

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

BACHARELADO

JOÃO PAULO GONÇALVES VIANNA

**COMPORTAMENTO DINÂMICO DA CADEIA DE ISING COM
CAMPO TRANSVERSO**

NITERÓI

2015

JOÃO PAULO GONÇALVES VIANNA

COMPORTAMENTO DINÂMICO DA CADEIA DE ISING COM CAMPO TRANSVERSO

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física - Bacharelado da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. João Florencio Junior

Niterói

2015

JOÃO PAULO GONÇALVES VIANNA

COMPORTAMENTO DINÂMICO DA CADEIA DE ISING COM CAMPO TRANSVERSO

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física - Bacharelado da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel.

Aprovada em maio de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr. João Florencio Junior
UFF

Profª. Dra. Andreia Mendonça Saguia
UFF

Profª. Dra. Beatriz Maria Boechat Ponciano
UFF

Niterói
2015

Dedico este trabalho aos meus pais Ivan e Marlene

AGRADECIMENTOS

Sou muito grato aos meus pais, pela educação, oportunidade e inspiração que me deram para

que eu pudesse chegar até aqui. Também agradeço aos demais familiares que me apoiaram nesta difícil trajetória.

Agradeço ao professor João Florencio por me orientar pacientemente durante estes meses de trabalho. Agradeço à professora Beatriz Boechat pela notória dedicação e esforço em me ajudar durante o desenvolvimento deste trabalho, que me serviu não só de aprendizado em física, mas de inspiração para a vida profissional! Também agradeço à professora Andreia Saguia por ter aceitado participar da banca examinadora deste trabalho, que certamente contribuirá para minha formação.

Agradeço a minha namorada Rovana Quequeto por estar sempre ao meu lado me incentivando a enfrentar todas as dificuldades, por toda motivação que tem me dado para continuar na carreira de física e por todos os dias me dar motivos para ser feliz. Este trabalho é, além de tudo, um resultado do nosso amor!

Por fim, agradeço a todos os meus amigos que me ajudaram, de forma direta ou indireta, em especial, Renan, Vivian, Diego, Nathan, Julian, Davor, Magno e Marcel (Paulista).

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo da dinâmica de uma cadeia de Ising na presença de um campo magnético transversal. O modelo envolve apenas interação de curto alcance e é descrito por interações de primeiros vizinhos entre dois corpos da cadeia. Nós calculamos a função de autocorrelação dependente do tempo utilizando o método de diagonalização exata. O método consiste em considerar cadeias de spins finitas de diversos tamanhos com o objetivo de determinar a função de autocorrelação dependente do tempo da cadeia infinita. Nós estudamos cadeias com spins. Os resultados para o maior sistema estudado indicam que o comportamento assintótico nos sistemas termodinâmicos para tempos grandes foi atingido. Isto significa que se considerarmos cadeias maiores, os resultados serão os mesmos dentro da precisão numérica aqui apresentada. A função de autocorrelação é oscilatória para grandes valores do campo transversal e é monotonicamente decrescente para pequenos valores de campo. O sistema sofre uma mudança de

comportamento (crossover) de um regime de excitação de modo coletivo para uma dinâmica do tipo modo central à medida que o campo magnético transversal é diminuído.

Palavras-Chave: Modelo de Ising, spin $\frac{1}{2}$, campo transversal, função de autocorrelação.

ABSTRACT

In this work we present a study of the dynamics of an Ising chain (in the presence of a transverse magnetic field. The model involves only short-range interactions and is described by the interaction of nearest neighbors between two bodies in the chain. We calculate the time-dependent autocorrelation function using the exact diagonalization method. The method consists in considering finite spin chains with increasing sizes to determine the time-dependent autocorrelation function of endless chain. The results for the biggest system studied indicate that the asymptotic behavior in thermodynamical systems for large time has been reached. This means that if we consider larger chains, the results will be the same within the numerical accuracy presented here. The autocorrelation function is oscillatory for large values of the transverse field and is monotonically decreasing for small field values. The system undergoes a crossover from a collective mode excitation scheme to a dynamics of central mode type as the magnetic field is reduced.

Key-words: Ising model, spin $\frac{1}{2}$, transverse field, autocorrelation function.

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica de uma cadeia de spins Ising com interação de dois corpos na presença de um campo magnético transversal [1,2]. A grande motivação para estudar um sistema de Ising é que este é um modelo simples, largamente empregado para o estudo das propriedades magnéticas da matéria que possui aplicações na medicina, indústria, produção de chips etc. O modelo de Ising com campo transversal foi exaustivamente estudado na região de temperatura zero. Soluções exatas para este modelo unidimensional mostram a existência de uma transição de fase quântica para [3]. Nosso estudo aqui vai consistir em determinar a dinâmica do modelo no limite de alta temperatura. Como sabemos, na presença da temperatura não pode haver transição de fase em sistemas unidimensionais com interações de curto alcance. Portanto, o nosso estudo não será afetado por transições de fase. Na verdade, o limite de altas temperaturas que usaremos garante que o sistema se encontre em sua fase paramagnética.

Iremos obter a função de autocorrelação dependente do tempo. Nossos cálculos serão realizados em cadeias finitas com condições de contorno periódicas. A partir do conhecimento da dinâmica dos sistemas de diversos tamanhos nós determinamos o comportamento exato de sistemas termodinâmicos em tempos curtos. Utilizamos o método de diagonalização exata que tem sido empregado com sucesso para o estudo da dinâmica de cadeias de spin [4-6]. Nós estudamos cadeias de tamanhos para vários valores de parâmetros de energia do Hamiltoniano. Para esse modelo estudado, a cadeia de tamanho mais largo com um número de spins mostra sinais de já ter atingido o comportamento assintótico nos sistemas termodinâmicos para tempos grandes.

Nós encontramos que a função de correlação dependente do tempo apresenta um comportamento oscilatório para grandes valores de campo magnético transversal e um decaimento monotônico para pequenos valores de μ . Os resultados mostram a mudança de comportamento (crossover) de um regime de excitação de modo coletivo para um regime de excitação de modo central, à medida que o campo magnético transversal é diminuído.

O trabalho é organizado na seguinte forma: No Capítulo 2 apresentamos uma breve descrição do modelo de Ising com campo transversal. No Capítulo 3 apresentamos o método utilizado para determinar a função de autocorrelação dependente do tempo e os nossos resultados. Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos as nossas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

O modelo de Ising com campo transversal

Nosso estudo sobre a dinâmica da cadeia de Ising será realizado em temperatura infinita . Entretanto, consideramos relevante apresentarmos neste capítulo uma breve descrição do modelo de Ising unidimensional com campo transversal em temperatura zero[3]. Esta descrição é importante para um melhor entendimento do problema que estudaremos. Em temperatura zero veremos que o sistema apresenta uma mudança de comportamento, sob certas condições especiais, que denominamos transição de fase quântica.

As transições de fases clássicas e quânticas estão presentes na natureza e seu entendimento contribuiu de forma significativa para a compreensão de diversos fenômenos coletivos que ocorrem em muitos materiais[7].

2.1. Transições de fase clássicas

Existem inúmeros exemplos de transformações de fase clássicas, tais como as transformações da água e desmagnetização de um pedaço de ferro. A rigor uma transição de fase

acontece quando variamos um parâmetro externo em um sistema e as propriedades termodinâmicas do material constituído por este sistema são alteradas. Tais parâmetros externos podem ser a temperatura, pressão ou mesmo o campo magnético.

O ferro, por exemplo, à temperatura ambiente, apresenta um ordenamento magnético dos spins dos átomos que o constituem (fase ferromagnética). À medida que a temperatura aumenta, a magnetização vai diminuindo, até que a mesma desaparece por completo e o ferro se torna um paramagneto. Formalmente a temperatura está relacionada à desordem do sistema (agitação térmica), e quando esta vence a interação que mantém os spins alinhados, o ferro deixa de ser ferromagneto. Já no caso do gelo, a estrutura cristalina (moléculas de H_2O) que constitui o gelo se rompe a uma determinada temperatura crítica, ocorrendo assim o derretimento do gelo e uma transição de fase. É importante notar que as transições citadas acima ocorrem para temperaturas maiores que $0^\circ C$. Ambas têm uma fase ordenada que varia lentamente com a temperatura até atingir uma temperatura crítica onde ocorre uma mudança essencial nas propriedades macroscópicas do material.

As transições de fase clássicas são classificadas como sendo de primeira ou de segunda ordem. Quando há coexistência de fases, na temperatura crítica, a transição é dita de primeira ordem. Este é o caso da transição gelo-água. Quando não há coexistência de fases, a transição é dita contínua ou de segunda ordem, como é o caso da desmagnetização do ferro. No geral identificamos uma transição de fase no sistema analisando as derivadas da energia livre F . Se a primeira derivada de F tem comportamento descontínuo, ou se ela diverge, dizemos que a transformação é de primeira ordem. Como a magnetização é definida por

$$(2.1)$$

Podemos dizer que para transições de primeira ordem ocorre uma descontinuidade na magnetização do sistema. Definimos a susceptibilidade χ (grandeza de interesse para a termodinâmica) como,

$$(2.2)$$

Portanto, se a susceptibilidade for divergente (ou não analítica) no ponto crítico teremos uma transição contínua, ou de segunda ordem.

2.2. Transições de fase quânticas

As transições de fase quânticas ocorrem à temperatura zero. Nesta temperatura a energia térmica deixa de atuar no sistema e as transições são causadas por perturbações de origem quântica. Estas perturbações estão relacionadas com a variação de algum parâmetro quântico, tipo o campo magnético ou a configuração química do sistema. Lembramos que estas ‘perturbações’ de natureza quântica decorrem do princípio de incerteza. No entanto, tais transições, assim como no caso clássico, são caracterizadas por descontinuidade e divergência nas derivadas da energia do estado fundamental do sistema.

2.3. Descrição do modelo de Ising transverso

Vamos considerar uma rede formada por uma cadeia com um número L de spins de Ising que interagem com seus primeiros vizinhos e estão submetidos a um campo magnético transverso (Fig. 2.1).

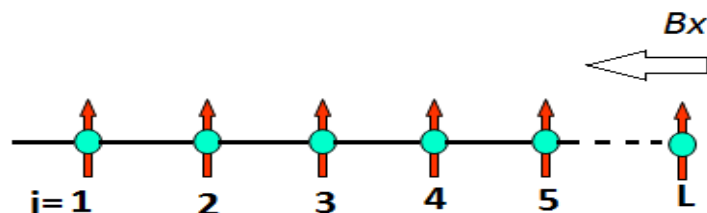


Fig. 2.1: Ilustração de uma cadeia de L spins submetida a um campo magnético transverso.

A Hamiltoniana deste sistema é definida por

(2.3)

onde, J é a interação de troca entre as componentes z de spins primeiros vizinhos e B_x é o campo magnético transverso. Os operadores σ_i^x representam a matriz de spin de Pauli, a soma estende-se por todos os spins da cadeia, e

(2.4)

Na ausência do campo magnético transverso ($B_x = 0$), e em temperatura zero, os spins estão orientados na direção z . Dizemos que o sistema apresenta uma magnetização espontânea. Ao submetermos o sistema a um campo magnético constante, que em nosso problema está orientado na direção x , surge uma “competição” entre as duas energias do Hamiltoniano. A interação J , que é uma constante que representa a energia de troca (exchange coupling), age tentando manter o sistema alinhado na direção z , e o campo magnético age tentando alinhar os spins na direção x . Existe um ponto especial, denominado de ponto crítico, onde ocorre uma transição de um estado para o outro. O parâmetro de ordem que define se o sistema está em um ou outro estado é exatamente M , que assume um valor zero na fase dominada pelo campo transverso e diferente de zero na fase dominada pela energia de troca. A figura (2.2) apresenta o diagrama de fase do sistema em temperatura zero. Note que, embora a magnetização espontânea seja zero na fase dominada pelo campo transverso, existe uma magnetização líquida diferente de zero induzida pelo campo nesta fase. A solução para o ponto crítico desse sistema é dado por $B_x/J = 1$ e foi obtida exatamente por Pfeuty[3]. A solução mostra ainda que os expoentes críticos da transição são os mesmos expoentes de um modelo de Ising puro (sem campo transverso) em duas dimensões.

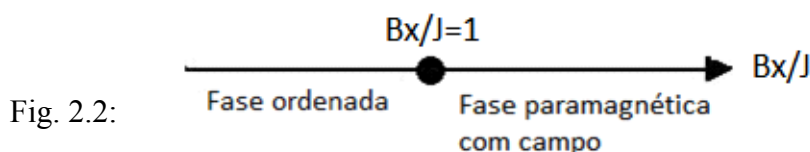


Fig. 2.2:

Diagrama de fases da

cadeia de Ising com campo transverso em $T=0$. A transição de fase quântica ocorre em $B_x/J = 1$.

Por ter solução exata, apresentar um diagrama de fases rico, e ser relativamente simples do ponto de vista matemático, o modelo de Ising com campo transverso tem sido estudado para o

entendimento de fenômenos coletivos. No próximo capítulo iremos estudar o comportamento dinâmico da cadeia de Ising com campo transversal.

Capítulo 3

Dinâmica do modelo de Ising com campo transversal

Neste capítulo apresentaremos o estudo que realizamos da dinâmica de uma cadeia de spins na presença de um campo magnético transversal. Nosso modelo envolve interações de curto alcance entre dois spins primeiros vizinhos. Para este estudo empregamos o método de diagonalização exata para cadeias de tamanhos finitos para calcular a função de autocorrelação dependente do tempo. Assim consideraremos cadeias finitas de tamanhos diferentes e determinamos exatamente para cada uma das cadeias. Analisando os resultados para os diferentes tamanhos nós podemos

inferir o comportamento de para sistemas de tamanho infinito.

3.1. Determinação da função de autocorrelação

O primeiro passo para obtermos a função de autocorrelação dependente do tempo é escrever o modelo Hamiltoniano que descreve um sistema de Ising com campo transversal em uma dimensão

(3.1)

A função de autocorrelação dependente do tempo é definida por:

(3.2)

onde significa a média térmica de um operador, conforme a equação (C.3), que pode ser encontrada no Apêndice C deste trabalho.

Como o traço pode ser tomado em qualquer base ortonormal completa, temos

(3.3)

com, onde é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta do sistema. O denominador da Eq. (3.3) representa a função de partição (ver Apêndice C). No limite de altas temperaturas, , então obtemos

(3.4)

Podemos usar uma base ortonormal de autoestados de , de acordo com a equação (A.1) que se encontra no Apêndice A. A quantidade é a energia correspondente ao estado . Desse modo, teremos

(3.5)

O símbolo $\mathbb{1}$ representa a matriz identidade. Ao tomarmos a soma dos elementos da diagonal principal teremos $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{ii} = N$, onde N denota o número de elementos da diagonal principal, o que no nosso caso corresponde ao número de spins na cadeia linear.

Note que em geral, quando

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{ii} = N, \quad (3.6)$$

pois $\mathbb{1}_{ii} = 1$, assim. Então, a expressão para $\langle S_i^z S_{i+1}^z \rangle$ fica na forma,

$$\langle S_i^z S_{i+1}^z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^z S_{i+1}^z. \quad (3.7)$$

Utilizando a relação de completude (A.3) do Apêndice A, teremos

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{ii} = N. \quad (3.8)$$

Note que podemos trocar as variáveis mudas, i e $i+1$. Assim,

$$\langle S_i^z S_{i+1}^z \rangle = \langle S_{i+1}^z S_i^z \rangle. \quad (3.9)$$

Portanto, no limite de alta temperatura, a função de autocorrelação dependente do tempo é uma função par em relação ao tempo.

Com a equação (3.8) podemos calcular a função de correlação dependente do tempo para

qualquer tamanho de cadeia. Para isso teremos que encontrar os valores das autoenergias e os

autoestados $|n\rangle$ do Hamiltoniano relacionados a essas cadeias.

3.2. O cálculo de para uma cadeia de dois spins

Vamos agora ilustrar o cálculo de utilizando uma rede de 2 spins , com condições de contorno periódicas.

Para o Hamiltoniano fica na forma

$$(3.10)$$

A base escolhida para representar a matriz Hamiltoniana será a base dos autovetores do operador , ou seja,

$$(3.11)$$

$$(3.12)$$

onde são os autoestados de . A base de autoestados para duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ é

$$(3.13)$$

A matriz Hamiltoniana é dada por .

Para calcularmos os elementos de , ou seja, , fazemos,

(3.14)

,

e a matriz Hamiltoniana será então,

(3.15)

Agora o próximo passo é diagonalizar a matriz para encontrarmos as autoenergias que são os autovalores desta matriz. As raízes de são,

(3.16)

Os autovetores normalizados de são dados por

(3.17)

onde as constantes de normalização são

(3.18)

Para calcularmos a função de autocorrelação temos que encontrar , onde são os elementos da matriz de , ou seja,

(3.19)

onde,

$$(3.20)$$

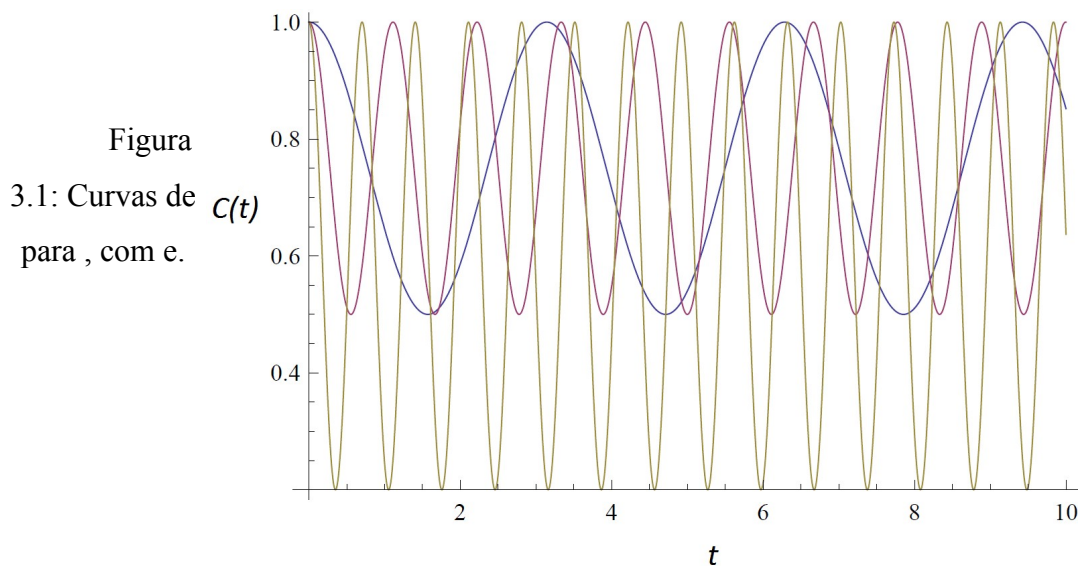
Os demais elementos da matriz são iguais a zero. Portanto, a expressão (3.8) para a de uma rede de dois spins será dada por,

$$(3.21)$$

Lembrando-se dos valores de e descritos na equação (3.16), e que para duas partículas, a expressão final para a função de autocorrelação dependente do tempo para uma cadeia de 2 spins será

$$(3.22)$$

Como podemos observar o modelo de Ising com campo transversal com interação de dois corpos gera uma função de autocorrelação oscilatória. Podemos também verificar que as condições para são satisfeitas, onde, . A figura (3.1) mostra o comportamento de para e alguns parâmetros do Hamiltoniano.



O comportamento oscilatório puro mostrado na Fig. 3.1 decorre do fato de que só existem duas frequências distintas no caso . Essas frequências são ω_1 e ω_2 e têm suas origens nas diferenças de energias,

$$E_1 - E_0 = \hbar \omega_1 \quad (3.23)$$

e

$$E_2 - E_1 = \hbar \omega_2 \quad (3.24)$$

As outras diferenças de energias como $E_3 - E_2$, $E_4 - E_3$ e etc, não contribuem para $\chi(\omega)$ pois os elementos de matriz são nulos, ou seja, $\langle n+1 | H | n \rangle = 0$. Quando considerarmos cadeias com tamanho N aparecerão mais frequências em $\chi(\omega)$. No entanto, pelo menos uma dessas frequências será incomensurável com as outras. Assim, não será possível haver um batimento construtivo perfeito, a não ser em $\omega = \omega_1$. Logo, $\chi(\omega)$ será uma função atenuada para $\omega \neq \omega_1$.

3.3. O cálculo da função de autocorrelação para cadeias com N spins

Agora iremos utilizar o método de diagonalização exata para calcularmos a função de autocorrelação da cadeia de Ising com campo transverso para redes com N spins. Neste método o que fazemos é seguir os passos descritos na seção (3.2) para o cálculo da função de autocorrelação para cadeias de tamanhos finitos. O comportamento assintótico resultante determinará o comportamento da rede infinita. Nesta seção iremos apresentar os resultados da função de autocorrelação para cadeias com N spins para diferentes valores de campos transversos. Estes cálculos foram realizados numericamente, pois, envolvem a diagonalização exata de grandes matrizes.

A Fig. 3.2 mostra $\chi(\omega)$ para a cadeia com $N=10$. Note que em nenhum dos casos mostrados $\chi(\omega)$ retorna ao valor unitário.

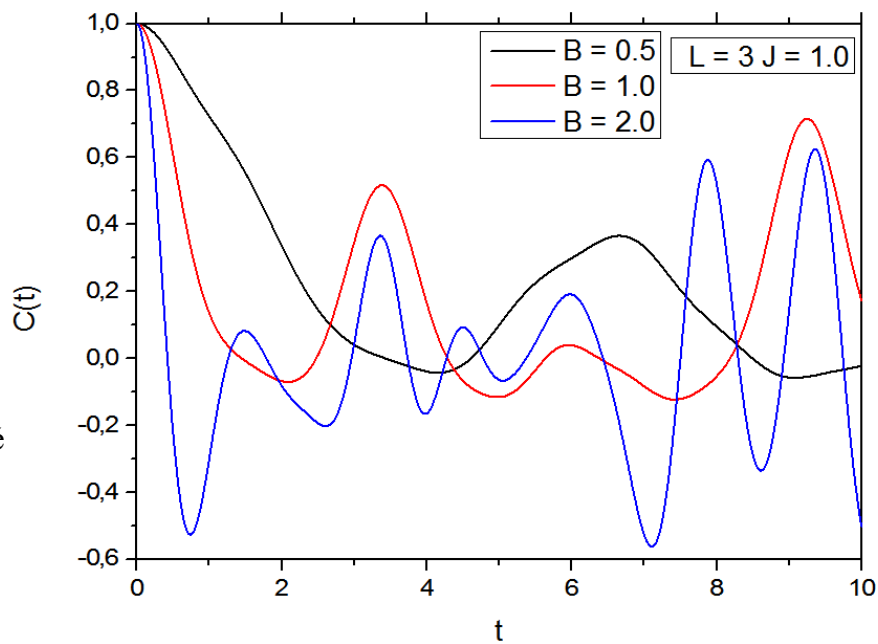


Figura 3.2: Curvas de para , com e . Nas figuras (3.3) até (3.7) apresentamos nossos resultados

numéricos para . Cada gráfico corresponde a um valor específico de campo magnético transversal. O valor do acoplamento é sempre fixo em e o campo é, portanto, medido em unidades de . Nossos resultados são para temperatura infinita.

Primeiro, destacamos que os resultados para indicam que o comportamento assintótico nos sistemas termodinâmicos para tempos grandes foi atingido em todos os casos considerados aqui.

Analisando as figuras observamos que à medida que aumentamos o campo transversal, por exemplo, , a função de autocorrelação ($C(t)$) vai se tornando cada vez mais oscilatória (Fig. 3.6). Verifica-se que a será uma função oscilatória modulada por uma gaussiana (Fig. 3.7). Por outro lado, a função de autocorrelação é monotonicamente decrescente para pequenos valores de campo transversal, por exemplo, (Fig. 3.3).

Quando , ou seja, , os spins precessam em torno do campo magnético aplicado, o chamado modo coletivo. Para pequenos valores de campo , o sistema está no modo central. Portanto, podemos dizer que o sistema sofre uma mudança de comportamento (crossover) de um regime de excitação de modo coletivo para uma dinâmica do tipo modo central à medida que o campo magnético transversal é diminuído.

Lembremos que em temperatura zero o sistema sofre uma transição de fase quântica em , o que “define” duas regiões no diagrama de fases. Podemos especular que em temperatura infinita existe ainda uma memória desta transição de fase quântica.

Por último, destacamos que as ressurgências de para tempos longos que aparecem nas figuras (3.2) a (3.6) são devidas a efeitos de tamanhos finitos das cadeias consideradas. No limite

termodinâmico, as ressurgências desaparecem, mas os resultados mostrados antes destas ressurgências são robustos e não irão se alterar.

Figura 3.3: Função de autocorrelação dependente do tempo para e e diferentes tamanhos de rede.

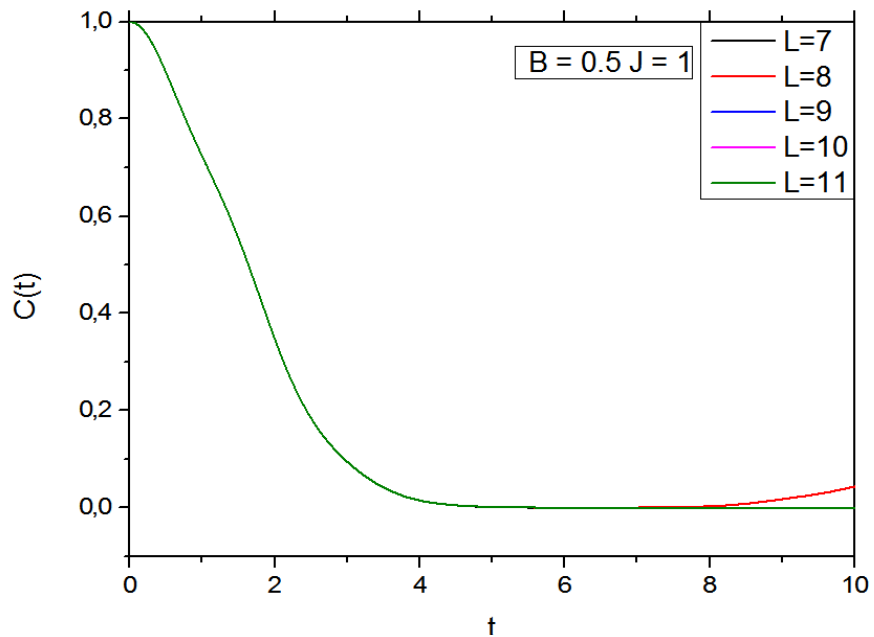


Figura 3.4: Função de autocorrelação dependente do tempo para e e diferentes tamanhos de rede .

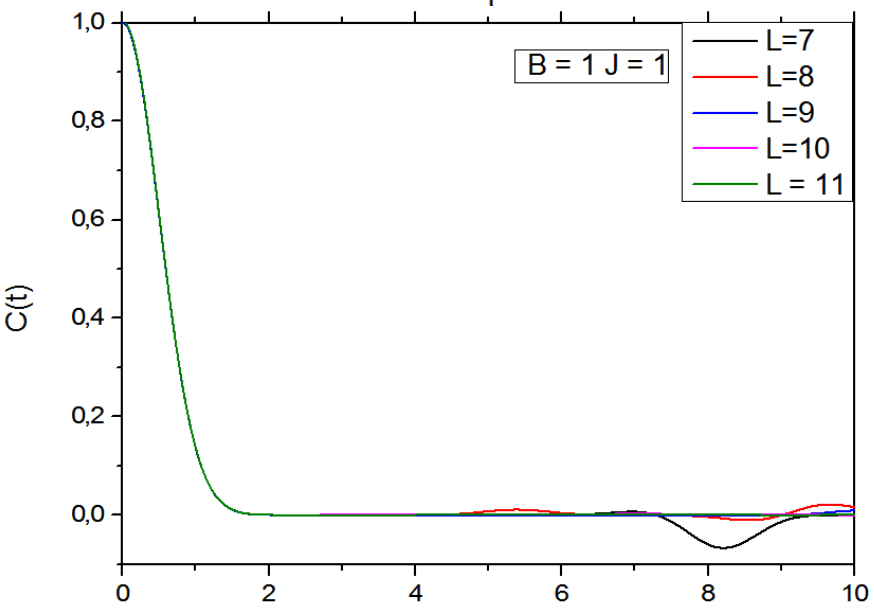
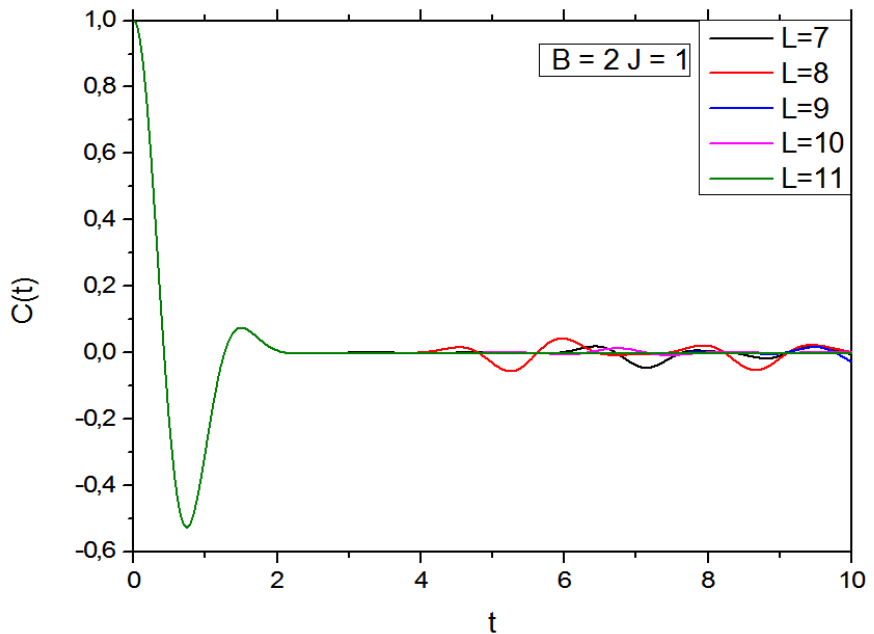


Figura 3.5: Função de autocorrelação dependente do tempo para e e diferentes tamanhos de



rede .

Figura 3.6: Função de autocorrelação dependente do tempo para e e diferentes tamanhos de rede .

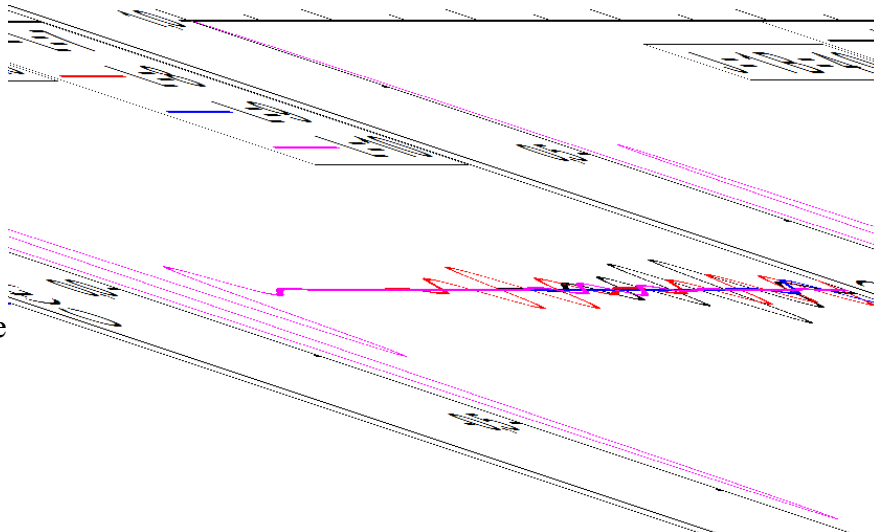
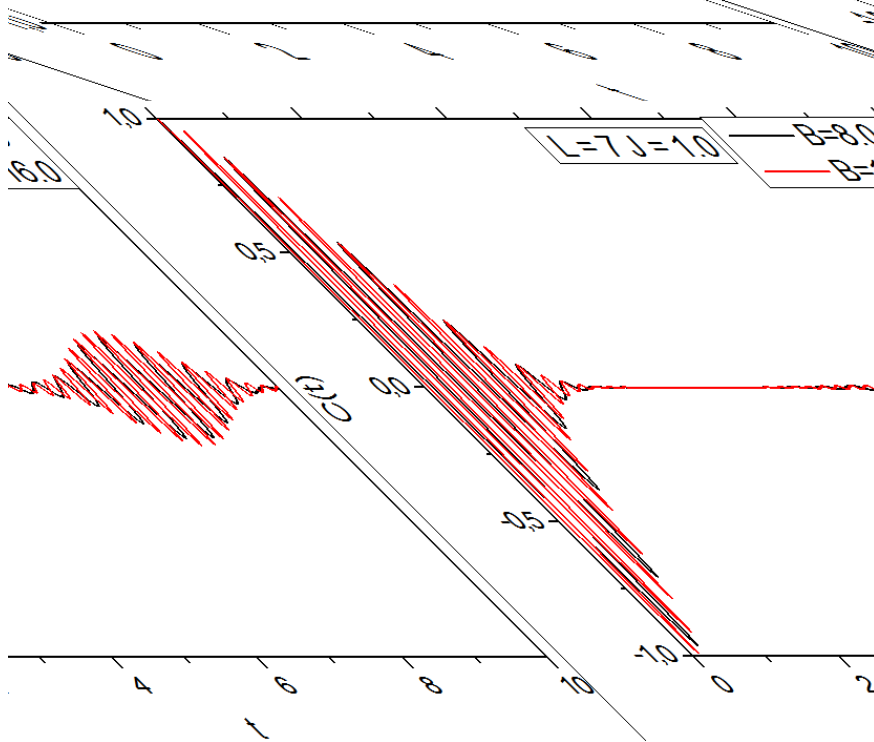


Figura 3.7: Função autocorrelação dependente do tempo para o tamanho de rede . Aqui fizemos .



Capítulo 4

Considerações finais

Neste trabalho estudamos a dinâmica de uma cadeia de spins na presença de um campo magnético transversal. Consideramos um modelo Hamiltoniano com interação Ising entre spins primeiros vizinhos e utilizamos o método de diagonalização exata que é bem sucedido para determinar a função de autocorrelação dependente do tempo. O tratamento consiste em realizar o cálculo exato para diversos tamanhos finitos de rede e obter assim o comportamento do sistema infinito. Neste trabalho utilizamos redes de tamanhos L e os resultados obtidos com a maior rede utilizada, $L=100$, demonstram que o comportamento assintótico do sistema de tamanho infinito foi atingido. A função de autocorrelação dependente do tempo obtida para vários valores de L mostra o crossover de um regime de excitação de modo coletivo para um regime de modo central, à medida que o campo magnético é diminuído.

Neste trabalho nosso objetivo foi tratar um sistema simples, cujos resultados são conhecidos na literatura, para obtermos um conhecimento do método de diagonalização exata em estudos de dinâmica de sistemas de spin. Outros sistemas com interação mais complexas, por exemplo, do tipo multi-spins, bem como outras configurações de rede, como ladders, podem ser estudadas por uma simples extensão do tratamento aqui empregado.

Apêndice

- **Definições da mecânica quântica**

Seja um operador Hermitiano (H) e o conjunto completo ortonormal, tal que[8]

(A.1)

O produto interno é dado por

(A.2)

E a relação de completeza:

(A.3)

(A.4)

(A.5)

- **Representação de Heisenberg**

Na representação de Heisenberg os operadores evoluem no tempo, os estados não dependem do tempo[8].

Definimos um operador A (dependente do tempo) como

(B.1
)

Ao tomarmos a derivada de com relação ao tempo obteremos a equação de Heisenberg:

(B.2
)

que é uma equação diferencial ordinária para os operadores .

- **Valor esperado de um operador**

O valor esperado de um operador pode ser definido como

$$\langle A \rangle = \frac{\text{Tr}(\rho A)}{\text{Tr}(\rho)}$$

(C.1)

com , onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta do sistema[8]. A quantidade Z é chamada de função de partição e é definida como

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$$

(C.2)

O traço pode ser tomado em qualquer base ortonormal completa. Logo,

$$\text{Tr}(A) = \sum_i \langle i | A | i \rangle$$

(C.3)

Portanto,

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_i \langle i | A | i \rangle \text{Tr}(\rho | i \rangle \langle i |)}{\text{Tr}(\rho)}$$

(C.4)

Bibliografia

[1] P. G. de Gennes, Solid State Commun. **1**, 132 (1963).

[2] R. Blinc and M. Ribaric, Phys. Rev. **130**, 1816 (1963).

[3] P. Pfeuty, Ann. Phys. **57**, 79 (1970).

[4] A. Sur, D. Jasnow and I.J. Lowe, Phys. Rev. **B12**, 3845 (1975); A. Sur and I.J. Lowe, Phys. Rev. **B 12**, 45977 (1975).

[5] J. Florencio, O. F. de Alcântara Bonfim and F. C. Sá Barreto, Physica **A 235**, 523 (1997).

[6] B. Boechat, C. Cordeiro, J. Florencio, F. C. Sá Barreto and O. F. de Alcântara Bonfim, *Phys. Rev. B* 61, 14327 (2000).

[7] *Quantum Mechanics*, C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Lalöe, Vol 1 and 2, John Wiley and Sons (France).

[8] *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, H. Eugene Stanley Oxford University Press (USA).