ponto $a(s)$ no espaço X . Se o caminho a conecta os pontos P e Q , temos que $a(0) = P$ e $a(1) = Q$. Se $a(0) = a(1) = P$, temos um caminho fechado. Considere dois caminhos $a(s)$ e $b(s)$, ambos começando em P e terminando em Q e suponha que exista um função $L(t, s)$ tal que $L(0, s) = a(s)$ e $L(1, s) = b(s)$. Então os caminhos a e b são ditos homotópicos ($a \sim b$) e a inversa do caminho a , dada por a^{-1} , é definida como $a^{-1}(s) = a(1 - s)$.

Agora vamos considerar os caminhos a e b com o ponto final de a coincidindo com o ponto inicial de b , tal que $a(1) = b(0)$ e definir um caminho $c = ab$ de forma que

$$c(s) = \begin{cases} a(s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ b(2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Considere uma classe de caminhos homotópicos à a dada por $[a]$ que possuam os mesmos pontos extremos. Podemos definir uma lei de multiplicação dada por $[a][b] = [ab]$ e verificar que essa lei define um grupo (fechamento, associatividade, elemento identidade e inversa) conhecido como grupo fundamental ou primeiro grupo de homotopia ($\pi_1(X)$) do espaço X . Segue que o primeiro grupo de homotopia do espaço S^1 é não trivial, i.e., $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} é o grupo aditivo dos inteiros (o inteiro n corresponde ao número de voltas em torno do círculo S^1).

Para finalizar esta sub-seção, podemos afirmar que, de forma geral, os grupos de homotopia associados à variedade do vácuo \mathcal{M} têm grande importância na classificação dos defeitos topológicos (veja tabela 4.1). Em geral, em um modelo com quebra espontânea de simetria, é a topologia da variedade do vácuo que determina se alguma estrutura aparece:

Defeito topológico	Dimensão	Classificação
Paredes de domínio	2	$\pi_0(\mathcal{M})$
Cordas	1	$\pi_1(\mathcal{M})$
Monopólos	0	$\pi_2(\mathcal{M})$

Tabela 1.1: Classificação topológica dos defeitos conforme o grupo de homotopia $\pi_k(\mathcal{M})$.

1.2.3 Formação de Defeitos Topológicos no Universo Primordial

Todo o estudo precedente foi feito considerando-se a temperatura como sendo nula ($T = 0$). No entanto, o Universo nos primeiros instantes após sua criação era quente e denso. Assim, a partir de agora, vamos introduzir um potencial efetivo para o modelo (1.1) que contenha correções de temperatura ¹

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi, T) &= V(\phi) + \left(\frac{\lambda + 3q^2}{12} \right) T^2 |\phi|^2 \\
&= m^2(T) |\phi|^2 + \frac{1}{4} |\phi|^4,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

onde $m^2(T)$ é a massa do campo de Higgs no estado simétrico ($\langle \phi \rangle = 0$) dada por

$$m^2(T) = \frac{1}{12} [(\lambda + 3q^2)T^2 - 6\lambda\eta^2]. \tag{1.31}$$

Esse resultado pode ser encontrado fazendo uma analogia a sistemas estudados em Matéria Condensada. Neste caso, podemos considerar que o campo ϕ descreve um condensado de Bose de partículas de Higgs. O valor de equilíbrio do campo ϕ é obtido minimizando a energia livre

$$F = E - TS, \tag{1.32}$$

que é uma função não trivial de ϕ e, em geral, depende da temperatura ² [10].

A massa dada por (1.31) é nula quando

¹Omitimos os termos que não dependem de ϕ .

²Devemos assumir que o potencial químico de todas as partículas é nulo $\mu_i = 0$. Caso contrário, esse equilíbrio térmico pode ser encontrado minimizando o potencial termodinâmico $\Omega = F - \sum \mu_i N_i$.

$$T = T_c = \left(\frac{6\lambda}{\lambda + 3q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \eta. \quad (1.33)$$

Observe que T_c é da ordem de η (escala de energia característica). Calculando os extremos do potencial efetivo $V_{eff}(\phi, T)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi} &= \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} + \left(\frac{\lambda + 3q^2}{12} \right) T^2 \phi^* \\ &= \frac{\lambda}{2} \phi^* \phi \phi^* - \frac{\lambda}{2} \phi^* \eta^2 + \left(\frac{\lambda + 3q^2}{12} \right) T^2 \phi^* \\ &= \frac{\lambda}{2} |\phi|^2 \phi^* + m^2(T) \phi^* = 0 \\ \Rightarrow |\phi|^2 &= -\frac{2}{\lambda} m^2(T) \quad \text{ou} \quad \phi^* = \phi = 0. \end{aligned}$$

Para $T > T_c$, o termo $m^2(T)$ é positivo e o mínimo do potencial ocorre quando $\phi = 0$, restaurando a simetria ($\langle \phi \rangle = 0$). Para $T < T_c$, o termo $m^2(T)$ é negativo, o estado simétrico torna-se instável e ϕ assume um valor esperado não nulo dado por

$$\langle \phi \rangle = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}} m(T) e^{i\theta} = \left(\frac{\lambda + 3q^2}{6\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} (T - T_c)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}. \quad (1.34)$$

No contexto da Cosmologia, significa que nos estados iniciais do universo o valor de equilíbrio do campo de Higgs era $\langle \phi \rangle = 0$, pois se tratava de um universo denso e quente ($T > T_c$). À medida que o universo começou a esfriar e atingir temperaturas $T < T_c$, passou a ter um valor esperado não nulo (veja a figura 1.4) dado por (1.34). Contudo, a fase θ não pode ser determinada apenas pela física local, dependendo também de flutuações aleatórias. Desta forma, θ tomará diferentes valores em diferentes regiões do espaço. Vamos assumir $\xi(t)$ como comprimento de escala no qual os valores de θ não estão correlacionados, i.e., os valores de $\langle \phi \rangle$ em duas regiões diferentes são completamente independentes se elas estão separadas por uma distância maior que um certo fator de correlação $\xi(t)$. A magnitude de ξ depende do processo de relaxação que estão envolvidos, mas deve obedecer à condição de causalidade:

$$\xi(t) < d_H, \quad (1.35)$$

onde d_H é a distância que a luz percorre durante o tempo de vida do Universo. Como $d_H \sim t$, segue que $\xi(t) \lesssim t$ [10].

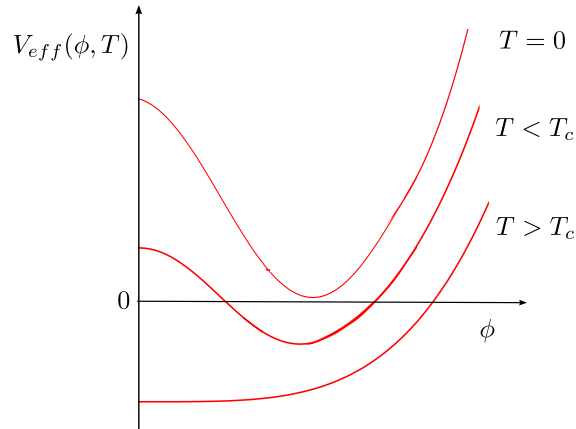


Figura 1.4: Potencial Efetivo

A formação de defeitos topológicos no Universo primordial é proposta no contexto de teorias de grande unificação. A idéia central dessas teorias é a de que as simetrias na física de partículas resultam de sucessivas quebras espontâneas de simetria de um grupo maior de simetria G :

$$G \longrightarrow H \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}. \quad (1.36)$$

Como vimos anteriormente, as estruturas formadas, em geral, são determinadas pela topologia da variedade do vácuo e correspondem aos defeitos topológicos. Acredita-se que sob efeitos de tensão e auto-interação, os vórtices extensos tenham evoluído até o presente. Desta forma, esses objetos são de fundamental importância na compreensão da história da evolução do Universo. O tensor energia-momento dos vórtices extensos é de natureza relativística, sendo a teoria clássica de campos insuficiente para uma descrição completa desse tipo de objeto. Nos próximos capítulos, trataremos os vórtices (ou cordas cósmicas) utilizando teorias alternativas à Relatividade Geral conhecidas como teorias $f(R)$ da gravitação.

Capítulo 2

As Teorias $f(R)$ da Gravitação

Em 1998, Perlmutter [3] e Riess [4] independentemente mostraram, através de análises de curvas de luz de um grande número de supernovas tipo IA, que o Universo estaria em expansão acelerada. No entanto, até o momento, nenhuma explicação satisfatória para este fenômeno foi encontrada. Muitas propostas estão sendo apresentadas como possíveis fonte para esta aceleração, entre elas:

- a constante cosmológica Λ ,
- a energia escura,
- teorias alternativas da gravitação, notadamente teorias $f(R)$.

A constante cosmológica, Λ , foi um termo introduzido por Einstein em suas equações ao impor que o Universo era estático. Após a descoberta de Hubble em 1922 [12], com a observação do afastamento de galáxias através do desvio para o vermelho ("redshift"), Einstein abandonou este conceito. Contudo, dentro do quadro de expansão acelerada, a constante cosmológica tem seu interesse renovado, exercendo uma espécie de pressão negativa de forma a acelerar o Universo em larga escala. Evidências empíricas, no entanto, parecem indicar que Λ é 10^{120} menor do que era esperado [10]. Esta diferença nada desprezível é conhecida como o "problema da constante cosmológica".

A segunda proposta listada postula a existência de uma energia chamada energia escura, que corresponde a alguma forma de energia que ainda não foi detectada diretamente no laboratório

e não satisfaz à condição de energia forte ¹. Dados de diferentes fontes parecem indicar que a energia escura é a forma de energia predominante no universo (76%). Muitos modelos de energia escura estão sendo estudados e nenhum se mostrou totalmente convincente ou livre de problemas [5].

Por sua vez, as teorias $f(R)$ são teorias alternativas à Relatividade Geral de Einstein que não fazem menção à fontes de energia desconhecidas e tentam explicar o presente cenário de expansão acelerada do Universo. Essas teorias surgem de uma substituição do escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária do mesmo, i.e., $f(R)$. O estudo de teorias não-Einsteinianas não é recente, as primeiras tentativas surgiram apenas como curiosidade científica, mas depois apareceram outras motivações. Uma delas vem do fato da Relatividade Geral ser uma teoria não renormalizável e, desta maneira, não pode ser convencionalmente quantizada. Teorias que adicionam termos de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert (ação da gravitação) são renormalizáveis. No entanto, a relevância de tais termos na ação foi considerada restrita à regimes de gravidade forte. Sendo assim, tais correções não afetariam a fenomenologia gravitacional em baixas energias [13].

Esse tipo de modificação na gravidade teve início em 1919 com Weyl. O primeiro modelo $f(R)$ foi o

$$f(R) = R - \mu^4/R,$$

onde μ é uma escala de massa da ordem do valor atual do parâmetro de Hubble $\mu \sim H \sim 10^{-33}eV$ [5].

As teorias $f(R)$ ainda se encontram em testes e são consideradas por alguns autores [5, 13] como teorias efetivas, com intuito de mostrar que modificações na gravidade podem ser uma alternativa viável para a energia escura.

Nesse capítulo, vamos estudar de maneira generalizada as características da gravidade modificada, sem especificar nenhuma forma funcional para $f(R)$ e sem resolver as equações de campo para alguma simetria.

¹Se a condição de energia forte fosse satisfeita $\rho + 3P \geq 0$, onde ρ e P são respectivamente a densidade de energia e a pressão do fluido cosmológico, não poderia existir aceleração (a gravidade é atrativa).

2.1 As Equações de Campo

Como foi dito anteriormente, as teorias $f(R)$ vêm de uma generalização direta da ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

onde g é o determinante da métrica, $\kappa \equiv 8\pi G$, G é a constante gravitacional e R é o escalar de Ricci. Substituindo R por uma função arbitrária do mesmo,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (2.2)$$

A princípio, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ possui vários graus de liberdade: escalar, vetor e tensor, massivos ou sem massa. No entanto, em RG o gráviton sem massa de spin 2 é o único que se propaga, sendo os graus de liberdade escalar e vetorial eliminados através de uma transformação de calibre. Quando substituimos $R \rightarrow f(R)$, adicionamos mais um grau de liberdade escalar massivo que pode ser o responsável pela aceleração cósmica.

Podemos obter as equações de Einstein utilizando dois formalismos diferentes: o formalismo da métrica e o formalismo de Palatini. No formalismo da métrica consideramos a métrica como a única variável independente ao se extremizar a ação, já no formalismo de Palatini consideramos ambas, métrica e conexões, como variáveis independentes. As teorias $f(R)$ ainda apresentam mais uma versão chamada *gravidade $f(R)$ métrica-afim*. Nesta versão utilizamos a variação de Palatini e abandonamos a suposição de que a ação de matéria independe da conexão. Temos também que a gravidade $f(R)$ no formalismo da métrica é chamada *gravidade $f(R)$ métrica* e no formalismo de Palatini, *gravidade $f(R)$ Palatini*. Na RG, as equações de campo obtidas nos dois formalismos são as mesmas. Contudo, nas teorias $f(R)$ as equações de campo são as mesmas somente para uma classe de modelos $f(R)$ [14]. Neste capítulo, faremos todo o estudo das teorias $f(R)$ utilizando o formalismo da métrica. Nossa principal referência será o artigo [13].

Adicionando a ação de matéria S_M à ação de gravidade (2.2), temos

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(\psi, g_{\mu\nu}), \quad (2.3)$$

onde ψ representa os campos de matéria. Agora vamos encontrar as equações de campo da teoria. Antes de tudo, precisamos das seguintes relações

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \\ \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}, \\ \delta R &= -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{\rho\sigma} - \nabla_\sigma\nabla_\nu\delta g_{\rho\mu}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aplicando o princípio da mínima ação na equação (2.3) e utilizando as relações (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x')} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}(x')} f(R) + \sqrt{-g} \frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}(x')} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}(x')} \right) = 0 \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\sqrt{-g} f(R) g_{\alpha\beta}(x) \frac{\delta g^{\alpha\beta}(x)}{\delta g^{\mu\nu}(x')} + \sqrt{-g} \frac{df(R)}{dR} \left(-R^{\lambda\rho} \frac{\delta g_{\lambda\rho}(x)}{\delta g^{\mu\nu}(x')} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g^{\theta\sigma} g^{\lambda\rho} \left(\nabla_\lambda \nabla_\rho \frac{\delta g_{\theta\rho}(x)}{\delta g^{\mu\nu}(x')} - \nabla_\sigma \nabla_\rho \frac{\delta g_{\theta\lambda}(x)}{\delta g^{\mu\nu}(x')} \right) \right) \right] + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}(x')} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sabendo que o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}(x)}, \quad (2.6)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g} f(R) g_{\alpha\beta}(x) \delta_\alpha^\nu \delta_\nu^\beta \delta^4(x-x') + \sqrt{-g} \frac{df(R)}{dR} \left(-R^{\lambda\rho} (-g_{\mu\lambda}(x) g_{\nu\rho}(x) \delta^4(x-x')) + \right. \right. \\ \left. \left. + g^{\theta\sigma} g^{\lambda\rho} (-g_{\theta\mu}(x) g_{\sigma\nu}(x) \nabla_\lambda \nabla_\rho \delta^4(x-x') - g_{\theta\mu} g_{\lambda\nu} \nabla_\sigma \nabla_\rho \delta^4(x-x')) \right) \right] - \frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} \Rightarrow & - \int d^4x \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}(x) \delta^4(x - x') + \int d^4x \frac{df(R)}{dR} R_{\mu\nu} \delta^4(x - x') + \int d^4x \frac{df(R)}{dR} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta^4(x - x') - \\ & - \int d^4x \frac{df(R)}{dR} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \nabla_\lambda \nabla_\rho \delta^4(x - x') = \kappa T_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde usamos as relações $g^{\theta\sigma} g^{\lambda\rho} g_{\theta\mu} g_{\lambda\nu} = \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho$ e $g^{\theta\sigma} g_{\theta\mu} = \delta_\mu^\sigma$. Utilizando a propriedade da função delta de Dirac,

$$\int d^4x \frac{d^n}{dx^n} \delta^4(x - x') h(x) = \frac{d^n}{dx^n} h(x'), \quad (2.7)$$

encontramos as equações de campo nas teorias $f(R)$

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde a “linha” indica derivada com respeito à R (ou seja, $f'(R) = df/dR$), ∇_μ é a derivada covariante e $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$. Tomando-se o traço de (2.8), as equações de campo tornam-se

$$f'(R) R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T, \quad (2.9)$$

em que $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ é traço do tensor energia-momento. Note que a relação entre R e T tem uma forma diferente das equações de campo na RG, em que $R = -\kappa T$. O fato de R se relacionar diferencialmente com T mostra que as equações de campo nas teorias $f(R)$ admitem um número maior de soluções do que na RG.

Isolando o termo $R_{\mu\nu}$ na equação (2.8), reescrevemos as equações de campo da teoria na forma das equações de Einstein com um tensor energia-momento efetivo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa}{f'(R)} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}), \quad (2.10)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{g_{\mu\nu} (f(R) - Rf'(R))}{2} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right]. \quad (2.11)$$

Esse tensor energia-momento, em geral, não satisfaz qualquer condição de energia e a densidade

de energia efetiva é negativa [5]. De maneira análoga à teoria Escalar-Tensorial que veremos mais adiante, podemos definir um acoplamento gravitacional efetivo da seguinte forma $G_{eff} \equiv G/f'(R)$. Conseqüentemente, $f'(R)$ deve ser positivo a fim de que o gráviton não seja um “ghost” nessas teorias.

Na próxima seção, vamos retornar nossa atenção para o cenário cosmológico de expansão acelerada no qual baseia-se a motivação atual para o estudo das teorias $f(R)$. No entanto, para que tais teorias tenham uma consistente base teórica compatível com as observações cosmológicas e com os experimentos, alguns critérios devem ser satisfeitos.

2.2 Evolução Cosmológica

A idéia de que o Universo é homogêneo e isotrópico vem se consolidando ao longo do tempo. Um modelo matemático que descreve um Universo desse tipo foi elaborado por A. Friedmann há sessenta anos [12]. Na Relatividade Geral, esse modelo admite um Universo em expansão. Desta forma, veremos que ao estudar o modelo de Friedmann no contexto das teorias $f(R)$, termos extras surgem como possíveis contribuições para a aceleração cósmica.

Assumindo que todos os pontos e direções no Universo são equivalentes, podemos adotar a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.12)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e k é a constante de curvatura que pode assumir três valores diferentes: $k = -1$ (geometria hiperbólica), $k = 0$ (geometria plana) e $k = +1$ (geometria esférica). Além disso, assume-se também que o conteúdo de matéria que preenche o Universo se comporta como um fluido perfeito de densidade ρ e pressão (isotrópica) p . Sendo u_μ a 4-velocidade do fluido, temos que

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Então para um observador co-móvel, em que $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, o tensor energia-momento do fluido torna-se

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - kr^2)p/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/(r^2a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/(r^2 \sin^2\theta a^2) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Voltando às equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (2.15)$$

a equação correspondente à $\mu\nu = 00$ produz

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \quad (2.16)$$

onde (\cdot) significa derivada com relação a t . As equações em relação à $\mu\nu = ij$ produzem

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (2.17)$$

Substituindo (2.16) em (2.17), a equação (2.17) reduz-se à

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.18)$$

Essas equações obtidas a partir das equações de Einstein são conhecidas como *equações de Friedmann* e a razão \dot{a}/a é conhecida como *parâmetro de Hubble*. O atual valor do parâmetro de Hubble chama-se constante de Hubble ², H_0 . Outra quantidade usual na Cosmologia é o *parâmetro de densidade* dado por

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad \Rightarrow \quad \Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.19)$$

²Como existe uma certa incerteza para esse valor, é frequentemente parametrizado como $H_0 = 77 \text{ Km/seg/Mpc}$, tal que Mpc é a unidade megaparsec que corresponde à $3,09 \times 10^{24} \text{ cm}$.

onde usamos a equação de Friedmann (2.18). Segue que

$$\Omega > 1, k > 0 \rightarrow \text{universo fechado,}$$

$$\Omega = 1, k = 0 \rightarrow \text{universo plano,}$$

$$\Omega < 1, k < 0 \rightarrow \text{universo aberto.}$$

Utilizando as equações de campo da teoria $f(R)$ e considerando o tensor energia-momento de um fluido perfeito, podemos encontrar as equações de Friedmann generalizadas. Para tal, vamos tratar somente as componentes $\mu\nu = 00$ e $\mu\nu = 11$ do tensor energia-momento efetivo (2.11) na métrica de FRLW (2.12), que foram calculadas no Apêndice A

$$T_{00}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{-(f(R) - Rf'(R))}{2} - 3HF'(R)\dot{R} \right] \quad (2.20)$$

e

$$T_{11}^{eff} = \frac{a^2}{\kappa(1 - kr^2)} \left[\frac{(f(R) - Rf'(R))}{2} + F''(R)\dot{R}^2 + F'(R)\ddot{R} + 2HF'(R)\dot{R} \right] \quad (2.21)$$

onde adotamos $f'(R) = F(R)$ e $H \equiv \dot{a}/a$, esta última corresponde ao parâmetro de Hubble. Retornando à equação (2.10), utilizando (2.14) e sabendo-se que G_{00} e G_{11} na métrica FRLW são

$$G_{00} = 3 \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad \text{e} \quad G_{11} = -\frac{a^2(2\dot{H} + 3H) + k}{1 - kr^2}, \quad (2.22)$$

obtemos

$$H^2 = \frac{\kappa}{3F} \left[\rho - \frac{1}{2\kappa}(f + RF) - \frac{3HF'R}{\kappa} \right] \quad (2.23)$$

e

$$2\dot{H} + 3H = -\frac{\kappa}{F} \left[p + \frac{(f - RF)}{2\kappa} + \frac{F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R}}{\kappa} \right]. \quad (2.24)$$

Note que essas equações foram obtidas fazendo o parâmetro externo $k = 0$, i.e., focamos na geometria plana. Essa escolha foi feita no sentido de simplificar as equações.

Podemos definir a densidade de energia efetiva e a pressão da geometria respectivamente como

$$\rho_{eff} = \frac{RF - f}{2\kappa F} - \frac{3H\dot{R}F'}{\kappa F}, \quad (2.25)$$

$$P_{eff} = \frac{(f - RF)}{2\kappa F} + \frac{F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R}}{\kappa F}. \quad (2.26)$$

Então, as equações (2.23) e (2.24) no vácuo tomam as formas

$$H^2 = \frac{k}{3}\rho_{eff}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_{eff} - 3p_{eff}) \quad (2.28)$$

iguais à equação de Friedmann padrão. Em cosmologia, fluidos perfeitos obedecem, em geral, à equação de estado

$$p = w\rho, \quad (2.29)$$

onde w é uma constante independente do tempo. De fato, sempre podemos definir o parâmetro $w = p/\rho$, mesmo que ele varie ou não. Contudo, se w varia, $p = w\rho$ não pode ser chamada legitimamente de “equação de estado” [15]. O parâmetro w_{eff} da “equação de estado efetiva” nas teorias $f(R)$ pode ser expresso como

$$w_{eff} \equiv \frac{p_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{(f - RF)/2 + F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R}}{(RF - f)/2 + 3H\dot{R}F'}. \quad (2.30)$$

As equações de campo na Relatividade Geral são um conjunto de equações diferenciais não-lineares $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ (em unidades relativísticas), onde $G_{\mu\nu}$ está associado ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que determina a geometria do espaço-tempo. Existem três maneiras de interpretar esse conjunto de equações. Uma delas é considerar que o tensor energia-momento pode ser obtido a partir de um dado tensor métrico. No entanto, essa interpretação traz consigo alguns problemas, porque o tensor energia-momento pode ser não-físico. Sendo assim, existem certas condições

de energia que estabelecem algumas restrições sobre um determinado tensor energia-momento a fim de produzir soluções físicas quando acoplado ao tensor métrico nas equações de Einstein. No total, somam-se quatro condições: condição de energia fraca ($\rho \geq 0$), condição de energia forte ($\rho + 3p \geq 0$), condição de energia nula ($\rho + p \geq 0$) e condição de energia dominante ($\rho - p \geq 0$).

Existe uma certa arbitrariedade na escolha da forma funcional de $f(R)$ na gravidade modificada. Essa escolha, porém, deve conduzir a soluções físicas. Poderíamos impor condições de energia para o tensor energia-momento efetivo na gravidade $f(R)$. Entretanto, este tensor, obtido ao escrever as equações de campo da gravidade alternativa como equações de Einstein efetivas, em geral, viola todas as condições de energia da Relatividade Geral. No sentido de impor condições de energia de maneira geral para a gravidade modificada, em 2007, Santos *et al.* [16] apresentaram a condição de energia forte e a condição de energia nula no contexto das teorias $f(R)$ através da equação de Raychaudhuri junto à exigência de que a gravidade é atrativa. Já as condições de energia dominante e fraca foram impostas sobre o tensor energia-momento efetivo incluindo a matéria.

Além de satisfazer às condições de energia, qualquer modelo $f(R)$ deve estar de acordo com o Modelo Cosmológico Padrão, que exige uma sequência de épocas seguidas uma das outras:

- Era inflacionária;
- Um período de radiação durante o qual ocorre a nucleossíntese;
- Uma era de matéria.

Durante os primeiros estágios do Universo a radiação predominava. Contudo, quando o Universo atingiu uma temperatura de aproximadamente $4000K$, a densidade de matéria tornou-se igual à densidade de radiação. Sendo o estágio inicial conhecido como “era de radiação” e o subsequente estágio conhecido como “era de matéria”.

A nucleossíntese juntamente com o Modelo Cosmológico Padrão explica a existência de elementos leves (H, He e Li). A era inflacionária, no entanto, corresponde a uma fase acelerada proposta por Alan Guth em 1981 [17] na tentativa de resolver os problemas associados ao modelo do Big Bang. Um desses problemas é um problema de causalidade (existe uma distância

mínima que um fóton pode percorrer num determinado intervalo de tempo). Como mencionamos antes, o nosso Universo observável aparenta ser homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Sendo assim, surge a questão de como o Universo nesse perfil pode ter iniciado a partir de uma grande região causalmente desconectada. Esta questão é conhecida como problema do horizonte.

Outra dificuldade provém de um ajuste fino nas condições iniciais para obter um Universo consistente com as atuais observações, que indica que Ω deve ser próximo da unidade no Universo primordial, i.e., um Universo aproximadamente plano. A necessidade desse ajuste fino chama-se problema do achatamento.

Nos modelos $f(R)$, a nucleossíntese deve estar bem vinculada e a era de matéria deve durar tempo suficiente para permitir perturbações na densidade primordial geradas durante a inflação em que estruturas observadas hoje são formadas. Além disso, as transições entre essas eras consecutivas devem ser suaves, o que não ocorre em todas as formas funcionais de $f(R)$.

Podemos escolher um fator de escala $a(t)$ e integrar a equação diferencial (2.23) para obter a forma funcional de $f(R)$. Dados observacionais da história de $a(t)$, entretanto, são insuficientes para reconstruir $f(R)$, porque produzem uma classe de modelos de forma não unívoca. Desta maneira, precisamos de informações adicionais tais como perturbações nas densidades cosmológicas.

Outros critérios de viabilidade para modelos $f(R)$ podem ser testados. Contudo, estes não serão o foco desta dissertação. O que fizemos até aqui foi apresentar as teorias $f(R)$ de maneira geral, sem especificar uma forma funcional, para que no próximo capítulo possamos encontrar as soluções para uma corda cósmica no contexto das teorias $f(R)$ no formalismo da métrica.

Capítulo 3

Corda Cósmica em Teorias $f(R)$ da Gravitação

A não-linearidade das equações de campo na Relatividade Geral as tornam equações de difícil tratamento. Não obedecem o princípio da superposição e, desta maneira, não podemos dividir um problema físico em partes mais simples e estudá-las. O motivo pelo qual as equações de Einstein são não-lineares é que o campo gravitacional produzido por uma fonte contém energia e, de acordo com a relatividade especial, massa, que é, por sua vez, fonte de um campo gravitacional. Em resumo, o fato das equações de campo na Relatividade Geral serem não-lineares é devido ao campo gravitacional ser acoplado a ele mesmo.

A dificuldade de obter soluções para equações não-lineares, fizeram com que Einstein acreditasse que nunca estaria hábil para encontrá-las de forma exata em sua teoria. No entanto, para surpresa de todos, K. Schwarzschild encontrou soluções exatas em menos de um ano depois da publicação da teoria da Relatividade Geral em 1915. Essas soluções, entretanto, foram obtidas fazendo uma suposição de simetria esférica. Hoje existe um grande número de soluções para as equações de Einstein, a maioria supõe certas simetrias. Levi-Civita [18] encontrou soluções estáticas no vácuo para simetria cilíndrica logo após as soluções para simetria esférica.

Como mencionamos no capítulo anterior, as teorias $f(R)$ devem apresentar um número maior de soluções do que a Relatividade Geral, porque R se relaciona diferencialmente com T e não algebricamente como na Relatividade Geral, em que $R = -\kappa T$. Soluções esfericamente

simétricas das equações de campo nas teorias $f(R)$ já foram amplamente estudadas. Desta forma, olhando para soluções com diferentes simetrias, assim como na Relatividade Geral, a próxima simetria sugerida seria a simetria cilíndrica. Neste capítulo, estudaremos soluções cilíndricamente simétricas nas coordenadas de Weyl no caso particular em que $R = 0$ com base no artigo [19] e encontraremos uma forma generalizada do espaço-tempo gerado por uma corda cósmica.

3.1 Soluções Cilíndricamente Simétricas no Vácuo

As equações de campo das teorias $f(R)$ no vácuo, i.e. na ausência de matéria, são dadas por

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)F(R) = 0, \quad (3.1)$$

onde $F(R) = df/dR$. Tomando o traço das equações modificadas acima, obtemos

$$F(R)R - 2f(R) + 3\square F(R) = 0. \quad (3.2)$$

Como estamos interessados em soluções estáticas com simetria cilíndrica das equações de campo no vácuo, vamos trabalhar com uma forma geral tal como a métrica nas coordenadas cilíndricas de Weyl (t, r, ϕ, z) dada por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2k-2u}, e^{2k-2u}, w^2e^{-2u}, e^{2u}), \quad (3.3)$$

onde $k = k(r)$, $u = u(r)$ e $w = w(r)$. A partir desta métrica, obtemos os símbolos de Christoffel não-nulos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}^0 &= k' - u', & \Gamma_{11}^1 &= k' - u', \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{w'}{w} - u', & \Gamma_{31}^3 &= u', \\
\Gamma_{00}^1 &= k' - u', & \Gamma_{22}^1 &= e^{-2k}(wu' - ww'), \\
\Gamma_{33}^1 &= -e^{4u-2k}u'
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e os tensores de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{00} &= k'' - u'' + \frac{k'w'}{w} - \frac{u'w'}{w}, \\
R_{11} &= -k'' + u'' - \frac{w''}{w} + \frac{k'w'}{w} - \frac{u'w'}{w} - 2u'^2, \\
R_{22} &= e^{-2k}(ww'u' - ww'' + w^2u''), \\
R_{33} &= e^{4u-2k} \left(-u'' - \frac{u'w'}{w} \right),
\end{aligned}$$

onde a “linha” indica derivada com respeito a r . Desta maneira, o correspondente escalar de curvatura é dado por

$$\begin{aligned}
R &= R_{00} g^{00} + R_{11} g^{11} + R_{22} g^{22} + R_{33} g^{33} \\
&= - \left(k'' - u'' + \frac{k'w'}{w} - \frac{u'w'}{w} \right) e^{2u-2k} + \left(-k'' + u'' - \frac{w''}{w} + \frac{k'w'}{w} - \frac{u'w'}{w} - 2u'^2 \right) e^{2u-2k} + \\
&\quad + e^{-2k}(ww'u' - ww'' + w^2u'') \frac{e^{2u}}{w^2} + e^{4u-2k} \left(-u'' - \frac{u'w'}{w} \right) e^{-2u} \\
&= -2e^{2u} \left(\frac{-wu'' + wk'' - u'w' + w'' + wu'^2}{we^{2k}} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Podemos escrever as equações de Einstein modificadas para a teoria $f(R)$, isolando $f(R)$ em (3.2) e substituindo em (3.1), como

$$FR_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (FR - \square F(R)).$$

Analisando

$$\frac{FR_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F}{g_{\mu\mu}} = \frac{1}{4}(FR - \square F(R))$$

com μ fixo, podemos definir $A_\mu \equiv \frac{FR_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F}{g_{\mu\mu}}$. O fato de

$$A_\mu = \frac{1}{4}(FR - \square F(R)), \quad (3.6)$$

implica que A_μ independe da escolha do μ , temos então a liberdade de fazer $A_\mu = A_\nu$ para qualquer μ, ν . Isso nos permite escrever três equações de campos independentes utilizando $A_t = A_r$, $A_t = A_\phi$ e $A_t = A_z$. Antes de escrever as três equações, vamos precisar dos seguintes resultados

$$\begin{aligned} \nabla_0 \nabla_0 F &= \partial_0 \partial_0 F - \Gamma_{00}^b \nabla_b F = -(k' - u')F', \\ \nabla_1 \nabla_1 F &= \partial_1 \partial_1 F - \Gamma_{11}^b \nabla_b F = F'' - (k' - u')F', \\ \nabla_2 \nabla_2 F &= \partial_2 \partial_2 F - \Gamma_{22}^b \nabla_b F = -F' e^{-2k}(w^2 u' - ww'), \\ \nabla_3 \nabla_3 F &= \partial_3 \partial_3 F - \Gamma_{33}^b \nabla_b F = e^{4u-2k} u' F', \end{aligned} \quad (3.7)$$

lembrando que k, u e w só dependem de r , $F = F(r)$. Utilizando esses resultados em A_t, A_r e A_ϕ , obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$-F'' + 2F'(k' - u') + F \left(\frac{-2k'w'}{w} + \frac{w''}{w} + 2u'^2 \right) = 0, \quad (3.8)$$

$$Fw^2 \left(-k'' - \frac{k'w'}{w} + \frac{w''}{w} \right) + F'(ww' - w^2 k') = 0, \quad (3.9)$$

$$F \left(-k'' + 2u'' - \frac{k'w'}{w} + \frac{2w'u'}{w} \right) + F'(k' - 2u') = 0, \quad (3.10)$$

correspondentes a $A_t = A_r$, $A_t = A_\phi$ e $A_t = A_z$, respectivamente. Então, qualquer grupo de funções $u(r), k(r)$ e $w(r)$ que satisfaçam às equações acima é solução das equações de campo modificadas nas teorias $f(R)$ no vácuo para um dado $F(R)$ que satisfaça (3.2). Encontrar uma

solução geral para esse sistema de equações diferenciais não é uma tarefa fácil. Desta maneira, nosso próximo passo é tratar um caso particular em que $R = 0$, de forma análoga a [19].

3.2 Soluções para o Escalar de Curvatura Nulo

Derivando a equação (3.2) com respeito a r , obtemos

$$RF' - R'F + 3(\square F)' = 0.$$

Estudando o caso particular em que $R = \text{constante}$, a equação acima implica em $F' = 0$. Consequentemente, as equações (3.8), (3.9) e (3.10) tornam-se

$$2u'^2 + \frac{w''}{w} - 2\frac{k'w'}{w} = 0, \quad (3.11)$$

$$k'' + \frac{k'w'}{w} - \frac{w''}{w} = 0, \quad (3.12)$$

$$2u'' + \frac{2w'u'}{w} - \frac{k'w'}{w} - k'' = 0. \quad (3.13)$$

Para transformar esse sistema de equações diferenciais não-lineares em apenas uma equação diferencial, inicialmente somamos (3.12) e (3.13), que produz

$$u'' + \frac{w'u'}{w} - \frac{1}{2}\frac{w''}{w} = 0. \quad (3.14)$$

Fazendo $u' = g(r)$ em (3.14), temos que

$$wg' + w'g = \frac{1}{2}w'' \quad \Rightarrow \quad \frac{d(wg)}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\right), \quad (3.15)$$

que integrando obtemos

$$g(r) = u' = \frac{1}{2}\frac{w' + c_2}{w}, \quad (3.16)$$

onde c_2 é uma constante de integração. Subtraindo (3.13) de (3.12) temos

$$k'' + \frac{k'w'}{w} - \frac{w''}{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{w' + c_1}{w}. \quad (3.17)$$

Para encontrar k' , fizemos o mesmo procedimento para encontrar u' , onde c_1 é uma constante de integração. Substituindo as relações obtidas para k' e u' em (3.11) obtemos a seguinte equação diferencial para $w(r)$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{w' + c_2}{w} \right)^2 + \frac{w''}{w} = 2w' \frac{(w' + c_1)}{w^2}, \quad (3.18)$$

no caso em que R é constante.

Vamos escolher $w(r)$ linear (i.e. $w'' = 0$) que satisfaça (3.18) em que as funções métricas sejam da seguinte forma

$$\begin{aligned} u &= c_3 \pm \sqrt{\frac{c_5}{c_6}} \ln w, \\ k &= c_4 + \frac{c_5}{c_6} \ln \frac{w}{c_6}, \\ w &= c_6 r + c_7. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para que w seja de fato solução da equação (3.18), as constantes c_5 e c_6 devem ter as seguintes relações

$$c_2 = \left(2\sqrt{\frac{c_5}{c_6}} - 1 \right) c_6 \quad \text{e} \quad c_1 = c_5 - c_6. \quad (3.20)$$

Podemos ver que as funções métricas escolhidas acima, além de satisfazer à equação (3.18), correspondem ao caso particular $R = 0$. Podemos redefinir $\tilde{c}_4 = c_4 - (c_5/c_6) \ln c_6$ e $\rho \equiv w = c_6 r$, onde a última corresponde à nova coordenada radial ¹. Retornando à métrica nas coordenadas de Weyl e substituindo as funções escolhidas, encontramos

$$ds^2 = e^{-2(c_3 \pm \sqrt{\frac{c_5}{c_6}} \ln \rho)} \left[e^{2(\tilde{c}_4 + \frac{c_5}{c_6} \ln \rho)} \left(\frac{d\rho^2}{c_6^2} - dt^2 \right) + \rho^2 d\phi^2 \right] + e^{2(c_3 \pm \sqrt{\frac{c_5}{c_6}} \ln \rho)} dz^2. \quad (3.21)$$

¹Podemos fazer $c_7 = 0$ sem perda de generalidade.

Fazendo $m = \sqrt{c_5/c_6}$ temos que

$$\begin{aligned}
ds^2 &= e^{-2(c_3 \pm m \ln \rho)} \left[e^{2(\tilde{c}_4 + m^2 \ln \rho)} \left(\frac{d\rho^2}{c_6^2} - dt^2 \right) + \rho^2 d\phi^2 \right] + e^{2(c_3 \pm m \ln \rho)} dz^2 \\
&= e^{-2c_3} e^{\ln \rho^{\mp 2m}} \left[e^{2\tilde{c}_4} e^{\ln \rho^{2m^2}} \left(\frac{d\rho^2}{c_6^2} - dt^2 \right) + \rho^2 d\phi^2 \right] + e^{2c_3} e^{\ln \rho^{\pm 2m}} dz^2 \\
&= e^{2(\tilde{c}_4 - c_3)} \rho^{2m(m \mp 1)} \left(\frac{d\rho^2}{c_6^2} - dt^2 \right) + e^{-2c_3} \rho^{2 \pm 2m} d\phi^2 + e^{2c_3} \rho^{\pm 2m} dz^2 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

e definindo $A \equiv e^{\tilde{c}_4 - c_3} / c_6$ encontramos

$$\begin{aligned}
ds^2 &= A^2 \rho^{2m(m \mp 1)} (d\rho^2 - c_6^2 dt^2) + \frac{A^2}{A^2} e^{-2c_3} \rho^{2 \mp 2m} d\phi^2 + \frac{A^2}{A^2} e^{2c_3} \rho^{\pm 2m} dz^2 \\
&= A^{2 \frac{m(m \mp 1) + 1}{m(m \mp 1) + 1}} \rho^{2m(m \mp 1)} (d\rho^2 - c_6^2 dt^2) + \frac{A^{2 \frac{m(m \mp 1) + 1}{m(m \mp 1) + 1}}}{A^2} e^{-2c_3} \rho^{2 \mp 2m} d\phi^2 + \frac{A^{2 \frac{m(m \mp 1) + 1}{m(m \mp 1) + 1}}}{A^2} e^{2c_3} \rho^{\pm 2m} dz^2 \\
&= A^{\frac{2m(m \mp 1)}{m(m \mp 1) + 1}} \rho^{2m(m \mp 1)} A^{\frac{2}{m(m \mp 1) + 1}} (d\rho^2 - c_6^2 dt^2) + A^{\frac{2 \mp 2m}{m(m \mp 1) + 1}} \rho^{2 \mp 2m} e^{-2c_3} A^{\frac{-2 \pm 2m}{m(m \mp 1) + 1}} d\phi^2 + \\
&\quad + A^{\frac{\pm 2m}{m(m \mp 1) + 1}} \rho^{\pm 2m} e^{2c_3} A^{\frac{\mp 2m}{m(m \mp 1) + 1}} dz^2.
\end{aligned}$$

Podemos então redefinir as coordenadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} &= A^{\frac{1}{m(m \mp 1) + 1}} \rho \\
\tilde{t} &= c_6 A^{\frac{1}{m(m \mp 1) + 1}} t \\
\tilde{\phi} &= e^{-c_3} A^{-\frac{1 \mp m}{m(m \mp 1) + 1}} \phi \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\tilde{z} = e^{c_3} A^{\frac{\mp m}{m(m \mp 1) + 1}} z \quad (3.24)$$

e a métrica se reduz a

$$ds^2 = \tilde{\rho}^{2m(m \mp 1)} (d\tilde{\rho}^2 - d\tilde{t}^2) + \tilde{\rho}^{2 \mp 2m} d\tilde{\phi}^2 + \tilde{\rho}^{\pm 2m} d\tilde{z}^2. \quad (3.25)$$

Aplicando a transformação complexa em (3.25)

$$\tilde{t} \rightarrow i\tilde{z} \quad \tilde{z} \rightarrow i\tilde{t} \quad (3.26)$$

encontramos uma métrica bem conhecida [20]

$$ds^2 = \tilde{\rho}^{2m(m\mp 1)}(d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{z}^2) + \tilde{\rho}^{2\mp 2m}d\tilde{\phi}^2 - \tilde{\rho}^{\pm 2m}d\tilde{t}^2. \quad (3.27)$$

Essa métrica, sem o sinal \pm , é muito semelhante as soluções estáticas cilindricamente simétricas de Levi-Civita na Relatividade Geral, com a constante m assumindo valores positivos e negativos. A partir da métrica acima, podemos observar também, que $\tilde{\phi}$ não assume valores entre $[0, 2\pi]$, porque $\tilde{\phi} = e^{-c_3} A^{-\frac{1\mp m}{m(m\mp 1)+1}} \phi$ e ϕ pode tomar valores no intervalo $[0, 2\pi]$.

No caso em $m = 0, 1$, temos o espaço-tempo plano e, para $m = 0$, encontramos um deficit angular dado por $\delta\phi = (1 - e^{-c_4} c_6)2\pi$, caso $e^{-c_4} c_6 < 1$. O espaço descrito pela métrica (3.27) quando $m = 0$,

$$ds^2 = (d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{z}^2) + \tilde{\rho}^2 e^{-2c_4} c_6^2 d\phi^2 - d\tilde{t}^2, \quad (3.28)$$

é localmente plano, no entanto, por causa do deficit angular, não é globalmente Euclideano. Esse espaço-tempo é dito cônico (veja a Figura 3.1) e pode ser comparado ao espaço externo à uma corda cósmica em que o deficit angular corresponde à $1 - 4\eta$, sendo η a massa gravitacional por unidade de comprimento do espaço-tempo. No caso da corda cósmica $\tilde{\phi}$ varia conforme $0 \leq \tilde{\phi} \leq B$, onde $B = 2\pi(1 - 4\eta)$.

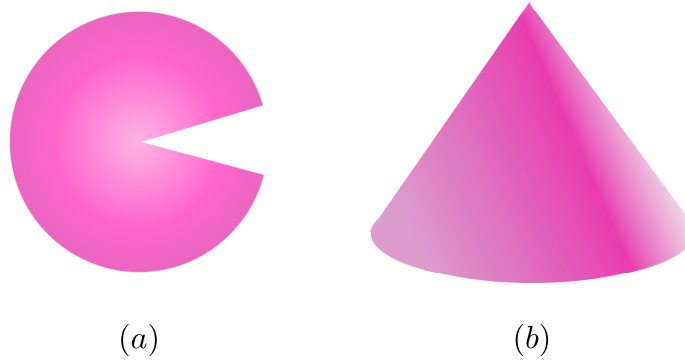


Figura 3.1: Espaço-tempo cônico.

Para obter esse resultado utilizamos $R = 0$ e trabalhamos com equações de campo no vácuo. O traço dessas equações produz a equação (3.2), indicando que $f(R = 0) = 0$. Então os modelos para $f(R)$ devem ser uma superposição linear de R^n , onde $n > 0$. Neste caso, não poderíamos utilizar o modelo protótipo $f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}$. O modelo mais comum que segue essa superposição linear é o $f(R) = R + \frac{R^2}{\Lambda}$.

Desta maneira, podemos escolher a forma funcional $f(R) = R + \sum_n \alpha_n R^n$. Substituindo esta forma nas equações de Friedmann generalizadas (2.23), encontramos

$$H^2 = \frac{\kappa}{3(1 + \sum_n n\alpha_n R^{n-1})} \left[\rho - \frac{1}{2\kappa} (f + R + \sum_n n\alpha_n R^n) - \frac{3H \sum_n n(n-1)\alpha_n R^{n-1}}{\kappa} \right]. \quad (3.29)$$

No caso em que $R = 0$, recuperamos as equações de Friedmann na RG

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho.$$

3.3 Wakes

Nesta seção estudaremos a formação e evolução de estruturas devido ao movimento da corda cósmica através de uma região contendo matéria bariônica. Antes acreditava-se que as cordas cósmicas eram responsáveis pela formação de estruturas em larga escala, no entanto, com base nos dados observacionais, esta suposição deixou de ser aceita. A corda cósmica pode ser responsável pela formação de algumas estruturas, mas não são estruturas em larga escala.

Vamos tratar uma situação em que a corda se move com velocidade constante v_c paralela ao eixo x . Como g_{tt} é constante, a corda não exerce força gravitacional sobre partículas-teste. No entanto, considerando o referencial em que a corda encontra-se em repouso, partículas-teste, a medida em que se aproximam da corda, sofrem uma perturbação em suas velocidades (veja a figura 3.2) dada por

$$u_i = \delta v_c \simeq \frac{\delta\phi}{2} \gamma v_c = a_0 \pi \gamma v_c, \quad (3.30)$$

onde $\gamma = (1 - v_c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Essa perturbação na velocidade é resultado da geometria do espaço-tempo externo à corda cósmica, em que temos um deficit angular.

Desta forma, algumas partículas que deslocam-se em regiões com $y > 0$ podem colidir com partículas que deslocam-se em regiões $y < 0$ após a passagem pela corda (veja figura 3.3), formando assim a chamada “wake”.

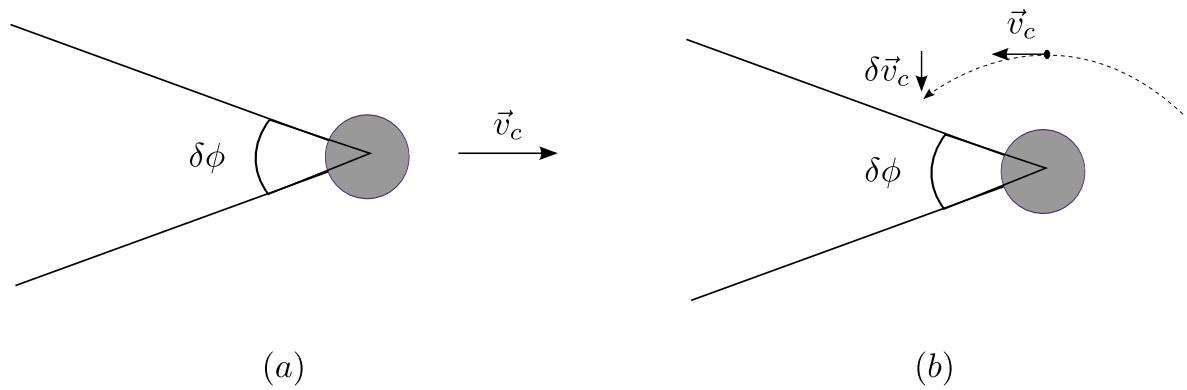


Figura 3.2: (a) Corda cósmica movendo-se com velocidade v_c , (b) Partículas movendo-se com velocidade v_c no referencial da corda, onde sofrem uma perturbação na velocidade ao se aproximarem da mesma.

Vamos agora fazer uma descrição quantitativa da acreção na wake utilizando a aproximação de Zel'dovich [21]. Essa aproximação consiste na consideração do problema de acreção Newtoniana num Universo em expansão utilizando métodos de perturbação linear. Mas antes devemos lembrar que estamos considerando o Universo homogêneo e isotrópico em larga escala e, desta maneira, ao longo de um intervalo de tempo, todas as distâncias entre os pontos co-móveis ² aumentam pelo mesmo fator. Sendo assim, a trajetória da partícula pode ser descrita como

$$\vec{r}(\vec{q}, t) = a(t) \left[\vec{q} - \vec{\psi}(\vec{q}, t) \right], \quad (3.31)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, \vec{q} é a separação co-móvel inicial da partícula à corda (trajetória não perturbada) e $\vec{\psi}(\vec{q}, t)$ é o deslocamento co-móvel devido à atração gravitacional induzida pela wake na partícula.

A equação de movimento no limite Newtoniano é dada por

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}}, \quad (3.32)$$

onde $\Phi(\vec{r}, t)$ é o potencial Newtoniano que é dado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(\vec{r}, t), \quad (3.33)$$

²Lembrando que pontos co-móveis são aqueles definidos no mesmo sistema de referencial inercial que se desloca com esses pontos.

com $\rho(\vec{r}, t)$ representando a densidade de matéria ³.

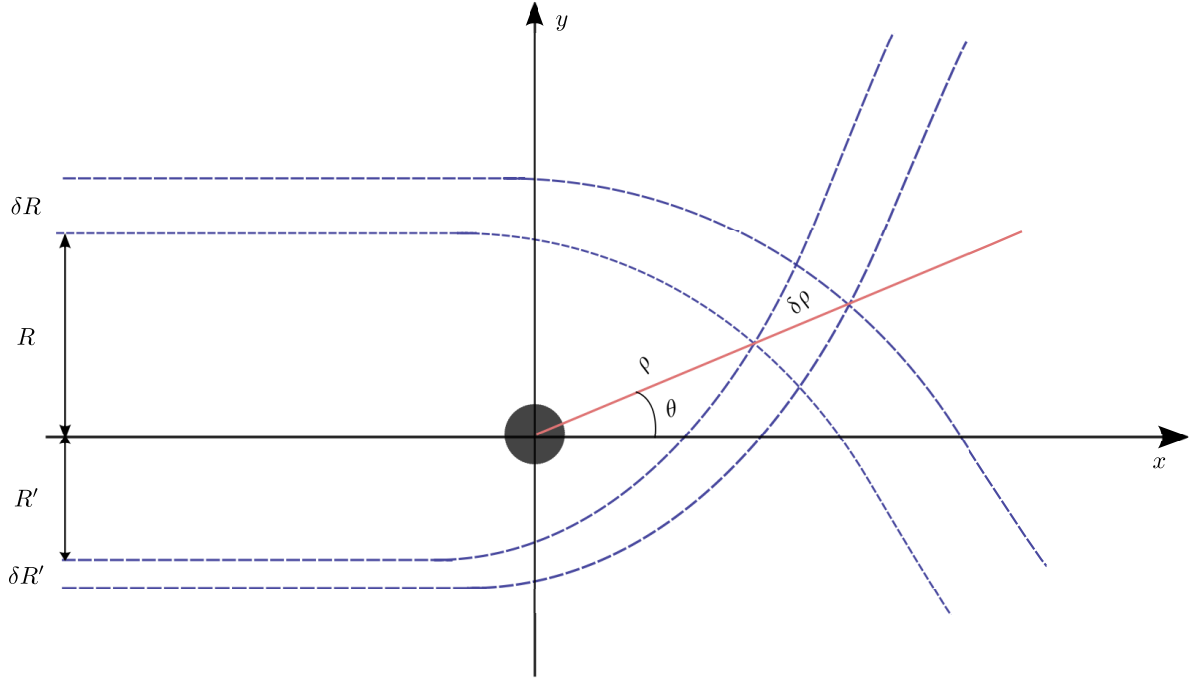


Figura 3.3: Ilustração da colisão de partículas com parâmetro de impacto R e R' .

A densidade matéria $\rho(\vec{r}, t)$ é, em termos da densidade de fundo $\rho_0(t)$, determinada por [21]

$$\rho(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = a^3(t)\rho_0(t)d^3\vec{q} \quad (3.34)$$

que, por sua vez, produz

$$\rho(\vec{r}, t) = a^3(t)\rho_0(t)\det^{-1} \left| \frac{d\vec{r}}{d\vec{q}} \right| = a(t)\rho_0 \left(\frac{dr}{dq} \right)^{-1} \simeq \rho_0 \left(1 + \frac{\partial\psi_r(q, t)}{\partial q} \right), \quad (3.35)$$

onde r , q e ψ_r são as componentes radiais ⁴ (em coordenadas cilíndricas) de \vec{r} , \vec{q} e $\vec{\psi}$ respectivamente.

Substituindo (3.35) na equação de Poisson (3.33) e integrando uma vez, temos que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}} = 4\pi G \left[\frac{\rho_0(t)}{3}\vec{r} + \rho_0(t)a(t)\vec{\psi}(\vec{q}, t) \right]. \quad (3.36)$$

Estamos assumindo que a wake é formada em $t_i > t_{eq}$, onde t_{eq} é o tempo a partir de quando

³A constante gravitacional efetiva é igual a $G_{eff} = G/f'(R)$ nas teorias $f(R)$, mas na seção anterior vimos que $f'(R) = 1$ no caso em que R é nulo.

⁴Estamos nos referindo a coordenada r , e não ρ , como a coordenada radial para não confundir com a densidade.

a matéria começa a dominar sobre a radiação. Então podemos substituir a relação $\ddot{a}/a = -4\pi G\rho_0/3$, que é válida na era de matéria ⁵, na equação (3.36). Desta forma, utilizando a equação (3.32), obtemos

$$\ddot{\psi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + 3\frac{\ddot{a}}{a}\psi = 0. \quad (3.37)$$

Como estamos tratando $t > t_{eq}$, temos também que $a(t) \propto t^{2/3}$. Consequentemente a equação acima toma a forma

$$\ddot{\psi} + \frac{4}{3t}\dot{\psi} - \frac{2}{3t^2}\psi = 0 \quad (3.38)$$

com condições iniciais apropriadas $\psi(t_i) = 0$ e $\dot{\psi}(t_i) = -u_i$. Essa equação é a equação de Euler cuja solução é dada por

$$\psi(x, t) = \frac{3}{2} \left[\frac{u_i t_i^2}{t} - u_i t_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (3.39)$$

A coordenada co-móvel $q(t)$ pode ser calculada usando o fato de $\dot{r} = 0$ quando a partícula para de expandir com o fluxo de Hubble e começa a colapsar na wake. Equivalente, $q + 2\psi(x, t) = 0$ [22] que produz

$$q(t) = -\frac{6}{5} \left[\frac{u_i t_i^2}{t} - u_i t_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (3.40)$$

A espessura $d(t)$ e a densidade $\sigma(t)$ da wake, são dadas por [23]

$$d(t) \approx 2q(t) \left[\frac{t}{t_i} \right]^{2/3} \quad (3.41)$$

$$\sigma(t) \approx \rho_0(t)d(t). \quad (3.42)$$

⁵No limite em que encontramos a corda cósmica nas teorias $f(R)$ recuperamos as equações de Friedmann na RG.

Sendo assim, temos que

$$d(t) \approx \frac{12}{5} a_0 \pi \gamma v_c \left[\frac{t^{4/3}}{t_i^{1/3}} - \frac{t_i^{4/3}}{t^{1/3}} \right]^{2/3} \quad (3.43)$$

$$\sigma(t) \approx \frac{12}{5} \rho_0(t) a_0 \pi \gamma v_c \left[\frac{t^{4/3}}{t_i^{1/3}} - \frac{t_i^{4/3}}{t^{1/3}} \right]^{2/3}, \quad (3.44)$$

onde substituímos a equação (3.30).

Capítulo 4

Comparação das Cordas Cóslicas em Teorias $f(R)$ com outras Teorias de Gravitação

Nesse capítulo iremos comparar a solução de cordas cóslicas obtida na seção anterior com soluções de cordas cóslicas nas teorias da Relatividade Geral e Escalares-Tensoriais. Para tanto, vamos apresentar um breve resumo dessas últimas soluções.

4.1 Cordas Cóslicas em Relatividade Geral

Antes de resolver as equações de campo na Relatividade Geral, vamos dividir o espaço em duas regiões diferentes: uma região interior a corda ($\rho < \rho_0$) e uma região exterior a corda ($\rho > \rho_0$), onde temos o vácuo. A corda é considerada retilínea com densidade de energia constante igual a $-\epsilon$.

4.1.1 Métrica Interior

Vamos assumir que o espaço-tempo da corda é estático e cilíndricamente simétrico, com a corda ao longo do eixo z . A métrica mais geral que descreve um espaço-tempo desse tipo tem a forma [24]

$$ds^2 = e^{2\nu(\rho)} dt^2 - e^{2\lambda(\rho)}(d\rho^2 + dz^2) - e^{2\psi(\rho)} d\phi^2, \quad (4.1)$$

onde ν , ψ e λ são funções de ρ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

O tensor energia-momento de uma corda paralela ao eixo z é dado por [25]

$$T_{\mu}^{\nu} = -\epsilon \text{diag}(1, 0, 1, 0), \quad (4.2)$$

onde ϵ é a densidade de energia da corda e padronizamos as coordenadas como o conjunto (t, ρ, z, ϕ) .

A partir das equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

e do tensor energia-momento dado pela equação (4.2), encontramos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$G_t^t = e^{-2\lambda}(\psi'' + \psi'^2 + \lambda'') = -8\pi\epsilon, \quad (4.3)$$

$$G_{\theta}^{\theta} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 + \lambda'') = 0, \quad (4.4)$$

$$G_{\rho}^{\rho} = e^{-2\lambda}(\nu'\psi' + \nu'\lambda' + \psi'\lambda') = 0, \quad (4.5)$$

$$G_z^z = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \psi'' + \psi'^2 + \psi'\nu' - \psi'\lambda') = -8\pi\epsilon, \quad (4.6)$$

associado à métrica (4.1). Desta forma, podemos obter as funções ν , ψ e λ .

A conservação de energia fornece mais uma equação diferencial dada por

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = (\nu' + \lambda')\epsilon = 0. \quad (4.7)$$

Derivando a equação (4.7) com respeito a ρ encontramos $\nu'' + \lambda'' = 0$. Substituindo esse resultado na expressão (4.4), concluímos que λ e ν são constantes. Desta forma, a expressão (4.5) produz a equação diferencial

$$\psi'' + \psi'^2 = -8\pi\epsilon. \quad (4.8)$$

Se substituimos $R = e^\psi$, a equação diferencial (4.8) toma a forma

$$\frac{R''}{R} = -8\pi\epsilon. \quad (4.9)$$

A solução geral para esta equação é dada por

$$R = A \cos(\rho/\rho^*) + B \sin(\rho/\rho^*), \quad (4.10)$$

onde definimos $\rho^* = (8\pi\epsilon)^{-1/2}$. Fazendo $A = 0$ e $B = \rho^*$, a equação (4.10) não conterà singularidade. Substituindo essa solução na equação (4.1), a métrica interna da corda fica dada por

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - dz^2 - \rho^{*2} \sin^2(\rho/\rho^*) d\phi^2, \quad (4.11)$$

onde ρ varia de $0 < \rho \leq \rho_0$.

4.1.2 Métrica Exterior

A métrica do espaço-tempo exterior a uma corda cósmica deve ser estática, cilindricamente simétrica e solução das equações de Einstein no vácuo. Em 1917, Levi-Civita [18] encontrou a forma mais geral para esse tipo de métrica que é dada por

$$ds^2 = \rho^{2m} dt^2 - \rho^{-2m} [\rho^{2m^2} (d\rho^2 + dz^2) + a^2 \rho^2 d\phi^2], \quad (4.12)$$

onde a e m são constantes arbitrárias. Para a métrica ser invariante de Lorentz na direção z , as componentes g_{tt} e g_{zz} devem ser iguais. Consequentemente, m pode assumir apenas dois valores: $m = 0$ e $m = 2$. No entanto, a única solução fisicamente aceitável corresponde ao $m = 0$. Desta maneira, a partir de agora vamos trabalhar somente com este valor para m .

Como já temos as métricas interna e externa, vamos aplicar algumas condições de contorno para obter a constante a . Exigindo que a métrica e suas derivadas sejam contínuas em todo

espaço, temos que

$$g_{\phi\phi}^+ = g_{\phi\phi}^- \Rightarrow a\rho_0 = \rho^* \sin(\rho_0/\rho^*) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}^+}{\partial \rho} = \frac{\partial g_{\phi\phi}^-}{\partial \rho} \Rightarrow a = \cos(\rho_0/\rho^*), \quad (4.14)$$

onde $(-)$ indica a região interior, $(+)$ indica a região exterior e ρ_0 o raio da corda. Então a métrica (4.12) toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - dz^2 - \rho^2 \cos^2(\rho_0/\rho^*) d\phi^2. \quad (4.15)$$

Definindo uma nova coordenada angular $\phi' = \cos(\rho_0/\rho^*)\phi$, temos que $0 \leq \phi' < 2\pi \cos(\rho_0/\rho^*)$. Podemos concluir que essa métrica possui um deficit angular dado por $\delta\phi = 2\pi[1 - \cos(\rho_0/\rho^*)]$. Novamente, temos que a métrica exterior a corda é localmente plana, mas não globalmente plana por causa do deficit angular. Esse espaço, como vimos no caso das teorias $f(R)$, é dito cônico.

Além disso, podemos escrever o deficit angular em termos de uma densidade linear de energia da corda que é definida como a integral da densidade de energia ϵ sobre a sua superfície transversal,

$$\mu = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \epsilon \rho^* \sin(\rho/\rho^*) d\phi d\rho = 2\pi \epsilon \rho^{*2} [1 - \cos(\rho_0/\rho^*)]. \quad (4.16)$$

Substituindo ρ^* por $(8\pi\epsilon)^{-1/2}$ na equação acima, encontramos

$$4\mu = 1 - \cos(\rho_0/\rho^*). \quad (4.17)$$

Desta forma, a métrica externa toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - dz^2 - \rho^2(1 - 4\mu)^2 d\phi^2. \quad (4.18)$$

Um outro caso interessante e que será explorado mais adiante é o caso em que podemos agitar a corda. Nesse caso, a corda irá apresentar pequenas estruturas ao longo da mesma.

Cordas desse tipo possuem o tensor energia-momento dado por [26]

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\mu_0, 0, T, 0)\delta(x)\delta(y), \quad (4.19)$$

onde μ_0 e T são a densidade de energia e a tensão efetiva respectivamente e segue a relação $\mu_0 T = \mu^2$. O campo gravitacional de uma corda desse tipo é encontrado resolvendo as equações linearizadas de Einstein para tensor energia-momento acima, que produz

$$\begin{aligned} h_{00} &= h_{22} = 4G(\mu_0 - T) \ln(\rho/\rho_0), \\ h_{11} &= h_{33} = 4G(\mu_0 + T) \ln(\rho/\rho_0), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ é uma perturbação na métrica e ρ_c uma constante de integração. Sendo assim, como $h_{00} \neq 0$, essas pequenas estruturas são responsáveis por uma força Newtoniana agindo em partículas próximas a corda, o que não ocorre no caso de cordas lisas. Partículas-teste em repouso próximas a uma corda lisa não experimentam forças gravitacionais devido à corda.

4.2 Cordas Cóslicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

Apesar da RG ser um sucesso, além de ser a teoria padrão da gravitação, muitas teorias alternativas têm surgido por inúmeras razões. Não é absurdo pensar, por exemplo, que assim como o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ e o potencial eletromagnético A_{μ} , campos escalares produzam forças de longo alcance. Entre as teorias mais famosas que consideram um campo escalar compartilhando a função de intermediar a gravitação junto ao campo tensorial $g_{\mu\nu}$ encontra-se a teoria Escalar-Tensorial da gravitação. A combinação desses campos, contudo, é baseada nos fundamentos da RG.

A teoria Escalar-Tensorial foi proposta pela primeira vez por Jordan [27] e parece uma previsão bem natural de modelos de unificação tais como supergravidade ou supercordas, onde,

por consistência matemática, a compactificação das dimensões extras impõe a presença de um parceiro escalar ao $g_{\mu\nu}$. Além disso, espera-se que o componente escalar da interação gravitacional no Universo primordial era da mesma ordem que o da componente tensorial, embora nos presentes dias a intensidade do acoplamento dos escalares (α^2) observável ser, em geral, pequena [28]. Desta forma, é interessante estudar o comportamento da matéria no contexto das teorias ET, especialmente aqueles originados no Universo primordial, como defeitos topológicos. Nessa seção, vamos estudar as modificações na métrica de uma corda cósmica local na mais geral das teorias ET, tendo como referência principal o artigo [28].

A ação mais geral que descreve essas teorias é

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \left[\tilde{\phi} \tilde{R} - \frac{w(\tilde{\phi})}{\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} \right] + S_m(\Psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (4.21)$$

onde \tilde{R} é o escalar de curvatura associado a métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (que contém os graus de liberdade escalar e tensorial), $w(\tilde{\phi})$ é o parâmetro da teoria que depende do campo escalar $\tilde{\phi}$ e S_m é a ação dos campos de matéria geral Ψ_m . No entanto, é mais conveniente trabalhar no referencial chamado referencial de Einstein (ou conforme), em que os termos do campo tensorial e escalar não se misturam. Nesse sentido, vamos aplicar uma transformação conforme para desacoplar os graus de liberdade escalar e tensorial

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi) g_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

e definir as quantidades

$$\begin{aligned} G\Omega^2(\phi) &= \frac{1}{\tilde{\phi}}, \\ \alpha^2 &\equiv \left(\frac{\partial \ln \Omega(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 = [2w(\tilde{\phi}) + 3]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde Ω é uma função arbitrária do campo escalar e α é a intensidade do acoplamento que depende do campo. Então a ação no referencial de Einstein toma a forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} [R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi] + S_m[\Psi_m, \Omega^2 g_{\mu\nu}]. \quad (4.24)$$

Variando a ação (4.24) com respeito a $g_{\mu\nu}$ e com respeito ao campo escalar ϕ , encontramos as equações de movimento

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (4.25)$$

$$G_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.26)$$

$$\square \phi = -4\pi G \alpha(\phi) T. \quad (4.27)$$

O tensor energia-momento é definido como usualmente

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_m[\Omega^2(\phi) g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (4.28)$$

A partir da transformação (4.22), podemos ver que $\tilde{T}^{\mu\nu} = \Omega^{-6} T^{\mu\nu}$ e $\tilde{T}_\nu^\mu = \Omega^{-4} T_\nu^\mu$.

Vamos agora encontrar as soluções regulares de uma corda cósmica na gravidade ET. Como as cordas cósmicas podem surgir no modelo abeliano de Higgs tratado no capítulo 1, vamos escrever

$$S_m = \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(|\Phi|) \right], \quad (4.29)$$

com $D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e o potencial de Higgs dado por $V(|\Phi|) = \lambda(|\Phi|^2 - \eta^2)^2$. Onde q, λ e η são constantes positivas, sendo esta última a escala de energia característica da quebra espontânea de simetria.

Vamos tratar a configuração estática tipo vortex sobre o eixo z . Podemos impor, utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas¹ (t, z, ρ, φ) tal que $\rho > 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$, a seguinte forma para o campo de Higgs Φ e de campo de calibre A_μ

$$\Phi \equiv h(\rho) e^{i\varphi} \quad \text{e} \quad A_\mu = \frac{1}{q} [Q(\rho) - 1] \delta_\mu^\varphi, \quad (4.30)$$

¹Estamos utilizando φ ao invés de ϕ , para não confundirmos a coordenada com o campo.

onde h e Q são apenas funções de ρ apenas. Devemos impor também que essas funções não contenham singularidade, então temos que elas devem satisfazer as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \quad \text{e} \quad Q(0) = 1 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} h(\rho) &= \eta \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} Q(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Da mesma forma que fizemos no caso da RG, vamos dividir o espaço em duas regiões: uma região interior a corda ($\rho < \rho_0$) e uma exterior a corda ($\rho > \rho_0$). Nós assumimos que para distâncias muito grandes o campo escalar ϕ deve dominar o tensor energia-momento nas equações (4.25-4.27). Então, tudo que precisamos fazer para obter a métrica externa, é resolver as equações de campo no vácuo devido ao comportamento assintótico de $g_{\mu\nu}$ e ϕ e, a partir daí, combinar o resultado com a métrica interna, onde iremos fazer uma aproximação de campo fraco a fim de obter a solução.

4.2.1 Métrica Externa

Agora encontraremos as soluções exatas para equações de campo no vácuo. Como iremos combinar essa solução com as soluções no limite de campo fraco, parece natural impor que elas tenham a mesma simetria da corda. Vamos então considerar a seguinte métrica

$$ds^2 = g_1(\rho)dt^2 - g_2(\rho)dz^2 - d\rho^2 - g_3(\rho)d\varphi \tag{4.32}$$

onde g_1, g_2, g_3 são apenas funções de ρ . Definindo $u \equiv (g_1 g_2 g_3)^{1/2}$, as equações de Einstein modificadas (4.25-4.27) podem ser escritas como

$$R_i^i = \frac{1}{2u} \left[u \frac{g_i'}{g_i} \right]' = 0, \quad (i = t, z, \varphi) \quad (4.33)$$

$$G_\rho^\rho = -\frac{1}{4} \left[\frac{g_1'g_2'}{g_1g_2} + \frac{g_1'g_3'}{g_1g_3} + \frac{g_2'g_3'}{g_2g_3} \right] = -(\phi')^2, \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{u} \frac{d}{d\rho} (u\phi') = 0, \quad (4.35)$$

onde a “linha” indica derivada com respeito a ρ . Temos também que a seguinte expressão é válida

$$\sum_i R_i^i = \frac{u''}{u} = 0 \quad (i = t, z, \varphi) \quad (4.36)$$

e, desta forma, segue que u é uma função linear de ρ ($u \sim B\rho$). Sendo assim, utilizando (4.35) temos que

$$(B\rho\phi)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_0 + \kappa \ln(\rho/\rho_0) \quad (4.37)$$

e usando (4.33), obtemos

$$g_i = C_i \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k_i}, \quad (4.38)$$

onde B, C_i, k_i e κ são constantes que serão determinadas mais adiante. Escrevendo a solução para u combinada com as soluções (4.37) e (4.38), encontramos

$$[C_1 C_2 C_3]^{1/2} = B,$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2, \quad (4.39)$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 4\kappa^2. \quad (4.40)$$

Além disso, como $g_1 = g_2$ temos que

$$C_1(C_3)^{1/2} = B,$$

$$k_3 = 2 - k_1, \quad (4.41)$$

$$\kappa^2 = k_1 \left(1 - \frac{3}{4}k_1\right). \quad (4.42)$$

A constante C_1 pode ser absorvida por redefinição de t e z . Sendo assim, a métrica no vácuo toma a forma

$$ds^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k_1} (dt^2 - dz^2) - d\rho^2 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2-2k_1} B^2 d\varphi^2, \quad (4.43)$$

onde as constante k_1 , B e κ serão determinadas quando introduzirmos os campos de matéria.

O tensor de Ricci para a métrica (4.43) não terá singularidades se somente se $\phi = \phi_0 =$ constante, i.e., se $\kappa = 0$. Isso significa que k_1 deve assumir apenas dois valores: $k_1 = 0$ ou $k_1 = 4/3$. Sendo que somente no caso em que $k_1 = 0$ é que $B^2 = C_3$ pode ser interpretado como um deficit angular e então a métrica (4.43) corresponde a uma métrica cônica.

4.2.2 Métrica Interna

Vamos começar escrevendo as equações de Einstein modificadas para região interior da corda

$$R_t^t = \frac{1}{2u} \left[u \frac{g_1'}{g_1} \right]' = 8\pi G \left(T_t^t - \frac{1}{2}T \right), \quad (4.44)$$

$$R_z^z = \frac{1}{2u} \left[u \frac{g_1'}{g_1} \right]' = 8\pi G \left(T_t^t - \frac{1}{2}T \right), \quad (4.45)$$

$$R_\varphi^\varphi = \frac{1}{2u} \left[u \frac{g_3'}{g_3} \right]' = 8\pi G \left(T_\varphi^\varphi - \frac{1}{2}T \right), \quad (4.46)$$

$$R_\rho^\rho = \frac{1}{2} \left[2 \frac{g_1''}{g_1} - \left(\frac{g_1'}{g_1} \right)^2 + \frac{g_3''}{g_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_3'}{g_3} \right)^2 \right] = 8\pi G \left(T_\rho^\rho - \frac{1}{2}T \right) - 2(\phi')^2, \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{u} (u\phi')' = 4\pi G \alpha(\phi), \quad (4.48)$$

onde as componentes do tensor energia-momento não-nulas são

$$T_t^t = \frac{1}{2}\Omega \left[2\lambda\Omega^2(h^2 - \eta^2)^2 + h'^2 + \frac{1}{g_3} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2\Omega^2} \right) \right], \quad (4.49)$$

$$T_z^z = \frac{1}{2}\Omega \left[2\lambda\Omega^2(h^2 - \eta^2)^2 + h'^2 + \frac{1}{g_3} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2\Omega^2} \right) \right], \quad (4.50)$$

$$T_\rho^\rho = \frac{1}{2}\Omega \left[2\lambda\Omega^2(h^2 - \eta^2)^2 - h'^2 + \frac{1}{g_3} \left(h^2 Q^2 - \frac{Q'^2}{q^2\Omega^2} \right) \right], \quad (4.51)$$

$$T_\varphi^\varphi = \frac{1}{2}\Omega \left[2\lambda\Omega^2(h^2 - \eta^2)^2 + h'^2 - \frac{1}{g_3} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2\Omega^2} \right) \right]. \quad (4.52)$$

O conjunto de equações diferenciais (4.44 - 4.48) não possui solução exata. Desta forma, vamos considerar uma solução de corda cósmica em uma aproximação de campo fraco. Nessa aproximação aplicamos uma pequena perturbação no campo gravitacional da corda. Então vamos expandir em termos do parâmetro infinitesimal ε sobre os valores $\phi = \phi_0$ e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \varepsilon\phi_1, \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \\ \Omega(\phi) &= \Omega(\phi_0) + \varepsilon \frac{\partial\Omega(\phi_0)}{\partial\phi} \phi_1, \\ T_\nu^\mu &= T_{(0)\nu}^\mu + \varepsilon T_{(1)\nu}^\mu. \end{aligned}$$

O termo $(\phi')^2$ nas equações de Einstein modificadas é desprezado por causa do processo de linearização. Além disso, nessa aproximação o termo $T_{(0)\nu}^\mu$ é obtido das equações (4.49 - 4.52) no limite que $\lambda \rightarrow \infty$ (veja a referência [29]). Utilizando o calibre $\partial_\nu(h_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu h) = 0$ em coordenadas harmônicas, onde h é o traço de $h_{\mu\nu}$, temos que [28]

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = 16\pi G \left(T_{(0)\nu}^\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T_{(0)} \right). \quad (4.53)$$

A equação (4.48) também é linearizada obtendo-se

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \alpha(\phi_0) T_{(0)}. \quad (4.54)$$

O tensor energia-momento no referencial conforme pode ser reescrito, em coordenadas cartesianas, da seguinte forma

$$T_{tt} = -T_{zz} = \Omega^2(\phi_0)\mu\delta(x)\delta(y), \quad T_{xx} = T_{yy} = 0. \quad (4.55)$$

Sabendo que $\nabla^2 \ln(\rho/\rho_0) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$, temos que

$$\phi_1 = 4G\mu\Omega^2(\phi_0)\alpha(\phi_0) \ln(\rho/\rho_0). \quad (4.56)$$

Essa solução é compatível com a solução no vácuo, em primeira ordem, se somente se

$$\kappa_{lin} = 4G\mu\Omega^2(\phi_0)\alpha(\phi_0). \quad (4.57)$$

Da equação (4.42) podemos ver que os únicos valores permitidos para a constante k_1 são $k_1 = 0 + O(G^2\mu^2)$ e $k_1 = 4/3 + O(G^2\mu^2)$. No entanto, o resultado que tem significado físico é $k_1 = 0$ mais correções desprezíveis $(G\mu)^2$ enquanto $k_1 = 4/3 + (G\mu)^2$ corresponde a uma métrica não-física [30, 31].

Da equação (4.53) encontramos

$$\nabla^2 h_{tt} = 16\pi G \left(T_{tt} - \frac{1}{2}\eta_{tt}2\mu\delta(x)\delta(y) \right) \Rightarrow h_{tt} = 0, \quad (4.58)$$

$$\nabla^2 h_{zz} = 16\pi G \left(T_{zz} - \frac{1}{2}\eta_{zz}2\mu\delta(x)\delta(y) \right) \Rightarrow h_{zz} = 0, \quad (4.59)$$

$$\nabla^2 h_{xx} = 16\pi G \left(T_{xx} - \frac{1}{2}\eta_{xx}2\mu\delta(x)\delta(y) \right) \Rightarrow h_{xx} = 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0), \quad (4.60)$$

$$\nabla^2 h_{yy} = 16\pi G \left(T_{yy} - \frac{1}{2}\eta_{yy}2\mu\delta(x)\delta(y) \right) \Rightarrow h_{yy} = 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0). \quad (4.61)$$

Como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$, encontramos a métrica em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)]dx^2 - [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)]dy^2. \quad (4.62)$$

Retornando às coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)]d\rho^2 - \rho^2[1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)]d\varphi^2. \quad (4.63)$$

Introduzindo uma nova coordenada radial $\tilde{\rho}$ tal que [31]

$$\begin{aligned} [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)] \rho &= [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu] \tilde{\rho}^2 \\ [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)] d\rho^2 &= d\tilde{\rho}^2, \end{aligned}$$

obtemos

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - d\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}^2 [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu] d\varphi^2. \quad (4.64)$$

Para encontrar a métrica no referencial físico devemos retornar à transformação $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi)g_{\mu\nu}$, onde lembramos que $g_{\mu\nu}$ é a métrica no referencial de Einstein. Da mesma forma

$$\Omega = \Omega(\phi_0) + \frac{\partial\Omega(\phi_0)}{\partial\phi}\phi_1 = \Omega(\phi_0)(1 + \alpha(\phi_0)\phi_1). \quad (4.65)$$

Assim, em primeira ordem de $G\mu$, temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Omega^2(\phi_0)[1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\alpha^2(\phi_0)\mu \ln(\rho/\rho_0)] \\ &\quad \times (dt^2 - dz^2 - d\rho^2 - \rho^2 [1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu] d\varphi^2) \end{aligned} \quad (4.66)$$

com $\rho > 0$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. Podemos absorver a constante $\Omega^2(\phi_0)$, que multiplica todos os termos, numa nova redefinição das coordenadas (t, z, ρ, φ) . Comparando as métricas interna e externa observamos que $B^2 = 1 - 8G\Omega^2(\phi_0)\mu$ e então o deficit angular no contexto da teoria ET, no limite de campo fraco, é dado por $\delta\varphi = 8\pi G\Omega^2(\phi_0)\mu$, possui uma dependência explícita do campo gravitacional escalar ϕ .

4.3 Comparação entre as Soluções das Teorias Apresentadas

Obtidas as métricas da corda cósmica em teorias $f(R)$, na teoria da Relatividade Geral e na mais geral das teorias Escalares-Tensoriais, nosso próximo passo será comparar esses resultados. Uma característica notável nas três soluções encontradas é baseada na componente g_{tt} da métrica. No caso da corda lisa em RG e da corda nas teorias $f(R)$, essa componente é constante, de forma que a corda não exerce força Newtoniana em partículas. No entanto, na teoria ET e em cordas que apresentam pequenas estruturas g_{tt} não é constante. Sendo assim, partículas de massa m em regiões próximas à corda sofrem a ação de uma força Newtoniana dada por

$$\vec{f} = -\frac{m}{2}\nabla h_{00}, \quad (4.67)$$

onde $h_{00} = 8G\Omega^2(\phi_0)\mu\alpha^2(\phi_0)\ln(\rho/\rho_0)$ na teoria ET e $h_{00} = 4G(\mu_0 - T)\ln(\rho/\rho_0)$ em cordas com pequenas estruturas [26]. Consequentemente, para teoria ET e para cordas com pequenas estruturas, temos que

$$\begin{aligned} \vec{f}_{ET} &= -4mG\Omega^2(\phi_0)\mu\alpha^2(\phi_0)\frac{1}{\rho}\hat{\rho} \\ \vec{f}_{PE} &= -2mG(\mu_0 - T)\frac{1}{\rho}\hat{\rho} \end{aligned} \quad (4.68)$$

respectivamente. Note que ambas as forças são atrativas, dependem de ρ e das características da teoria de gravitação.

Por outro lado, se a corda se move com velocidade v_c numa região contendo matéria, as partículas, que inicialmente encontram-se em repouso, sofrem uma perturbação devido à força Newtoniana produzida pela corda e ao espaço-tempo externo à corda. Nesse caso, no referencial em que a corda encontra-se em repouso, a perturbação na velocidade de cada partícula em relação à corda é dada por

$$u_i = \delta v_c \simeq \gamma v_c \frac{\delta\varphi}{2} + \frac{f}{m}\Delta t, \quad (4.69)$$

Partículas com parâmetro de impacto ρ são expostas a uma força f num intervalo de tempo $\Delta t \sim \rho/v_c$. Nesse sentido, a métrica da corda cósmica na teoria ET é semelhante à métrica da corda com pequenas estruturas [26]. No entanto, partículas sem massa, como o fóton, sofrem apenas a influência do deficit angular e o fator conforme $(1 + h_{00})$ não afeta a propagação da luz.

O deficit angular em cada teoria pode ser verificado na tabela abaixo e pode-se notar que

Teorias $f(R)$	Escalar-Tensorial	Relatividade Geral
$(1 - e^{-c_4} c_6) 2\pi$	$8\pi G \Omega^2(\phi_0) \mu$	$8\pi \mu$

Tabela 4.1: Deficit angular em cada teoria.

todos são constantes. Na teoria ET, $\Omega^2(\phi_0)G = G_0$ é a constante de Newton efetiva e, para cordas produzidas na escala de energia de grande unificação (GUT), o deficit angular é dado por $\delta\varphi \sim 10^{-5} rad$ [28]. Por sua vez, segundo Vachaspati [26], $G\mu = 10^{-6} \mu_6$ para cordas produzidas na escala GUT, onde μ_6 é um fator pequeno.

Ainda não temos como comparar, em termos de escala de energia, o deficit angular da corda cósmica nas teorias $f(R)$ com os desvios angulares da corda cósmica em RG e ET, porque não conseguimos a métrica interna para corda em $f(R)$. Sendo assim, não tivemos como identificar as constantes c_4 e c_6 em termos do campo material da corda. No entanto, podemos dizer que o resultado encontrado no capítulo 3 corresponde a uma corda lisa em RG, em que nenhuma força Newtoniana é produzida pela corda.

Conclusão

Nessa dissertação nosso principal resultado foi a obtenção das soluções de corda cósmica e suas propriedades gravitacionais nas teorias $f(R)$. No final, comparamos essas soluções com as soluções de corda cósmica na Relatividade Geral e na teoria Escalar-Tensorial. Inicialmente, apresentamos as equações de movimento das teorias $f(R)$ no formalismo da métrica e as equações de Friedmann generalizadas. Depois resolvemos as equações de Einstein modificadas no vácuo e encontramos o espaço-tempo externo a uma corda cósmica no caso particular em que $R = 0$. Em seguida estudamos as propriedades geométricas desse espaço-tempo e as consequências do movimento da corda através de uma região contendo matéria bariônica. Com o intuito de comparar esses resultados com outros resultados obtidos previamente na literatura, apresentamos um resumo das soluções de corda cósmica na Relatividade Geral e na teoria Escalar-Tensorial. Na RG encontramos, através das equações de Einstein, uma métrica exata dividindo o espaço-tempo em duas regiões: uma interna à corda e outra externa à corda. Utilizando um raciocínio análogo, resolvemos as equações de campo modificadas na teoria ET no limite de campo fraco, já que equações de campo não possuem soluções exatas. Desta forma, calculamos o deficit angular em cada teoria e comparamos os resultados.

A corda perturbada na RG e a corda na teoria ET, são bastante semelhantes: ambas produzem uma força Newtoniana sobre partículas próximas à corda. Enquanto que a corda lisa (sem perturbações) na RG e a corda obtida nas teorias $f(R)$ não exercem força Newtoniana sobre partículas ao seu redor. Apesar de não termos como comparar os deficits angulares obtidos nessas duas últimas teorias, podemos considerar que a corda cósmica obtida nas teorias $f(R)$ é compatível com a corda lisa na RG, no caso particular em tela.

As forças gravitacionais produzidas pela corda perturbada na RG e pela corda na teoria

ET são proporcionais ao inverso da distância ρ (do centro da corda à partícula) no plano (t, z) constante e dependem dos parâmetros da teoria de gravitação. Nesse sentido, para distâncias muito grandes, os efeitos gravitacionais da corda são equivalentes em todas as teorias.

Vimos também que o movimento da corda numa região onde existem partículas-teste em repouso pode ser responsável pela formação de estruturas. Ao passar pela corda, algumas partículas sofrem uma perturbação, que depende do deficit angular e dos efeitos gravitacionais produzidos pela corda e formam uma região mais densa e estável. Nesta dissertação, encontramos diferentes resultados para a perturbação na velocidade das partículas no referencial da corda em repouso, um para cada teoria.

Todo o estudo feito aqui pode ser visto como um aprofundamento dos modelos e técnicas relevantes para a Cosmologia atual e servirão como base para um futuro trabalho de Doutorado. Como perspectiva futura, pretendemos explorar as soluções internas e estudar outros defeitos topológicos em teorias $f(R)$ da gravitação.

Apêndice A

Cálculo das componentes do tensor energia-momento efetivo da teoria $f(R)$ na métrica FRLW

Antes de iniciar os cálculos, vamos apresentar os símbolos de Christoffel não nulos para métrica FRLW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

que são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2, & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \end{aligned} \tag{A.1}$$

e as componentes do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta. \quad (\text{A.3})$$

Essa métrica possui escalar de curvatura

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

e componentes do tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] & G_{11} &= -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{1 - kr^2} \\ G_{22} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) & G_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Utilizando as equações modificadas

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{f'(R)}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}), \quad (\text{A.6})$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{g_{\mu\nu}(f(R) - Rf'(R))}{2} + \nabla^\alpha \nabla^\beta f'(R)(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \right], \quad (\text{A.7})$$

e o tensor energia-momento do fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\rho, \frac{(1 + kr^2)p}{a^2}, \frac{p}{r^2 a^2}, \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta a^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

obtido na seção 2.1, podemos encontrar as equações de Friedmann generalizadas no modelo $f(R)$. Para tal, vamos considerar apenas as componentes $\mu\nu = 00$ e $\mu\nu = 11$. Calculando a componente 00, temos

$$T_{00}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{g_{00} (f(R) - Rf'(R))}{2} - \nabla^1 \nabla^1 f'(R) g_{00} g_{11} + \right. \\ \left. - \nabla^2 \nabla^2 f'(R) g_{00} g_{22} - \nabla^3 \nabla^3 f'(R) g_{00} g_{33} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Sabemos que

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \nabla^\sigma \nabla^\rho f'(R), \quad (\text{A.10})$$

então

$$T_{00}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{g_{00} (f(R) - Rf'(R))}{2} + g^{11} \nabla_1 \nabla_1 f'(R) + \right. \\ \left. + g^{22} \nabla_2 \nabla_2 f'(R) + g^{33} \nabla_3 \nabla_3 f'(R) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Note que (A.4) só depende da primeira coordenada t , logo

$$g^{11} \nabla_1 \nabla_1 F(R) = \frac{1 - kr^2}{a^2} \left(-\frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \right) F'(R) \dot{R} = -\frac{\dot{a}}{a} \\ g^{22} \nabla_2 \nabla_2 F(R) = \frac{1}{r^2 a^2} (-ar^2 \dot{a}) F'(R) \dot{R} = -\frac{\dot{a}}{a} \\ g^{33} \nabla_3 \nabla_3 F(R) = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} (-a\dot{a} r^2 \sin^2 \theta) F'(R) \dot{R} = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{A.12})$$

onde fizemos ($f'(R) = F(R)$) e utilizamos ($\nabla_\alpha \nabla_\sigma F(R) = \partial_\alpha \nabla_\sigma F(R) - \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho \nabla_\rho F(R)$). Então podemos escrever

$$T_{00}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{-(f(R) - Rf'(R))}{2} - 3HF'(R)\dot{R} \right], \quad (\text{A.13})$$

sendo $H = \dot{a}/a$ o parâmetro de Hubble.

De maneira análoga, podemos calcular a componente 11

$$T_{11}^{eff} = \frac{g_{11}}{\kappa} \left[\frac{(f(R) - Rf'(R))}{2} - g^{00}\nabla_0\nabla_0F(R) + \right. \\ \left. -g^{22}\nabla_2\nabla_2F(R) - g^{33}\nabla_3\nabla_3f'(R) \right]. \quad (\text{A.14})$$

e obter

$$T_{11}^{eff} = \frac{a^2}{\kappa(1 - kr^2)} \left[\frac{(f(R) - Rf'(R))}{2} + F''(R)\dot{R}^2 + F'(R)\ddot{R} + 2HF'(R)\dot{R} \right] (\text{A.15})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Mukhanov, V. F., *Physical Foundations of Cosmology*, (Cambridge University Press, 2005)
- [2] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, (Oxford University Press, 1985)
- [3] Perlmutter, S., *et. al.* (Supernova Cosmology Project), *Nature* **391**, 51
- [4] Riess A. G., *et. al.* (Supernova Search Team), *Astron. J.* **116**, 1009 (1998)
- [5] V. Faraoni, *f(R) gravity: successes and challenges*, arXiv:0810.2602v1 [gr-qc] (2008)
- [6] T. Multamäki e I. Vilja *Phys. Rev.***D74**, 064022 (2006)
- [7] T. W. B. Kibble, *Cosmic Strings Reborn?*, astro-ph/0410073v2 (2004)
- [8] E. J. Copeland, L. Pogosian e Tanmay Vachaspati, *Seeking String Theory in the Cosmos*, arXiv:1105.0207v2 [hep-th] (2011)
- [9] A.-C. Davis e T. W. B. Kibble *Comtemp. Phys.* **46**, 313 (2005)
- [10] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, 1994)
- [11] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, 1985)
- [12] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity*, (John Wiley & Sons, 1972)
- [13] T. Sotiriou e V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010)

- [14] Q. Exirifard e M.M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Lett.* **B 661**, 158 (2008)
- [15] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*, (Addison Wesley, 2004)
- [16] J. Santos, J. S. Alcaniz, M. J Rebouças e F. C. Carvalho, *Phys. Rev.* **D 76**, 083513 (2007)
- [17] A. H. Guth, *Phys. Rev.* **D 23**, 347 (1981)
- [18] T. Levi-Civita, *Rend. Accad. Naz. Lincei* **26**, 307 (1917)
- [19] A. Azadi, D. Momeni e M. Nouri-Zonoz , *Phys.Lett.* **B 670**, 210 (2008)
- [20] H. Stephani, D. Kramer, M.A.H. MacCallum, C. Hoenselaers e E. Herlt, *Exact Solutions of Einsteins Field Equations*, (CUP, 2003)
- [21] A.N. Aguirre e R. H. Brandenberger, *Int.J.Mod.Phys.* **D4**, 711 (1995)
- [22] S. R. M. Masalskiene e M. E. X. Guimarães, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3055 (2000)
- [23] T. Vachaspati, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1655 (1986)
- [24] W. A. Hiscock, *Phys. Rev.* **D31**, No.12,31 (1985)
- [25] A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **D23**, No.8 (1981)
- [26] T. Vachaspati, *Phys. Rev.* **D45**, No. 10 (1991)
- [27] P. Jordan, *Nature* **164**, 637 (1949)
- [28] M. E. X. Guimaraes, *Class. Quantum Grav.* **14**, 435 (1997)
- [29] B. Linet, *Phys. Lett.* **A 124**, 240 (1987)
- [30] D. Garfinkle, *Phys. Rev.* **D 32**, 1323 (1985)
- [31] A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **D 23**, 852