



INSTITUTO DE FÍSICA  
Universidade Federal Fluminense

Soluções de vórtice de centro para um modelo  
de Yang-Mills-Higgs com simetria  $SU(N)$

Gustavo M. Simões

Niterói

Fevereiro 2016



Gustavo Moreira Simões

Soluções de vórtice de centro para um  
modelo de Yang-Mills-Higgs com simetria  
 $SU(N)$

Monografia apresentada ao Programa  
de Graduação do Instituto de Física  
da Universidade Federal Flumi-  
nense como requisito parcial para a  
obtenção do Grau de Bacharel em  
Física.

**Orientador:** Luis Esteban Oxman

**Niterói**  
**Fevereiro de 2016**

Gustavo Moreira Simões

Soluções de vórtice de centro para um  
modelo de Yang-Mills-Higgs com simetria  
SU(N)

Monografia apresentada ao Programa de Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel em Física.

**Comissão Julgadora:**

---

Prof. Dr. Marco Moriconi

---

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

---

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, que são meus maiores pilares e motivadores.  
Nada que realizei ou vou realizar seria possível sem tudo o que eles fizeram por mim.*

# Agradecimentos:

É muito claro para mim que as pessoas às quais eu sou mais grato por ter conseguido chegar onde cheguei são os meus pais. Apesar do susto inicial quando decidi cursar física, eles confiaram na minha escolha e me deram todo o suporte necessário para eu chegar ao fim da graduação. Estou convicto de que são as pessoas mais certas com quem eu posso contar em quaisquer momentos, bons ou ruins.

Também sou imensamente grato ao meu orientador e amigo, Luis Esteban Oxman, por sua tremenda paciência e vigor inabalável em me ensinar tanto do que eu sei hoje. Olhando para trás, eu lembro do quão imaturos eram os meus conhecimentos em física e o quanto eles foram melhorando a cada conversa que nós tivemos ao longo dos anos.

Aos tantos professores que me acompanharam através desse percurso, Jorge Simões de Sá Martins, Roberto Bechara Muniz, Antônio Zelaquett Khoury e Marco Moriconi, ficam meu carinho e minha gratidão por todos os ensinamentos e conselhos em momentos tão decisivos da minha formação.

Outra pessoa muito importante e inesquecível de mencionar é minha namorada Bruna do Rêgo Gonçalves, uma fonte inesgotável de carinho e apoio e que tanto me ajudou a ter disciplina e vontade de continuar nos momentos difíceis. Espero que eu consiga fazer por ela do mesmo tanto que ela fez por mim e que ela saiba que com tanta perseverança e dedicação, ela é uma das físicas mais promissoras que conheço.

Finalmente, aos meus grandes amigos e companheiros de estudos Allan David Cony Tosta, com quem eu tanto conversei, que tanto me inspirou e me ensinou e André Feitosa Benevides, cuja criatividade sempre impressiona todos ao seu redor e cujas perguntas afiadas nunca deixaram minha mente descansar. Sem dúvida, dois dos físicos mais talentosos com quem já tive o prazer de conversar.

Minha eterna gratidão a todos!

# *Resumo*

Com o objetivo de avançar com o entendimento sobre o mecanismo de confinamento de quarks, foi proposto um modelo efetivo que contém soluções de vórtices. Os vórtices da teoria dual são os representantes da corda confinante, as chamadas *k-strings*. Para incorporar corretamente as propriedades da corda evidenciadas na rede, a ação é construída com simetria de calibre  $SU(N)$ , com  $N^2 - 1$  campos de Higgs, e um mecanismo de quebra espontânea de simetria. Isso dá origem a uma carga topológica com a estrutura  $Z(N)$  desejada e, a partir de um ansatz, as equações de vórtice são encontradas. O modelo aceita vórtices de comprimento finito, sendo então possível procurar parâmetros que ajustem o potencial quark-antiquark calculado na rede. De qualquer forma, nesse trabalho, são discutidos apenas vórtices infinitos. Apesar de ainda permanecerem sem solução, nota-se que, para uma dada escolha de parâmetros, as equações de movimento se reduzem àquelas de Nielsen-Olesen. Em particular, isso implica na existência de um ponto BPS que, por sua vez, representa uma primeira abordagem para entender a dependência dos vórtices para com os parâmetros da teoria.

**Palavras-chave:** Yang-Mills, Confinamento, Vórtices, Nielsen-Olesen, k-strings, Modelo efetivo.

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
|          | <b>Sumário</b> . . . . .                              | <b>6</b>  |
|          | <b>Lista de ilustrações</b> . . . . .                 | <b>7</b>  |
| <b>1</b> | <b>A TEORIA DE YANG-MILLS</b> . . . . .               | <b>11</b> |
| 1.1      | Caso abeliano . . . . .                               | 11        |
| 1.2      | Caso não-abeliano . . . . .                           | 12        |
| <b>2</b> | <b>CONFIGURAÇÕES DE VÓRTICES</b> . . . . .            | <b>15</b> |
| 2.1      | Vórtice de Nielsen-Olesen . . . . .                   | 15        |
| 2.2      | Vórtice BPS . . . . .                                 | 17        |
| 2.3      | Vórtice não-abeliano . . . . .                        | 18        |
| <b>3</b> | <b>O GRUPO SU(N) E SUA ÁLGEBRA</b> . . . . .          | <b>21</b> |
| 3.1      | Definições iniciais . . . . .                         | 21        |
| 3.2      | O grupo e a álgebra de SU(N) . . . . .                | 22        |
| 3.3      | A base de Weyl-Cartan . . . . .                       | 22        |
| 3.4      | Representações e os pesos de SU(N) . . . . .          | 23        |
| <b>4</b> | <b>O MODELO EFETIVO DE YANG-MILLS-HIGGS</b> . . . . . | <b>27</b> |
| 4.1      | Panorama de modelos efetivos . . . . .                | 27        |
| 4.2      | Fenomenologia da rede . . . . .                       | 28        |
| 4.3      | Um modelo de Yang-Mills-Higgs . . . . .               | 31        |
| 4.3.1    | O vácuo da teoria . . . . .                           | 32        |
| 4.3.2    | Carga topológica . . . . .                            | 33        |
| 4.3.3    | Ansatz para o setor $k=1$ . . . . .                   | 34        |
| 4.3.4    | Sobre outros valores de $k$ . . . . .                 | 38        |
| 4.3.5    | Estabilidade dos vórtices . . . . .                   | 39        |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .                          | <b>43</b> |



# Lista de ilustrações

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Massas experimentais comparadas com valores calculados a partir da rede (em vermelho). . . . .   | 14 |
| Figura 2 – Energia armazenada na corda em função da distância. . . . .  | 29 |
| Figura 3 – Força devido às flutuações quânticas da corda. . . . .   | 30 |
| Figura 4 – Inclinação do gráfico da força. A região a esquerda é calculada perturbativamente, enquanto os pontos são obtidos da simulação. . . . .  | 30 |
| Figura 5 – Potencial quark-antiquark e como ele depende da representação do grupo. . . . .  | 31 |
| Figura 6 – Comportamento do potencial de Higgs para vários valores de $\mu^2$ . (A) representa $\mu^2 > \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda}$ enquanto (B), (C) e (D) representam $\mu^2$ maior, igual ou menor que $\frac{2}{9} \frac{\kappa^2}{\lambda}$ , respectivamente. . . . . | 33 |



# Introdução

Ainda hoje é um problema em aberto prever o comportamento das interações fortes entre as partículas no regime de baixa energia. Sabe-se que a teoria de Yang-Mills [1] é a correta para descrever a força forte, mas ela apresenta uma grande dificuldade para energias pequenas já que cálculos perturbativos deixam de fazer sentido, sendo então necessário desenvolver técnicas não-perturbativas para explorar esse regime de energias pequenas. Um problema muito conhecido decorrente dessa dificuldade é que não existe uma prova teórica rigorosa do confinamento de quarks, que é um fato experimental.

Simulações numéricas na rede provaram ser uma técnica não-perturbativa extremamente útil. Essa ferramenta provê indícios de que o mecanismo de confinamento se baseia em objetos tipo cordas, que ligam os quarks e geram um potencial que os confina. Uma descrição precisa dessa corda permanece um mistério, mas ao longo dos anos, muitos físicos foram levados a criar teorias efetivas que tentem reproduzir as características dessas cordas e talvez até descrever sua dinâmica. Mesmo assim, ainda não houve sucesso.

O objetivo deste trabalho é estudar um modelo construído a partir da fenomenologia observada na rede tendo como ideia identificar os vórtices desse modelo como objetos duais associados às cordas confinantes. Os três primeiros capítulos serão uma revisão sobre o que é uma teoria de Yang-Mills (YM) e porquê ela é considerada uma teoria de calibre, o que são vórtices, exemplificando com o vórtice de Nielsen-Olesen e sobre a teoria de grupos, que é um pilar matemático fundamental para escrever uma teoria de YM. Já o capítulo 4 é focado em motivar e estudar o modelo efetivo de Yang-Mills-Higgs proposto.

Algumas convenções e conhecimentos anteriores são necessários, como eletromagnetismo, relatividade restrita e um mínimo de familiaridade com teorias de campos. Também serão usadas convenções comuns à relatividade como a convenção de Einstein e a diferença entre índices representados por letras gregas e romanas.



# 1 A teoria de Yang-Mills

## 1.1 Caso abeliano

O exemplo mais simples de uma teoria de YM é o eletromagnetismo, cuja lei de movimento são as equações de Maxwell. Estas, podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton da ação estacionária. Para isso, define-se

$$S_{Maxwell} = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (1.1)$$

O tensor de Faraday  $F_{\mu\nu}$  é antissimétrico e suas componentes não nulas se relacionam com o campo elétrico e magnético da forma  $\vec{E}|_i = F_{0i}$  e  $\vec{B}|_i = \varepsilon_{ijk} F_{jk}$ , com  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Podemos também definir o quadri-vetor potencial  $A_\mu$ , cuja componente  $A_0$  é o potencial eletroestático e as outras três são o potencial vetor  $\vec{A}$ . Em termos de  $A_\mu$ , o tensor de Faraday pode ser escrito como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.2)$$

A teoria de Maxwell é chamada uma teoria de calibre devido à simetria da ação (1.1) por transformar o campo  $A_\mu(\vec{x}, t)$  em

$$A'_\mu(\vec{x}, t) = A_\mu(\vec{x}, t) + \partial_\mu \alpha(\vec{x}, t) , \quad (1.3)$$

sendo  $\alpha$  uma função qualquer que seja real e suave. O sistema é simétrico pois o tensor  $F_{\mu\nu}$  calculado a partir de  $A'_\mu$  é idêntico ao calculado a partir de  $A_\mu$  e, por consequência, a ação também.

Já visando a generalização do eletromagnetismo, que é um caso particular de uma teoria de Yang-Mills, a transformação (1.3) pode ser escrita em termos do grupo U(1), que é o grupo dos números complexos  $z$  tais que  $zz^* = 1$ , ou seja,  $z = e^{i\alpha}$ . Para isso, é só notar que

$$\partial_\mu \alpha = iz \partial_\mu z^{-1} . \quad (1.4)$$

Claramente, um cuidado deve ser tomado ao fazer essa identificação. Da forma que está escrito em (1.4), a função  $\alpha$  é um ângulo, uma propriedade que não está presente em (1.3). Com um pouco mais de refinamento, esse cuidado dá origem à distinção entre uma teoria compacta e não-compacta, assunto que será retomado no começo do último capítulo.

É possível quantizar a teoria, transformando o campo clássico  $A_\mu(\vec{x}, t)$  em um operador  $\hat{A}_\mu(\vec{x}, t)$  atuando sobre o espaço de Fock<sup>1</sup> e postulando relações de comutação apropriadas. É assim que se descrevem fótons livres. Se ainda é introduzido na ação (1.1) um termo para o campo fermiônico  $\psi(\vec{x}, t)$  que representa o elétron e sua interação com o fóton, temos a Eletrodinâmica quântica [2–6], ou também conhecida como QED, que a teoria física com a predição mais precisa da história [7].

## 1.2 Caso não-abeliano

A teoria de Yang-Mills [1] nada mais é que uma teoria de calibre que generaliza o eletromagnetismo, na qual o grupo de simetria não necessariamente é  $U(1)$ , podendo ser, inclusive, não-abeliano. Em particular, vamos nos fixar no grupo de matrizes chamado  $SU(N)$ , que será descrito mais minuciosamente num capítulo posterior, mas que podemos definir rapidamente como o conjunto de matrizes  $S$  com determinante 1 tais que  $SS^\dagger = \mathbb{I}$ . Em particular, as interações fraca e forte são descritas por teorias de calibre não-abelianas  $SU(2)$  e  $SU(3)$ , respectivamente. Ao introduzir a interação com férmions e quantizar essas teorias, tem-se a teoria das interações fracas [8, 9] e a Cromodinâmica quântica [10, 11].

Como este é um grupo de matrizes, é natural esperar que o campo  $A_\mu$  e o tensor  $F_{\mu\nu}$  também sejam. De fato, o campo  $A_\mu$  é uma matriz hermitiana de traço nulo, ou como será visto no capítulo 3, um elemento da álgebra de Lie de  $SU(N)$ . Falar então de uma ação de Yang-Mills é falar de uma ação da mesma forma de (1.1), mas entendendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (1.5)$$

com  $g$  chamada de constante de acoplamento. Dessa forma, tem-se

$$S_{YM} = \int d^4x \frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle. \quad (1.6)$$

Por  $SU(N)$  ser um grupo cujos elementos não comutam todos entre si, ou seja, ser um grupo não-abeliano, é que se diz que a teoria de Yang-Mills é não-abeliana.

<sup>1</sup> O espaço de Fock é formado por estados de um número indefinido de partículas. Se  $\mathcal{H}$  é o espaço de Hilbert de uma única partícula e estamos considerando bósons, o espaço de Fock  $\mathcal{F}$  é definido por  $\mathcal{F} = \Omega \oplus \mathcal{H} \oplus S(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus \dots$ , onde  $\Omega$  é o estado de vácuo e  $S$  é a simetrização, devendo ser substituída por uma antisimetrização  $A$  no caso de férmions.

Construída da forma (1.6), a ação será invariante de calibre se o tensor de Faraday mudar como  $F'_{\mu\nu} = SF_{\mu\nu}S^{-1}$ . Para isso, a transformação de calibre é definida como

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1}, \quad S \in SU(N) \quad (1.7)$$

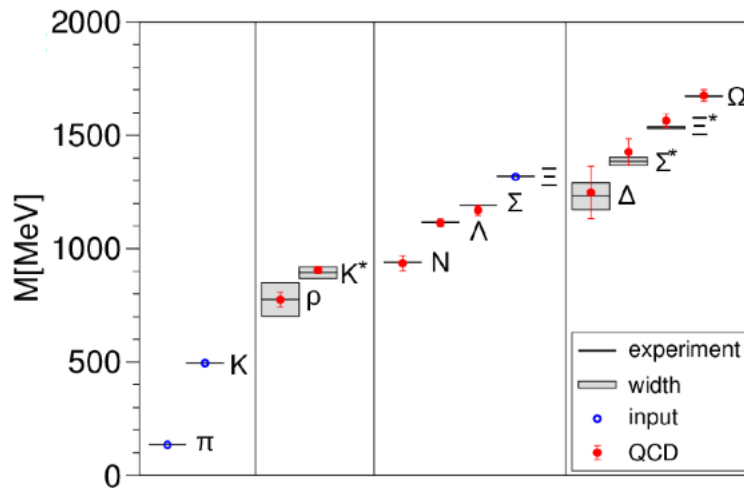
Note que se  $A_\mu$  fosse simplesmente um número e  $S$  um elemento de  $U(1)$  ao invés de  $SU(N)$ , o terceiro termo em (1.5) se anula e retomamos o eletromagnetismo.

A maneira mais eficiente de se quantizar o modelo é utilizar a integral de caminho de Feynman, cuja ideia é integrar sobre todas as configurações de campo possíveis, que não sejam equivalentes por uma transformação de calibre, com o intuito de calcular valores esperados de grandezas físicas. É preciso então fazer a chamada fixação de calibre: Escolher configurações de campo que respeitem uma condição específica de forma que cada configuração de campo fisicamente diferente seja contada apenas uma vez. Isso é feito sem grandes problemas no caso abeliano, porém no caso não-abeliano o procedimento é bastante complicado e deve ser analisado com extremo cuidado.

Também é fundamental renormalizar a teoria. O grupo de renormalização [12, 13] permite eliminar de maneira consistente contribuições divergentes para os observáveis físicos. Depois da renormalização, a constante de acoplamento passa a depender de um parâmetro de energia. O cálculo perturbativo mostra que quando a escala de energias aumenta, menor se torna o valor da constante de acoplamento, sendo portanto válida nessa região a teoria de perturbações. Já para baixas energias, a constante de acoplamento aumenta e expansões em termos de  $g$  param de fazer sentido. Nesse caso, formas não-perturbativas de prosseguir tornam-se necessárias. Um dos métodos mais poderosos, chamado cálculo na rede, consiste em discretizar o espaço-tempo e calcular computacionalmente as integrais de caminho.

Nesse momento, poderia-se questionar se a QCD é a teoria correta para modelar as interações fortes apenas no limite de altas energias e, para baixas, deve-se procurar outro modelo. De fato, a teoria é válida sempre. O problema está no método perturbativo, que só vale no regime de altas energias. É possível evidenciar isso usando a rede [14], que prevê a massa de diversos hádrons com boa concordância com aquelas medidas experimentalmente, como pode ser visto na figura 1.

Um fato experimental é que nunca foram detectados estados de quarks ou glúons livres, apenas confinados. Até hoje, não é claro de onde surge esse fenômeno na teoria, cuja



**Figura 1** – Massas experimentais comparadas com valores calculados a partir da rede (em vermelho).

demonstração é classificada como um dos problemas do milênio, segundo o Instituto de Matemática CLAY. Conforme foi sendo estudado o mecanismo de confinamento de quarks, os físicos perceberam que ele deve estar associado puramente à estrutura dos glúons, o que levou à ideia de analisar o modelo com pares quarks-antiquark sem dinâmica, ou equivalentemente, com uma massa muito grande. O potencial entre esses quarks é a quantidade física de interesse a ser calculada.



## 2 Configurações de vórtices

Antes de discutir configurações de vórtices, vale a pena ressaltar que esse capítulo é focado em modelos efetivos, ou seja, em campos clássicos. Isso não quer dizer que vórtices não apareçam em YM pura. O problema é que, como será visto a seguir, essas configurações de campo normalmente tem uma escala natural de comprimento. O motivo pelo qual essa escala aparece no caso clássico é bastante diferente do quântico, sendo este último um problema teórico em aberto.

Resultados na rede mostram que certos vórtices, como variáveis de integração, nas teorias de YM puras são cruciais para o confinamento, pois sem levá-los em consideração na integral de caminho, o sistema fica desconfinado. Porém, na rede, as configurações de vórtices são variáveis de integração da integral de Feynman, o que é bastante diferente dos vórtices que serão discutidos nesse capítulo, que são soluções das equações de movimento em um modelo de efetivo.

Em termos gerais, um vórtice é uma configuração de campo cujo valor de  $F_{\mu\nu}$  é apreciável apenas ao redor de uma linha fechada ou que se estenda ao infinito.

### 2.1 Vórtice de Nielsen-Olesen

Vale a pena olhar para o exemplo de configuração de vórtice mais simples, que aparece no caso abeliano em 3+1, chamada vórtice de Nielsen-Olesen [15]. Definimos a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D_\mu \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi \phi^* - v^2)^2, \quad (2.1)$$

com  $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ . São os parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  que vão dar a escala natural de espessura do vórtice. Deve-se entender  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$

Primeiro, vamos considerar apenas configurações estáticas de campo com uma escolha de calibre tal que  $A_0 = 0$ . Vamos olhar configurações de vórtices que tenham um valor apreciável apenas próximo do eixo z e ainda que sejam simétricas por translações ao longo deste. Como não é possível exigir que o vórtice tenha uma energia finita devido à simetria de

translação, vamos exigir que a densidade linear de energia, dada por

$$\epsilon = \int d^2x \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + (D_i \phi)^* D_i \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi \phi^* - v^2)^2, \quad (2.2)$$

tenha um valor finito. Isso equivale a buscar uma configuração de campo para a qual todos os três termos se anulam suficiente rápido na região assintótica, ou seja, quando  $r \rightarrow \infty$ . O terceiro termo se anular implica dizer que  $|\phi|$  se aproxima de  $v$ , ou seja,

$$\phi(r \rightarrow \infty) = v e^{if(\theta)}. \quad (2.3)$$

Usando a hipótese de que o campo só é apreciável perto do eixo  $z$ , então a corrente  $J_i = \partial_j F^{ij}$  deve ser praticamente nula no infinito. Consequentemente, pedir que o segundo termo em (2.2) se anule equivale a dizer que

$$A_i(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{e} \partial_i f(\theta). \quad (2.4)$$

Ora, mas tendo em vista (1.3), isso significa dizer que, assintoticamente,  $A_\mu$  é puro calibre. Com a condição (2.4), o primeiro termo naturalmente vai a zero. Uma consequência importante de (2.4) é que, se escolhida uma área  $\mathcal{A}$  cuja borda  $\mathcal{C}$  se encontra na região assintótica, então o fluxo de campo magnético através dessa área  $\mathcal{A}$  é

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} F_{ij} d\sigma^{ij} = \oint_{\mathcal{C}} A_i dx^i = -\frac{1}{e} [f(2\pi) - f(0)]. \quad (2.5)$$

Note que, tendo em vista (2.3), a expressão acima não necessariamente é nula, pois a função  $f(\theta)$  pode ser multivalorada desde que  $\phi$  não seja. A condição mais geral para que isso aconteça é  $f(2\pi) - f(0) = 2n\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Ou seja, obtemos uma condição de quantização de fluxo

$$\Phi = -n \frac{2\pi}{e}. \quad (2.6)$$

Ainda é possível mostrar que esses vórtices são soluções das equações de movimento provenientes de (2.1). Para  $n = 1$ , basta propor um ansatz

$$\vec{A} = \frac{a(\rho)}{e} \nabla \varphi , \quad (2.7a)$$

$$\phi = h(\rho) e^{i\theta} , \quad (2.7b)$$

e ver que as equações de movimento geram equações diferenciais ordinárias para os perfis  $a(\rho)$  e  $h(\rho)$  que são

$$\frac{1}{\rho} a' - a'' = -2e^2 h^2 (1 - a) ; \quad (2.8)$$

$$h'' + \frac{1}{\rho} h' = \lambda h (h^2 - v^2) + \frac{h}{\rho^2} (1 - a)^2 . \quad (2.9)$$

Falta somente impor as condições de contorno (2.3), (2.4), e exigir que os campos  $\phi(r)$  e  $\vec{A}(r)$  estejam bem definidos em  $r = 0$ . Isso se faz exigindo que os perfis respeitem

$$a(r) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad h(r) \rightarrow v \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty , \quad (2.10)$$

$$a(r) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad h(r) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0 . \quad (2.11)$$

É possível mostrar que, para uma escolha de  $n$  inteiro qualquer, as equações de movimento mudam para

$$\frac{1}{\rho} a' - a'' = -2e^2 h^2 (n - a) ; \quad (2.12)$$

$$h'' + \frac{1}{\rho} h' = \lambda h (h^2 - v^2) + \frac{h}{\rho^2} (n - a)^2 , \quad (2.13)$$

com a nova condição de contorno sobre  $a$  sendo  $a \rightarrow n$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Em suma, vórtices de Nielsen-Olesen são campos em forma de tubos com fluxo quantizado que solucionam as equações de movimento da teoria abeliana (2.1).

## 2.2 Vórtice BPS

Existe uma escolha de parâmetros  $\lambda$  e  $e$  do modelo de Nielsen-Olesen que é muito especial, a saber,  $\lambda = e^2$ . O motivo é que a energia por unidade de comprimento, em geral, pode ser escrita como [16]

$$E = \int d^2x \left[ |(D_1 + iD_2)\phi|^2 + \frac{1}{2} |F_{12} + e(\phi\phi^* - v^2)|^2 + ev^2 F_{12} + \frac{1}{2} (\lambda - g^2) (\phi\phi^* - v^2)^2 \right] , \quad (2.14)$$

onde foi usado que  $A_3$  é nulo e que os campos não dependem de  $z$ , tendo em vista (2.7), e foi descartado um termo que é puro rotacional e, portanto, é apenas um termo de superfície que não contribui para a integral, já que ele depende da derivada do campo escalar. Suponha agora que  $\lambda = e^2$ , o chamado ponto BPS<sup>1</sup>. Note que a energia foi escrita como uma soma de quadrados, a menos de um termo múltiplo do fluxo, que é quantizado. Em outras palavras, pode-se dizer que  $E \geq ev^2\Phi$ . A igualdade será verdadeira apenas se

$$(D_1 + iD_2)\phi = 0, \quad (2.15a)$$

$$F_{12} + e(\phi\phi^* - v^2). \quad (2.15b)$$

É possível mostrar que estas equações implicam nas equações de movimento de (2.1). Isso era esperado já que (2.15) minimiza a energia. Em particular, note que para as configurações BPS, a energia é linear com carga topológica  $n$ .

## 2.3 Vórtice não-abeliano

Quando consideramos um modelo não-abeliano, também é possível encontrar soluções de vórtice, porém a sua caracterização é mais complicada. Primeiro, é preciso generalizar a ideia de fluxo dada por (2.5). Tendo em vista que o fluxo é dado em termos do invariante de calibre  $F_{\mu\nu}$  no caso abeliano, para caracterizar um vórtice não-abeliano, também precisamos de uma grandeza invariante de calibre. Acontece que o fluxo não pode ser essa grandeza, pois por uma transformação (1.7), o tensor  $F_{\mu\nu}$  muda para  $SF_{\mu\nu}S^{-1}$ .

O objeto que estamos procurando é o loop de Wilson, definido por

$$W_C = \text{tr} \left[ \mathcal{P} \exp \left( i \oint A_\mu dx^\mu \right) \right]. \quad (2.16)$$

O símbolo  $\mathcal{P} \exp$  aparece devido ao caráter não-abeliano do modelo e se reduz à função exponencial no caso não abeliano, fazendo com que o loop de Wilson seja simplesmente a exponencial complexa do fluxo. Já no contexto não-abeliano, dada uma função de um parâmetro  $f(t)$ , define-se

$$\mathcal{P} \exp \int_0^t f(t') dt' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t \int_0^{t'_1} \dots \int_0^{t'_n} T(f(t'_1) \dots f(t'_n)) dt'_1 \dots dt'_n. \quad (2.17)$$

<sup>1</sup> Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld

Definido segundo (2.16), o loop de Wilson é um invariante de calibre e é o objeto correto para caracterizar o vórtice de centro como uma configuração de campo que fornece  $W_C = e^{i\frac{2n\pi}{N}\mathbb{I}}$  quando é enlaçada por  $C$ . No último capítulo, um desses modelos é apresentado e suas soluções de vórtice são estudadas. Será visto que o loop de Wilson dará informação sobre a carga topológica do vórtice.



## 3 O grupo $SU(N)$ e sua álgebra

É impossível falar sobre teorias de Yang-Mills sem saber um mínimo sobre teoria de grupos. Assim, esse capítulo é dedicado a uma rápida introdução ao grupo  $SU(N)$  e sua álgebra de Lie.

### 3.1 Definições iniciais

Um grupo  $G$  é um conjunto de elementos para o qual está definida uma operação, chamada de produto, que satisfaz três propriedades

- Fechamento: o produto de dois elementos do grupo pertence ao grupo
- Elemento identidade: Há um elemento  $e \in G$  tal que, para todo  $a \in G$ , vale  $a.e = e.a = a$
- Elemento inverso: Para qualquer elemento  $a \in G$ , existe um  $a^{-1} \in G$  tal que  $a.a^{-1} = a^{-1}a = e$

Um grupo é chamado de abeliano se todos os seus elementos comutam, ou seja,  $a.b = b.a \quad \forall a, b \in G$

Se ainda um grupo  $G$  tem uma estrutura de variedade diferenciável, ele é chamado de grupo de Lie. A todo grupo de Lie  $G$ , pode-se associar um espaço vetorial chamado álgebra de Lie e denotado  $\mathcal{G}$ . Se o grupo é visto como uma variedade, a álgebra pode ser entendida como um espaço tangente ao grupo que passa pelo elemento identidade  $e$ .

Em termos concretos, quando se fala de um grupo de matrizes, pode-se entender a álgebra como um espaço vetorial de matrizes que é fechado, não apenas pela soma e pela multiplicação por um escalar, mas também pela operação de comutador, ou seja, se  $x, y \in \mathcal{G}$ , então  $[x, y] \in \mathcal{G}$ . Mais ainda, para grupos conexos, o mapa exponencial que leva cada elemento  $x \in \mathcal{G}$  em  $e^{ix}$  é uma bijeção entre a álgebra e o grupo.

## 3.2 O grupo e a álgebra de $SU(N)$

Por sua importância e simplicidade, voltamos nossos olhos agora para o grupo  $SU(N)$ , apesar de grande parte da discussão a seguir pode ser feita em um âmbito mais geral.  $SU(N)$  é o grupo das matrizes complexas  $S$  de dimensão  $N$  tais que  $SS^\dagger = \mathbb{I}$  e  $\det S = 1$ . Isso forma um grupo, pois é fácil mostrar que todos os axiomas necessários são atendidos desde que seja usado o produto usual de matrizes.

Primeiramente, vamos definir o *centro* de um grupo como o conjunto de elementos do grupo que comutam com todos os outros. O centro de  $SU(N)$ , denotado  $Z(N)$ , é formado por todos os elementos da forma  $e^{i\frac{2\pi n}{N}}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  e é isomorfo a  $\mathbb{Z}(N)$ , o grupo dos inteiros módulo  $N$ .

Para cada  $S \in SU(N)$ , pode-se escrever  $S = e^{iA}$ , onde  $A$ , que é um elemento da álgebra, tem que ser uma matriz tal que  $A = A^\dagger$  e  $\text{Tr} A = 0$ . À álgebra de  $SU(N)$ , dá-se o nome de  $su(N)$ . Ela é um espaço vetorial de dimensão  $N^2 - 1$  onde podemos introduzir uma base de vetores  $T_A$ , com  $A = 1, \dots, N^2 - 1$ . Notando ainda que o comutador de dois elementos da álgebra pertence a esta, então

$$[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C, \quad (3.1)$$

onde está sendo usada a convenção de Einstein para o índice  $C$ . As constantes  $f_{ABC}$  são chamadas de constantes de estrutura e dependem da base escolhida.

## 3.3 A base de Weyl-Cartan

Existe uma escolha de base, chamada de base de Weyl-Cartan, que é bastante conveniente e sempre pode ser feita. Primeiro, escolhe-se o maior número de elementos que comutam entre si. Por exemplo, o subespaço de todas as matrizes hermitianas de traço nulo e diagonais. Esse subespaço, chamado subálgebra de Cartan, tem dimensão  $N - 1$  e, tem como base, digamos  $T_q$  com  $q = 1, \dots, N - 1$ . Uma vez escolhidos os  $T_q$ , deve-se encontrar os elementos  $E_\alpha$ , chamados vetores raízes, tais que

$$[T_q, E_\alpha] = \alpha_q E_\alpha. \quad (3.2)$$



Dado um  $E_\alpha$ , os  $N - 1$  coeficientes  $\alpha_q$  não podem ser todos nulos, caso contrário  $E_\alpha$  estaria na subálgebra de Cartan. Esses coeficientes formam uma  $(N-1)$ -tupla  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})$  chamada raiz. No total,  $su(N)$  tem  $N(N - 1)$  raízes. As raízes possuem várias propriedades interessantes, e a primeira delas é que se  $\alpha$  é raiz, então  $-\alpha$  também é. Ou seja, para cada  $E_\alpha$  existe um  $E_{-\alpha}$ .

Para essa base de Weyl-Cartan, as constantes de estrutura ficam mais simplesmente representadas. Entre  $T_q$  e  $T_p$ , as constantes de estrutura são todas nulas pois  $[T_q, T_p] = 0$ . Entre  $T_q$  e  $E_\alpha$ , elas são simplesmente as raízes. Falta, porém, determinar  $[E_\alpha, E_\beta]$ .

Pode-se mostrar que, se  $\alpha + \beta$  não é uma raiz, então  $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ . Se for raiz, então  $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ . De forma concisa, pode-se dizer que

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} , \quad (3.3)$$

onde  $N_{\alpha,\beta} = 0$  se  $\alpha + \beta$  não é raiz. A única exceção é quando  $\beta = -\alpha$ . Nesse caso, o comutador  $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$  está na subálgebra de Cartan e pode-se escolher uma normalização para  $E_{\pm\alpha}$  tal que

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_q T_q . \quad (3.4)$$

## 3.4 Representações e os pesos de $SU(N)$

Uma representação de um grupo  $G$  é uma função  $f$  que leva cada elemento do grupo  $a$  em uma matriz  $f(a)$  tal que

$$f(a.b) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in G , \quad (3.5)$$

onde o produto do lado direito deve ser entendido como a multiplicação usual de matrizes. Uma representação de  $SU(N)$  pode ter uma dimensão diferente de  $N \times N$ . As matrizes usadas até agora podem ser encaradas como a representação fundamental de  $SU(N)$ , que é de dimensão  $N$ . Nem todas as dimensões  $d$  aceitam uma representação de  $SU(N)$ , mas com certeza sempre existe uma de dimensão  $d = N^2 - 1$ , chamada de representação adjunta. Naturalmente, dada uma representação de um grupo, tem-se associada a representação da álgebra. A representação

adjunta da álgebra pode ser feita explicitamente, definindo uma função  $g$ , que leva cada elemento  $T_A$  da base em sua representação  $M_A$ . Em termos das constantes de estrutura,

$$g(T_A)|_{BC} = M_A|_{BC} = f_{ABC} . \quad (3.6)$$

Note que os índices  $B$  e  $C$  podem assumir  $N^2 - 1$  valores, o que caracteriza essa representação como de dimensão  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ .

Pode-se questionar que, como as constantes de estrutura mudam para diferentes bases, então é possível construir várias representações adjuntas diferentes. Isso é verdade, mas em um certo sentido, todas essas diferentes representações são equivalentes, ou seja, todas as propriedades discutidas a seguir são independentes dessa escolha.

Um fato importante da representação adjunta é que ela pode ser usada para definir uma métrica na álgebra. Isso é feito a partir da forma de Killing  $\langle , \rangle$

$$\langle X, Y \rangle = Tr(Ad_X Ad_Y) , \quad (3.7)$$

onde  $Ad_X$  é a nova notação usada para a representação adjunta de um elemento  $X$  da álgebra de Lie. Devido a  $SU(N)$  ser um grupo compacto, essa métrica é positiva definida e pode ser usada para escolher uma normalização para a base de Weyl-Cartan. Antes disso, vale a pena fazer uma pequena redefinição.

Primeiro, vamos definir um conceito muito importante de positividade para as raízes. Uma raiz  $\alpha$  é dita positiva se sua última componente não-nula é positiva. Obviamente, se  $\alpha$  é uma raiz positiva, então  $-\alpha$  é negativa. Agora, para cada par  $(E_\alpha, E_{-\alpha})$ , seja

$$T_\alpha = \frac{E_\alpha + E_{-\alpha}}{\sqrt{2}} , \quad (3.8)$$

$$T_{\bar{\alpha}} = \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{i\sqrt{2}} , \quad (3.9)$$

com  $\alpha > 0$  para evitar uma sobrecontagem.

Em termos desses novos elementos de base de  $su(N)$ , pode-se escolher uma normalização tal que

$$\langle T_A, T_B \rangle = \delta_{AB} , \quad (3.10)$$

onde  $A$  e  $B$  representam, coletivamente, tanto os índices da subálgebra de Cartan quanto os índices de raízes  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ . As relações de comutação ficam

$$[T_q, T_\alpha] = i\alpha|_q T_{\bar{\alpha}}, \quad (3.11a)$$

$$[T_q, T_{\bar{\alpha}}] = -i\alpha|_q T_\alpha, \quad (3.11b)$$

$$[T_\alpha, T_{\bar{\alpha}}] = i\alpha|_q T_q, \quad (3.11c)$$

$$[T_\alpha, T_\beta] = \frac{i}{\sqrt{2}} (N_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta} T_{\alpha-\beta}), \quad (3.11d)$$

$$[T_\alpha, T_{\bar{\beta}}] = -\frac{i}{\sqrt{2}} (N_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta} T_{\alpha-\beta}), \quad (3.11e)$$

$$[T_{\bar{\alpha}}, T_{\bar{\beta}}] = -\frac{i}{\sqrt{2}} (N_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta} T_{\alpha-\beta}). \quad (3.11f)$$

Falta apenas determinar os coeficientes  $N_{\alpha,\beta}$  explicitamente. De maneira consistente com a normalização acima, o valor desses coeficientes é dado por

$$N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 q(p+1). \quad (3.12)$$

Nessa expressão,  $q$  e  $p$  são os maiores números naturais tais que o conjunto  $\{\alpha - p\beta, \dots, \alpha + \beta, \dots, \alpha + q\beta\}$  possui apenas raízes. Para  $SU(N)$ , todas as raízes tem o mesmo módulo  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  e para quaisquer duas raízes  $\alpha, \beta$ , vale

$$\begin{aligned} q = 1 \quad p = 0 \quad \text{se} \quad \alpha + \beta \quad \text{é raiz}, \\ q = 0 \quad \text{se} \quad \alpha + \beta \quad \text{não é raiz}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim,  $N_{\alpha,\beta}^2$  assume apenas um valor não-nulo  $\frac{1}{2N}$ , quando  $\alpha + \beta$  é raiz. Claramente, o sinal de  $N_{\alpha,\beta}$  não está especificado e, de fato, este depende de  $\alpha$  e  $\beta$ . Mas, para os propósitos desse trabalho, calcular apenas  $N_{\alpha,\beta}^2$  é o suficiente.

Dada uma representação  $f$  de  $su(N)$  e, por consequência, dos  $T_q$  pode-se perguntar quais são os vetores  $|\mu\rangle$  tais que

$$f(T_q)|\mu\rangle = \mu_q|\mu\rangle. \quad (3.14)$$

Os coeficientes  $\mu_q$  podem ser arranjados em uma  $(N-1)$ -tupla  $(\mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ , chamada de peso da representação em questão. Os pesos da representação fundamental são denotados por  $\omega$  e são um total de  $N$ . Já a representação adjunta tem as raízes como pesos, que são um total de  $N(N-1)$ , e ainda  $N-1$  pesos nulos.

Qualquer raiz pode ser escrita como a diferença de dois pesos da representação fundamental

$$\alpha = \alpha_{ij} = \omega^i - \omega^j, \quad (3.15)$$

onde os índices denotam os diferentes pesos, e não as componentes e, portanto,  $i, j = 1, \dots, N$ .

Ainda vale que

$$\sum_{\omega} \omega = 0, \quad (3.16a)$$

$$2N \sum_{\omega} \omega_q \omega_p = \delta_{qp}, \quad (3.16b)$$

$$\sum_{\alpha} \alpha_q \alpha_p = \delta_{qp}. \quad (3.16c)$$

Pode-se introduzir uma noção de ordem para os pesos a partir da mesma noção de positividade que foi introduzida para as raízes. Explicitamente, diz-se que  $\omega_2 > \omega_1$  se  $\omega_2 - \omega_1 > 0$ . Assim, as  $\frac{N(N-1)}{2}$  raízes positivas de  $SU(N)$  podem ser escritas como

$$\alpha = \alpha_{ij} = \omega^i - \omega^j, \quad \text{com } \omega_i > \omega_j. \quad (3.17)$$

## 4 O modelo efetivo de Yang-Mills-Higgs

### 4.1 Panorama de modelos efetivos

Não é de hoje que os físicos tentam criar teorias que expliquem fenômenos de maneira efetiva, ou seja, sem partir de primeiros princípios e introduzindo mecanismos que tentem reproduzir uma certa fenomenologia.

Os exemplos vão muito além da física de partículas, havendo um caso bastante notável, isto é, a teoria de Ginzburg-Landau para supercondutores [17], em que é introduzida uma função de onda macroscópica  $\psi(\vec{r})$ , em termos da qual se escreve o funcional energia como

$$E[\psi] = \alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m}|\left(\nabla + \frac{2ie}{c}\vec{A}\right)\psi|^2. \quad (4.1)$$

A semelhança com (2.1) é notável. A teoria de Ginzburg-Landau tem sucesso considerável em descrever supercondutores de tipo I e tipo II, o efeito Meissner e soluções de vórtices de Nielsen-Olesen, com a quantização de fluxo magnético observada no experimento. Curiosamente, esse trabalho recebeu pouca atenção até Gor'kov [18] mostrar a conexão entre ele e a teoria BCS [19], essa sim uma descrição microscópica da supercondutividade.

Já no escopo da física de partículas, um dos pioneiros no estudo de uma teoria efetiva para YM foi 't Hooft [20]. Em seu artigo de 1978 ele argumenta que, em 2+1 dimensões, devem existir operadores de campo  $\varphi(x)$  que criam vórtices em uma posição  $x$  e propõe que a dinâmica deles deve ser descrita por uma lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - M^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda_1}{N!}(\varphi^N + \varphi^{*N}) - \frac{\lambda_2}{2}(\varphi^*\varphi)^2. \quad (4.2)$$

Essa lagrangiana tem uma simetria  $Z(N)$ , já que ela não muda pela transformação  $\varphi \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{N}}\varphi$ . Naturalmente, existe um mecanismo de quebra espontânea de simetria dependendo do sinal de  $M^2$ , que quando negativo, representaria uma fase de quarks confinados. Isso se dá pois o grupo  $Z(N)$  é discreto, em contraste com  $SU(N)$  que é contínuo. Portanto, na fase com quebra espontânea de simetria, devem existir paredes de domínio que separam uma configuração de outra e, por estar em 2+1 dimensões, a parede deve ser um objeto unidimensional, tipo corda. Esse

objeto tem energia por unidade de comprimento finita e com uma espessura que depende dos parâmetros de massa do modelo. Em seu artigo, 't Hooft propõe que essa parede representa, no modelo efetivo, a corda confinante e seus extremos representam o par quark-antiquark externo da teoria de Yang-Mills.

Outro trabalho pioneiro foi o de Polyakov [21], onde ele estuda uma QED compacta em 2+1 dimensões. A compacticidade é implementada a partir de uma teoria de calibre  $SU(2)$ , mas a partir da hipótese de que as constantes de acoplamento são pequenas, uma das componentes do campo de calibre se desacopla das outras e fica não-massiva, sendo então natural identificá-la com o campo  $A_\mu$  do eletromagnetismo. Essa teoria é dita compacta pois essa componente se transforma com um subgrupo de  $SU(2)$ , que é compacto, isomorfo a  $U(1)$ . Introduzindo os monopólos do modelo, ele calcula a contribuição deles para a integral funcional e algumas funções de correlação, obtendo um potencial linear que conecta as duas cargas, isto é, um comportamento confinante.

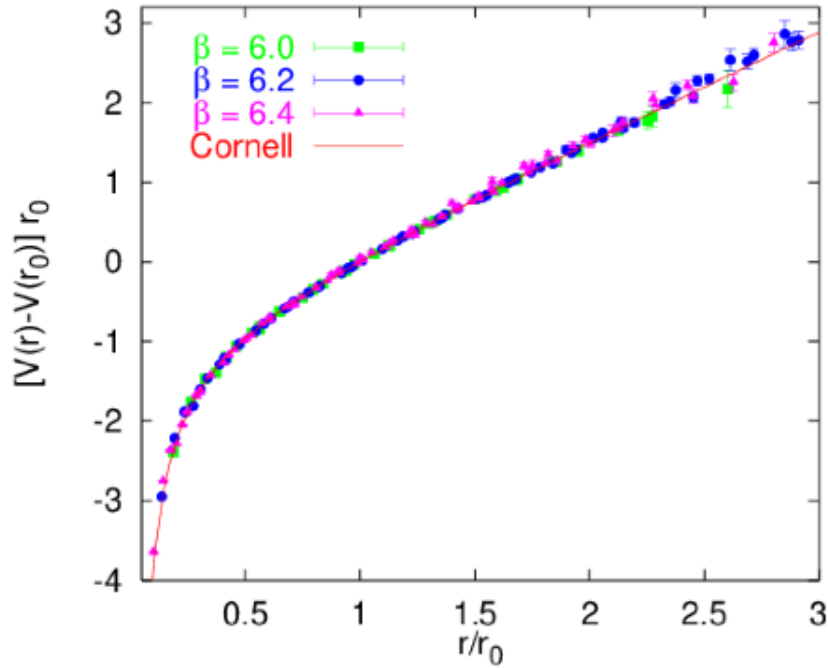
Esses e tantos outros trabalhos ainda não foram capazes de descrever o fenômeno de confinamento em teorias de Yang-Mills em quatro dimensões e, portanto, se faz necessário o estudo de novas teorias. Na sessão seguinte, um desses modelos é motivado a partir de princípios de simetria e, finalmente, algumas de suas consequências são discutidas.

## 4.2 Fenomenologia da rede

É interessante saber o que as simulações computacionais na rede tem a dizer sobre o confinamento. Existem várias evidências de que existe uma corda que liga e confina os quarks. Ainda hoje é um problema em aberto sobre qual é a descrição efetiva para essa corda, se é que essa descrição existe. Na tentativa de criar um modelo, é necessário ter em mente quais as propriedades importantes dessa corda confinante. Por exemplo, a energia armazenada nessa corda cresce linearmente com seu comprimento. No gráfico [22] da figura 2, isso fica evidente.

Mais ainda, essa corda tem uma flutuações provenientes de sua natureza quântica. Foi mostrado [23] que flutuações transversais em uma corda muito longa geram uma correção  $\frac{1}{r}$  para a energia armazenada nela. Dessa forma, a energia seria

$$V(r) = \mu + \sigma r + \frac{\gamma}{r} + O(1/r^2) , \quad (4.3)$$



**Figura 2** – Energia armazenada na corda em função da distância.

onde  $\sigma$  é a tensão na corda e  $\gamma = -\frac{\pi}{24}(d-2)$ , com  $d$  a dimensão do espaço-tempo. Consequentemente, a força é da forma

$$F(r) = V'(r) = \sigma - \gamma \frac{1}{r^2}, \quad (4.4)$$

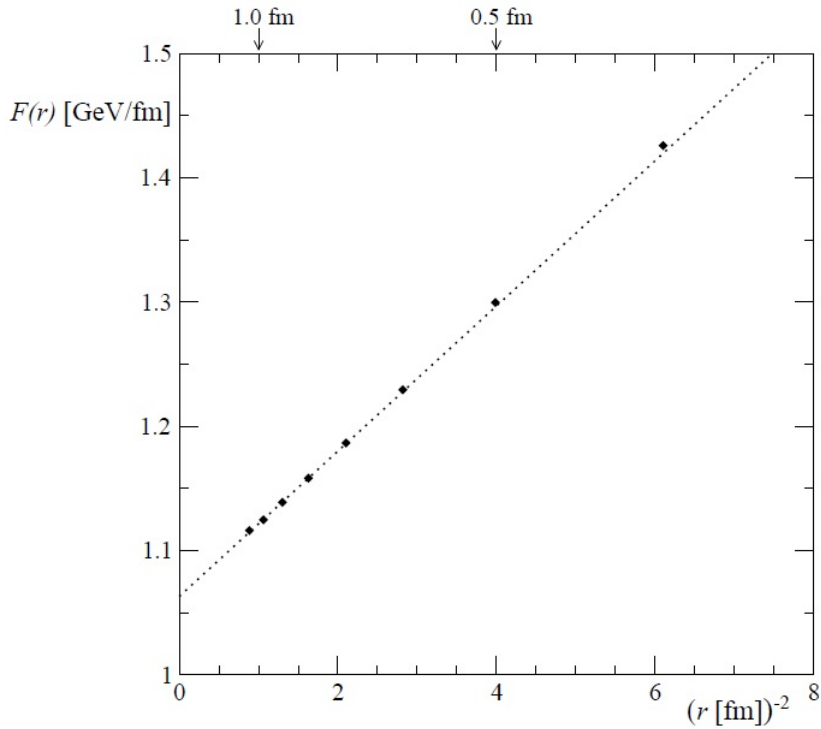
ou seja, uma função linear em  $1/r^2$ . O resultado das simulações realizadas em [23] é mostrado na figura 3.

Nesse mesmo trabalho, também foi determinada a inclinação desse gráfico. A princípio, essa inclinação deveria ser

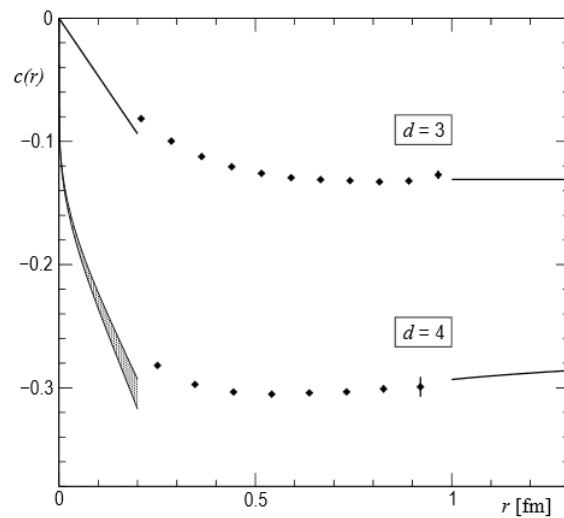
$$c(r) = \frac{1}{2} r^3 F'(r) = -\gamma, \quad (4.5)$$

se  $F(r)$  for realmente uma reta. Esse gráfico está mostrado na figura 4, onde é possível notar a concordância com o valor  $\frac{\pi}{24}(d-2)$ , que corrobora a interpretação desses objetos unidimensionais como cordas.

Além disso, a energia também depende de qual representação é usada para escrever o loop de Wilson que corresponde à representação dos quarks extremos. Para tal fim, devemos considerar  $A_\mu = A_\mu^a R(T_a)$ , onde  $R$  é uma representação da álgebra. O potencial depende fortemente de qual é essa representação  $R$ , principalmente de como ela atua sobre o centro do grupo.



**Figura 3** – Força devido às flutuações quânticas da corda.

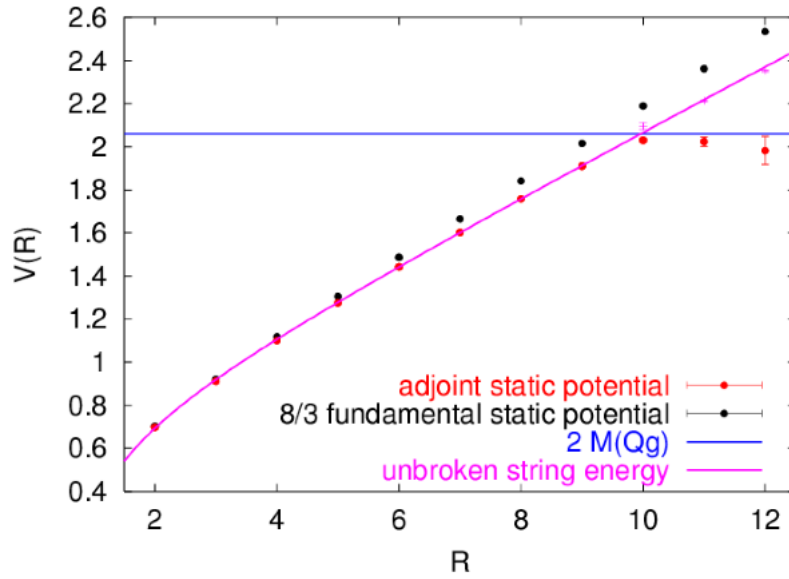


**Figura 4** – Inclinação do gráfico da força. A região a esquerda é calculada perturbativamente, enquanto os pontos são obtidos da simulação.

Essa dependência foi calculada em [24], sendo interessante notar que, para quarks adjuntos, a mudança ocorre quando se alcança duas vezes a energia de repouso de um par quark-glúon (ver figura 5), indicando uma quebra na corda e a formação de um par quark-antiglúon e antiquark-glúon. Isso acontece pois, escolhendo  $R$  como a representação adjunta, pode-se formar um par quark-glúon sem cor, o que é impossível se  $R$  fosse a representação fundamental.

Qualquer modelo efetivo que pretenda descrever a corda confinante deve, de alguma





**Figura 5** – Potencial quark-antiquark e como ele depende da representação do grupo.

forma, contemplar as três características descritas. A próxima seção se dedica a estudar um modelo introduzido em [25], que incorpora tais propriedades, sendo então um candidato à teoria efetiva.

### 4.3 Um modelo de Yang-Mills-Higgs

A ideia principal é criar um modelo dual em que a corda confinante é representada por um vórtice e, portanto, o modelo deve aceitar ter esse tipo de solução. Mais ainda, é necessário que esses vórtices tenham estabilidade para que eles não se desfaçam com a evolução temporal do sistema. A maneira mais natural de implementar essa estabilidade é a partir de um mecanismo de quebra espontânea de simetria, que será mostrado em breve. Na referência [25] foi proposto o seguinte modelo

$$S = \int d^4x \frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle + \frac{1}{2} \langle D_\mu \psi_I, D^\mu \psi_I \rangle - V_{Higgs}(\psi_I). \quad (4.6)$$

A quantidade de campos de Higgs é exatamente a dimensão da álgebra, ou seja,  $N^2 - 1$ . Além da já discutida transformação do campo  $A_\mu$ , os campos de Higgs  $\psi_I$  mudam, por uma transformação de calibre, como

$$\psi_I \rightarrow U \psi_I U^{-1}. \quad (4.7)$$

O potencial de Higgs deve ser construído de forma a ser invariante por (4.7). A melhor maneira de escrever o potencial é em termos da forma de Killing. Como já é de costume, vamos considerar termos até quarta ordem nos campos  $\psi_I$ . Propõe-se então que  $V_{Higgs}$  seja da forma

$$V_{Higgs}(\psi_I) = c + \frac{\mu^2}{2} \langle \psi_A, \psi_A \rangle + \frac{\kappa}{3} f_{ABC} \langle \psi_A \wedge \psi_B, \psi_C \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \psi_A \wedge \psi_B, \psi_A \wedge \psi_B \rangle, \quad (4.8)$$

O objetivo dessa seção é rediscutir algumas propriedades interessantes e, no final, mostrar alguns resultados novos e perspectivas

### 4.3.1 O vácuo da teoria

Analisemos agora o vácuo da teoria, ou seja, as configurações de menor energia. Pode-se sempre escolher um valor de  $c$  de tal forma que o mínimo da energia seja nulo. Primeiro, começamos tentando minimizar o potencial (4.8). Para isso, os campos de Higgs devem ser da forma

$$\psi_A = v S T_A S^{-1}, \quad (4.9)$$

com  $S \in SU(N)$ . Usando (4.9), o potencial é

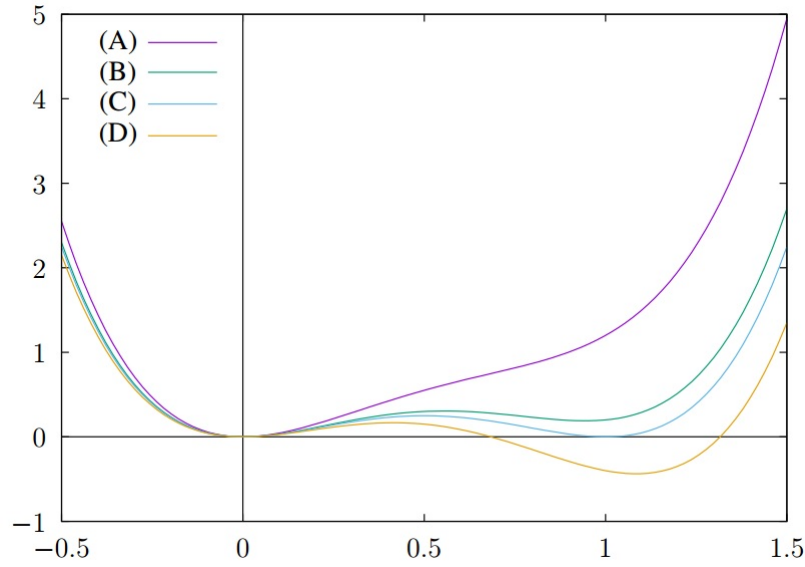
$$V_{Higgs} = c + \frac{\lambda d}{4} v^2 [(v - v_0)^2 + b^2], \quad (4.10)$$

com  $v_0 = -\frac{2\kappa}{3\lambda}$  ;  $b^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} - v_0^2$ .

Isso quer dizer que, para a energia ter um mínimo, é preciso exigir  $\lambda > 0$ . Além disso, dependendo dos parâmetros, mais de um extremo pode ser atingido. O mínimo  $v = 0$  é trivial e sempre possível, mas se  $\mu^2 < \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda}$ , dois novos extremos surgem, dados por

$$v_c = -\frac{\kappa}{2\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2\lambda}\right)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (4.11)$$

sendo que um deles é um mínimo, dependendo do sinal de  $\kappa$ . Esse mínimo é maior, igual ou menor que o mínimo trivial  $v = 0$  se  $\mu^2$  é maior, igual ou menor que  $\frac{2}{9} \frac{\kappa^2}{\lambda}$ , respectivamente, como pode ser visto no gráfico abaixo.



**Figura 6** – Comportamento do potencial de Higgs para vários valores de  $\mu^2$ . (A) representa  $\mu^2 > \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda}$  enquanto (B), (C) e (D) representam  $\mu^2$  maior, igual ou menor que  $\frac{2}{9} \frac{\kappa^2}{\lambda}$ , respectivamente.

Assim, podemos definir o vácuo da teoria no setor de Higgs como

$$\mathcal{M} = \{\psi_A = v_c S T_a S^{-1} \quad , \quad S \in SU(N)\} \quad (4.12)$$

Falta determinar como deve ser o campo  $A_i$ . Para isso, deve-se exigir que  $D_i \psi_A = 0$ . Mas, usando (4.9) com  $v = v_c$ , então

$$A_\mu = \frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1} \quad , \quad (4.13)$$

localmente. Nenhuma nova condição surge de exigir  $\langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle = 0$ , pois essa igualdade já é satisfeita por (4.13)

### 4.3.2 Carga topológica

Olhando para (4.12), fica clara a simetria residual de  $\mathcal{M}$ . Suponha que o sistema escolha um vácuo, por exemplo,  $S = \mathbb{I}$ . Será que existe ainda alguma transformação de calibre que não altera esse vácuo? A resposta é sim, desde que essa transformação seja por um elemento do centro  $Z(N)$ . Obviamente, isso vale para qualquer escolha de  $S$ , não apenas  $S = \mathbb{I}$ . Assim, podemos dizer que  $Z(N)$  é um subgrupo de estabilidade de  $\mathcal{M}$ . Note ainda que o grupo  $SU(N)$  age transitivamente sobre o conjunto  $\mathcal{M}$ , ou seja, quaisquer duas configurações de vácuo são conectadas por uma transformação de calibre. Isso nos permite dizer que, topologicamente,  $\mathcal{M}$  é equivalente a  $SU(N)/Z(N)$  e, em particular, eles tem o mesmo grupo de homotopia. O primeiro grupo de homotopia  $\pi_1$  é uma medida da conectividade por caminhos de uma variedade.

Se um espaço topológico tem seu primeiro grupo de homotopia trivial, ou seja, apenas o elemento identidade, então ele é simplesmente conexo. Há um teorema da topologia que garante que

$$\pi_1 [SU(N)/Z(N)] = \pi_0 [Z(N)] = \mathbb{Z}(N) , \quad (4.14)$$

onde  $\mathbb{Z}(N)$  é o grupo dos inteiros módulo  $N$ . Em outras palavras, os caminhos fechados sobre a variedade de vácuo se dividem em  $N$  setores e não é possível, através de uma evolução contínua, sair de um setor e chegar no outro. Cada um desses setores tem uma carga topológica associada que é exatamente o número  $0, 1, \dots, N-1$  de  $Z(N)$  que os indexa. Essa quantidade é de suma importância pois, quando procura-se configurações de vórtice, é necessário dizer para qual desses setores está sendo considerado. Em particular, se começamos com uma configuração de vórtice com uma carga topológica não-nula, este nunca poderá evoluir até uma configuração trivial com carga topológica nula. Consequentemente, podemos dizer que a carga topológica se conserva

### 4.3.3 Ansatz para o setor $k=1$

Em primeiro lugar, vamos buscar soluções estáticas com uma fixação de calibre  $A_0 = 0$ . Mais ainda, queremos uma energia finita, ou seja, os campos  $A_i$  e  $\psi_A$  devem ser da forma (4.13) e (4.9) na região assintótica. Baseado nessas condições, vamos começar a construir um ansatz por

$$A_i = (a - 1)S\mathcal{A}_iS^{-1} + \frac{i}{g}S\partial_iS^{-1}, \quad (4.15a)$$

$$\psi_A = h_{AB}ST_B S^{-1}. \quad (4.15b)$$

As condições de contorno ficam naturalmente implementadas se, no infinito,  $a \rightarrow 1$  e  $h_{AB} \rightarrow v_c \delta_{AB}$ .

Agora, queremos procurar um vórtice que se estende ao longo de todo o eixo  $z$ . Mais ainda, que ele tenha uma carga topológica  $k = 1$ . Primeiro, seja

$$S = e^{i\varphi\beta \cdot T}, \quad (4.16)$$

onde  $\beta = 2N\omega$  e  $\omega$  é um peso de  $SU(N)$ . Se  $\omega$  for um peso da representação fundamental, então é possível mostrar que esse campo está no setor  $k = 1$  calculando o loop de Wilson no infinito.

Caso houvesse sido escolhido o peso de uma outra representação, poderia-se ter um outro valor para  $k$ , por exemplo  $k = 0$  para a adjunta. Veja que isso significa que o modelo é, nesse sentido, sensível a qual representação de  $SU(N)$  se está considerando. É assim que se espera que ele reproduza a fenomenologia da figura 5. Essa propriedade será melhor discutida mais a frente e, por enquanto, vamos estudar melhor o caso em que o vórtice tem um peso da fundamental como carga.

Falta determinar quanto vale  $\mathcal{A}_i$ . Para isso, note que o termo  $S\partial_i S^{-1}$  não está bem definido na origem. Isso se dá devido à dependência em  $\varphi$  de (4.16). Para consertar isso, é necessário que  $(a - 1)\mathcal{A}_i = -\frac{1}{g}\partial_i\varphi(\beta \cdot T)$ . Para isso, nada mais natural que definir

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{g}\partial_i\varphi\beta \cdot T \quad (4.17)$$

e exigir que  $a \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow 0$ . Nesse caso, o campo  $A_i$  é da forma

$$A_i = \frac{a}{g}\partial_i\varphi(\beta \cdot T) . \quad (4.18)$$

Antes de continuar, vale dizer que é possível limitar esse vórtice, fazendo-o ter um comprimento finito colocando duas fontes em suas extremidades que representam um par quark-antiquark. Para fazer isso, é necessário levar em conta uma dependência em  $z$  dos perfis  $a$  e  $h_{AB}$ , inclusive para contemplar a mudança nas condições de regularidade em  $\rho = 0$ . De qualquer forma, vamos assumir que o vórtice é infinito.

A partir de agora será usada apenas a base de Weyl-Cartan. Isso quer dizer que os índices  $A$  e  $B$  serão  $q$  para a subálgebra de Cartan ou índices de raiz  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ . Note que os  $n_\alpha = ST_\alpha S^{-1}$  e  $n_{\bar{\alpha}}$  se comportam de maneira diferente dependendo do valor de  $\alpha \cdot \beta$ , pois

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \cos(\alpha \cdot \beta)\varphi T_\alpha - \sin(\alpha \cdot \beta)\varphi T_{\bar{\alpha}} , \\ n_{\bar{\alpha}} &= \cos(\alpha \cdot \beta)\varphi T_\alpha + \sin(\alpha \cdot \beta)\varphi T_{\bar{\alpha}} . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tendo em vista que,  $\alpha \cdot \beta$  só pode assumir os valores 0 ou 1, é natural exigir que (4.15) leve essa diferença de comportamento em consideração. Daí, é conveniente refinar um pouco mais

o ansatz

$$\begin{aligned} \psi_q &= h_{qp} T_p & \psi_\alpha &= h_\alpha S T_\alpha S^{-1} & \psi_{\bar{\alpha}} &= h_{\bar{\alpha}} S T_{\bar{\alpha}} S^{-1}, \\ \text{com } h_\alpha &= h_{\bar{\alpha}} & &= \begin{cases} h(\rho), & \text{se } \alpha \cdot \beta = 1 \\ h_0(\rho), & \text{se } \alpha \cdot \beta = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Note que, por causa de (4.19), os campos  $\psi_\alpha$  em que  $\alpha \cdot \beta = 1$  podem não estar bem definidos em  $\rho = 0$ , assim como aconteceu com campo  $A_i$ . Isso se dá como consequência do sistema de coordenadas cilíndricas, já que esses campos dependem de  $\varphi$ , que não está bem definido no eixo  $z$ . Portanto, é preciso ter duas condições de regularidade

$$a \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \rho \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

O próximo passo é verificar como as equações de movimento são satisfeitas para esse ansatz, dando lugar a equações para os perfis  $a(\rho)$ ,  $h(\rho)$ ,  $h_0(\rho)$  e  $h_{qp}(\rho)$ . Da minimização da ação (4.6), as equações de movimento da teoria ficam

$$D_i F_{ij} = ig [\psi_A, D_i \psi_A], \quad (4.22)$$

$$D_i D_i \psi_A = \mu^2 \psi_A + \kappa f_{ABC} \psi_B \wedge \psi_C + \lambda \psi_B \wedge (\psi_A \wedge \psi_B), \quad (4.23)$$

Usando o ansatz proposto em (4.22), é imediato mostrar que a equação para o campo de calibre é satisfeita se

$$\frac{a'}{r} - a'' = g^2 h^2 (1 - a). \quad (4.24)$$

Já para (4.23), tem-se duas equações diferentes, dependendo se  $A = q$  ou se  $A = \alpha, \bar{\alpha}$ . No primeiro caso, tem-se

$$\nabla^2 h_{qp} T_p = (\mu^2 h_{qp} + 2h_\alpha^2 \kappa \alpha_q \alpha_p + 2\lambda h_\alpha^2 h_{ql} \alpha_l \alpha_p) T_p, \quad (4.25)$$

Na verdade, o ansatz no setor de Cartan é problemático, devido ao número muito grande  $(N - 1)^2$  de perfis. Por isso, seria interessante reduzir a quantidade de funções. Claro, no caso

de SU(2), nada precisa ser feito já que só há um perfil. Porém, para  $N \geq 3$ , para reduzir a quantidade de perfis, é preciso escolher uma forma conveniente para os  $h_{qp}$  de maneira que todos os termos em (4.25) fiquem na mesma direção na subálgebra de Cartan. Generalizando o que foi feito em [25], propõe-se então que os  $h_{qp}$  sejam

$$h_{qp} = 2Nh_1\omega|_q\omega|_p + 2Nh_2 \sum_{\tilde{\omega} \neq \omega} \tilde{\omega}|_q\tilde{\omega}|_p, \quad (4.26)$$

onde  $\omega$  é exatamente o peso que aparece em (4.16) e a soma sobre  $\tilde{\omega}$  deve ser entendida como sobre todos os pesos da representação fundamental, com exceção do próprio  $\omega$ . Com isso, a equação (4.25) se divide em duas, uma para o perfil  $h_1$  e outra para  $h_2$

$$\nabla^2 h_1 = \mu^2 h_1 + \kappa \frac{(N+1)h^2 - h_0^2}{N} + \lambda h^2 h_1 + \lambda \frac{h_2}{N} (h^2 - h_0^2), \quad (4.27a)$$

$$\nabla^2 h_2 = \mu^2 h_2 + \kappa \frac{h^2 + (N-1)h_0^2}{N} + \lambda h_2 \frac{h^2 + (N-1)h_0^2}{N}. \quad (4.27b)$$

Finalmente, quando escolhermos  $A = \alpha$ , temos

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 h_\alpha - (1-a)^2(\alpha \cdot \beta)^2(1/\rho^2)h_\alpha) T_\alpha = \\ & = (\mu^2 h_\alpha + 2\kappa h_\alpha \alpha_q h_{qp} \alpha_p + \lambda h_\alpha^3 \alpha^2) T_\alpha \\ & + \lambda h_\gamma^2 h_\alpha T_\gamma \wedge (T_\alpha \wedge T_\gamma) + \lambda h_\gamma^2 h_\alpha T_{\bar{\gamma}} \wedge (T_\alpha \wedge T_{\bar{\gamma}}) \\ & + 2\kappa h_\gamma h_\delta f_{\alpha\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} T_\alpha + \lambda h_\alpha \alpha_q h_{qp} h_{pl} \alpha_l T_\alpha. \end{aligned} \quad (4.28)$$

É possível ver que a mesma equação é obtida se escolhermos  $\bar{\alpha}$ , ao invés de  $\alpha$ . Apesar de laborioso, nada mais precisa ser assumido. A partir de (4.28) é possível achar equações de movimento para os perfis  $h$  e  $h_0$  dadas por

$$\nabla^2 h = \frac{(1-a)^2}{\rho^2} h + \mu^2 h + \frac{\kappa}{N} h(h_1 + h_2) + \frac{\kappa(N-2)}{N} h h_0 \quad (4.29a)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\lambda}{2} h^3 + \frac{\lambda(N-1)}{2N^2} h(h_1 - h_2)^2 + \frac{\lambda}{N} h h_1 h_2, \\ \nabla^2 h_0 & = \mu^2 h_0 + \frac{2\kappa}{N} h_0 h_2 + \frac{\kappa(N-3)}{N} h_0^2 + \kappa \frac{h^2}{N} + \lambda \frac{N-2}{N} h_0^3 \\ & + \frac{\lambda}{N} h_0 (h^2 + h_2^2). \end{aligned} \quad (4.29b)$$

Uma vez tendo as equações (4.24), (4.27) e (4.29), a maneira mais razoável de resolvê-las é numericamente.

#### 4.3.4 Sobre outros valores de $k$

Poderia-se perguntar o que muda se consideramos um vórtice com uma carga diferente de  $k = 1$ . Primeiramente, vale a pena olhar mais de perto o que acontece se, assintoticamente,  $S = e^{i2N\alpha \cdot T}$ . Nesse caso, é possível mostrar que, se consideramos um contorno no infinito, o loop de Wilson associado a ele será o elemento identidade. Foi por isso que foi dito, anteriormente, que as raízes estão associadas com uma carga topológica nula. Isso quer dizer que configurações com esse comportamento assintótico estão no setor  $k = 0$ , assim como a configuração trivial de vácuo, que tem energia nula. Estando dentro desse setor, é energeticamente mais favorável que o sistema assuma o valor de vácuo trivial.

A situação muda de figura se consideramos outro setor com  $k > 1$ . Isso pode ser feito considerando

$$S = e^{ik\varphi\beta \cdot T}, \quad (4.30)$$

com  $\beta$  sendo um peso da fundamental. Em particular, considere  $k = 2$ . Para  $SU(2)$ , dobrar um peso da representação fundamental equivale a ter um peso da representação adjunta, ou seja, carga topológica nula. Ora, mas isso já era esperado tendo em vista que  $1 + 1 = 0$  módulo 2. Já para  $SU(3)$ , tendo em vista (3.16) então

$$2\beta_1 = \beta_1 + \beta_1 = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = \alpha - \beta_3. \quad (4.31)$$

Em outras palavras, como  $\alpha$  tem carga nula, essa configuração pode ser entendida como tendo carga  $k = -1$  também, sendo essa uma configuração da mesma natureza de  $k = 1$  só que com fluxo oposto, denominado antivórtice. É apenas para  $N \geq 4$  que o setor  $k = 2$  tem um vórtice completamente diferente de  $k = 1$ . Mais ainda, é fácil ver que o vórtice com carga  $k$  tem seu antivórtice no setor  $N - k$ . A esses objetos com carga  $k$  é que se dá o nome de "k-strings".

Se usamos (4.30) ao invés de (4.16), é necessário mudar um pouco o ansatz para

$$A_i = (a - k)S\mathcal{A}_iS^{-1} + \frac{i}{g}S\partial_iS^{-1}, \quad (4.32)$$



com  $\mathcal{A}_i$  e  $\psi_A$  dados pelas mesmas expressões de antes. Nesse caso, todas as equações de movimento continuam as mesmas, exceto para (4.24) e (4.29a), onde é preciso mudar o fator  $(1 - a)$  para  $(k - a)$ . Além disso, muda também a condição assintótica de  $a$  para  $a \rightarrow k$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ .

### 4.3.5 Estabilidade dos vórtices

A discussão sobre estabilidade dos diferentes vórtices da teoria começa notando que esse modelo aceita um ponto BPS. Para ver isso, note que para a escolha de parâmetros  $\mu = 0$  e ainda fazendo com que todos os perfis, com exceção de  $a$  e  $h$ , assumam o valor  $v_c$ , três das cinco equações de movimento são identicamente satisfeitas, restando apenas

$$\frac{a'}{\rho} - a'' = g^2 h^2 (k - a) , \quad (4.33a)$$

$$h'' + \frac{h'}{\rho} = \frac{\lambda}{2} h \left( h^2 - \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \right) + \frac{h}{\rho^2} (k - a)^2 . \quad (4.33b)$$

Essas são exatamente as equações de Nielsen-Olesen (2.12) com constantes  $\frac{\lambda}{2}$  e  $\frac{g}{\sqrt{2}}$  ao invés de  $\lambda$  e  $g$ . Da mesma forma que Nielsen-Olesen tem um ponto BPS em  $\lambda = g^2$ , essa teoria também, para a mesma relação  $\lambda = g^2$ . Para esse valor crítico, fica claro que a energia é linear com  $k$ . Isso quer dizer que, do ponto de vista energético, é igualmente favorável ter um vórtice com  $k = 2$  ou dois<sup>1</sup> vórtices com  $k = 1$ . Já se  $\lambda$  for um pouco maior que  $g^2$ , então a energia será acrescida de um pequeno valor positivo. Por consequência, dois vórtices com  $k = 1$  serão energeticamente menos favoráveis que um vórtice com  $k = 2$ , o que garante estabilidade a este último. Ao contrário, se  $\lambda < g^2$ ,  $k = 2$  é instável e o sistema dará preferência a sua separação em dois vórtices com  $k = 1$ .

Finalmente, uma quantidade muito importante de calcular no modelo é a tensão da corda  $\sigma_k$ . Mais especificamente, a razão  $\frac{\sigma_k}{\sigma_1}$  a partir da definição

$$\sigma_k = \int dx dy \varepsilon_k , \quad (4.34)$$

onde  $\varepsilon_k$  é a densidade de energia por unidade de comprimento em  $z$ . Note que, no ponto BPS, a razão  $\frac{\sigma_k}{\sigma_1} = k$ . Resultados na rede indicam que  $\sigma_k < k\sigma_1$ , transformando-se a desigualdade em igualdade quando  $N$  é muito grande [27].

<sup>1</sup> Na verdade, ainda não discutimos soluções sem simetria cilíndrica no contexto do modelo efetivo. Porém, pelo menos no contexto de Nielsen-Olesen, esse argumento está correto e é bem conhecido na literatura [26]



# Conclusão

A partir de alguns aspectos da corda confinante observados na rede, discutimos um modelo dual de Yang-Mills-Higgs com um mecanismo de quebra espontânea de simetria. Esse mecanismo divide o vácuo da teoria em setores caracterizados por uma carga topológica, sendo impossível transitar continuamente de um setor para o outro, gerando assim estabilidade topológica das soluções de vórtice.

As equações de movimento de um vórtice com carga topológica  $k$  foram encontradas para qualquer valor de  $N$ . Mais ainda, essa carga tem a estrutura  $\mathbb{Z}(N)$  esperada, em que  $k$  e  $k + N$  são equivalentes.

O modelo é sensível à representação do grupo já que pesos de diferentes representações geram vórtices em diferentes setores. Isso pode explicar, por exemplo, a quebra da corda confinante para grandes distâncias, que é observada na rede, quando se considera o loop de Wilson na representação adjunta.

Mostramos que, para uma dada escolha de parâmetros, o sistema tem o comportamento de Nielsen-Olesen e, portanto, as suas consequências são aplicáveis. Em particular, no ponto BPS, as equações de movimento levam a uma dependência linear  $\frac{\sigma_k}{\sigma_1} = k$  para a tensão da corda e surge um critério para dizer se vórtices com  $k > 1$  são ou não estáveis.

Nesse respeito, é importante notar que no complicado mundo quântico das teorias de Yang-Mills puras, acessado através de simulações da integral funcional na rede, se observa que  $\frac{\sigma_k}{\sigma_1} < k$ , transformando-se a desigualdade em igualdade quando  $N$  é grande [27]. A existência de uma região com estas características em nosso modelo efetivo é o principal resultado desse trabalho, colocando o modelo estudado como um interessante candidato para a descrição efetiva das teorias de Yang-Mills.



# Referências

- [1] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [2] R. P. Feynman. Space - time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, 1949.
- [3] R. P. Feynman. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. *Phys. Rev.*, 80:440–457, 1950.
- [4] S. Tomonaga. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Prog. Theor. Phys.*, 1:27–42, 1946.
- [5] Julian Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, Feb 1948.
- [6] Julian Schwinger. Quantum electrodynamics. i. a covariant formulation. *Phys. Rev.*, 74:1439–1461, Nov 1948.
- [7] Rym Bouchendira, Pierre Cladé, Saïda Guellati-Khélifa, Fran çois Nez, and Fran çois Biraben. New determination of the fine structure constant and test of the quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 106:080801, Feb 2011.
- [8] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [9] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani. Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry. *Phys. Rev.*, D2:1285–1292, 1970.
- [10] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [11] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [12] M. Gell-Mann and F. E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.*, 95:1300–1312, Sep 1954.

- 
- [13] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [14] S. Durr et al. Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses. *Science*, 322:1224–1227, 2008.
- [15] H.B. Nielsen and P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nucl. Phys. B*, 61:45 – 61, 1973.
- [16] E. B. Bogomolny. Stability of Classical Solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 24:449, 1976. [*Yad. Fiz.*24,861(1976)].
- [17] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. On the Theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20:1064–1082, 1950.
- [18] L.P. Gor’Kov. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Soviet Phys. JETP*, 9:1364, 1959.
- [19] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, Dec 1957.
- [20] G. ’t Hooft. On the phase transition towards permanent quark confinement. *Nucl. Phys. B*, 138(1):1 – 25, 1978.
- [21] A.M. Polyakov. Quark confinement and topology of gauge theories. *Nucl. Phys. B*, 120(3):429 – 458, 1977.
- [22] Gunnar S. Bali. QCD forces and heavy quark bound states. *Phys. Rept.*, 343:1–136, 2001.
- [23] Martin Luscher and Peter Weisz. Quark confinement and the bosonic string. *JHEP*, 07:049, 2002.
- [24] Slavo Kratochvila and Philippe de Forcrand. Observing string breaking with Wilson loops. *Nucl. Phys.*, B671:103–132, 2003.
- [25] L. E. Oxman. Confinement of quarks and valence gluons in su(n) yang-mills-higgs models. *Journal of High Energy Physics*, 2013(3):1–48, 2013.
- [26] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.

- 
- [27] Michael Teper. Large  $N$  and confining flux tubes as strings - a view from the lattice. *Acta Phys. Polon.*, B40:3249–3320, 2009.