

João Paulo Andrade

# **Estudo de alguns invariantes espectrais**

Volta Redonda, RJ

2016

João Paulo Andrade

## **Estudo de alguns invariantes espectrais**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Ciências Exatas

Curso de Matemática

Orientador: Francisca Andrea Macedo França

Coorientador: André Ebling Brondani

Volta Redonda, RJ

2016

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do Aterro de Volta Redonda da UFF

A554	Andrade, João Paulo	Estudo de alguns invariantes espectrais / João Paulo Andrade. – 2016. 33f.
	Orientador: Francisca Andrea Macedo França Coorientador: André Ebling Brondani	Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática com ênfase em Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2016.
		1. Grafo. 2. Teoria espectral (Matemática). 3. Autovalor. I. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Ciências Exatas. II. França, Francisca Andrea Macedo, orientador. III. Brondani, André Ebling. IV. Título.
		CDD 510

João Paulo Andrade

## **Estudo de alguns invariantes espectrais**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Volta Redonda, RJ, 09 de abril de 2016:

---

**Profa. Dra. Francisca Andrea Macedo França** – UFF  
Orientador

---

**Prof. Me. André Ebling Brondani** – UFF  
Coorientador

---

**Prof. Me. Carlos Henrique Pereira do Nascimento** – UFF

---

**Profa. Dra. Edilaine Ervilha Nobili** – UFF

Volta Redonda, RJ  
2016

# Resumo

Nesta monografia estudamos resultados existentes na Teoria Espectral de Grafos sobre os autoespaços associados a certos autovalores de alguns grafos. Finalizamos analisando o autoespaço associados ao autovalor nulo na família das árvores de Bethe.

**Palavras-chave:** grafo. matriz de adjacência. autovetor.

# Abstract

In this monograph we study results in the Spectral Theory of Graphs on the eigenspaces for certain eigenvalues of some graphs. We conclude by analyzing the eigenspaces for null eigenvalue in the Bethe tree family.

**Keywords:** graph. adjacency matrix. eigenvector.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo $G$ . . . . .	9
Figura 2 – Grafo $K_4$ e um grafo 2-regular . . . . .	10
Figura 3 – Um grafo bipartido completo . . . . .	10
Figura 4 – grafo $H$ . . . . .	10
Figura 5 – Grafos $\mathcal{P}_6$ e $C_5$ . . . . .	11
Figura 6 – Árvore $\mathcal{B}_{2,3}$ . . . . .	11
Figura 7 – grafo $H'$ . . . . .	11
Figura 8 – Grafo $G'$ e seu complementar. . . . .	12
Figura 9 – Tipos de vértices gêmeos . . . . .	20
Figura 10 – Passo 1: Fazendo $\alpha = 0$ . . . . .	22
Figura 11 – Passo 2 . . . . .	22
Figura 12 – Passo 3 . . . . .	22
Figura 13 – Árvore de Bethe $\mathcal{B}_{2,4}$ . . . . .	23
Figura 14 – Primeiro passo do algoritmo. . . . .	25
Figura 15 – Segundo passo do algoritmo. . . . .	25
Figura 16 – Passo final do algoritmo. . . . .	26
Figura 17 – Árvore de Bethe $\mathcal{B}_{2,5}$ . . . . .	27
Figura 18 – Árvore de Bethe $\mathcal{B}_{2,5}$ valorada por $\mathbf{c}_{1,1,1}$ . . . . .	27

# Lista de símbolos

$M_{m \times n}$	Matriz de $m$ linhas e $n$ colunas.
$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$ .
$I_n$	Matriz identidade.
$\mathbf{J}_{m \times n}$	Matriz de $m$ linhas e $n$ colunas com todas suas entradas sendo 1.
$\mathbf{1}$	$n$ -vetor coluna com todas suas entradas iguais a 1.
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	Produto interno usual entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ .
$\dim(V)$	Dimensão do espaço vetorial $V$ .
$\text{posto}(M)$	Posto da matriz $M$ .
$\det(M)$	Determinante da matriz $M$ .
$\lambda_i(M)$	$i$ -ésimo maior autovalor da matriz $M$ .
$\text{alg}(\lambda)$	Multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda$ .
$\text{geo}(\lambda)$	Multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda$ .
$\sigma(M)$	Espectro da matriz $M$ .
$\rho(M)$	Raio espectral da matriz $M$ .
$p_M(x)$	Polinômio característico da matriz $M$ .
$\epsilon_M(\lambda)$	Espaço vetorial gerado pelos autovetores associados ao autovalor $\lambda$ da matriz $M$ .
$M^T$	Transposta da matriz $M$ .
$M^{-1}$	Matriz inversa da matriz $M$ .
$G = (V, E)$	Grafo $G$ , sendo $V$ seu conjunto de vértices e $E$ seu conjunto de arestas.
$N_G(i)$	Conjunto de vizinhos de um vértice $i$ no grafo $G$ .
$i_1 i_2 \dots i_n$	Caminho ligando o vértices $i_1$ ao vértice $i_n$ passando por $i_2, \dots, i_{n-1}$ .
$d(i)$	Grau do vértice $i$ de $G$ .
$\delta(G)$	Grau mínimo de $G$ .



$\Delta(G)$	Grau máximo de $G$ .
$\overline{G}$	Grafo complementar de $G$ .
$Spec(G)$	Espectro de $G$ .
$P_G(x)$	Polinômio característico de $G$ .
$\mathcal{E}_G(x)$	Autoespaço associado ao autovalor $x$ de $G$ .
$B_{d,k}$	Árvore de Bethe com grau $d$ e $k$ níveis.

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1 Teoria de Matrizes . . . . .	2
1.2 Teoria de Grafos . . . . .	9
1.3 Teoria Espectral de Grafos . . . . .	12
<b>2 Estruturas de autoespaços de alguns grafos</b> . . . . .	<b>18</b>
2.1 Algoritmo V2 . . . . .	21
<b>3 Árvores de Bethe</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1 Multiplicidade do autovalor nulo . . . . .	24
<b>Referências</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>Índice</b> . . . . .	<b>33</b>

# Introdução

A Teoria dos Grafos e a Álgebra Linear são dois belos campos da matemática e a Teoria Espectral de Grafos está na sua interseção. Mais exatamente, a Teoria Espectral de Grafos lida com as propriedades de um grafo em relação aos autovalores e autovetores de alguma matriz associada a este grafo. Neste trabalho estudamos autoespaços associados aos autovalores 0, 1 e  $-1$  de certos grafos.

Primeiramente, no Capítulo 1 apresentamos resultados necessários da Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e da Teoria Espectral de Grafos e introduzimos as notações que serão utilizados no decorrer do texto. No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados existentes na literatura sobre autoespaços de grafos. Revisamos o conceito de vértices gêmeos e sua relação com os vetores de Faria e finalizamos o capítulo com o Algoritmo V2 dado em [1].

No Capítulo 3 analisamos os resultados da literatura sobre as propriedades espectrais das árvores de Bethe e obtivemos como resultado a Proposição 3.3 durante a preparação deste trabalho a qual induziu à Conjectura 3.4. Finalmente, o último capítulo conclui o trabalho realizado e indica direções para trabalhos futuros.

# 1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados de Teoria de Matrizes, Teoria de Grafos e Teoria Espectral de Grafos que utilizaremos ao decorrer do texto. Para maiores detalhes indicamos as seguintes referências: [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] e [12].

## 1.1 Teoria de Matrizes

**Definição 1.1.** Dados dois naturais  $m, n \geq 1$  uma matriz real  $M_{m \times n}$  é uma aplicação de  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  em  $\mathbb{R}$ , cujos elementos são denotados por  $m_{ij}$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Fixados  $i$  e  $j$ ,  $m_{ij}$  é a entrada na interseção da  $i$ -ésima linha com a  $j$ -ésima coluna. Esta matriz é de ordem  $m \times n$  e é representada por

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}.$$

Para  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , denotaremos por  $[M]_{ij}$  a entrada da matriz  $M$  na interseção da  $i$ -ésima linha com a  $j$ -ésima coluna, quando for necessário.

Se  $m = n$ , a matriz é dita *quadrada* de ordem  $n$ . Denominamos por *n-vetor coluna* (*n-vetor linha*) a matriz que possui somente uma coluna (linha) e  $n$  linhas (colunas). Caso não seja necessário explicitar a ordem diremos apenas vetor. O espaço vetorial constituído pelo conjunto de todas as matrizes reais com  $m$  linhas e  $n$  colunas é denotado por  $\mathbb{M}_{m \times n}$ . Se  $m = n$  tal espaço vetorial é denotado, simplesmente, por  $\mathbb{M}_n$ . Dado  $M \in \mathbb{M}_n$ , as entradas do tipo  $m_{ii}$  são ditas *entradas diagonais* de  $M$  e o conjunto de todas as suas entradas diagonais é a *diagonal principal* de  $M$ . Dados  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se para  $i \neq j$ ,  $m_{ij} = 0$ ,  $M$  é chamada *matriz diagonal*. A matriz cujas entradas são todas iguais a 1 é denotada por  $\mathbf{J}_{m \times n}$  ou  $\mathbf{J}_n$  (caso tenha ordem  $n$ ) e a *matriz identidade*,  $I_n \in \mathbb{M}_n$ , é uma matriz diagonal tal que todas as entradas diagonais são iguais a 1. Tais matrizes são denotadas, respectivamente, por  $\mathbf{J}$  e  $I$ , caso não seja necessário explicitar suas respectivas ordens. O vetor de ordem  $n$  cujo seus elementos são todos iguais a 1 é denotado por  $\mathbf{1}_n$ , caso não haja risco de confusão, será denotado apenas por  $\mathbf{1}$ . Uma matriz  $M$  é dita *não negativa*, se todas suas entradas são não negativas, e de *positiva*, se todas suas entradas são positivas. A matriz *nula* é aquela que possui todas as entradas iguais a zero.

As seguintes operações envolvendo matrizes de soma, multiplicação e multiplicação por escalar, são feitas da seguinte forma. Seja  $A, A' \in \mathbb{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n \times k}$  e  $\alpha$  um escalar

então,  $A + A' = (([A]_{ij} + [A']_{ij}))$ ,  $\alpha A = ((\alpha[A]_{ij}))$  e  $A'B = ([A'B]_{ij}) = (\sum_{r=1}^n a_{ir}b_{ri})$ . Se  $A$  é uma matriz quadrada, então denotaremos  $\underbrace{AAA \dots A}_l$  por  $A^l$ .

**Definição 1.2.** Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  em  $\mathbb{M}_{m \times n}$ , escrevemos  $A \leq B$  se  $b_{ij} - a_{ij} \geq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição 1.3.** Dada a matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}$ , a matriz  $A^+ = (a_{ij}^+) \in \mathbb{M}_{m \times n}$  é a matriz cujas entradas são definidas por  $a_{ij}^+ = |a_{ij}|$ .

**Definição 1.4.** Dada uma matriz  $M$  e dois subconjuntos de índices  $\alpha$  e  $\beta$ , que representam algumas de suas linhas e de suas colunas, respectivamente. Chamamos de *submatriz*, denotada por  $M[\alpha, \beta]$ , a matriz obtida selecionando as linhas de  $M$  que estão em  $\alpha$  e as colunas de  $M$  que estão em  $\beta$ . Se  $\alpha = \beta$  dizemos que é uma *submatriz principal*. A *submatriz* obtida considerando as  $k$  primeiras linhas e colunas de  $M$  é chamada *submatriz principal líder*.

**Exemplo 1.5.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 10 & 11 & 20 & -4 \\ 1.3 & 0 & 0 & 1 \\ 20 & 34 & 12 & 5.5 \end{pmatrix}$ , e dois conjuntos de índices  $\alpha = \{1, 2\}$ ,  $\beta = \{2, 4\}$ , a matriz  $A[\alpha, \beta]$  é dada por:

$$A[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Definição 1.6.** Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Um escalar  $\lambda$  é um autovalor de  $M$ , se existe um  $n$ -vetor  $\mathbf{v}$ , não nulo, tal que  $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Tal  $n$ -vetor é dito autovetor de  $M$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

Como todas as matrizes do texto são simétricas, seus autovalores são números reais.

**Definição 1.7.** Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . O *polinômio característico* de  $M$ ,  $p_M(x)$ , é o determinante da matriz  $xI - M$  e é denotado por  $p_M(x) = \det(xI - M)$ .

**Proposição 1.8.** [5] As raízes de  $p_M(x)$  são os autovalores de  $M$ .

O *raio espectral* de  $M$  é o número real não negativo  $\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\}$ . O espaço vetorial gerado pelos autovetores associados ao autovalor  $\lambda$ , é chamado de *autoespaço* associado ao autovalor  $\lambda$  e é denotado por  $\epsilon_M(\lambda)$ . A *multiplicidade algébrica* de um autovalor  $\lambda$ ,  $alg(\lambda)$ , é a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $M$  e a *multiplicidade geométrica* de  $\lambda$ ,  $geo(\lambda)$ , é a dimensão do autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$ . Um autovalor  $\lambda$  é dito simples se  $alg(\lambda) = 1$ . No caso em que  $geo(\lambda) = alg(\lambda)$ , o autovalor  $\lambda$  é denominado semissimples e a sua multiplicidade é denotada por  $m(\lambda)$ .

Um multiconjunto é uma coleção não ordenada de objetos, não necessariamente distintos. Por exemplo,  $\{9, 1, 1, 2, 3, 5, -3, -3\}$  é um multiconjunto.

**Definição 1.9.** Seja  $M \in \mathbb{M}_n$ . O multiconjunto constituído pelos autovalores de  $M$  é denominado *espectro* de  $M$  e é denotado por  $\sigma(M)$ .

Uma matriz  $M \in \mathbb{M}_n$  é *não singular* se existe uma matriz  $N \in \mathbb{M}_n$  tal que  $MN = NM = I$  e, neste caso,  $N$  é a inversa de  $M$  e é denotada por  $M^{-1}$ . Dizemos que uma matriz  $M$  é *semelhante* a uma matriz  $Q$  se existir uma matriz não singular  $P$  tal que  $M = P^{-1}QP$ .

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], afirma que uma matriz é singular se, e somente se, possui 0 como autovalor.

**Teorema 1.10.** *Uma matriz quadrada  $M$  é singular se, e somente se, existe um vetor  $\mathbf{v}$  não nulo tal que  $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .*

Seja  $M \in \mathbb{M}_{m \times n}$ . O *posto* de  $M$ , denotado por  $\text{posto}(M)$ , é o número de linhas linearmente independentes na matriz  $M$ , enquanto que a *nulidade de  $M$*  é a diferença entre o número de linhas de  $M$  e o seu posto.

**Teorema 1.11.** [10] *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes cujo produto  $AB$  está bem definido. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i)  $\text{posto}(A + B) \leq \text{posto}(A) + \text{posto}(B)$ ;
- (ii)  $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)$ ;
- (iii)  $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B)$ ;
- (iv) Se  $A$  é não singular então  $\text{posto}(AB) = \text{posto}(B)$ ;
- (v) Se  $B$  é não singular então  $\text{posto}(AB) = \text{posto}(A)$ .

**Teorema 1.12.** [9] *Seja  $A \in \mathbb{M}_n$  e  $\lambda$  um escalar real então:*

- (i)  $|\text{posto}(A) - \text{posto}(A - \lambda\mathbf{J})| \leq 1$ ;
- (ii)  $\text{posto}(A) < \text{posto}(A - \lambda\mathbf{J}) \Rightarrow \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) \subsetneq \epsilon_A(0)$ ;
- (iii)  $\text{posto}(A) > \text{posto}(A - \lambda\mathbf{J}) \Rightarrow \epsilon_A(0) \subsetneq \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0)$ .

**Teorema 1.13.** [5] *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes semelhantes de ordem  $n$ . Como  $A$  é semelhante a  $B$ , então existe uma matriz  $P$ , não singular, tal que  $A = PBP^{-1}$ , portanto

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda PP^{-1} - PBP^{-1}) \\ &= \det(P(\lambda I - B)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(\lambda I - B)\det(P^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - B) \\ &= p_B(\lambda). \end{aligned}$$

□

**Corolário 1.14.** [5] *Matrizes semelhantes têm o mesmo espectro.*

**Definição 1.15.** Uma matriz  $M$  é diagonalizável se existe uma matriz não singular  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tal que  $M = PDP^{-1}$ .

**Teorema 1.16.** [5] *Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Então  $M$  diagonalizável se, e somente se,  $M$  possui um conjunto com  $n$  vetores linearmente independentes, que são autovetores de  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $M \in \mathbb{M}_n$ , e  $D$  a matriz diagonal cujas entradas diagonais são os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de  $M$ .

Suponha que a matriz  $M$  tenha  $n$  autovetores, sendo eles,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . Defina a matriz  $S = (s_{ij}) \in M_n$ , cuja entrada  $[S]_{ij}$  é a  $j$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{v}_i$ .

$$SM = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \cdots & \lambda_n v_{1n} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_n v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \cdots & \lambda_n v_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como  $S$  é não singular, existe a matriz  $S^{-1}$ . Multiplicando à esquerda a matriz  $SM$  por  $S^{-1}$  obtém-se

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \cdots & \lambda_n v_{1n} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_n v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \cdots & \lambda_n v_{nn} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, suponha que exista uma matriz  $S$  com  $S^{-1}MS = D$ , onde  $D$  é a matriz diagonal de autovalores de  $M$ . Isto implica que a  $i$ -ésima coluna de  $S$  é um autovetor associado ao autovalor da  $i$ -ésima diagonal da matriz  $D$ , ou seja,

$$M[S]_{*i} = S[D]_{*i} = [D]_{ii}[S]_{*i},$$

onde  $[S]_{*i}$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz  $S$ . Portanto, os vetores coluna de  $S$  são autovetores de  $M$ . Além disso, como não é uma matriz singular segue que os vetores coluna de  $S$  são linearmente independentes. □

Seja  $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}$ . A matriz transposta de  $M$  é a matriz  $M^T = (\hat{m}_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times m}$  cujas entradas são definidas por  $\hat{m}_{ij} = m_{ji}$ . Se  $m = n$  e  $M^T = M$ , então,  $M$  é dita *simétrica*.

Dados os vetores coluna  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , o *produto escalar* de  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{w}$  é o escalar  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$  e a norma euclidiana do vetor  $\mathbf{v}$  é  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ . Um vetor é unitário se tem norma igual a 1. Uma matriz quadrada  $M$  é dita *ortogonal* quando é não singular e  $MM^T = I$ . Se  $A = PMP^T$  onde  $A$  é uma matriz diagonal e  $P$  é uma matriz ortogonal, então,  $M$  é dita *ortogonalmente diagonalizável*.

**Teorema 1.17.** [5] *Uma matriz em  $\mathbb{M}_n$  é simétrica se, e somente se, é uma matriz diagonalizável.*

**Teorema 1.18.** [8] *Se  $M, N \in \mathbb{M}_n$  são semelhantes, então  $\text{posto}(M) = \text{posto}(N)$ .*

*Demonstração.* Como  $M$  e  $N$  são semelhantes, então existe uma matriz  $S$  tal que  $M = SNS^{-1}$ . Assim,  $MS = SN$  e  $\text{posto}(MS) = \text{posto}(SN)$ . Do Teorema 1.11, como  $S$  é uma matriz não singular segue que  $\text{posto}(MS) = \text{posto}(M)$  e o  $\text{posto}(SN) = \text{posto}(N)$ . Logo,  $\text{posto}(M) = \text{posto}(N)$ . □

**Definição 1.19.** Uma matriz quadrada  $M$  é *reduzível* quando existem uma matriz ortogonal  $Q$  e matrizes quadradas  $X$  e  $Z$  tais que:

$$QMQ^T = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

Caso contrário,  $M$  é chamada *matriz irredutível*.

**Lema 1.20.** [4] *Se  $A$  é uma matriz não negativa, irredutível e com ordem  $n$ , então  $(I + A)^{n-1} > 0$ .*

Para o resultado a seguir, definiremos como *matriz adjunta* da matriz característica  $(\gamma I - A)$ , denotada por  $B(\gamma) = (b_{ij})$ , com a entrada  $b_{ij}$  sendo o co-fator do elemento  $\gamma \delta_{ji} - a_{ji}$ ; com  $\delta_{ji}$  sendo a função delta de kronecker e co-fator do elemento  $b_{ij}$  como  $\det(B[\alpha, \beta])$ , onde  $\alpha = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$  e  $\beta = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$ .

**Teorema 1.21** (Teorema de Perron-Frobenius). *Seja  $A$  uma matriz real não negativa e irredutível. Então sempre existe um autovalor real e positivo  $\lambda$ , que excede em módulo o valor de todos os outros autovalores, sendo um autovalor simples de  $A$ . Além disso  $\lambda$  possui um autovetor com todas as coordenadas positivas.*



*Demonstração.* Seja um vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Definimos a função

$$r(\mathbf{x}) = r_{\mathbf{x}} = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{[A\mathbf{x}]_i}{x_i}, \quad ([A\mathbf{x}]_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k).$$

Pela definição de valor mínimo, nos excluiremos valores de  $i$ , em que  $x_i = 0$ . Portanto  $r_{\mathbf{x}} \geq 0$  e é o maior valor real tal que  $\rho \mathbf{x} \leq A\mathbf{x}$  para todo  $\rho \in \mathbb{R}^+$ . Agora vamos mostrar que a função  $r_{\mathbf{x}}$  assume o valor máximo, para algum vetor  $\mathbf{z} \geq 0$ . Seja

$$r = r_{\mathbf{z}} = \max_{\mathbf{x} \geq 0} r_{\mathbf{x}} = \max_{\mathbf{x} \geq 0} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{[A\mathbf{x}]_i}{x_i}. \quad (1.1)$$

Pela definição de  $r_{\mathbf{x}}$ , se multiplicarmos um escalar positivo pelo vetor  $\mathbf{x}$ , o valor de  $r_{\mathbf{x}}$  não se altera. Para o cálculo de  $r_{\mathbf{x}}$  consideremos o conjunto fechado

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq 0 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}.$$

Se a função  $r_{\mathbf{x}}$  fosse continua em  $M$  teríamos a existência de um máximo no conjunto. Contudo, embora os pontos  $\mathbf{x} > 0$  a função  $r_{\mathbf{x}}$  é continua, podemos ter descontinuidade em pontos da fronteira de  $M$  em que uma das coordenadas de  $\mathbf{x}$  é 0. Consideremos o subconjunto de  $M$

$$N = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = (I + A)^{n-1} \mathbf{x}, \mathbf{x} \in M\}.$$

$N$  é limitado e fechado pelo Lema 1.20. Assim, multiplicando ambos os lados da equação

$$r_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \leq A\mathbf{x}$$

por  $(I + A)^{n-1}$  obtemos:

$$r_{\mathbf{x}} \mathbf{y} \leq A\mathbf{y} \quad \text{onde } \mathbf{y} = (I + A)^{n-1} \mathbf{x},$$

pelo fato de  $r_{\mathbf{y}}$  ser o maior valor real positivo que satisfaz a inequação  $k\mathbf{y} \leq A\mathbf{y}$ , segue

$$r_{\mathbf{y}} \geq r_{\mathbf{x}}.$$

Como  $r(N)$  é uma função continua no interior e na fronteira de  $N$  além do mais  $N$  composto apenas de vetores positivos, para  $\mathbf{w} \in M$ ,  $\mathbf{w}' = (I + A)^{n-1} \mathbf{w} \in N$  temos  $r_{\mathbf{w}} \leq r_{\mathbf{w}'}$ . Segue que poderemos então usar o conjunto  $N$  no lugar do  $M$  para computar o máximo da função  $r_{\mathbf{x}}$ . A função  $r_{\mathbf{x}}$  nesse conjunto assumira então um valor máximo para algum vetor  $\mathbf{z}$ . Todo vetor  $\mathbf{z} \in M$  que satisfaz

$$r = r_{\mathbf{z}} > 0 \quad (1.2)$$

será chamado de *extremo*. Agora precisamos mostrar que o numero  $r$  definido em (1.1) é um autovalor positivo de  $A$  com autovetor  $\mathbf{z}$  e que  $\mathbf{z}$  tem suas coordenadas positivas.

Se  $\mathbf{u} = \mathbf{1}^T$  então  $r_{\mathbf{u}} = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n a_{ik}$ , mas então  $r_{\mathbf{u}} > 0$ , porque nenhuma linha de matrizes irredutíveis é composta de entradas nulas. Portanto  $r > 0$  pois  $r \geq r_{\mathbf{u}}$ . Seja

$$\mathbf{x} = (I + A)^{n-1} \mathbf{z} \quad (1.3)$$

Do Lema 1.20 segue  $\mathbf{x} > 0$  mais ainda por 1.1 e 1.2 então:

$$A\mathbf{x} - r\mathbf{x} > 0. \quad (1.4)$$

Suponha que  $A\mathbf{z} - r\mathbf{z} \neq 0$ , então:

$$A\mathbf{z} - r\mathbf{z} \geq 0, \quad (1.5)$$

pois  $\mathbf{z} \in M$ .

Pelo Lema 1.20 temos:

$$((I + A)^{n-1})(A\mathbf{z} - r\mathbf{z}) > 0 \quad (1.6)$$

A inequação 1.4 contradiz a definição de  $r$ , pois dado um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno teríamos  $A\mathbf{x} - (r + \epsilon)\mathbf{x} > 0$ , por exemplo,  $r_{\mathbf{x}} \geq r + \epsilon > r$ . Portanto  $A\mathbf{z} = r\mathbf{z}$ . Então,

$$0 < \mathbf{x} = (I + A)^{n-1}\mathbf{z} \geq (1 + r)^{n-1}\mathbf{z}$$

então  $\mathbf{z} > 0$ . Logo  $r$  é um autovalor positivo associado ao vetor  $\mathbf{z}$  que possui todas suas coordenadas positivas. Vamos mostrar agora que todo autovalor  $\gamma$  em módulo, é menor que  $r$ . Seja

$$A\mathbf{y} = \alpha\mathbf{y}$$

tomando o módulo em ambos os lados obtemos,

$$|\alpha|\mathbf{y}^+ \leq A\mathbf{y}^+$$

então

$$|\alpha| \leq r_{\mathbf{y}^+} \leq r.$$

Fazendo  $\alpha = r$  nas duas equações anteriores, temos que  $\mathbf{y}^+$  é um autovetor associado a  $r$ , como  $\mathbf{y}^+ > 0$  então todo  $y_i \in \mathbf{y}$  é diferente de 0. Disso segue que há apenas um autovetor corresponde ao autovalor  $r$ . Se houvesse dois vetores linearmente independentes  $\mathbf{w}, \mathbf{v}$  então poderíamos escolher números  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $\mathbf{y} = a\mathbf{w} + b\mathbf{v}$ , com uma das coordenadas do autovetor  $\mathbf{y}$  sendo nula, portanto isso é impossível.

Vamos mostrar agora que  $r$  é um autovalor simples.

Do fato, do autovetor  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  correspondente ao autovalor  $r$ , ter todas suas entradas positivas segue que  $B(r) \neq 0$  e que em toda coluna não nula de  $B(r)$ , tem todas as entradas são diferentes de 0 e tem o mesmo sinal. O mesmo é válido para as linhas de  $B(r)$  bastando, para isso, tomar  $A^T$ . Segue dessa propriedade de  $A$  que todo  $B_{ij}$   $i, k = 1 \dots n$  é não nulo e tem o mesmo sinal. Com isso

$$\psi p_A'(r) = \psi \sum_{i=1}^n [B]_{ii}.$$

Como  $p_A'(r) \neq 0$  é uma raiz simples do polinômio característico  $p_A(r)$  portanto  $B_{ii}(r) > 0, i = 1, \dots, n$ , e  $r \neq r'$ . Por fim, o número  $r$  é o autovalor  $\lambda$  com  $\mathbf{z}$  sendo o autovetor associado a ele.  $\square$

**Teorema 1.22** (Teorema de Weyl). *Sejam  $M$  e  $N$  matrizes simétricas de ordem  $n$ , então*

- (i)  $\lambda_i(M) + \lambda_j(N) \leq \lambda_{i+j-n}(M + N)$ , se  $n + 1 \leq i + j$
- (ii)  $\lambda_{i+j-n}(M + N) \leq \lambda_i(M) + \lambda_j(N)$ , se  $i + j \leq n + 1$ .

*Nas desigualdades anteriores a igualdade ocorre se, e só se, existe um  $n$ -vetor, não nulo, que é comum a cada um dos três autovalores envolvidos nas referidas desigualdades.*

## 1.2 Teoria de Grafos

**Definição 1.23.** Um *grafo simples*,  $G = (V, E)$ , é uma estrutura constituída por um conjunto finito  $V$  cujos elementos são denominados *vértices*, e um conjunto  $E = \{\{i, j\}; i, j \in V \text{ e } i \neq j\}$  cujos elementos são denominados *arestas*.

A *ordem de um grafo  $G$*  é a cardinalidade de seu conjunto  $V$  de vértices e é denotada por  $|V| = n$ . Quando necessário, denotamos  $V = V(G)$  e  $E = E(G)$ . Se  $V$  é um conjunto unitário e  $E = \emptyset$ ,  $G$  é chamado grafo trivial. Se  $V = \emptyset$  e  $E = \emptyset$  então  $G$  é chamado de grafo *vazio*.

Os vértices ligados por uma aresta são chamados *adjacentes*, a vizinhança de um vértice  $i$  é o conjunto  $N_G(i) = \{j \in V; \{i, j\} \in E\}$ , e o grau de  $i$  é a cardinalidade da vizinhança do vértice  $i$ , isto é,  $d(i) = |N_G(i)|$ . Denotamos por  $\delta = \delta(G) = \min\{d(i) | i \in V\}$ ,  $\Delta = \Delta(G) = \max\{d(i) | i \in V\}$  e  $\bar{d} = \bar{d}(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} d(i)$  o *grau mínimo*, *grau máximo* e o *grau médio de  $G$* , respectivamente. O grafo  $G$ , representado na Figura 1, tem ordem 5, grau mínimo 2, grau máximo 3 e grau médio  $\frac{12}{5}$ .

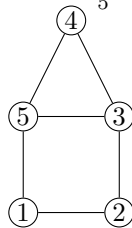


Figura 1 – Grafo  $G$

Um grafo é *completo* quando quaisquer dois de seus vértices (distintos) são adjacentes. Tal grafo é denotado por  $K_n$ , onde  $n$  é sua ordem. Um grafo é *regular* de grau  $r$  ou  *$r$ -regular*, se todos os seus vértices têm grau  $r$ . A Figura 2 exibe o grafo completo  $K_4$  (que também é 3-regular) e um 2-regular.

Uma *partição de um conjunto  $S$* , não vazio, é uma coleção  $P_r$  constituída por  $r$  subconjuntos não vazios e disjuntos de  $S$  cuja união é  $S$ . Tais subconjuntos são denominados *células*. Um grafo é  *$r$ -partido* se seu conjunto de vértices possui uma partição

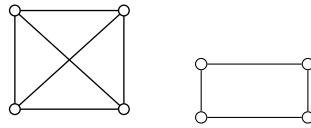


Figura 2 – Grafo  $K_4$  e um grafo 2-regular

com exatamente  $r$  células de modo que vértices pertencentes a uma mesma célula não são adjacentes. Um grafo  $r$ -partido completo é um grafo  $r$ -partido em que dois vértices são adjacentes sempre que pertencem a células distintas. Se  $r = 2$  o grafo é dito *bipartido*.

O grafo ilustrado na Figura 3 é bipartido completo pois podemos particionar o conjunto de vértices em duas células disjuntas,  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{4, 5\}$ , de modo que dois vértices de uma mesma célula não são adjacentes e cada vértice em células distintas são adjacentes dois a dois.

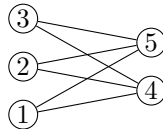


Figura 3 – Um grafo bipartido completo

Uma seqüência finita  $i_1 i_2 \dots i_k$  de vértices de um grafo  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices tal que  $\{i_j, i_{j+1}\} \in E$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$  é dita cadeia  $i_1 \dots i_k$ . Dizemos que  $i_1 i_2 \dots i_k$  é uma *cadeia fechada* se  $i_1 = i_k$  caso contrário diremos que é uma *cadeia aberta*.

No grafo  $H$ , exibido na Figura 4, a seqüência  $v_4 v_2 v_5 v_1 v_5 v_6$  é uma cadeia aberta enquanto que  $v_4 v_2 v_5 v_1 v_6 v_5 v_2 v_4$  é uma cadeia fechada.

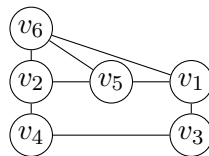


Figura 4 – grafo  $H$

Um *caminho em um grafo  $G$*  é uma *cadeia* em que todos os vértices são distintos. O *comprimento de um caminho* é o número de arestas que ligam seus vértices. Um *caminho fechado* é um *ciclo*. Um caminho com  $n$  vértices é denotado por  $\mathcal{P}_n$  e um ciclo de ordem  $n$  é usualmente denotado por  $C_n$ . A Figura 5 exhibe o caminho  $\mathcal{P}_6$  e o ciclo  $C_5$ .

Um grafo é *conexo* se existe um caminho ligando quaisquer dois de seus vértices, caso contrário é dito *desconexo*.

A *distância*  $d=d(i, j)$  entre os vértices  $i$  e  $j$  de um grafo conexo  $G$  é o mínimo dos comprimentos dos caminhos que ligam os *vértices*  $i$  e  $j$ . O *diâmetro* de um grafo é a maior

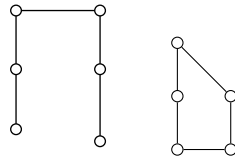


Figura 5 – Grafos  $\mathcal{P}_6$  e  $C_5$ .

distância entre dois pares quaisquer de vértices.

**Definição 1.24.** Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos.

**Definição 1.25.** Seja  $A = (V, E)$  uma árvore com raiz  $r$ . Se  $v_1 \in V$  é um vértice diferente da raiz e  $v_1v_2 \dots r$  é um caminho de  $v_1$  até  $r$ , então o vértice  $v_2$  é dito pai do vértice  $v_1$  e  $v_1$  é dito filho de  $v_2$ .

Em uma árvore, os vértices de grau 1 são chamados de *folhas*. Algumas vezes precisamos destacar um vértice de uma árvore, tal vértice é chamado raiz. Uma árvore com uma raiz fixada, é denominada árvore enraizada. Seja  $v_j$  a raiz de uma árvore. O número  $\max\{d(v_j, v_i) : v_i \in F\} + 1$ , onde  $F$  é o conjunto de folhas da árvore, é chamado quantidade de níveis de uma árvore, e é contado da raiz para as folhas. A Figura 6 ilustra uma árvore enraizada, com 3 níveis, cuja raiz é  $v$  e com 4 folhas.

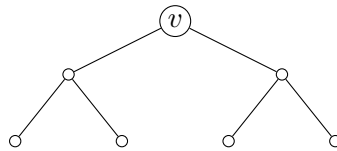


Figura 6 – Árvore  $\mathcal{B}_{2,3}$

Seja  $G$  um grafo. Um grafo  $G'$  é um *subgrafo* de  $G$  se  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $E(G') \subseteq E(G)$ . Um subgrafo  $G'$  de  $G$  é um *subgrafo induzido* se dois vértices de  $G'$ , adjacentes em  $G$ , são necessariamente adjacentes em  $G'$ . Neste caso, se  $S = V(G') \subseteq V(G)$  denotamos  $G' = G[S]$  e dizemos que  $S$  induz um subgrafo em  $G$ . Uma *componente* de um grafo  $G$  é um subgrafo maximal de  $G$  que é conexo.

O grafo  $H'$ , dado na Figura 7, é um subgrafo do grafo  $H$ , exibido na Figura 4, induzido pelo conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .

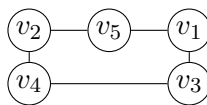


Figura 7 – grafo  $H'$

**Definição 1.26.** O grafo complementar de  $G = (V, E)$ ,  $\overline{G} = (V, \overline{E})$ , tem  $V$  como subconjunto de vértices e dois vértices são adjacentes em  $\overline{G}$  sempre que não são adjacentes em  $G$ .

Na Figura 8, ilustramos dois grafos, sendo eles: o grafo  $G'$  (à esquerda) e seu complementar (à direita).

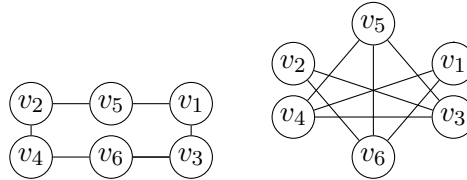


Figura 8 – Grafo  $G'$  e seu complementar.

**Definição 1.27.** A matriz de adjacência de um grafo simples  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices é a matriz quadrada  $A = A(G)$  de ordem  $n$  cuja  $(i,j)$ -ésima entrada é definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j\} \in E; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como  $G$  é um grafo simples, a matriz de adjacência  $A(G)$  é simétrica e todas as suas entradas diagonais são nulas. Observe ainda que para cada  $i \in V$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = d(i)$ , isto é, a soma das entradas da  $i$ -ésima linha de  $A$  é o grau do vértice  $i$ .

Se  $\overline{G}$  é o grafo complementar do grafo  $G$  de ordem  $n$ , então sua matriz de adjacência é  $A(\overline{G}) = \mathbf{J} - I - A(G)$ .

A seguir exibimos a matriz de adjacência do grafo ilustrado na Figura 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 1.3 Teoria Espectral de Grafos

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e matriz de adjacência  $A$ . Os autovalores de  $A$  são chamados de *autovalores de  $G$* . Denotamos por  $Spec(G)$ , o multiconjunto dos autovalores do grafo  $G$ . O *polinômio característico de  $G$* ,  $P_G(x)$ , é o polinômio característico da matriz de adjacência de  $G$ . Como  $A$  é uma matriz simétrica segue que todos os seus autovalores são reais. Fora menção contrária, denotaremos os autovalores em ordem não crescente  $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{min}$ . Quando necessário, denotamos  $\lambda_i = \lambda_i(G)$  para

todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . O maior autovalor de  $G$  é dito ser o *índice de  $G$* . Os autovetores associados aos autovalores de  $G$  são denominados *autovetores de  $G$* . O subespaço vetorial contendo o vetor nulo, e todos os autovetores associados a um autovalor  $\lambda$  de  $G$ , é chamado *autoespaço associado a  $\lambda$* , denotado por  $\mathcal{E}_G(\lambda)$ .

A seguir apresentamos o espectro de algumas classes de grafos definidas na seção anterior.

### Grafo Completo

O grafo completo de ordem  $n$ ,  $K_n$ , tem autovalores  $n - 1$  e  $-1$  com multiplicidade 1 e  $n - 1$ , respectivamente.

A fim de calcular o espectro do grafo  $K_n$ , considere  $A$ , sua matriz de adjacência, e,  $\bar{A}$  a matriz de adjacência do complementar deste grafo. A matriz  $\bar{A}$  é nula, de fato,  $A$  tem entradas nulas somente aonde estas coincidem com as entradas da diagonal principal e  $\bar{A} = \mathbf{J} - I - A$ . A matriz nula de ordem  $n$  tem como autovalor apenas o 0 com multiplicidade  $n$ , portanto, pelo Teorema 2.1 o grafo  $K_n$  tem autovalores  $n - 1$  e  $-1$  com multiplicidade 1 e  $n - 1$ .

### Grafo Bipartido Completo

O grafo bipartido completo é denotado por  $K_{r,s}$  onde  $r$  é a cardinalidade de um dos conjuntos de vértices e  $s$  é a do outro. Este grafo tem ordem  $r + s$ , seu espectro é  $\sqrt{rs}$  e  $-\sqrt{rs}$ , ambos com multiplicidade 1, e 0 com multiplicidade  $r - s - 2$ .

### Ciclo

O espectro do ciclo de ordem  $n$ ,  $C_n$ , é o multiconjunto

$$\text{Spec}(C_n) = \left\{ 2 \cos \left( \frac{2\pi j}{n} \right) : j \in \{0, 1, \dots, n - 1\} \right\}.$$

Este resultado pode ser encontrado em [12].

### Caminho

O espectro do caminho de ordem  $n$ ,  $\mathcal{P}_n$ , é o multiconjunto

$$\text{Spec}(\mathcal{P}_n) = \left\{ 2 \cos \left( \frac{\pi j}{n + 1} \right) : j \in \{0, 1, \dots, n - 1\} \right\}.$$

O resultado acima pode ser encontrado em: [9].

Em geral o espectro de um grafo bipartido não é conhecido. No entanto podemos detectar a existência de uma bipartição para o conjunto dos vértices de um grafo, a partir do conhecimento de seu espectro, como estabelece o Teorema 1.28.

**Teorema 1.28.** [7] *Seja  $G$  um grafo conexo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $G$  é um grafo bipartido;
- (ii) se  $\lambda$  é um autovalor de  $G$  então  $-\lambda$  é também um autovalor de  $G$  com a mesma multiplicidade;
- (iii)  $-\lambda_{\max}$  é um autovalor de  $G$ , onde  $\lambda_{\max}$  é o índice de  $G$ .

**Lema 1.29.** [6] *Sejam  $G = (V, E)$  um grafo com matriz de adjacência  $A$ , e dois vértices  $v_i, v_j \in V$ . O número de caminhos de comprimento  $l$  ligando os vértices  $v_i$  e  $v_j$ , é a entrada correspondente a  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $A^l$ .*

**Teorema 1.30.** [11] *Seja  $G$  um grafo com diâmetro  $d$ . Então  $G$  tem no mínimo  $d + 1$  autovalores distintos.*

*Demonstração.* Seja  $A$ , a matriz de adjacência de  $G$ . Supondo que o grafo  $G$  tenha  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  autovalores distintos, então,  $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_t I) = 0$ . Com isso,  $A^t$  pode ser escrita como combinação linear das matrizes  $I, A, \dots, A^{t-1}$ . Caso  $d(x, y) = t \leq d$ , para vértices  $x$  e  $y$  distintos, então,  $[A^i]_{xy} = 0$  para  $1 < i < t$  e  $[A^t]_{xy} > 0$ , o que é uma contradição, pois pelo Lema 1.29,  $[A^i]_{xy} > 0$  para  $1 < i < d$ , logo  $t > d$ .

□

**Teorema 1.31.** [11] *O espectro de um grafo desconexo é a união dos espectros de suas componentes.*

Informações importantes sobre um grafo podem ser obtidas da análise de seus autovetores, os resultados que seguem mostram isso.

**Teorema 1.32.** [7] *O número de componentes de um grafo  $G$  é igual ao número máximo de autovetores linearmente independentes, com entradas não-negativos, associados ao índice de  $G$ .*

A conexidade de um grafo pode ser detectada através de seu índice. Mostraremos esse fato, a seguir, no Teorema 1.33, e no Corolário 1.34.

Para a prova do Teorema 1.33, a relação de adjacência entre dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  será denotada por  $v_i \sim v_j$ .

**Teorema 1.33.** [7] *Um grafo  $G$  é conexo se e só se o índice de  $G$  é um autovalor simples cujo autovetor correspondente possui todas as coordenadas positivas.*



*Demonstração.* Seja  $A$  a matriz de adjacência de  $G$ . Pelo Teorema 1.21, o índice de  $G$  é positivo, e, seu autovetor tem todas as coordenadas positivas.

Supondo que  $G$  é desconexo, ou seja, existe um vértice  $k$  onde as entradas da linha associada a esse vértice são todas nulas, e  $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n$  é o autovetor com todas as coordenadas positivas associado ao autovalor  $\lambda_1$  então,

$$A\mathbf{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \sum_{1 \sim j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{n \sim j} x_j \end{pmatrix},$$

onde  $\sum_{i \sim j} x_j$  significa somar todas as coordenadas do vetor  $\mathbf{x}$ , onde os vértices adjacentes ao vértice  $i$ . Como todas as entradas da linha da matriz  $A$ , relativas a coordenada  $k$  são nulas, ocorre que,

$$\lambda_1 \sum_{k \sim j} x_j = \lambda_1 \sum_{k \sim j} 0 = 0.$$

Com isso, como a coordenada  $k$  deste vetor é nula, temos  $\lambda_1 = 0$ . Neste caso, ou  $\lambda_1$  não é o índice, ou  $\text{alg}(\lambda_1) = n$ . Mas isso contraria a hipótese do autovalor  $\lambda_1$  ser o índice ou ser simples. Logo  $G$  é conexo.  $\square$

**Corolário 1.34.** *Seja  $G$  um grafo desconexo. O índice de  $G$  possui um autovetor correspondente com coordenadas não negativas.*

*Demonstração.* Se  $\lambda_1(G)$  é o índice de  $G$  então, pelo Teorema 1.31,  $\lambda_1(G)$  é um autovalor de uma componente  $G[W]$  de  $G$ . Do teorema 1.33, existe um autovetor  $\mathbf{u}$  de  $G[W]$  associado a  $\lambda_1(G)$ . Definimos então um vetor  $\mathbf{v}$  que possui as mesmas coordenadas de  $\mathbf{u}$  nas entradas correspondentes aos vértices, em  $W$ , e coordenadas nulas caso contrário. Este vetor é um autovetor de  $G$  associado a  $\lambda_1(G)$ . Logo, o índice de  $G$  possui um autovetor com todas as coordenadas não negativas.  $\square$

**Proposição 1.35.** [2] *Seja  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices. Se  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}_{K_n}(-1)$  então  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{1} \rangle = 0$ .*

*Demonstração.* Considere  $A$  a matriz de adjacência do grafo  $K_n$ . Se o  $n$ -vetor coluna  $\mathbf{v}$  é um autovetor associado ao autovalor  $-1$  então,

$$A\mathbf{v} = (\mathbf{J}_n - I)\mathbf{v} = \mathbf{J}_n\mathbf{v} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \end{pmatrix} - \mathbf{v}.$$

Assim,

$$A\mathbf{v} = -\mathbf{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \end{pmatrix} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

O teorema a seguir caracteriza os grafos regulares, considerando o grau médio e o grau máximo do grafo.

**Teorema 1.36.** [13] *Se  $\lambda_1$  é o índice de um grafo  $G$  então  $\bar{d} \leq \lambda_1 \leq \Delta$ . Além disso,  $\bar{d} = \lambda_1$  se, e somente se,  $G$  é regular. Para um grafo conexo  $G$ ,  $\lambda_1 = \Delta$  se, e somente se,  $G$  é regular.*

**Teorema 1.37.** [7] *Um grafo é  $d$ -regular se, e somente se, o seu índice é  $d$  e possui o vetor com todas as coordenadas iguais a 1 como autovetor.*

*Demonstração.* Seja  $A$  a matriz de adjacência do grafo  $d$ -regular com  $n$  vértices.

Se o grafo é  $d$ -regular então, ao multiplicarmos o vetor  $\mathbf{1}$  na matriz  $A$  teremos,

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{n,i} \end{pmatrix}.$$

Como cada vértice tem o mesmo grau, cada linha da matriz  $A$  terá a mesma quantidade de entradas não nulas. Com isso,

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{n,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = d\mathbf{1}.$$

Logo, o índice de  $G$  é  $d$  e tem como autovetor associado o vetor  $\mathbf{1}$ .

Por outro lado, se  $\mathbf{1}$  é um autovetor associado ao índice  $d$  de  $G$  então,  $A \cdot \mathbf{1} = d\mathbf{1}$ . Com isso, o somatório das entradas de cada linha da matriz  $A$  vale exatamente  $d$ . Portanto, cada vértice de  $G$  tem o mesmo grau  $d$ .  $\square$

**Teorema 1.38.** [9] *Seja  $G = (V, E)$  um grafo bipartido com partições  $V = V_1 \cup V_2$ , onde  $|V_1| = r$  e  $|V_2| = s$ . Se  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s})$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda$  então o vetor  $\mathbf{x}' = (-x_1, -x_2, \dots, -x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s})$  é um autovetor associado ao autovalor  $-\lambda$ .*

*Demonstração.* Se  $G$  é um grafo bipartido com partições  $V = V_1 \cup V_2$ , onde  $|V_1| = r$  e  $|V_2| = s$ , então a matriz de adjacência de  $G$  pode ser escrita como:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{r \times r} & B_{r \times s}^T \\ B_{s \times r} & 0_{s \times s} \end{pmatrix}_{(r+s) \times (r+s)}.$$

Considerando um autovalor  $\lambda$  do grafo  $G$  com o autovetor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s}),$$

vamos mostrar que o vetor  $\mathbf{x}' = (-x_1, -x_2, \dots, -x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s})$ , é um autovetor associado ao autovalor  $-\lambda$ , isto é,  $A\mathbf{x}' = -\lambda\mathbf{x}'$ .

Visto que  $[A\mathbf{x}']_i = \sum_{j=1}^{r+s} [A]_{ij}[\mathbf{x}']_j$ , vamos analisar os casos em que  $1 \leq i \leq r$  e  $r+1 \leq i \leq r+s$ .

Para o caso em que  $1 \leq i \leq r$ , temos:

$$\sum_{j=1}^{r+s} [A]_{ij}[\mathbf{x}']_j = \sum_{j=1+r}^{r+s} [A]_{ij}[\mathbf{x}']_j = \sum_{j=r+1}^{r+s} [A]_{ij}[\mathbf{x}]_j = \lambda[\mathbf{x}]_i = -\lambda[\mathbf{x}']_i.$$

Para o caso em que  $1+r \leq i \leq r+s$ , temos:

$$\sum_{j=1}^{r+s} [A]_{ij}[\mathbf{x}']_j = \sum_{j=1}^r [A]_{ij}[\mathbf{x}']_j = -\sum_{j=1}^r [A]_{ij}[\mathbf{x}]_j = -\lambda[\mathbf{x}]_i = -\lambda[\mathbf{x}']_i.$$

Logo,  $A\mathbf{x}' = -\lambda\mathbf{x}'$ .

□

## 2 Estruturas de autoespaços de alguns grafos

Neste capítulo apresentamos alguns resultados existentes na literatura sobre autoespaços de grafos. Para maiores detalhes citamos as referências [14], [9] e [13].

Pelo Teorema 1.37, o índice de um grafo regular de grau  $d$  é exatamente  $d$ . Mas falta, ainda, caracterizar o restante do seu espectro. No próximo teorema, Sandler *et al.* provaram que, se for de conhecimento prévio o espectro de um grafo regular, é possível determinar os autovalores do complementar de tal grafo.

**Teorema 2.1.** [9] *Seja  $G$  um grafo regular de grau  $k$ . Se*

$$f_G = \frac{P_G(x)}{x - k}, f_{\bar{G}} = \frac{P_{\bar{G}}(x)}{x - n + 1 + k}.$$

*então  $f_G(x - 1) = (-1)^{n-1} f_{\bar{G}}(x)$ . Mais ainda, se  $G$  tem autovalores  $k, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , então seu complementar tem autovalores,  $n - k - 1, -1 - \lambda_1, \dots, -1 - \lambda_{n-1}$ .*

**Lema 2.2.** [9] *Dado um grafo  $G$  e sua matriz de adjacência  $A$ , tem-se  $\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) = \epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0) \subset \mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)$ .

Se  $\mathbf{v} \in \epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0)$  então,

$$(\mathbf{J} - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Somando  $-I\mathbf{v}$  em ambos os lados da equação matricial acima, obtemos:

$$(\mathbf{J} - A)\mathbf{v} - I\mathbf{v} = -I\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Usando a propriedade distributiva do lado esquerdo da equação acima, segue que:

$$(\mathbf{J} - A - I)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Assim,  $\mathbf{v}$  é um autovetor associado a  $\lambda_{\bar{G}}(-1)$ , e com isso, temos:  $\epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0) \subset \mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)$ .

Falta mostrar que  $\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) \subset \epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0)$ .

Se  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)$  resulta em:

$$(\mathbf{J} - A - I)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Novamente, aplicando a propriedade distributiva na equação acima temos:

$$(\mathbf{J} - A)\mathbf{v} - I\mathbf{v} = -\mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{J} - A)\mathbf{v} = -\mathbf{v} + I\mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{J} - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Assim,  $\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) \subset \epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0)$ . Logo,  $\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) = \epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0)$ .

□

**Teorema 2.3.** [9] Dado um grafo  $G$ , tem-se:

- (i)  $|\dim(\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)) - \dim(\mathcal{E}_G(0))| \leq 1$ ;
- (ii)  $\dim(\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)) < \dim(\mathcal{E}_G(0)) \Rightarrow \mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) \subsetneq \mathcal{E}_G(0)$ ;
- (iii)  $\dim(\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)) = \dim(\mathcal{E}_G(0)) \Rightarrow \mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) = \mathcal{E}_G(0)$ .

*Demonstração.* Seja  $A$  a matriz de adjacência do grafo  $G$ .

Vamos provar o item (i).

Note que,  $\dim(\mathcal{E}_G(0)) = \text{posto}(A - 0I) = \text{posto}(A)$  e  $\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) = \epsilon_{(\mathbf{J}-A)}(0)$ . Portanto, basta substituir as igualdades anteriores no primeiro item do Teorema 1.12, obtemos:

$$|\dim(\mathcal{E}_G(0)) - \dim(\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1))| \leq 1.$$

Para provar o item (ii) observe que,

$$\dim(\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1)) = \dim(\epsilon_{(A-\mathbf{J})}(0)) < \dim(\epsilon_A(0)) = \dim(\mathcal{E}_G(0)).$$

Basta então, considerar  $\lambda = 1$  no segundo item do Teorema 1.12, e com isso obtemos  $\mathcal{E}_{\bar{G}}(-1) \subsetneq \mathcal{E}_G(0)$ .

De modo análogo, para provar o item (iii) do teorema, basta usar o terceiro item do Teorema 1.12 com as considerações feitas anteriormente.

□

**Corolário 2.4.** [9] Seja  $\lambda$  um autovalor de um grafo  $G$  com multiplicidade maior do que 1. Então,

$$|\dim(\mathcal{E}_{\bar{G}}(-\lambda - 1)) - \dim(\mathcal{E}_G(\lambda))| \leq 1.$$

**Teorema 2.5.** [12] Seja  $G$  um grafo,  $A$  a sua matriz de adjacência, e  $\lambda$  um escalar não nulo, então:

$$\epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) = \{\mathbf{x} \in \epsilon_A(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\} = \{\mathbf{x} \in \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}.$$

*Demonstração.* Se  $\mathbf{x} \in (\epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0))$ , então,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e  $(A - \lambda\mathbf{J})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Como  $(A - \lambda\mathbf{J})\mathbf{x} = A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , segue,  $\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , com isso,  $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0$ . Isto prova que  $\epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) \subseteq \{\mathbf{x} \in \epsilon_A(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}$  e também  $\epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) \subseteq \{\mathbf{x} \in \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}$ .

Vamos mostrar que, se  $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \epsilon_A(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}$ , então  $\mathbf{x} \in \epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0)$ , e se  $\mathbf{x}' \in \{\mathbf{x} \in \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}$ , então  $\mathbf{x}' \in \epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0)$ .

Se  $\mathbf{x} \in \epsilon_A(0)$  e  $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0$ , então  $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{J}\mathbf{x} = (A - \lambda\mathbf{J})\mathbf{x}$ . Segue que  $\mathbf{x} \in \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0)$ , portanto,  $\mathbf{x} \in \epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0)$ .

Do modo análogo, se  $\mathbf{x}' \in \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0)$  e  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}' = 0$ , resulta que,  $(A - \lambda\mathbf{J})\mathbf{x}' = A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ , e portanto  $\mathbf{x}' \in \epsilon_A(0)$ .

Com isso, concluímos que  $\epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) = \{\mathbf{x} \in \epsilon_A(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}$  e  $\epsilon_A(0) \cap \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) = \{\mathbf{x} \in \epsilon_{(A-\lambda\mathbf{J})}(0) : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0\}$ .

□

**Definição 2.6.** Dado  $G$  um grafo com  $n$  vértices, sejam  $i$  e  $j$  vértices distintos de  $G$ . Dizemos que  $i$  e  $j$  são *vértices gêmeos* quando  $N_G(i) - \{j\} = N_G(j) - \{i\}$ .

**Exemplo 2.7.** O grafo  $G$  na Figura 9 possui vértices gêmeos. As vizinhanças dos vértices adjacentes 1 e 2 são  $N_G(1) = \{2, 3\}$  e  $N_G(2) = \{1, 3\}$  sendo que  $N_G(1) \setminus \{2\} = N_G(2) \setminus \{1\} = \{3\}$ . Logo, 1 e 2 são vértices gêmeos. Por outro lado, os vértices não adjacentes 5, 6 e 7 possuem a mesma vizinhança  $N_G(5) = N_G(6) = N_G(7) = \{4\}$  e, por conseguinte,  $\{5, 6\}$ ,  $\{5, 7\}$  e  $\{6, 7\}$  são pares de vértices gêmeos.

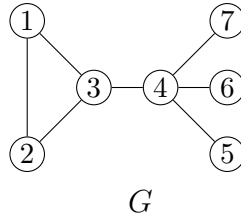


Figura 9 – Tipos de vértices gêmeos

**Teorema 2.8.** [15] Seja  $G$  um grafo e suponha que exista dois vértices gêmeos. Definiremos Vetor de Faria como:

$$[\mathbf{f}]_l = \begin{cases} 1, & \text{se } k = i; \\ -1, & \text{se } k = j; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} .$$

Então

- (i) Se  $\{i, j\} \notin E$  então  $0 \in \text{spec}(G)$
- (ii) Se  $\{i, j\} \in E$  então  $-1 \in \text{spec}(G)$ .

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices tal que  $i, j$  são vértices gêmeos. Se  $A = (a_{ij})$  é a matriz de adjacência de  $G$  e  $[\mathbf{f}]_{ij}$  é um vetor de Faria então a  $l$ -ésima entrada do  $n$ -vetor coluna  $A[\mathbf{f}]_{ij}$  é:

$$c_l = \sum_{p=1}^n [A]_{l,p} [\mathbf{f}]_p = \sum_{p \sim l} [\mathbf{f}]_p.$$

Vamos analisar os casos em que  $i$  e  $j$  são adjacentes ou não. Suponhamos que  $i$  e  $j$  não são adjacentes. Neste caso,  $N_G(i) = N_G(i) - \{j\}$  e  $N_G(j) = N_G(j) - \{i\}$ , se  $i$  e  $j$  são vértices gêmeos

e portanto  $N_G(i) = N_G(j)$ . Assim,  $l \in N_G(i)$  implica que  $c_l = \sum_{p \sim l} [\mathbf{f}]_p = [\mathbf{f}]_i + [\mathbf{f}]_j = 0$ . Por outro lado se  $l \notin N_G(i)$  então  $[c]_l = \sum_{p \sim l} [\mathbf{f}]_p = 0$ . Logo o Vetor de Faria  $[\mathbf{f}]_{ij}$  é um autovetor associado ao autovalor zero de  $G$ . Agora, suponhamos que  $i$  e  $j$  são adjacentes. Como  $i$  e  $j$  são vértices gêmeos segue que  $N_G(i) - \{j\} = N_G(j) - \{i\}$ . Assim,

$$(i) [c]_i = [\mathbf{f}]_j = (-1)[\mathbf{f}]_i$$

$$(ii) [c]_j = [\mathbf{f}]_i = 1 = (-1)[\mathbf{f}]_j$$

$$(iii) [c]_l = 0 = (-1)[\mathbf{f}]_l \text{ para todo } l \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

□

## 2.1 Algoritmo V2

No teorema a seguir é apresentado um algoritmo que determina a quantidade de autovalores maiores, menores e iguais a um determinado valor  $\alpha$  fixado.

**Teorema 2.9.** [16] *Seja  $A = (V, E)$  uma árvore e  $\alpha \neq 0$  um número escalar real.*

*Primeiramente para cada  $v_i \in V$ , atribuímos o valor  $a(v_i) = -\alpha$ .*

*Em seguida, a partir das folhas da árvore  $A$ , escolha um vértice  $v_i \in V$  e considere o conjunto  $F_i$  como sendo o conjunto de filhos de  $v_i$ .*

*Se  $F_i = \emptyset$  então  $a(v_i) \leftarrow a(v_i)$ ;*

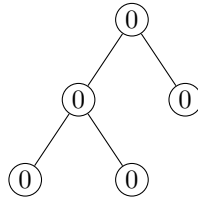
*Se  $\forall v_j \in F_i$  temos  $a(v_j) \neq 0$  então  $a(v_i) \leftarrow a(v_i) - \sum_{v \in F_i} \frac{1}{a(v)}$ .*

*Caso contrário, considere  $a(v_j) = 0$  para algum  $v_j \in F_i$ . Faça  $a(v_i) = -\frac{1}{2}$ ,  $a(v_j) = 2$  e  $E \leftarrow E \setminus \{v_i, v_k\}$  onde  $v_i$  é filho de  $v_k$ . Repita o passo anterior.*

*A quantidade de  $a(v)$  maior, menor e iguais a zero, são a quantidade de autovalores maiores, menores e iguais a  $\alpha$ , respectivamente.*

**Exemplo 2.10.** [1] *Vamos aplicar o Teorema 2.9 na árvore da Figura 6.*

*Primeiramente, valoramos todos os vértices com o autovalor que queremos saber à respeito da multiplicidade de 0.*

Figura 10 – Passo 1: Fazendo  $\alpha = 0$ .

A partir das folhas do último nível, escolhemos seu pai, que valerá  $-\frac{1}{2}$ , uma das folhas valerá 2, a outra 0, após isso, cortamos a ligação do vértice desse nível (pai) com o do nível acima. Por fim, como o outro vértice deste nível não tem filhos seu valor não se altera.

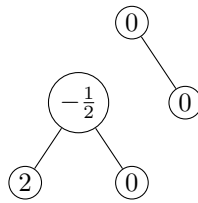


Figura 11 – Passo 2

No último passo, a raiz valerá  $-\frac{1}{2}$  e seu único filho 2.

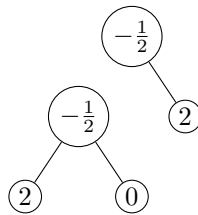


Figura 12 – Passo 3

Portanto, 0 é um autovalor simples da árvore, temos dois autovalores maiores e dois menores que 0.



### 3 Árvores de Bethe

Neste capítulo, iniciamos tratando de uma classe particular de árvores conhecidas como árvores de Bethe. Apresentaremos algumas propriedades e para mais detalhes sugerimos [17], [18] e [19], assim como [20], [21], [22], [23] e [24].

**Definição 3.1.** Uma *árvore de Bethe*  $\mathcal{B}_{d,k}$  é uma árvore enraizada com  $k$  níveis cuja raiz está no nível 1 e tem grau  $d$ , os vértices dos níveis de 2 a  $k - 1$  possuem os graus iguais a  $d + 1$  e os vértices do nível  $k$  tem grau 1.

Adotando aqui as mesmas notações de [17], para  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$  representamos por  $n_{k-m+1}$  o número de vértices no nível  $m$ , onde  $n_{k-m+1} = d^{m-1}$ . Na Figura 18, ilustramos a árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{2,4}$ , que tem grau 2 e possui quatro níveis cujas quantidades de vértices são  $n_1 = 8$ ,  $n_2 = 4$ ,  $n_3 = 2$  e  $n_4 = 1$ , respectivamente. Além disso, rotularemos tais árvores a partir da raiz até as folhas, da esquerda para a direita, como exemplificamos na figura a seguir.

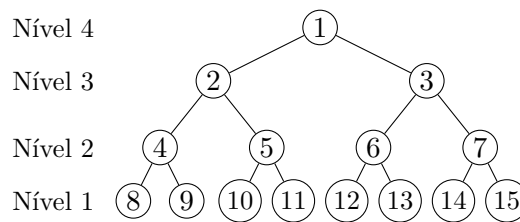


Figura 13 – Árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{2,4}$

Apresentamos a seguir, um resultado de [23] que determina o espectro das árvores de Bethe.

**Teorema 3.2.** [23] Para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  e para todo  $\ell \in \{1, 2, \dots, j\}$  os autovalores da árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{d,k}$  distintos do índice são  $2\sqrt{d} \cos \left[ \frac{\ell\pi}{j+1} \right]$  com multiplicidades iguais a  $d^{k-j-1}(d-1)$ , se  $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , e igual a 1, se  $j = k$ , sendo que o seu índice é  $2\sqrt{d} \cos \left[ \frac{\pi}{k+1} \right]$ .

Apresentamos na Tabela 1 os autovalores de  $\mathcal{B}_{2,4}$  e as suas respectivas multiplicidades:

	<b>Autovalores</b> $\left[2\sqrt{d} \cos \left[\frac{\ell\pi}{j+1}\right], \ell \in \{1, 2, \dots, j\}\right]$	<b>Multiplicidade em <math>\mathcal{B}_{2,4}</math></b> $(d^{4-j-1}(d-1))$
$j = 1$	0	4
$j = 2$	$-\sqrt{2}, \sqrt{2}$	2
$j = 3$	$-2, 0, 2$	1
$j = 4$	$-\sqrt{\sqrt{5}+3}, -\sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{\sqrt{5}+3}$	1

Tabela 1 – Autovalores de  $\mathcal{B}_{2,4}$

### 3.1 Multiplicidade do autovalor nulo

De acordo com o Teorema 3.2, as árvores de Bethe  $\mathcal{B}_{d,k}$  sempre possuem 0 como autovalor. De fato, se  $j = 1$  então  $2\sqrt{d} \cos \left[\frac{\pi}{2}\right] = 0$  é um autovalor de  $\mathcal{B}_{d,k}$ . Observando isto, focamos nossos estudos em analisar a multiplicidade do 0 como autovalor de tais árvores. Em meio a testes computacionais chegamos a Conjectura 3.4, que apresenta uma fórmula de recorrência de 2ª ordem para a multiplicidade do autovalor 0.

**Proposição 3.3.** (-) *O autovalor 0 da árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{d,k}$  possui multiplicidade maior ou igual a  $d^{k-2}(d-1)$ .*

*Demonstração.* Seja  $V$  o conjunto de vértices da árvore  $\mathcal{B}_{d,k}$ . Se  $i, j \in V$  são vértices gêmeos, pela definição de vértices gêmeos temos  $N_{\mathcal{B}_{d,k}}(i) - \{j\} = N_{\mathcal{B}_{d,k}}(j) - \{i\}$ . Como cada vértice de  $\mathcal{B}_{d,k}$  tem  $d$  filhos, exceto pelas folhas, e cada filho tem somente um pai, segue que a vizinhança desses vértices serão sempre diferentes. Decorre então que apenas as folhas poderão ser vértices gêmeos. Por outro lado, folhas que compartilham do mesmo pai são gêmeas, pois tem a mesma vizinhança. Temos  $d \cdot d^{k-2}$  vértices gêmeos e pelo Teorema 2.8,  $[\mathbf{f}]_{ij} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}}(0)$ . Contudo, se existir um  $k \in V$ , com  $k$  sendo filho do mesmo pai que  $i, j$ , temos  $[\mathbf{f}]_{ik} = [\mathbf{f}]_{ij} + [\mathbf{f}]_{jk}$ , com isso a quantidade de vetores de Faria linearmente independentes é  $d^{k-2}(d-1)$ , e portanto o autovalor 0 tem multiplicidade maior ou igual  $d^{k-2}(d-1)$ .  $\square$

**Conjectura 3.4.** (-) Seja  $\mathcal{B}_{d,k}$  uma árvore de Bethe. A multiplicidade do autovalor 0 é dada pela recorrência de 2ª ordem,  $s(n)$ :

$$\begin{aligned} s(0) &= 0 \\ s(1) &= 1 \\ s(2) &= (d - 1) \\ s(n) &= (d - 1)s(n - 1) + d s(n - 2) \\ &\vdots \\ s(k) &= (d - 1)s(k - 1) + d s(k - 2). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.5.** Vamos aplicar o algoritmo V2, dado no Capítulo 2, na árvore  $\mathcal{B}_{3,4}$  para determinar a multiplicidade do 0. As ilustrações a seguir foram obtidas através da aplicação deste algoritmo no Software Maple.

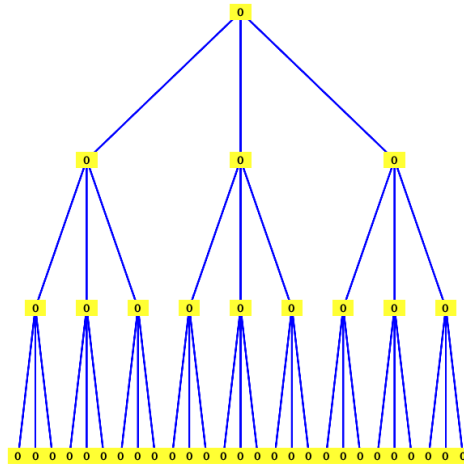


Figura 14 – Primeiro passo do algoritmo.

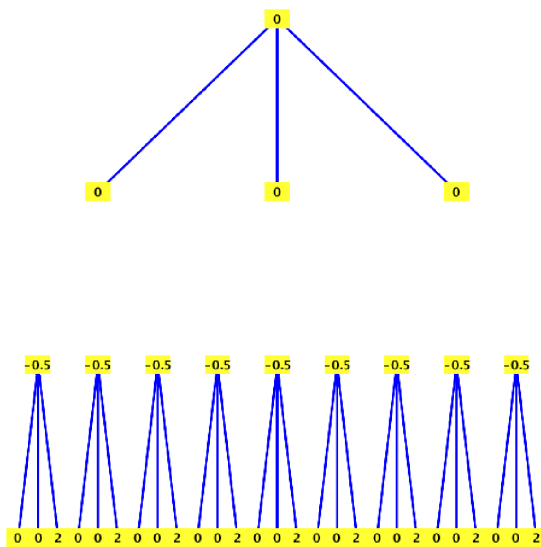


Figura 15 – Segundo passo do algoritmo.

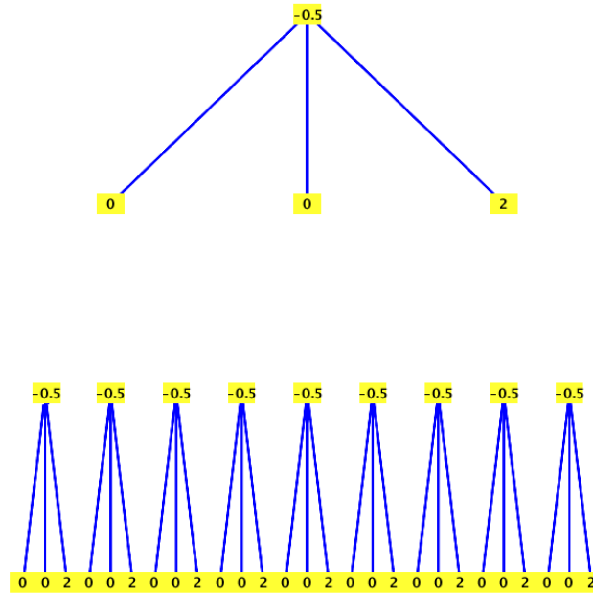


Figura 16 – Passo final do algoritmo.

Na última imagem contamos exatamente 20 vértices com o label 0, portanto essa é a multiplicidade do autovalor 0. Aplicando o Conjectura 3.4 temos:

$$s(0) = 0.$$

$$s(1) = 1.$$

$$s(2) = 2s(2 - 1) + 3s(2 - 2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$s(3) = 2s(2) + 3s(1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7.$$

$$s(4) = 2s(3) + 3s(2) = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20.$$

A partir de agora, inverteremos à numeração dos níveis, estes começarão a ser contados de a raiz até as folhas, ou seja, na ordem inversa que adotamos anteriormente.

A seguir, definiremos um conjunto de vetores que denotaremos por  $C_{d,k}$ , formado pelos autovetores do autovalor 0 e que são distintos dos vetores de Faria. Para isso, precisaremos introduzir os conceitos de avô, bisavô, neto, bisneto e descendência.

Seja a árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{d,k}$  com  $k \geq 4$ . Dado um vértice de  $\mathcal{B}_{d,k}$ , chamaremos de *avô* e *bisavô*, se existirem, o pai do pai, e o avô do pai desse vértice, respectivamente. Se dois vértices tiverem o mesmo bisavô, diremos que eles tem a mesma *linhagem*. O conjunto formado pelos filhos, netos e bisnetos de um vértice será chamado de *descendência*. O conjunto dos filhos de um vértice,  $v$ , será denotado por  $F(v)$  e o das linhagens das folhas de  $\mathcal{B}_{d,k}$  por  $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{d,k})$ .



No próximo teorema, mostraremos que os vetores definidos anteriormente pertencem ao autoespaço  $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}}(0)$ . Na demonstração deste resultado, lembramos que  $[\mathbf{w}]_{v_i}$  a coordenada do vetor  $\mathbf{w}$  associado ao vértice  $v_i$ , e por  $[A]_{v_k, v_j}$  a entrada da matriz  $A$  na linha relacionada ao vértice  $v_k$  e a coluna relacionada ao vértice  $v_j$ .

**Teorema 3.8.** (-) *Seja a árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{d,k}$  com  $k \geq 4$ . Dado  $v_i \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{d,k})$ , considere  $v_j, v_{j+1} \in F(v_i)$ . Para cada  $p \in \{1, 2, \dots, d\}$ , o vetor  $\mathbf{c}_{i,j,p} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}}(0)$ .*

*Demonstração.* Dada a matriz de adjacência,  $A$ , da árvore de Bethe  $\mathcal{B}_{d,k}$  e  $\mathbf{c}_{i,j,p}$ , definido em 3.6,  $\mathbf{w}'$  é o vetor  $A\mathbf{c}_{i,j,p}$ .

Para provar que  $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ , basta provar que  $[\mathbf{w}']_{v_w} = 0$ , para todo vértice  $v_w$ . Dado  $v_i \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{d,k})$ ,  $v_j, v_{j+1} \in F(v_i)$ , a partir de um vértice  $v_w$  vamos dividir a demonstração em 5 casos: o primeiro caso será quando  $v_w$  não faz parte da descendência de  $v_i$ ; o segundo caso quando  $v_w$  é o próprio  $v_i$ ; o terceiro caso será quando  $v_w$  é filho de  $v_i$ ; o quarto caso quando  $v_w$  é neto de  $v_i$ , e o último caso, quando  $v_w$  é uma folha e bisneto de  $v_i$ .

*Caso 1:  $v_w$  não descendente de  $v_i$*

Pela definição do vetor  $\mathbf{c}_{i,j,p}$ , as coordenadas relativas aos vértices que não são descendentes  $v_i$  são nulas. Portanto,  $[\mathbf{w}']_{v_w} = 0$ .

*Caso 2:  $v_w = v_i$*

Se  $v_w = v_i$  então a linha associada ao vértice  $v_i$  na matriz  $A$  tem entrada igual a 1 na coluna correspondente ao vértice  $v_j$  e entrada igual a  $-1$  na coluna correspondente ao vértice  $v_{j+1}$ . Portanto, ao multiplicar  $\mathbf{c}_{i,j,p}$  com a matriz  $A$ , teremos  $[\mathbf{w}']_{v_w} = 0$  pois,  $[\mathbf{c}_{i,j,p}]_{v_j} + [\mathbf{c}_{i,j,p}]_{v_{j+1}} = 1 - 1 = 0$ .

*Caso 3:  $v_w \in \{v_j, v_{j+1}\}$*

Pela definição de  $\mathbf{c}_{i,j,p}$ , as coordenadas relacionadas ao pai de  $v_w$  e aos filhos de  $v_w$  são nulas. Como a diagonal principal da matriz de adjacência  $A$  possui todas as entradas nulas, segue que,  $[\mathbf{w}']_{v_w} = 0$ .

*Caso 4: ou  $v_w \in F(v_j)$ , ou  $v_w \in F(v_{j+1})$*

Seja  $v_p \in F(v_w)$ , temos:

$$[\mathbf{c}_{i,j,p}]_{v_p} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_w \in F(v_j); \\ -1, & \text{se } v_w \in F(v_{j+1}). \end{cases}$$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $v_w \in F(v_j)$ .

Pela definição de matriz de adjacência,  $[A]_{v_w, v_j} = [A]_{v_w, v_p} = 1$ , pois  $v_j$  é pai de  $v_w$  e  $v_p$  é filho de  $v_w$ . Assim,  $[\mathbf{c}_{i,j,p}]_{v_j} + [\mathbf{c}_{i,j,p}]_{v_p} = -1 + 1 = 0$ . Logo,  $[\mathbf{w}']_{v_w} = 0$ .

*Caso 5:  $v_w$  é uma folha e bisneto de  $v_i$*



# Conclusão

Este trabalho teve por objetivo o estudo de autoespaços associados aos autovalores  $0$ ,  $1$  e  $-1$  de alguns grafos. Prosseguimos analisando os resultados da literatura sobre as propriedades espectrais das árvores de Bethe e obtivemos uma cota inferior para a multiplicidade do autovalor  $0$  de tais árvores e por conseguinte, chegou-se à Conjectura 3.4.

Como sugestões para trabalhos futuros, propomos continuar investigando a multiplicidade do autovalor  $0$  das árvores de Bethe, assim como a análise dos autoespaços associados aos autovalores  $1$  e  $-1$ , quando for o caso.



# Referências

- 1 JACOBS, D. P.; TREVISAN, V. Locating the eigenvalues of trees. *Linear Algebra and its Applications*, v. 434, p. 81–88, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 21.
- 2 CVETKOVIĆ, D.; DOOB, M.; SACHS, H. *Spectra of Graphs - Theory and Application*. New York: Academic Press, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 15.
- 3 DOOB, M. A surprising property of the least eigenvalue of a graph. *Linear Algebra Appl.*, v. 46, p. 1–7, 1982. Citado na página 2.
- 4 GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*. 2. ed. Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 1987. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 6.
- 5 HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 2, 3, 4, 5 e 6.
- 6 BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 14.
- 7 CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. *Eigenspaces of Graphs*. United Kingdom: Cambridge University Press, 1997. v. 66. (Encyclopedia of mathematics and its applications, v. 66). Citado 3 vezes nas páginas 2, 14 e 16.
- 8 MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 6.
- 9 SANDLER, T. *Eigenspace Structure of Certain Graph Classes*. Tese (Ph.D. Thesis) — Technischen Universität Clausthal, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 2, 4, 13, 16, 18 e 19.
- 10 FIEDLER, M. *Special Matrices and their Applications in Numerical Mathematics*. 2. ed. Mineola, New York: Dover publications, INC, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.
- 11 BROUWER, A. E.; HAEMERS, W. H. *Spectra of Graphs*. New York: Springer, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 14.
- 12 ABREU, N. M. M. et al. *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*. 2. ed. São Paulo: SBMAC, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 2, 13 e 19.
- 13 CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- 14 CVETKOVIĆ, D.; DOOB, M.; SACHS, H. *Spectra of Graphs - Theory and Application*. 2. ed. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1982. Citado na página 18.
- 15 ZUMSTEIN, P. *Comparison of Spectral Methods Through the Adjacency Matrix and the Laplacian of a Graph*. Tese (Ph.D. Thesis) — ETH, Zurich, 2005. Citado na página 20.

- 16 FRITSCHER, E. *Propriedade espectrais de um grafo*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2011. Citado na página 21.
- 17 ROJO, O.; SOTO, R. The spectra of the adjacency matrix and laplacian matrix for some balanced trees. *Linear Algebra Appl.*, v. 403, p. 97–117, 2005. Citado na página 23.
- 18 HEILMANN, O. J.; LIEB, E. H. Theory of monomer-dimer systems. *Commun. Math. Phys.*, v. 25, p. 190–232, 1972. Citado na página 23.
- 19 GODSIL, C. D.; GUTMAN, I. On the theory of matching polynomial. *J. Graph Theory*, v. 5, p. 137–144, 1981. Citado na página 23.
- 20 GUTMAN, I. Characteristic and matching polynomials of some compound graphs. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, v. 27, p. 61–66, 1980. Citado na página 23.
- 21 ROJO, O. The spectra of some trees and bounds for the largest eigenvalue of any tree. *Linear Algebra Appl.*, v. 414, p. 199–217, 2006. Citado na página 23.
- 22 ROJO, O. The spectra of a graph obtained from copies of a generalized bethe tree. *Linear Algebra Appl.*, v. 420, p. 490–507, 2007. Citado na página 23.
- 23 ROJO, O.; ROBBIANO, M. An explicit formula for eigenvalues of bethe trees and upper bounds on the largest eigenvalue of any tree. *Linear Algebra and its Applications*, v. 427, p. 138–150, 2007. Citado na página 23.
- 24 ROJO, O.; MEDINA, L. Spectra of generalized bethe trees attached to a path. *Linear Algebra and its Applications*, v. 430, p. 483–503, 2009. Citado na página 23.

# Índice

- índice de um grafo, 13
- árvore de Bethe, 23
- autoespaço de um grafo, 13
- autovalor e autovetor, 3
- autovetores de um grafo, 13
- cadeia aberta, 10
- cadeia fechada, 10
- caminho e ciclo, 10
- componente, 11
- diagonal principal, 2
- distância entre dois vértices, 10
- entradas diagonais, 2
- grafo, 9
  - complementar, 12
  - conexo, 10
- grafo complementar, 12
- grafo completo, 9
- grafo r-partido, r-partido completo, 10
- grafo r-regular, 9
- grau
  - máximo, 9
  - médio, 9
  - mínimo, 9
- grau máximo e grau mínimo, 9
- matriz
  - transposta, 6
  - espectro, 4
  - irredutível, 6
  - nulidade, 4
  - posto, 4
  - raio espectral, 3
  - redutível, 6
  - matriz de adjacência, 12
  - matriz diagonal, 2
  - matriz identidade, 2
  - matriz não negativa, 2
  - matriz nula, 2
  - matriz positiva, 2
  - multiplicidade algébrica, 3
  - ordem de um grafo, 9
  - partição de um conjunto, 9
  - polinômio característico, 3
    - de um grafo, 12
    - de uma matriz, 3
  - subgrafo induzido, 11
  - submatriz, 3
  - vértices gêmeos, 20
  - vértices gêmeos, 20
  - vetores  $C_{d,k}$ , 27