

LUIZ FILIPE DE OLIVEIRA GUIMARÃES

SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS NA
RELATIVIDADE GERAL

ORIENTADORA: MARIA EMÍLIA XAVIER GUIMARÃES

Niterói-RJ

2015

LUIZ FILIPE DE OLIVEIRA GUIMARÃES

SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS NA RELATIVIDADE GERAL

Trabalho de monografia apresentado ao curso de graduação em Física - Bacharelado, da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à conclusão do curso.

Aprovada em 22 de Janeiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

Prof^a Dr^a. Maria Emília Xavier Guimarães

UFF

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

UFF

Prof. Dr. Marco Moriconi

UFF

Niterói-RJ

2015

Agradecimentos

À inspiração que foi a minha família, ao apoio e incentivo que me deram, junto a amigos e colegas.

A todos os meus professores ao longo desses 4 anos de UFF que tanto me ajudaram em minha formação.

A minha orientadora, prof^a. dr^a Maria Emília Xavier Guimarães por tudo que me ajudou no período em que trabalhamos juntos.

Agradecimento especial a UFF e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

"Kill the boy, Jon Snow. Winter is almost upon us. Kill the boy and let the man be born."

- Maester Aemon - *A Feast for Crows*

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquematização da experiência do trem [3]	17
Figura 2 – Movimento de uma haste em um referencial S' em relação ao referencial S [3]	19
Figura 3 – Cone de luz [3]	24
Figura 4 – Geodésicas nulas e cones de luz para o espaço-tempo de Schwarzschild [3] .	51
Figura 5 – Geodésicas nulas e cones de luz para o espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein [9]	52
Figura 6 – Comportamento do elemento g_{00} em função de r [3]	57
Figura 7 – Geodésicas nulas e cones de luz no espaço-tempo de Reissner-Nordström [3]	58
Figura 8 – Esquematização de um buraco negro de Kerr [3]	61

Sumário

	Lista de ilustrações	5
	Sumário	6
1	INTRODUÇÃO	11
2	RELATIVIDADE ESPECIAL	13
2.1	Introdução	13
2.2	Galileu e Newton	13
2.2.1	Inércia	13
2.2.2	Referenciais Inerciais e Transformações de Galileu	14
2.2.3	Referencial e tempo absolutos	14
2.3	Transformações de Lorentz	15
2.3.1	Equações de Maxwell	15
2.3.2	Princípios da Relatividade e Simultaneidade	16
2.3.3	Transformações de Lorentz	17
2.3.4	Contração temporal e Dilatação espacial	18
2.3.5	Invariante espaço-temporal	19
2.4	Quadrivetores e Dinâmica Relativística	20
2.4.1	Notação de Quadrivetores	20
2.4.2	Tempo próprio	21
2.4.3	Momento e Energia Relativísticos	22
2.5	Cones de Luz	24
3	RELATIVIDADE GERAL	26
3.1	Introdução	26
3.2	Princípios da relatividade geral	27
3.2.1	Princípio de Mach	27

3.2.2	Princípio da Equivalência	28
3.2.3	Princípio da Relatividade Geral	32
3.3	Equações de Campo	33
4	A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD E OS TESTES CLÁSSICOS . .	36
4.1	Introdução	36
4.2	O limite Newtoniano	37
4.2.1	Tensor métrico Newtoniano	37
4.2.2	A equação de Poisson	38
4.3	A solução de Schwarzschild para as equações de campo	39
4.4	Testes clássicos	41
4.4.1	Periélio de Mercúrio	42
4.4.2	Desvio da luz	43
4.4.3	Desvio para o Vermelho	44
5	BURACOS NEGROS	47
5.1	Introdução	47
5.2	Buraco Negro de Schwarzschild	48
5.2.1	O equivalente Newtoniano	48
5.2.2	Singularidades de coordenadas e físicas	49
5.2.3	Coordenadas canônicas e coordenadas de Eddington-Finkelstein	50
5.2.4	Partículas teste e Horizonte de eventos	52
5.2.5	O buraco negro de Schwarzschild	53
5.3	Buraco negro de Reissner-Nordström	54
5.3.1	Equações de Maxwell	54
5.3.2	Solução de Reissner-Nordström	55
5.3.3	Singularidade e Horizonte de Eventos	56
5.4	Buraco negro de Kerr	59
5.4.1	Solução de Kerr	59
5.4.2	Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera	59

6	CONCLUSÃO	62
	APÊNDICES	64
A	Cálculo Tensorial	64
A.1	Covariância e Contravariância e operações	64
A.2	Derivada Covariante	66
B	Geometria Riemanniana	68
B.1	Métrica	68
B.2	Tensor de Riemann	68
B.3	Equação da Geodésica	69
B.4	Símbolos de Christoffel	70
B.5	Identidades de Bianchi, Tensor e Escalar de Ricci	70
C	Tensor Energia-Momento	71
	REFERÊNCIAS	73

Resumo

Neste trabalho iremos primeiramente fazer uma introdução aos principais conceitos da relatividade especial. Apresentaremos também o necessário de geometria Riemanniana para total compreensão da Relatividade Geral e suas equações de campo, apresentadas em seguida. Finalmente, ir-se-á demonstrar como encontrar as soluções das equações de campo que resultam em buracos negros. Os três principais tipos de solução (e suas representações alternativas) serão mostrados: Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr. Será dado foco às geodésicas nulas e cones de luz.

Abstract

In this work we'll first of all make an introduction to the main concepts of special relativity. We'll also present the essential of Riemannian geometry for the complete understanding of General Relativity and its field equations, presented afterwards. Finally, demonstrated will be how to find the solutions to the field equations that result in black holes. The three main types of solutions – and their alternative representations – will be shown: Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr. Focus will be given to the null geodesics and light cones.

1 -

Introdução

A teoria da relatividade geral em conjunto com a relatividade especial forma o par de mais conhecidas teorias do séc. XX. A revolução causada por seu advento tornou seu principal desenvolvedor, Albert Einstein, a principal imagem da Física, não só do século mas como - discutivelmente - da história. A interpretação geométrica para a gravidade, o uso de geometria Riemanniana e a união das figuras antes separadas de espaço e tempo são suas mais marcantes características.

No entanto, a construção da teoria da Relatividade Geral compreende um intervalo muito maior do que (os dez anos entre) 1905 e 1915, anos em que Einstein divulgou suas teses sobre relatividade especial e geral, respectivamente. Também vão além da apresentação das transformações de Lorentz de 1892 e dos princípios de Mach. Remontam não só a construção da relatividade dos movimentos Galileana e do espaço absoluto Newtoniano. O ponto de partida está na própria conceitualização de espaço, física e matematicamente. Desta forma, a genesis da questão se encontra no berço da cultura ocidental, com pensadores como Aristóteles, Arquitas de Tarento, Lucrécio, os Atomistas, Estóicos, entre outros. O primeiro a introduzir a matemática em toda a filosofia sobre o assunto foi Euclides [1]. Em *Elementos* Euclides constrói a sua geometria, nos apresenta seu espaço plano, infinito, incurvável.

Reconhecer como e onde foi o começo das teorias sobre espaço é um primeiro passo importante, mas o desenvolvimento sobre o tema foge a proposta da monografia.

O começo dar-se-á por Galileu e seu desenvolvimento do movimento relativo e inércia. Seu trabalho foi continuado por Newton, que melhor formalizou a questão. A mecânica newtoniana já possuía falhas, como ao explicar o periélio de Mercúrio. Todavia, por séculos continuou sendo a única alternativa por ter enorme sucesso na escala terrestre. Toda a mecânica analítica

é clássica, baseada na newtoniana. Apenas com o advento do eletromagnetismo de Maxwell que manifestaram-se as falhas da relatividade galileana, pavimentando o caminho que viria a ser seguido por Lorentz, Poincaré e Einstein.

Com a publicação de Einstein das equações de campo da relatividade geral, focou-se em encontrar soluções físicas para elas. Karl Schwarzschild, em 1916, após já estar trabalhando com uma versão prévia do trabalho, encontrou a primeira solução. Tal solução era destinada ao exterior de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria neutra.

Ao longo das décadas seguintes, foram desenvolvidas soluções para diferentes distribuições de matéria. As principais são as para distribuição de matéria carregada, formulada por Reissner e Nordström, e para distribuição de matéria com momento angular, formulada por Kerr.

Emerge da análise dessas soluções externas duas estranhas possibilidades. A primeira é a de singularidades se formarem, ou seja, pontos em que a curvatura do espaço-tempo se torna infinita. Não só isso, mas ao considerar toda a massa da distribuição nessa singularidade, uma região é formada onde nem mesmo a luz pode escapar. A essa região é dado o nome de horizonte de eventos. Por essa característica de aprisionar matéria e até mesmo luz em seu interior é que os objetos com essas propriedades recebem o nome de buracos negros. Nessa monografia, pretendo demonstrar os processos para obtenção das soluções das equações de campo e da identificação de singularidades e horizontes de evento, bem como a análise das geodésicas ao longo do espaço-tempo próximo e interior ao buraco negro.

2 -

Relatividade Especial

Neste capítulo, de forma introdutória, exporemos a teoria da relatividade especial partindo de uma pequena revisão histórica até a versão de Einstein de 1905

2.1 Introdução

O movimento relativo entre objetos e referenciais é de vital importância para a compreensão da relatividade geral. Os postulados da relatividade geral se baseiam na análise de diferentes referenciais e suas consequências físicas. É também imprescindível explicar a formulação da dinâmica relativística e a estrutura de cones de luz para o estudo de buracos negros. Desta forma o material deste capítulo é disposto para sanar tais necessidades.

2.2 Galileu e Newton

A contribuição de Galileu é mais ampla do que apenas a sua cruzada pessoal de instaurar o modelo Copernicano no ambiente acadêmico da época, afastando-se dos Aristotélicos. A lenda de sua experiência em Pisa retira do 'movimento natural', do 'ímpeto', a origem do movimento dos corpos. Seu foco na experiência sobre a intuição marcou uma nova fase da ciência. [2]

2.2.1 Inércia

Galileu foi um vívido estudioso do movimento de projéteis. Seus estudos sobre o movimento deram-lhe o possível que já anunciava a lei da inércia antes que Newton o fizesse:

Todo corpo não submetido a ação de forças manterá seu movimento uniforme ou estado de repouso

2.2.2 Referenciais Inerciais e Transformações de Galileu

À lei da inércia de Galileu, Newton adicionou o fato de que forças fazem com que corpos se movam em movimento acelerado. Dotados da definição de inércia, podemos definir os referenciais inerciais como aqueles em que a lei da inércia/primeira lei de Newton é válida.

Referenciais inerciais também não poderiam ser diferenciados um do outro, já que não há forças agindo sobre eles, não há nenhum efeito dinâmico que não seja o mesmo em qualquer outro referencial inercial. Não há como diferenciá-los partindo de um efeito dinâmico. Ou seja, a física dentro deles é a mesma. Desta forma, indiferenciáveis. Este é o princípio restrito da relatividade especial. [3]

O passo seguinte é entender como que diferentes referencias inerciais se relacionam. Novamente, Galileu já havia pavimentado o caminho através de suas transformações de referenciais¹

$$x' = x - Vt \quad (2.1)$$

$$y' = y \quad (2.2)$$

$$z' = z \quad (2.3)$$

Pelo princípio restrito da relatividade especial, então, as leis da física são invariantes por transformações de Galileu

2.2.3 Referencial e tempo absolutos

Newton e suas três leis da mecânica têm como plano de fundo seus princípios sobre a natureza do espaço e do tempo.

A respeito da simultaneidade, Newton acreditava que dado que relógios de observadores em distintos referenciais inerciais estivessem cronometrados, concordariam em todas as medições que fizessem - após, claro, o correto uso das transformações de Galileu, como indicado na subseção anterior. Desta forma, o tempo passa da mesma forma em todos os lugares, é absoluto.

¹ Caso padrão de referencial S' com velocidade V para a direita em relação ao referencial S, lembrando que o tempo não variava - ver subseção Referencial e tempo absolutos

Quanto ao espaço, Newton acreditava em um referencial privilegiado, e que todas as medidas realizadas são apenas relativas umas às outras, nunca obtendo assim a real posição de um objeto no referencial absoluto. Para provar que existia movimento absoluto, Newton se utilizava do movimento circular de um balde (ou melhor, da água nele). Para ele, as forças centrífugas sentidas no referencial do balde não seriam caso mudássemos a situação para o balde parado e o chão se movendo.[4] Para mais detalhes da discussão de movimentos circulares, ver a discussão sobre Ernst Mach ²

Leibniz era um ferrenho adversário de tal conceito. [4] Para ele apenas o movimento relativo existia, que é apenas o movimento que podemos medir relativo a um referencial em específico. Cartas suas e de Berkeley respondendo a Newton (Berkeley apenas décadas depois), fomentando a relatividade do movimento como o único movimento possível, foram de grande importância para o desenvolvimento da relatividade especial.

2.3 Transformações de Lorentz

2.3.1 Equações de Maxwell

Após a divulgação e total análise das equações de Maxwell, foi notado que, após uma mudança de referenciais seguindo as transformações galileanas, as equações não se mantinham iguais, as leis físicas então mudavam. Isto entrava em completa rota de impacto com o princípio restrito da relatividade especial. Referenciais inerciais não deveriam ser distinguíveis.

A crença na existência do éter estava fundamentada no conceito newtoniano de movimento e referencial absolutos e no fato de se acreditar que ondas só poderiam se mover em meios, sendo o éter o da radiação eletromagnética. O experimento de Michelson e Morley mostrou que a Terra não se movimentava relativamente ao éter, que seria responsável por formar padrões de interferência no aparato ótico utilizado.

Foi então que Lorentz, Poincaré e Fitzgerald se dispuseram a encontrar uma maneira para que o éter continuasse existindo, mesmo o experimento de Michelson e Morley indicando a sua dispensabilidade. Para tal, buscaram efeitos físicos nos corpos e no tempo – como os aparatos

² Ver capítulo 3, Relatividade Geral, Princípio de Equivalência/Conceitos

experimentais – causados pelo movimento deles em relação ao éter que os distorcessem de tal forma que explicasse a não formação de padrões de interferência. Chegou-se assim nas agora conhecidas contração espacial e dilatação temporal, frutos das transformações de Lorentz.

2.3.2 Princípios da Relatividade e Simultaneidade

O primeiro princípio da Relatividade especial é uma generalização do princípio restrito criado por Newton. Como qualquer tipo de experimento envolve mais do que dinâmica (como ótica, eletromagnetismo, etc.), foi generalizado como:

Princípio 1. *Todos os referenciais inerciais são indiferenciáveis.*

Para o segundo, Einstein analisou a situação de como observadores em movimento próximo da velocidade da luz observariam seu laboratório. Existiriam experimentos simples baseados em ótica que permitiriam saber, caso a velocidade da luz seguisse as transformações de Galileu, qual a velocidade do referencial do próprio laboratório, o que claramente viola o primeiro princípio da relatividade. Portanto:

Princípio 2. *A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais.*

Com os dois princípios da relatividade especial em mãos, podemos partir para a análise física dos movimentos relativos. Para a correta compreensão deles, Einstein precisou rever o conceito de simultaneidade, exemplificados por meio de *Gedankenexperimente*, seus experimentos mentais que demonstravam o comportamento não-trivial da relatividade especial.

O mais simples deles considera um trem – meio de transporte favorito dos físicos – que carrega duas lâmpadas, uma em cada extremidade. Existem dois observadores desta situação, um situado dentro do trem (chamado de A) e outro fora (B). O trem possui uma velocidade V para a direita em relação ao observador B, enquanto A está parado em relação a ele.

Engenhosamente preparando o experimento para as duas luzes piscarem no momento em que o trem passa pelo observador B, teremos, pelas distâncias das lâmpadas para B serem idênticas e a velocidade da luz ser única (postulado 2), que para B os dois eventos acontecem ao mesmo instante. Entretanto, para A, que viaja para a direita com a mesma velocidade V do trem, a luz que vem da extremidade frontal chega antes da luz vinda da parte traseira, já que,

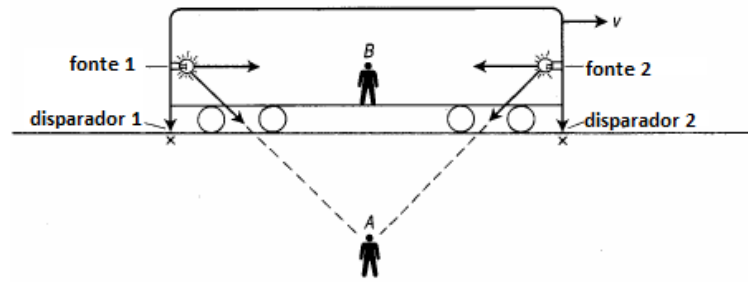


Figura 1 – Esquemática da experiência do trem [3]

novamente pelo postulado 2, a velocidade da luz é única. Desta forma, para A, o evento que acontece primeiro é o de acendimento da lâmpada frontal. Conclui-se assim que simultaneidade depende de referenciais.

2.3.3 Transformações de Lorentz

Como já mencionado na subsecção das equações de Maxwell, Lorentz e outros passaram a buscar um meio de modificar as transformações de Galileu. Foi assim que em 1892 Lorentz apresentou suas transformações, as quais as equações de Maxwell eram invariantes (na configuração padrão já mencionada):

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.4)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.5)$$

$$y' = y \quad (2.6)$$

$$z' = z \quad (2.7)$$

Para as equações de Maxwell se tornarem invariantes perante a uma mudança de referenciais, é necessário que o tempo também mude. Após o estudo da simultaneidade (ou melhor, sua não existência ou relatividade), a dificuldade conceitual de tal de mudança não é tão estranha quanto seria à primeira vista.

Efetuada derivações em relação a nova coordenada temporal, podemos reescrever as transformações de velocidades como:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\beta(dx - vdt)}{\beta(dt - \frac{vdx}{c^2})} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \quad (2.8)$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\beta(dt - \frac{vdx}{c^2})} = \frac{v_y}{\beta(1 - \frac{v_x v}{c^2})} \quad (2.9)$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\beta(dt - \frac{vdx}{c^2})} = \frac{v_z}{\beta(1 - \frac{v_x v}{c^2})} \quad (2.10)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2.3.4 Contração temporal e Dilatação espacial

As transformações de Lorentz evidenciaram a existência de dois comportamentos totalmente inesperados utilizando-se transformações Galileanas e física clássica: A contração temporal e a dilatação espacial.

Em um referencial S há uma vara de madeira, extremidades de coordenadas x_a e x_b , comprimento $L = x_b - x_a$. Essa vara possui uma velocidade V para a direita. Em seu referencial S' , possui coordenadas e comprimento dadas pelas transformações de Lorentz:

$$x'_a = \beta(x_a - Vt) \quad (2.11)$$

$$x'_b = \beta(x_b - Vt) \quad (2.12)$$

$$L' = x'_b - x'_a = \beta(x_b - x_a) = \beta L \rightarrow L = \frac{L'}{\beta} \quad (2.13)$$

Como $\beta > 1$, vemos que o comprimento no referencial em que ela está se movendo L é menor que o comprimento no próprio referencial L' . Sendo assim, concluímos que objetos em movimento sofrem contração espacial na direção do movimento, já que suas coordenadas y e z não se alteram.

Para a contração temporal, imaginamos a situação em que dois eventos seguidos acontecem em tempos t_1 e t_2 em um referencial S e nos tempos t'_1 e $t'_1 + T'$ em um referencial S' que se move com velocidade $v = v_x$ em relação a S . Como a medição dos tempos deve ser feita no mesmo lugar, usaremos as transformações de S' para S . Pelas transformações de Lorentz:

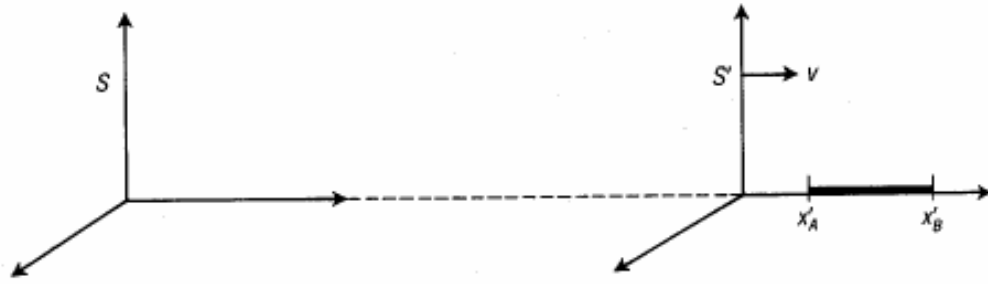


Figura 2 – Movimento de uma haste em um referencial S' em relação ao referencial S [3]

$$t_1 = \beta \left(t_1 + \frac{vx'_a}{c^2} \right) \quad (2.14)$$

$$t_2 = \beta \left(t_1 + T + \frac{vx'_a}{c^2} \right) \quad (2.15)$$

$$t_2 - t_1 = T = \beta T' \quad (2.16)$$

Ou seja, o tempo no referencial S é maior que o tempo em S', o que mostra que neste último referencial o tempo passa mais vagorosamente. O tempo T por ser o tempo onde o relógio está em repouso é chamado de tempo próprio.

2.3.5 Invariante espaço-temporal

Na secção anterior, vimos que distâncias não são preservadas após transformações de Lorentz. As transformações de Galileu, por outro lado, preservavam-nas.

Na Física como um todo, quantidades conservadas são de grande importância e não seria diferente para a Relatividade. Através da análise das transformações de Lorentz, define-se a quantidade conservada por elas como:

$$I = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (2.17)$$

Ao tomarmos distâncias infinitesimais, teremos que o escalar invariante I se torna:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.18)$$

Como as unidades de I são de comprimento, é necessário usar, ao invés de t, ct – o mesmo para as quantidades infinitesimais – que possui a unidade correta.

Essa quantidade é chamada de invariante espaço-temporal. Como vemos nas transformações de Lorentz, coordenadas espaciais e temporais são mescladas ao trocarmos de referencial. Na relatividade especial e geral, temos que o espaço tridimensional euclidiano é substituído por um espaço-tempo quadridimensional, denominado espaço-tempo de Minkowski. Para manter todas as coordenadas com dimensão de espaço, podemos fazer como explicado anteriormente e considerar como coordenadas ct e as de praxe x , y e z .

Na notação tensorial presente no Apêndice e a notação da soma de Einstein, podemos reescrever o invariante infinitesimal como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.19)$$

Onde μ, ν correspondem a ct, x, y, z . O tensor de segunda ordem $\eta_{\mu\nu}$ é chamado também de tensor métrico de Minkowski, já que corresponde a este espaço-tempo em questão.

O invariante espaço-temporal infinitesimal será melhor abordado na próxima secção.

2.4 Quadrivetores e Dinâmica Relativística

2.4.1 Notação de Quadrivetores

As transformações de Lorentz possuem um caráter linear, ou seja, sem constantes ou dependência de ordem maior para alguma das coordenadas. Desta forma, podemos escrevê-las usando notação matricial. Para isso, usamos quadrivetores, já que saímos de um espaço tridimensional e trabalhamos agora com um quadridimensional. Assim:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta \frac{v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\beta v & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Podemos fazer uso da coordenada ct utilizada na secção anterior. Com ela, as transforma-

ções de Lorentz se torna simétrica:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\beta \frac{v}{c} & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Se usarmos unidades naturais, onde $c = 1$, teremos, com o cuidado de entender que agora t possui unidade de comprimento:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta v & 0 & 0 \\ -\beta v & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

2.4.2 Tempo próprio

Voltemos ao caso de dilatação temporal, abordado anteriormente. Nele, vimos que relógios em movimento passam mais devagar por um fator β . Podemos então definir algum relógio em que tal efeito não aconteça. Para isso, precisamos que no intervalo entre os eventos ele seja dividido por um fator β também. Desta forma, definimos o tempo próprio como:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \beta^{-1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.23)$$

Utilizando o invariante espaço-temporal diferencial (em unidades usuais), colocando o termo $c^2 dt^2$ em evidência, temos:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\right] c^2 dt^2 \quad (2.24)$$

Identificando o termo entre parênteses no lado direito da equação como o quadrado da velocidade e passando o termo c^2 para o lado esquerdo:

$$\frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 \quad (2.25)$$

O termo do lado esquerdo possui unidade de quadrado de tempo, e é facilmente identificado como o quadrado do tempo próprio τ definido anteriormente. Desta forma:

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 \quad (2.26)$$

Salvo uma integração da raiz quadrada da expressão acima, obtivemos o mesmo que em (2.23). O tempo próprio τ é de grande importância para a relatividade especial. Como vimos, ele não é afetado por acelerações, dependendo apenas de v^2 . É por muitas vezes chamado de relógio ideal.

2.4.3 Momento e Energia Relativísticos

Para esta subsecção, irei começar a utilizar a notação de vetores covariantes e contravariantes presente no Apêndice. A convenção da soma de Einstein também será utilizada. Desta forma, define-se as velocidades próprias de um corpo como a derivada das coordenadas espaciais em relação ao tempo próprio. A partir do resultado obtido em (2.26), temos que

$$u^t = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.27)$$

Esta é a componente temporal da velocidade própria de um objeto, também conhecida como quadrivelocidade. Usa-se a coordenada temporal (que, como sabemos, agora é dada por ct e tem na verdade unidade de comprimento) como a primeira, como feito na seção acima.

Para as demais componentes da quadrivelocidade, derivamos usando a regra da cadeia:

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.28)$$

$$u^y = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.29)$$

$$u^z = \frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_z}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.30)$$

Dotados da quadrivelocidade, podemos definir então o chamado quadrimomento, cujas componentes são:

$$p^t = m \frac{cdt}{d\tau} = m \frac{c}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.31)$$

$$p^x = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{p_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.32)$$

$$p^y = m \frac{dy}{d\tau} = m \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{p_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.33)$$

$$p^z = m \frac{dz}{d\tau} = m \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{p_z}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.34)$$

Onde p^μ é o momento definido de forma clássica e é covariante.

A partir da definição de produto tensorial presente no Apêndice, podemos calcular qual o quadrado das quadrivelocidades u^μ . Como estamos trabalhando no espaço de Minkowski, temos que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (u^t)^2 - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad (2.35)$$

Onde o vetor \vec{u} é o vetor das componentes x, y, z da quadrivelocidade. Aplicando as equações (2.27-2.30) acima, temos que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = c^2 \quad (2.36)$$

Podemos fazer o mesmo com o quadrimomento, obtendo assim:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = (p^t)^2 - (\vec{p} \cdot \vec{p}) = \frac{m^2 c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{m^2 v^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = m^2 c^2 \quad (2.37)$$

Pode-se fazer uma análise dos termos da segunda equação. Para a componente t do quadrimomento, podemos fazer a aproximação para baixos valores de v

$$p^t = \frac{mc}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx mc + \frac{1}{2} m \frac{v^2}{c} + \dots = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots \right) \quad (2.38)$$

Os primeiros termos da expressão entre parênteses da equação à direita são soma da massa de repouso e da energia cinética, ou seja, a energia de um corpo. Sendo assim:

$$p^t = \frac{E}{c} \quad (2.39)$$

Aplicando este resultado acima, temos então a expressão relativística para a energia:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (2.40)$$

2.5 Cones de Luz

Como um dos postulados da relatividade especial, temos que a velocidade da luz é a máxima para um objeto. Imaginando uma situação bidimensional, com movimento em x apenas (além de, claro ct), podemos representar tal limitação em um plano ct por x como:

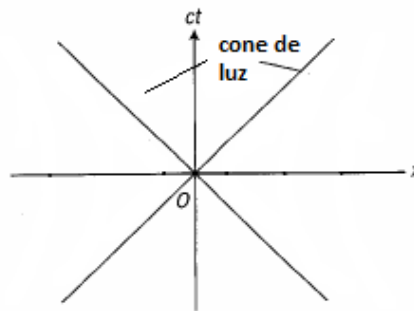


Figura 3 – Cone de luz [3]

Para velocidades inferiores à c , caso queiramos representar graficamente a trajetória neste plano cartesiano, obteremos uma reta com inclinação maior que c , já que um tempo maior que ct_1 será necessário para chegar em x_1 .

Denominamos as retas restritas a este cone de $ct = x$ como retas tipo-tempo. Em termos do invariante espaço-temporal, temos para retas tipo-tempo que:

$$I = c^2(t_1)^2 - x_1 > 0 \quad (2.41)$$

Para a reta $ct = x$, denominada de reta nula, teremos:

$$I = c^2 t^2 - x^2 = 0 \quad (2.42)$$

Para retas de coeficiente angular maior menor que 1, temos então

$$I = c^2(t_2)^2 - (x_2)^2 < 0 \quad (2.43)$$

A estas retas é dado a denominação de tipo-espaço.

Generalizando a situação para todas as dimensões, temos que esta estrutura é chamada de cone de luz, por ser delimitada pelas retas formadas por objetos de velocidade igual a c . Objetos físicos deverão percorrer linhas tipo-tempo, de $I > 0$, já que possuem velocidades inferiores a c .

O estudo das linhas nulas, as geodésicas nulas, é de grande importância para a relatividade geral e o estudo das soluções de buracos negros, por revelarem características importantes do espaço-tempo.

3 -

Relatividade Geral

3.1 Introdução

A emancipação do conceito de espaço absoluto de Newton não terminou com a relatividade especial. De exemplo, temos que o caráter espacial do espaço-tempo quadridimensional ainda era Euclidiano. Outras questões acompanhavam-na, como o fato dos referenciais inerciais receberem uma importância tal qual o espaço absoluto na teoria Newtoniana e a não compatibilidade da teoria da gravitação com a relatividade especial.[5]

O fato de referenciais inerciais serem privilegiados na relatividade especial retoma, para o desenvolvimento da relatividade geral, discussões feitas ainda quanto a inexistência do espaço absoluto, principalmente por Mach e Poincaré. A geometrização da gravidade é o que conecta os problemas relacionados a tal privilégio e à teoria newtoniana da gravitação. Os princípios da relatividade geral e seus efeitos serão amplamente abordados.

O estudo de geometria não-euclidiana, iniciado – entre outros – por Gauss fomentou e abriu caminho para demais matemáticos avançarem no tema. Seus trabalhos inspiraram o desenvolvimento da geometria hiperbólica por Bolyai e Lobachevsky na segunda metade do séc. XIX, culminando nos trabalhos de Riemann sobre a sua geometria. A inserção de tais avanços no conceito do espaço físico foram ao longo das décadas sendo feitas, já pelos matemáticos citados e incluindo Weyl e Clifford.[6][1] Tais trabalhos foram de extrema importância para a já mencionada geometrização da gravidade, por Einstein, cujo pensamento será exposto ao longo do capítulo.

Por fim, completo o arcabouço conceitual da Relatividade Geral, resta expressar matematicamente tudo que ela contém. Assim, as equações de campo da relatividade serão apresentadas

e demonstradas. Sua primeira e mais simples solução, encontrada por Schwarzschild, e seus primeiros testes, que demonstram sua efetividade além da gravitação Newtoniana, são introduzidos apenas no próximo capítulo.

3.2 Princípios da relatividade geral

3.2.1 Princípio de Mach

Ao final do séc. XIX representando os defensores da relatividade do espaço estava Ernst Mach. Ferrenho crítico do espaço absoluto Newtoniano, inclusive mencionando-o como '*das Begriffsungetüm des absoluten Raumes*', ou 'a monstruosidade conceitual do espaço absoluto' (tradução livre, [1]), suas realizações foram grande influência para Einstein no desenvolvimento da relatividade geral.

O princípio de Mach pode ser resumido, em sua essência, como a influência da distribuição de massa no universo para efeitos inerciais. Em seu experimento do balde de água, Newton explica que uma superfície côncava se forma quando o balde gira por causa do movimento rotacional da água em relação ao espaço absoluto. Mach, em contrapartida, afirma que tal força não-inercial (que faz com que a água se curve) não se deve às laterais do balde e seu movimento relativo à água, e sim ao movimento relativo da água para com a terra e os demais objetos celestes - ou seja, o restante da distribuição de massa ao redor do balde.[1] É desta forma que um referencial inercial local é determinado [3]

Uma outra forma de entender o ponto de vista Machiano é inverter a situação proposta por Newton e fazer com que o Universo ao redor do balde que gire em relação a ele. Por Newton, nada é previsto. Já pelo raciocínio de Mach, novamente a água curvaria no balde. Novamente, deve-se notar a enorme importância que a massa tem em relação a inercia. Outra ilustração pode ser feita considerando uma situação extrema, onde há apenas uma partícula em um universo vazio. Seguindo o raciocínio apresentado, tal partícula não sentirá efeito inercial algum. Apenas quando há outra partícula, por menor que seja sua massa, é que os efeitos seriam sentidos.

É possível resumir os princípios de Mach em 3:

Princípio 1. *A distribuição de matéria determina a geometria;*

Princípio 2. *Ausência de matéria implica ausência de geometria;*

Princípio 3. *Corpo em universo vazio não sente efeitos inerciais.*

As ideias de Mach, como dito, foram de grande influência para Einstein, mesmo que em seu produto final a relatividade geral não seja amplamente machiana.

3.2.2 Princípio da Equivalência

Massa

Antes de enunciar o princípio da equivalência, é necessário analisar os diferentes tipos de massa presentes na mecânica clássica : inercial, gravitacional passiva e gravitacional ativa. A massa inercial é a presente na 2ª lei de Newton, relacionada ao movimento de um corpo e não tendo nenhuma conexão aparente com a gravidade. A massa gravitacional passiva é a massa referente ao comportamento de um corpo sob ação de um campo gravitacional e a força proporcionada por seu gradiente. Por último, a massa gravitacional ativa, como o nome sugere, é a responsável pela "produção" de campo gravitacional segundo a Lei da Gravitação de Newton.

Esses três tipos de massa na verdade são um só. A massa inercial é equivalente a massa gravitacional passiva. Isso se deve ao fato da aceleração de objetos em queda livre, ou seja, sob ação apenas da força gravitacional exercida pela Terra, ser a mesma, independente de suas massas. Esse resultado – massa inercial = massa gravitacional passiva – é conhecido com precisão experimental da ordem de 10^{12} . Já as massas gravitacionais passiva e ativa, sabe-se que são iguais por causa do comportamento de dois corpos se atraindo gravitacionalmente. Pela terceira lei de Newton, as forças que um faz no outro são iguais em módulo. Como sabe-se a expressão das forças agindo em cada uma, por meio delas chega-se na igualdade entre estes dois tipos de massa. Desta forma, os três tipos de massa anteriormente mencionados são equivalentes, sendo chamados de massa de um objeto.

Afirmações do princípio de equivalência

Para a construção do princípio de equivalência e suas afirmações, Einstein se utilizou amplamente do conhecimento trabalhado nas décadas anteriores à 1915. A contribuição de Ernst Mach já foi mostrada, mas deve-se colocar em contexto, principalmente para a definição da gravidade como resultado da geometria do espaço-tempo, os trabalhos de Clifford e Riemann.

Riemann fazia uma equivalência entre o papel das cargas elétricas e pólos magnéticos para a estrutura física dos campos elétrico e magnético e o papel da distribuição de matéria para a estrutura métrica do espaço-tempo.[1] Percebe-se que Riemann também fora influenciado por Mach, já que sua intuição é equivalente ao primeiro princípio de Mach, com a diferença que Riemann de fato trabalhava com espaços curvos e geometria, como pode ser visto no capítulo de Apêndices.

Clifford era um dos poucos defensores da visão de Riemann para o comportamento do espaço-tempo (por isso mesmo era o tradutor dos trabalhos de Riemann para o inglês). Ele, por sua vez, identificou as variações na curvatura – e suas variações temporais – como a origem do movimento.[1]

A partir da construção teórica realizada no séc. XIX, pode-se enunciar o princípio de equivalência como Einstein fez. O princípio de equivalência pode ser dividido em quatro princípios. Primeiro, usa-se o resultado citado sobre a aceleração de objetos em queda livre ser a mesma:

Princípio 1. O movimento de uma partícula teste sob ação da gravidade independe de sua massa.

Como mencionado, este princípio leva a uma constatação experimental extremamente precisa.

Tal princípio é conhecido como princípio de equivalência forte. Em mecânica Newtoniana tal resultado é apenas coincidência, não havendo justificativa aparente. Tal distinção existe por causa de outra forma de apresentar o princípio, a sua forma fraca. O princípio de equivalência fraco diz respeito ao que responde à gravidade. A priori, diria-se que apenas massa, mas como visto na Relatividade Especial, massa e energia são equivalentes, sendo assim, energia também se acopla a gravidade. Generalizando:

Princípio 2. Gravidade se acopla com tudo.

As restantes afirmações do princípio de equivalência estão relacionadas aos *Gedankenexperimente* de Einstein sobre referenciais inerciais e não inerciais aplicados a famosa situação de um elevador ou nave.

Primeiramente, imagina-se a situação de um observador em um elevador em queda livre (sem rotação), ou seja, de forma co-móvel em relação a uma partícula teste. Nesta situação, em relação ao observador, a partícula de teste permanecerá em repouso ou mover-se-á de forma retilínea uniforme. Sendo assim, conclui-se que o referencial do observador deva ser inercial local. A situação de estar no elevador em queda livre é então equivalente – do ponto de vista da realização de experimentos – a estar em um elevador numa região ausente de campo gravitacional, onde se comporta como referencial inercial. Enuncia-se assim:

Princípio 3. Não é possível distinguir um 'referencial em queda livre sem rotação em um campo gravitacional' de um 'referencial inercial na ausência de campo gravitacional' por meio de experimentos locais.

Einstein notou que a força peso (ou seja, força gravitacional), assim como forças inerciais, dependem apenas da massa dos objetos sob ação das mesmas. Tal semelhança fez Einstein sugerir que ambas possuem a mesma origem, e afirmou que a gravidade tem origem inercial. Nota-se esse comportamento analisando a situação de um observador em um elevador em repouso em campo gravitacional e um observador em um elevador em movimento uniformemente acelerado (aceleração = g) para cima na ausência de campo gravitacional. Tais observadores não conseguiram distinguir, por meio de experimentos locais, se estão na primeira situação ou na última. Ilustra-se a situação imaginando que os dois soltam do repouso um pequeno bloco. Como em ambos os casos as forças agindo serão proporcionais à g e à massa do bloco, seus resultados serão iguais. Desta forma:

Princípio 4. Um referencial em movimento uniformemente acelerado em relação a um referencial inercial é idêntico a um referencial em repouso sob ação de campo gravitacional.

Consequência do princípio de equivalência

Em primeira análise, tais afirmações não dizem respeito à curvatura do espaço-tempo, não justificando o que fora chamado de geometrização da gravidade. Todavia, já em 1907, Einstein pôde prever, com base nesses últimos postulados, dois fenômenos relacionados a curvatura do espaço-tempo.

Primeiro, um feixe de luz se movendo horizontalmente entra o elevador acelerado para cima mencionado anteriormente. Para o observador dentro do elevador, este feixe de luz se moverá numa parábola. Pelo princípio de equivalência, a gravidade deveria curvar a luz da mesma forma, já que o observador no elevador não pode distinguir entre estar em repouso em campo gravitacional ou em aceleração para cima.

Pode-se também fazer essa análise usando a expressão para o movimento de um corpo em respeito a um referencial não-inercial:

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \quad (3.1)$$

O segundo termo do lado esquerdo se refere às forças inerciais. Como visto, a força gravitacional tem origem inercial. Pelo princípio de equivalência, ao tratarmos a situação do elevador sob ação da gravidade, Γ_{bc}^a deve conter informações a respeito do campo gravitacional (assim como continha da aceleração do referencial não-inercial no caso do elevador acelerado). Desta forma a métrica g_{ab} , cuja conexão é Γ_{bc}^a , não poderá mais ser de um espaço plano, porque isso tornaria a situação indistinguível da não-gravitacional.

Como o termo é referente a forças e envolve as primeiras derivadas da métrica g_{ab} , podemos tomar os termos da métrica como potenciais. Comparando com a mecânica newtoniana, cuja equação de campo envolve a equações diferenciais de segunda ordem do potencial, espera-se construir equações diferenciais de segunda ordem envolvendo a métrica g_{ab} em se tratando da relatividade geral.[3]

O segundo efeito é o de desvio para o vermelho de origem gravitacional. Caso houvesse uma fonte de luz direcionada para cima, partindo do chão do elevador acelerado para cima, o observador veria que o comprimento de onda desta luz aumentaria – ou seja, desviaria para o vermelho – efeito esse que já era conhecido da física clássica, o efeito Doppler para a luz. Através

do princípio de equivalência, Einstein então concluiu que o mesmo efeito deveria acontecer para um feixe de luz que estivesse saindo de uma região de campo gravitacional mais forte (como saindo radialmente da superfície da Terra em direção ao espaço).[7]

Ambos os efeitos são de grande importância para a confirmação experimental da teoria da relatividade geral e serão abordados matematicamente no capítulo sobre a Solução de Schwarzschild. Também serão usados para o estudo das soluções de buracos negros, no capítulo correspondente.

3.2.3 Princípio da Relatividade Geral

A relatividade especial colocou em patamar de igualdade todos os referenciais inerciais. A relatividade geral tem o intuito de fazer isso para todos os referenciais.

Princípio da Relatividade Geral: Todos os observadores são equivalentes

Isso é possível graças ao espaço-tempo não ser mais plano, pois ele deixa de ter uma métrica preferencial, que era a de Minkowski. Assim, quaisquer mudanças de coordenadas são possíveis. Desta forma qualquer observador, em qualquer sistema de coordenadas, pode descobrir as leis da Física. É essa capacidade que mata de vez o espaço absoluto Newtoniano.

O fato de podermos mudar arbitrariamente o sistema de coordenadas e ainda obter as leis físicas indica a forma a qual devem estar estas leis:

Princípio da Covariância Geral: Todas as leis físicas devem estar na forma tensorial

Para traduzir uma lei física antes escrita apenas no escopo da relatividade especial, basta substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes. Uma quantidade que poderia ser adicionada a toda equação quando passada à relatividade geral seria o Escalar de Ricci, por ser nulo no espaço-tempo plano da relatividade especial. Todavia, por argumento de 'navalha de Occam', tal termo não deve ser adicionado, mantendo assim a forma mais simples para as equações.[8][3]

É interessante notar que na quarta edição de seu *Mechanik*, Mach apresentou brevemente o que poderia ser interpretado como o princípio da relatividade geral, por concluir que poderia-se mudar arbitrariamente referenciais e ainda assim obter resultados físicos.[1]

3.3 Equações de Campo

Os princípios da relatividade geral prepararam o terreno para a matematização da nova teoria da gravitação. As equações de campo também foram apresentadas na série de artigos de 1915.

Como visto ao detalhar o princípio de equivalência, pode-se entender as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como potenciais. Isso sugere que a nova teoria da gravitação use tensores de rank 2, refletindo também o princípio da covariância geral. Munidos do segundo princípio de equivalência, percebe-se que o tensor de energia-momento (também de rank 2) deva ser a fonte do campo gravitacional, por conter informação tanto da massa quanto da distribuição de energia no espaço, ambas fontes.

É digno de nota que Nordström – que em capítulo futuro será mostrado como um dos responsáveis pela teorização de buracos negros carregados eletricamente – havia tentado, antes de 1915, construir uma teoria da gravitação a partir do traço de $T_{\mu\nu}$, sem sucesso.[9]

Desta forma, procura-se o tensor de rank 2 $F_{\mu\nu}$ mais geral possível a partir de $g_{\mu\nu}$ e derivadas e que as equações de campo sejam do tipo ¹

$$F_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Da teoria da geometria Riemanniana, só a partir do tensor de Ricci, suas contrações e do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é que é possível construir um tensor geral que contenha o próprio $g_{\mu\nu}$, suas primeiras duas derivadas e que seja linear na segunda (como esperado. Desta forma, espera-se chegar na gravitação Newtoniana – e a forma encontrada na equação de Poisson – nos devidos limites. [9]

Sendo assim, a forma mais geral de $F_{\mu\nu}$ será:

$$F_{\mu\nu} = \alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R + \gamma g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Como o tensor energia-momento não pode ser diretamente proporcional ao tensor métrico, temos que α é não nulo. Assim, dividindo todos os termos da equação (3.3) por α , e renome-

¹ Uma outra abordagem a dedução das equações pode ser encontrada em [12]

ando as constantes para simplificação:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \tilde{\beta} g_{\mu\nu} R + \tilde{\gamma} g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Onde $\kappa = -\alpha^{-1}$.

A primeira tentativa de Einstein foi com $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ nulos. Essa condição não pode ser imposta por consequências do caso no vácuo. No caso do vácuo, obtêm-se, corretamente ²:

$$T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.5)$$

Todavia, no caso com distribuição de matéria e energia, conforme equação (C-46):

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (3.6)$$

$$R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow R^{\mu\nu} = 0 \quad (3.7)$$

Estas duas últimas equações contabilizam 14 equações para determinar as 10 componentes de $g_{\mu\nu}$, o quê é uma superdeterminação, que deve ser evitada.

Procura-se valores adequados de $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ para que não se superdetermine $g_{\mu\nu}$ a partir das identidades de Bianchi:[10]

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda;\sigma} + R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda;\sigma} = 0 \quad (3.8)$$

Com $\mu = \rho$ e contraindo a expressão resultante:

$$R_{\nu\sigma;\lambda} + R^{\mu}{}_{\nu\sigma\lambda;\mu} - R_{\nu\lambda;\sigma} = 0 \quad (3.9)$$

A partir de sucessivos usos do tensor métrico, obtém-se

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - R^{\sigma}{}_{\lambda;\sigma} = 0 \quad (3.10)$$

$$\left(R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} R \right)_{;\rho} = 0 \quad (3.11)$$

² Esta equação será melhor detalhada no capítulo seguinte.

Esta última equação não oferece nenhuma condição adicional ao tensor métrico caso tenha-se para o tensor $F_{\mu\nu}$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

Assim é definido o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$.

As equações de campo da relatividade geral são então:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

Onde o valor da constante κ é obtido através do limite Newtoniano (campos gravitacionais fracos) e será abordado no próximo capítulo.

4 -

A solução de Schwarzschild e os testes clássicos

4.1 Introdução

Antes mesmo da divulgação das equações de campo da relatividade geral em 1915, o físico alemão Karl Schwarzschild estava trabalhando na solução das mesmas, para o caso no vácuo, usando uma versão anterior dos trabalhos de Einstein. Com isso, já em 1916 a primeira solução foi divulgada, recebendo o nome de seu descobridor, o próprio Schwarzschild.

A solução de Schwarzschild providenciou diversas análises que viriam a testar a validade da relatividade geral de Einstein. Os chamados testes clássicos, como a predição de desvio da luz de origem gravitacional e do correto valor do desvio do periélio de Mercúrio deram força à teoria. A concordância entre a teoria e os experimentos foram as responsáveis pela propulsão de Einstein ao estrelato.

O capítulo demonstrará a forma de obtenção da solução de Schwarzschild e seus resultados, como o desvio para o vermelho gravitacional e os já mencionados desvio da luz, predição do valor do desvio do periélio de Mercúrio ¹. Demonstrar-se-á também a obtenção do valor da constante κ presente nas equações de campo a partir do limite Newtoniano. É digno de nota também que a solução de Schwarzschild já será suficiente para a futura análise, no próximo capítulo, da predição de buracos-negros na relatividade geral.

¹ Tanto o desvio da luz quanto o desvio para o vermelho de origem gravitacional podem ser obtidos através da análise dos princípios da relatividade geral, como demonstrado no capítulo de Relatividade Geral

4.2 O limite Newtoniano

A mecânica e gravitação Newtonianas possuem um alto leque de validade. Como se sabe, os resultados previstos para experimentos na superfície do planeta Terra são válidos, os cálculos para as órbitas de todos os planetas a partir de Vênus também. Ou seja, a gravitação Newtoniana é válida para casos de campo gravitacional fraco, ou seja, pequena curvatura. Para Mercúrio, mais próximo do Sol, problemas começam a surgir, como o famoso caso do desvio do periélio do planeta.

Como toda teoria que pretende expandir a validade de uma anterior, a relatividade geral deve obter os mesmos valores corretos que a gravitação Newtoniana obtém (também chamado de Princípio da Consistência). O mesmo vale para a mecânica Newtoniana e a relatividade especial, ou seja, a baixas velocidades a mecânica Newtoniana é plenamente válida. Este é o limite Newtoniano da Relatividade Geral, baixas velocidades e campos. Desta forma, espera-se recuperar a equação de Poisson a partir da Relatividade geral para tais condições.

4.2.1 Tensor métrico Newtoniano

Buscamos encontrar a forma da métrica geral para o limite Newtoniano. Como as velocidades são baixas e o campo é fraco, pode-se entender a métrica como uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$ da métrica de Minkowski:[10]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Para movimento não relativístico, o tempo próprio é aproximadamente a coordenada tempo e as derivadas das coordenadas espaciais em relação ao tempo próprio são ínfimas, desta forma, para as coordenadas espaciais (denominadas por i):

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = a^i = -c^2 \Gamma_{00}^i \quad (4.3)$$

Onde a^i é a aceleração nas coordenadas espaciais.

Para o cálculo de Γ_{00}^i usa-se a métrica (4.1), desta forma, para η em primeira ordem:

$$\Gamma_{00}^i \approx \frac{-1}{2} \eta^{i\alpha} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{-1}{2} \nabla_i h_{00} \quad (4.4)$$

Aplicando este resultado na expressão da aceleração:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \nabla_i h_{00} \quad (4.5)$$

Comparando esta última equação com seu resultado Newtoniano entre o potencial gravitacional e aceleração:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (4.6)$$

Portanto:

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \Rightarrow g_{00} = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \quad (4.7)$$

Desta forma o primeiro termo da métrica Newtoniana está definido até primeira ordem no potencial ϕ .

4.2.2 A equação de Poisson

Pelas equações de Einstein presentes no capítulo anterior e munidos da expressão geral para o tensor de energia-momento (como sempre, considerado para poeira), pode-se calcular o tensor de Ricci:[7]

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(\rho U_\mu U_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \rho c^2 \right) \quad (4.8)$$

Pela aproximação em (4.1), temos:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(\rho U_\mu U_\nu - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \rho c^2 \right) \quad (4.9)$$

O termo 00 do tensor de Ricci pode ser aproximado para esse caso Newtoniano como:

$$R_{00} \approx -\kappa \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right) = -\frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \quad (4.10)$$

Todavia, através da definição geométrica do tensor de Ricci e as devidas aproximações por causa do limite Newtoniano:

$$R_{00} \approx -\frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial x^i} \quad (4.11)$$

A partir da equação de Γ (4.4):

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (4.12)$$

Igualando ambas expressões de R_{00} , temos:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = -\frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \quad (4.13)$$

Portanto, utilizando também o valor encontrado para h_{00} em função do potencial, presente na subsecção anterior na equação (4.7):

$$\nabla^2 \phi = \frac{\kappa \rho c^4}{2} \quad (4.14)$$

Para esta equação ser igual a equação de Poisson, tem-se que:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (4.15)$$

Este deve ser o valor da constante κ para que as equações de campo da relatividade geral devam concordar com os resultados clássicos no limite Newtoniano, justificando a forma (3.13) das equações de campo do capítulo anterior.

4.3 A solução de Schwarzschild para as equações de campo

Karl Schwarzschild, em 1916, anunciou ter descoberto a solução para as equações de campo da relatividade geral para o vácuo. Este caso é o mais simples, por ter um tensor de energia-momento nulo (não há matéria nem campos de origem eletromagnética). Ela é a solução que fornece a curvatura do espaço-tempo na região externa a uma distribuição de massa, simetricamente esférica. Nessa situação, as equações de campo podem ser reduzidas devido a também nulidade do escalar de Ricci:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (\times g^{\mu\nu}) \quad (4.16)$$

$$R - \frac{1}{2}4R = 0 \Rightarrow R = 0 \quad (4.17)$$

Desta maneira, como anunciado no capítulo anterior, as equações de campo no vácuo se reduzem a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.18)$$

Para resolver as equações acima (são 16, mas não é necessário solucionar todas), é necessário encontrar uma métrica externa genérica para a sistema, que conterà funções a determinar.

Para obtenção da métrica de Schwarzschild, partimos de um elemento de linha geral que apresente as simetrias do problema (ou seja, simetria esférica). Para a formação desse elemento de linha, tomamos todas as combinações que resultam em unidades de m^2 .

$$ds^2 = \alpha(r,t)dr^2 + \beta(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \gamma(r,t)dt^2 + \delta(r,t)drdt \quad (4.19)$$

Algumas simplificações podem ser feitas usando-se invariâncias, transformações e condições específicas e por condicionarmos a redução ao caso clássico, onde a métrica deve ser de Minkowski e estática. Desta forma, obtêm-se:

$$ds^2 = e^{v(r)}dt^2 - e^{\mu(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.20)$$

As equações que precisam ser resolvidas são então:

$$R_{00} = e^{v-\mu} \left[-\frac{v''}{2} - \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4}(\mu' - v') \right] = 0 \quad (4.21)$$

$$R_{11} = \frac{v''}{2} - \frac{\mu'}{r} + \frac{v'}{4}(v' - \mu') = 0 \quad (4.22)$$

$$R_{22} = \frac{1}{\sin^2\theta}R_{33} = e^{-\mu} \left[1 - e^{\mu} + \frac{r}{2}(v' - \mu') \right] = 0 \quad (4.23)$$

Resolvendo-as para μ e v e aplicando na equação (4.19), obtemos a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.24)$$

A constante $2m$ é chamada de raio de Schwarzschild e é obtida através da aproximação clássica, ao compararmos a equação (4.7) com o encontrado para g_{00} a partir da métrica de Schwarzschild:

$$g_{00} \approx 1 + 2\frac{\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (4.25)$$

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (4.26)$$

Como é possível ver na equação do elemento de linha diferencial (4.24), certos valores de r não seriam permitidos por proporcionar, por exemplo, índices infinitos na métrica. Esse comportamento é o que proporcionará a idealização dos buracos negros e será analisado no capítulo seguinte, e não só para o espaço-tempo de Schwarzschild.

4.4 Testes clássicos

Munidos da métrica do espaço-tempo válida para análise de fenômenos próximos ao sol, pode-se analisar os testes clássicos da relatividade geral. São dois os mais famosos exemplos do sucesso da relatividade geral aplicados para o sistema solar.

Primeiro a predição do correto valor encontrado para o avanço do periélio de mercúrio. O problema da teoria Newtoniana não era prever que tal efeito ocorreria, mas sim a sua magnitude. A confiança na gravitação Newtoniana era tanta que à época um planeta não-detectado foi teorizado, conhecido como Vulcano. Como será mostrado, tal artifício é desnecessário.

Junto com ela, a previsão do desvio gravitacional da luz, observado primeiramente na famosa excursão de Arthur Eddington à costa leste da África em 29 de Maio de 1919. Todavia, essa não foi a única localidade onde se mediu o efeito, sendo Sobral, no Ceará, um dos pontos de medição, numa excursão chefiada por Andrew C. D. Crommelin.[11] Como já mencionado, esta foi a confirmação experimental que catapultou Einstein e tornou sua pesquisa popular.

Por último será demonstrada a existência do desvio para o vermelho, que será importante para o estudo das soluções de buracos negros no próximo capítulo e que tem importância para determinadas análises astrofísicas.

4.4.1 Periélio de Mercúrio

Como mencionado, a física Newtoniana obtém o avanço da precessão do periélio de Mercúrio. Entretanto, a discrepância entre os valores observados e teorizados é de $43,1 \pm 0,4$. A solução para essa discrepância é um triunfo da Relatividade Geral. Para demonstrar tal feito, é necessário encontrar o equivalente, na Relatividade Geral, da Equação de Binet.[10]

Primeiramente, encontra-se equações da geodésica no espaço-tempo de Schwarzschild para as diferentes coordenadas, juntas do elemento de linha dividido por $c^2 d\tau^2$

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad (4.27)$$

A Relatividade Geral sustenta órbitas planares, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é constante, onde encontra-se também que o momento angular é conservado, i.e. é constante, denominado de a .

Através de substituições em (4.27) e um certo algebrismo (fora do contexto da monografia), encontra-se a equação da órbita:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{mc^2}{a^2} + \frac{3m}{r^2} \quad (4.28)$$

Esta equação é diferente da de Binet por conta do último termo. Assim, para resolvê-la, parte-se da aplicação da solução clássica neste termo, indo apenas até primeira ordem na excentricidade e e a devida aproximação:

$$\frac{1}{r} = \frac{mc^2}{a^2} (1 + e \cos \phi) \quad (4.29)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \approx \frac{mc^2}{a^2} + \frac{6m^3 c^4}{a^4} e \cos \phi \quad (4.30)$$

A solução para essa equação será:

$$\frac{1}{r} = \frac{mc^2}{a^2} \left[1 + e \cos \left\{ \phi \left(1 - \frac{3m^2 c^2}{a^2} \right) \right\} \right] + O\left(\frac{m}{r}\right)^2 \quad (4.31)$$

O periélio acontece quando o argumento do cosseno da equação acima é igual a 1, ou seja, quando a solução é máxima. Desconsiderando quando $\phi = 0$, o primeiro valor do ângulo ϕ para tal é:

$$\phi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3m^2c^2}{a^2}} \quad (4.32)$$

$$\phi \approx 2\pi + \frac{6\pi m^2 c^2}{a^2} = 2\pi + \delta\phi \quad (4.33)$$

Onde $\delta\phi$ é a precessão da órbita elíptica em uma revolução.

Para o caso do Sol e Mercúrio, substituindo os valores da massa geométrica do Sol m e do momento angular de Mercúrio (mas em função de seu semi-eixo maior e sua excentricidade, através da relação entre momento angular e *semi-latus rectum* da elipse), para um século, o valor da precessão de sua órbita é:

$$\delta\phi = 43,03'' \quad (4.34)$$

Este valor concorda em muito com a diferença experimental e da teoria Newtoniana, mostrada anteriormente.

4.4.2 Desvio da luz

No capítulo de Relatividade Especial, foi mostrado que para geodésicas do tipo luz $ds^2 = 0$. Sendo assim, o equivalente para a luz do elemento de linha (4.27) será nulo. Usando de um procedimento igual ao da subseção anterior, encontra-se a equação para a órbita da luz:[10]

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2} \quad (4.35)$$

Classicamente, a equação da órbita para a luz é igual a equação acima, retirando-se o termo quadrático. Novamente, realizando um processo similar ao anterior, resolve-se a equação (4.35) a partir da substituição do resultado clássico – equação de uma reta – no termo quadrático:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \phi \quad (4.36)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r_0^2} \cos^2 \phi \quad (4.37)$$

Desta forma, a solução geral da equação da órbita da luz será:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \phi + \frac{m}{r_0^2} (1 + \sin^2 \phi) \quad (4.38)$$

Para a equação da reta (4.36), quando temos o limite assintótico $r \rightarrow \infty$, a equação é satisfeita quando $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Para a solução encontrada acima, no mesmo limite assintótico:

$$r \rightarrow \infty \Leftrightarrow \phi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \quad (4.39)$$

$$-\frac{1}{r_0} \sin \alpha + \frac{m}{r_0^2} (1 + \cos^2 \alpha) = 0 \quad (4.40)$$

Pela aproximação de pequenos ângulos para o ângulo α , emitindo termos de ordem elevada:

$$\alpha = \frac{2m}{r_0} \quad (4.41)$$

Desta forma, a deflexão de um raio de luz será:

$$\delta = 2\alpha = \frac{4m}{r_0} \quad (4.42)$$

Para a observação desse efeito proporcionado pelo Sol, usa-se estrelas que estejam atrás do Sol, obtendo assim deflexão máxima. Neste caso, $r_0 = R_{sol} \approx 7 \times 10^{10}$, e substituindo o valor da massa geométrica para o sol na equação acima, encontra-se o valor da deflexão:

$$\delta \approx 1,75'' \quad (4.43)$$

4.4.3 Desvio para o Vermelho

O desvio para o vermelho de origem gravitacional, assim como o desvio da luz, já foram resumidamente abordados como consequências do princípio de equivalência. Como seu par, seu valor pode ser obtido conhecendo-se a métrica do espaço-tempo local.

O desvio para o vermelho será analisado na situação de um observador no referencial da fonte emissora de luz e um observador distante. A fim de melhor ilustrar a situação, toma-se a fonte como na superfície de uma estrela e o observador distante em algum ponto em torno

dela, ambos em repouso, i.e. quadrivelocidade nula nas componentes temporais. Desta forma, o tempo próprio medido pelos observadores será:[10][3]

$$ds^2 = c^2 d\tau_i^2 = c^2 g_{00} dt_i^2 \Rightarrow d\tau_i = \sqrt{g_{00}(i)} dt_i \quad (4.44)$$

Onde o índice i indica qual o observador, o do emissor (e) ou receptor (r).

O período da luz emitida (e recebida) pode ser calculado ao medir-se o tempo próprio entre duas cristas sucessivas. Desta forma:

$$d\tau_e = \frac{1}{v_e} = \sqrt{g_{00}(e)} \Delta t_e \quad (4.45)$$

$$d\tau_r = \frac{1}{v_r} = \sqrt{g_{00}(r)} \Delta t_r \quad (4.46)$$

Ambos os tempos Δt_e e Δt_r são iguais porque as cristas demoram o mesmo tempo para alcançar o observador r . Assim a razão entre as frequências recebida e emitida será:

$$\frac{v_r}{v_e} = \sqrt{\frac{g_{00}(e)}{g_{00}(r)}} \quad (4.47)$$

O shift é definido como:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v_r - v_e}{v_e} \quad (4.48)$$

Para a métrica de Schwarzschild, temos então:

$$\frac{v_r}{v_e} = \left(1 - \frac{2GM}{r_e c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{r_r c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_e}\right) \quad (4.49)$$

Desta forma, por (4.48):

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_e}\right) \quad (4.50)$$

Pode-se comprovar a validade dessa expressão com uma experiência medindo o redshift da luz proveniente do Sol quando chega na Terra (velocidade muito menor que c , então é válido). Primeiro, sabe-se a frequência que é observada no referencial do emissor, já que também possuímos os elementos que estão na superfície do Sol. Sabe-se que a frequência é a mesma

quando a luz é produzida nos dois locais. Podemos medir então a frequência da luz recebida no planeta.[9]

Para o raio do Sol, $r_e = R_S = 6,96 \times 10^8 \text{m}$. Para o raio Sol-Terra, $r_r = R = 1,5 \times 10^{11} \text{m} \gg R_S$

Desta forma:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \approx -2,12 \times 10^{-6} \quad (4.51)$$

O sinal negativo indica que a luz foi desviada para o vermelho, como esperado.

5 -

Buracos Negros

5.1 Introdução

Como antecipado no capítulo anterior, a solução de Schwarzschild demonstra certos comportamentos exóticos para determinadas regiões do espaço-tempo. Os dois comportamentos citados são as aparições das chamadas singularidades e horizontes de evento. Estas são as características que definem um buraco negro e estão presentes não apenas no espaço-tempo de Schwarzschild.

Singularidades são compreendidas da mesma forma como na física clássica, pontos em que a teoria passa a não ser aplicável. Isso acontece porque, na Relatividade Geral, à medida em que se aproxima das singularidades, o campo gravitacional tende a infinito. Acredita-se que efeitos quânticos sejam importantes para uma análise completa das singularidades, o que requereria uma teoria quântica da gravitação, fora do escopo desta monografia.

Os horizontes de evento são talvez a característica que mais está atrelada aos buracos negros. Eles formam a superfície a partir da qual nem mesmo a luz possui velocidade suficiente para se distanciar da fonte do campo gravitacional. Essa é a origem do nome 'buraco negro'. Buraco em analogia por objetos "caírem" nele, negro por não poder emitir diretamente luz alguma - por ela também ter o mesmo destino dos demais objetos massivos.

Primeiramente, o capítulo tratará das singularidade e horizonte de eventos espaço-tempo de Schwarzschild. Uma comparação com a teoria clássica será feita, onde veremos que buracos negros também são encontrados apenas utilizando a mecânica newtoniana. A principal análise será baseada nos cones de luz no espaço-tempo próximo aos buracos negros, que proporcionam uma compreensão direta dos fenômenos atrelados a eles. Ver-se-á que uma mudança de

coordenadas será necessária e frutífera para esta tarefa.

O tratamento usado para o buraco negro de Schwarzschild servirá de base para as subseqüentes análises nos outros casos, onde a distribuição de massa possui também carga (espaço-tempo de Reissner-Nordström) e momento angular (espaço-tempo de Kerr). Outros fenômenos atrelados a esses outros tipos de buracos negros também serão mostrados, como a formação da Ergosfera, região onde é necessário possuir velocidade relativa a um observador distante (desta forma conhecida como região do limite estacionário).

Neste capítulo, usarei o sistema natural de unidades a menos quando mencionado que não foi empregado.

5.2 Buraco Negro de Schwarzschild

5.2.1 O equivalente Newtoniano

No contexto da mecânica clássica, é extremamente simples calcular a velocidade de escape que um objeto deve ter para se desvencilhar da atração gravitacional de um outro objeto. A velocidade de escape é definida então como a velocidade inicial que se deve ter para que a velocidade final seja nula no limite em que a distância para fonte tenda a infinita. Pela conservação de energia mecânica:

$$T_i + U_i = T_f + U_f = 0 \quad (5.1)$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_c}} \quad (5.2)$$

Onde R_c é o raio da superfície da fonte do campo gravitacional em questão.

Para o limite em que essa velocidade é igual a da luz, pode-se então encontrar o raio que um objeto de massa M deveria ter para nem mesmo a luz poder sair de sua superfície:

$$R_c = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.3)$$

Este é o raio previsto para o horizonte de eventos de um buraco negro no contexto da gravitação Newtoniana. Como pode-se ver, este é o mesmo valor para o raio de Schwarzschild,

mostrado no capítulo anterior. O horizonte de eventos terá a mesma coordenada no contexto da Relatividade Geral no caso de Schwarzschild.

5.2.2 Singularidades de coordenadas e físicas

Uma simples análise dos termos do elemento de linha da solução de Schwarzschild (4.24) mostra que os valores $r = 0$ e $r = 2m$ geram indeterminações. Isso demonstra que as coordenadas utilizadas neste tratamento da solução de Schwarzschild apresentam problemas. Elas são então chamadas de singularidades.

Existem dois tipos de singularidades: de coordenadas e físicas. As singularidades de coordenadas podem ser entendidas como simples falhas do sistema de coordenadas utilizado, como por exemplo a indeterminação que existe em $\theta = 0$ para as coordenadas esféricas. Elas podem ser removidas através de uma transformação de coordenadas. O mesmo não pode ser dito das singularidades físicas.

Para determinar se uma singularidade é física ou não, usa-se um escalar de curvatura invariante (chamado de escalar de Kretschmann), ou seja, cujo valor permanece o mesmo para quaisquer sistemas de coordenadas. Ele é definido a partir da contração do tensor de Riemann covariante através do contravariante. Para o espaço-tempo de Schwarzschild, é definido como:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 48m^2r^{-6} \quad (5.4)$$

Este valor é finito para $r = 2m$, o que demonstra que essa é uma singularidade de coordenadas. Já para $r = 0$ o escalar diverge, é indeterminado, ou seja, $r = 0$ constitui uma singularidade física, também conhecida simplesmente como singularidade.

Como visto no capítulo anterior, o elemento g_{00} de uma métrica está relacionado ao potencial gravitacional. Desta forma, podemos concluir que na singularidade física $r = 0$ o campo gravitacional tende a um valor infinito. Essa conclusão está de acordo com o esperado já pela física clássica, devido ao comportamento $1/r$ do potencial.

Este comportamento do potencial evidencia que toda a matéria será inevitavelmente transportada para a singularidade $r = 0$, graças à uma força infinita direcionada à singularidade. Isso está de acordo com o fato da solução de Schwarzschild tratar de uma solução no vácuo. Uma

análise do colapso de objetos massivos para formação de buracos negros será feita posteriormente.

5.2.3 Coordenadas canônicas e coordenadas de Eddington-Finkelstein

A indeterminação da métrica de Schwarzschild em $r = 2m$ causa um problema mais grave, que é a inversão abrupta das curvas tipo espaço e tipo tempo. É possível observar este comportamento através do cálculo das geodésicas nulas - ou seja, para a luz. Por simplicidade, escolhe-se o caso radial, com $\theta = \pi$ e ϕ fixo. Neste caso, para a luz:

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (5.5)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (5.6)$$

Estas equações podem ser facilmente integradas, resultando nas equações das geodésicas radiais nulas - a partir de agora chamadas apenas de geodésicas nulas - para dentro e para fora da superfície $r = 2m$, que são, respectivamente:

$$t = -(r + 2m \ln|r - 2m|) + cte. \quad (5.7)$$

$$t = r + 2m \ln|r - 2m| + cte. \quad (5.8)$$

Pode-se ver claramente este efeito na Figura 4, com os cones de luz¹ tombando na interface $r = 2m$. Analisando as curvas de t , constantes (as linhas paramétricas de r), com $r > 2m$ elas são do tipo espaço (porque $g_{00} > 0$) e em $r < 2m$ são do tipo tempo ($g_{00} < 0$). Desta forma, a transição em $r = 2m$ é descontínua, e podemos concluir que, nesse referencial, as regiões não se unem suavemente.

Podemos então, visando a continuidade em $r < 2m$, realizar uma mudança de coordenadas. Como a singularidade em $r < 2m$ não é física, e sim de coordenadas, veremos que com essa mudança, passaremos a ter divergência em termos da métrica em $r = 0$.

¹ estruturas formadas pelas geodésicas nulas, ver capítulo sobre Relatividade Especial

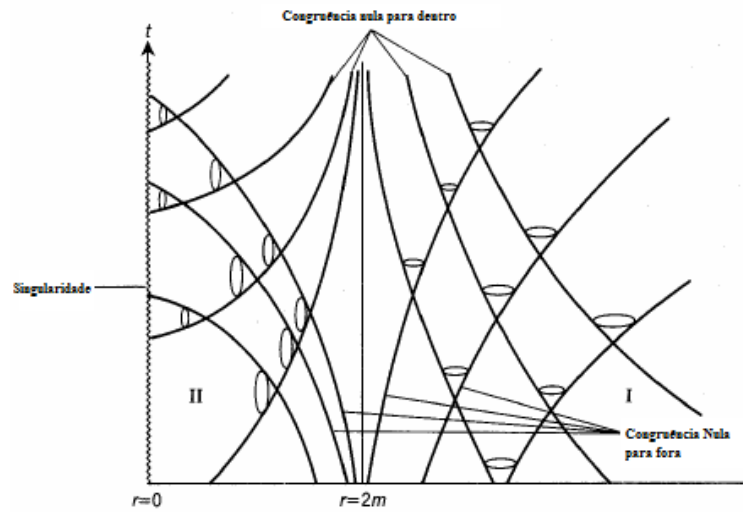


Figura 4 – Geodésicas nulas e cones de luz para o espaço-tempo de Schwarzschild [3]

Pensando unir os cones de luz que passam da região de $r > 2m$ para $r < 2m$, nós realizamos a transformação tal que as geodésicas entrando se tornem retas do tipo $\tilde{t} = -r + cte.$, onde \tilde{t} é a nova coordenada temporal. Isso acontece para a transformação:

$$t \rightarrow \tilde{t} = t + 2m \ln |r - 2m| \quad (5.9)$$

Esta transformação foi primeiramente realizada por Eddington e Finkelstein, que nomeiam essas coordenadas. Não são feitas mudanças em r e, desta forma, a métrica de Schwarzschild é reescrita como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{r}^2 - \frac{4m}{r} d\tilde{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.10)$$

Esta é a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. A partir dela, pode-se calcular as novas geodésicas nulas, pelo mesmo processo usado anteriormente:

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{r}^2 - \frac{4m}{r} d\tilde{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 \quad (5.11)$$

$$0 = (dr + d\tilde{t}) \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{t} - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr \right] \quad (5.12)$$

Novamente, estas equações quando integradas resultam nas geodésicas nulas, mas dessa vez nas coordenadas de Eddington-Finkelstein.

$$\tilde{t} = -r + cte. \tag{5.13}$$

$$\tilde{t} = 4m \ln(r - 2m) + r + cte. \tag{5.14}$$

Desta forma, pode-se construir o novo gráfico das geodésicas nulas, construindo os novos cones de luz.

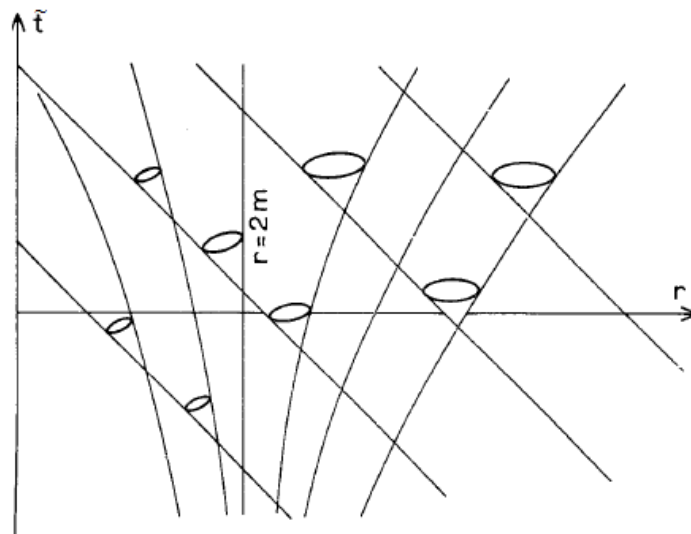


Figura 5 – Geodésicas nulas e cones de luz para o espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein [9]

Nesta forma, os cones de luz não "tombam", sendo bem definidos em $r = 2m$.

5.2.4 Partículas teste e Horizonte de eventos

Partículas de teste percorrem geodésicas do tipo tempo, ou seja, geodésicas internas aos cones de luz. Na figura (1), com os cones de luz tombados, vê-se que não haveria como as partículas adentrarem a região $r < 2m$ porque não há geodésicas tipo tempo cruzando a superfície em questão. Entretanto, é possível afirmar, sem utilizar mudança de coordenadas, que as partículas podem sim cruzar $r = 2m$. Para isso, deve-se calcular o tempo próprio que uma partícula gastaria para sair de onde estava, fora do horizonte de eventos, para chegar até a região interna e conseqüentemente a singularidade $r = 0$.

Primeiramente, calcula-se a relação (2.37) para o espaço-tempo de Schwarzschild, para uma partícula em movimento radial, com $\theta = \pi$ e ϕ :

$$p^0 = g^{00} p_0 = M \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} E \quad (5.15)$$

$$p^r = M \frac{dr}{d\tau} \quad (5.16)$$

$$p^\theta = p^\phi = 0 \quad (5.17)$$

Onde define-se $E = p_0/M$, onde M é a massa da partícula.

Desta forma:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - 1 + \frac{2m}{r} \quad (5.18)$$

$$d\tau^2 = - \frac{dr}{\sqrt{E^2 - 1 + \frac{2m}{r}}} \quad (5.19)$$

Para uma partícula partindo do repouso em r_0 , $E = p_0/M = M/M = 1$, assim:

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3(2m)^{\frac{1}{2}}} \left(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}} \right) \quad (5.20)$$

Desta forma, podemos concluir que, mesmo nas coordenadas antigas, chega-se no resultado de que partículas adentram o horizonte de eventos e atingem a singularidade.

A mesma conclusão é obtido pela análise dos cones de luz do gráfico (2). Quaisquer partículas que estejam dentro dos cones que adentram $r < 2m$ poderão cruzar a fronteira. Caso o façam, não poderão jamais sair da região. O mesmo vale para a luz, conforme explicado anteriormente. Quaisquer geodésicas que partam da região $r < 2m$ permanecerão nessa região. É por este motivo que $r = 2m$ recebe o nome de Horizonte de Eventos, porque após dele, não se pode receber mais nenhuma informação sobre o que lhe é interno.

5.2.5 O buraco negro de Schwarzschild

Toda a análise feita ao longo deste capítulo se deu para o estudo de um buraco negro a partir de sua existência, desconsiderando os processos necessários para sua formação. Para tal, seria necessário o estudo da solução de Schwarzschild interna, válida para as estrelas massivas que podem formar tais objetos astrofísicos.

Entretanto, é possível saber que a partir do momento em que a estrela se condensa a um raio menor que seu raio de Schwarzschild o seu colapso é inevitável. Nesse regime, a solução de Schwarzschild já é aplicável em $r = 2m$, agora externa a estrela, e um horizonte de eventos será formado. Gás e poeira da estrela seguem geodésicas tipo tempo, interiores aos cones de luz (figura 2), e assim, tem em seu futuro inevitável a chegada à então formada singularidade $r = 0$.

5.3 Buraco negro de Reissner-Nordström

5.3.1 Equações de Maxwell

Consideramos agora o caso de uma distribuição esfericamente simétrica de massa com carga. Neste caso, devemos, em conjunto com as equações de Einstein, resolver as equações de Maxwell para o sistema. Assim como a massa e energia de um corpo entram no Tensor de Energia-Momento, devemos generalizá-lo para que contenha a informação do campo eletromagnético.

Isso será feito somando o tensor de energia-momento já conhecido do caso de massa neutra com o tensor energia-momento de Maxwell, que representa a contribuição dos campos gerados pela carga, presente na equação (C-45). Desta forma, o campo eletromagnético contribuirá para a deformação do espaço-tempo, ele contribuirá para a métrica, que será diferente do caso de Schwarzschild.

Como estamos tratando de carga situada na origem do sistema de coordenadas, de simetria esférica, consideram o campo como radial. O tensor de Maxwell (diferente do tensor energia-momento de Maxwell) será dado, em coordenadas esféricas, por:

$$F_{ab} = E(r) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

As equações de Maxwell na Relatividade Geral são dadas por:

$$\nabla_a F_{bc} + \nabla_c F_{ab} + \nabla_b F_{ca} = 0 \quad (5.22)$$

$$\nabla_b F^{ab} = 0 \quad (5.23)$$

5.3.2 Solução de Reissner-Nordström

A métrica base utilizada para a solução de Reissner-Nordström é a mesma utilizada no capítulo anterior, para a solução de Schwarzschild, ou seja, a métrica do elemento de linha (4.20). Novamente, só há dependência com r . Assim, podemos realizar as derivações covariantes das equações de Maxwell (5.22) e (5.23) e, resolvendo o sistema, obtemos:

$$\frac{d}{dr} \left(e^{-\frac{1}{2}(\nu+\mu)} r^2 E \right) = 0 \Rightarrow E = \frac{e^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)} \varepsilon}{r^2} \quad (5.24)$$

Onde ε é uma constante de integração estudada mais à frente.

Esta é a configuração do campo eletromagnético num espaço-tempo simetricamente esférico, com as funções μ e ν a serem determinadas.

Assumimos para a formação de (4.20) que queremos uma solução assintoticamente plana, ou seja, com a métrica tendendo à de Minkowski (2.18). Portanto, temos para o campo elétrico o campo elétrico:

$$E \rightarrow \frac{\varepsilon}{r^2} \quad (5.25)$$

Esta é a mesma forma de um campo radial de carga ε . Sendo assim, ε é interpretada como a carga da distribuição de massa em questão.

De posse da dependência do campo elétrico para com as funções métricas, podemos calcular o tensor de energia-momento de Maxwell a partir do tensor de Maxwell (5.21), obtendo:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{cd} F_{ac} F_{bd} + \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \quad (5.26)$$

O cálculo dos tensores de Ricci para este caso resultará nos mesmos tensores equivalentes a(4.21), (4.22) e (4.23), já que estamos trabalhando com a mesma métrica base (4.20). O tensor de energia-momento de Maxwell (5.26) se anula quando contraído com a métrica – mesmo

processo realizado para o Tensor de Ricci no vácuo. Da mesma forma, o escalar de curvatura obedecerá a equação (4.17).

Munidos dos tensores de Ricci e do tensor de energia-momento, pode-se escrever as equações de Einstein:

$$-\frac{v''}{2} - \frac{v'}{r} + v' \frac{\mu' - v'}{4} = \frac{\kappa}{2} e^{-v} E^2 \quad (5.27)$$

$$\frac{v''}{2} - \frac{\mu'}{r} - v' \frac{\mu' - v'}{4} = -\frac{\kappa}{2} e^{-v} E^2 \quad (5.28)$$

$$e^{-\mu} \left(1 - e^{\mu} - r \frac{\mu' - v'}{2} \right) = \frac{\kappa}{2} e^{-(v+\mu)} r^2 E^2 \quad (5.29)$$

As duas primeiras equações quando somadas fornecem o mesmo que na equação de Schwarzschild, ou seja:

$$v' + \mu' = 0 \quad (5.30)$$

Introduzindo a relação acima e a expressão do campo (5.24) na equação (5.29):

$$e^{\mu} - 1 - r \mu' e^{\mu} = -\frac{\kappa \varepsilon^2}{2 r^2} \quad (5.31)$$

Resolvendo-se esta equação para encontrar a função μ , chega-se a:

$$e^{\mu} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\kappa \varepsilon^2}{2r^2} \quad (5.32)$$

Onde m não é mais a massa do sistema mas a energia. A partir do resultado acima e de (5.30), obtém-se a forma final da métrica do espaço tempo de Reissner-Nordström.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.33)$$

5.3.3 Singularidade e Horizonte de Eventos

Assim como no caso de Schwarzschild, teremos valores das coordenadas que fazem com que a métrica não seja bem definida. Em $r = 0$ teremos uma singularidade física, tal como em Schwarzschild, ou seja, em qualquer referencial a origem dele será uma singularidade. Desta

vez, no entanto, temos dois valores de r equivalentes a $r = 2m$ para o caso de Schwarzschild. Considerando $\varepsilon < m$, os valores de r que fazem $g_{00} = 0$ são:

$$r_{\pm} = m \pm (m^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

Esses dois valores definem assim 3 regiões diferentes, uma externa aos dois horizontes de evento (solução r_+), a qual chamaremos de I, e outras duas internas, entre (região II) e entre $r = 0$ e r_- (região III). É possível construir um gráfico do termo g_{00} da métrica (5.33) e comparando com o termo de Schwarzschild:

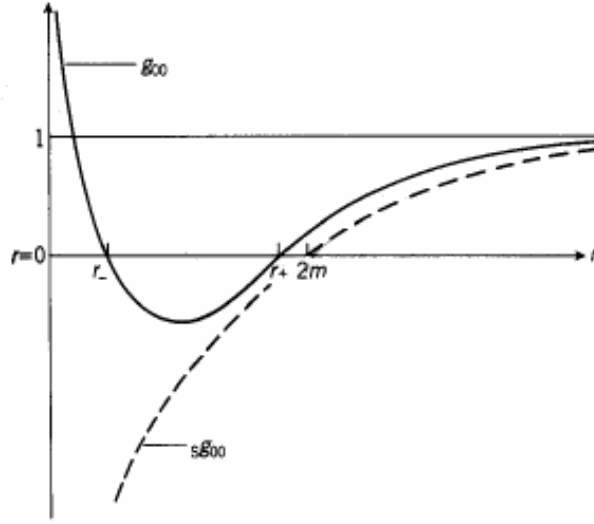


Figura 6 – Comportamento do elemento g_{00} em função de r [3]

Utilizando os valores de (5.34), podemos reescrever a métrica (5.33) como:

$$ds^2 = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} dt^2 - \left[\frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} \right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.35)$$

A partir do elemento de linha acima, podemos, assim como na análise da solução de Schwarzschild, encontrar as geodésicas nulas radiais para fora e para dentro, que definirão os cones de luz:

$$t_f = \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_-) + r + cte. \quad (5.36)$$

$$t_d = -\frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) + \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_-) - r + cte. \quad (5.37)$$

Assim como no caso de Schwarzschild, essas geodésicas não formam regiões conectadas pelos cones de luz. Desta forma, fazemos a mesma transformação de referenciais para que as novas geodésicas nulas radiais internas sejam da forma $-r + cte..$ Temos assim a transformação:

$$\tilde{t} = t + \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_-) \quad (5.38)$$

Assim, podemos reescrever o elemento de linha da métrica como:

$$ds^2 = (1 - f) d\tilde{t}^2 - 2f d\tilde{t} dr - (1 + f) dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.39)$$

Onde f é definido como:

$$f = 1 - g_{00} = \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^2} \quad (5.40)$$

Como esperado, $r = 0$ ainda representa uma singularidade, já que ela é física e não de coordenadas. Podemos agora fazer o gráfico das geodésicas radiais nulas e avaliar os movimentos possíveis :

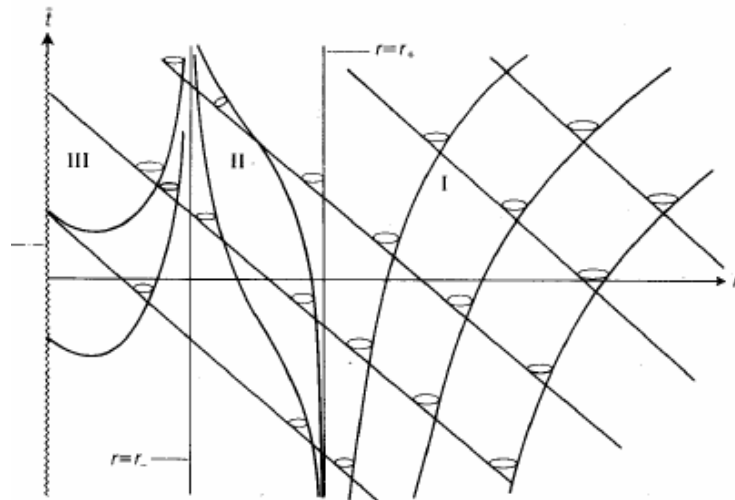


Figura 7 – Geodésicas nulas e cones de luz no espaço-tempo de Reissner-Nordström [3]

Como podemos ver analisando os cones de luz, objetos, nem mesmo a luz, podem sair da região II e adentrar a região I. Desta forma, de fato $r = r_+$ configura um horizonte de eventos. Dentro da região II, objetos podem apenas ir para a região III. Já na região III, como os cones

de luz não estão inclinados totalmente para a singularidade (assim como na I eles não estão inclinados totalmente para $r = r_+$), objetos podem não cair na singularidade.

5.4 Buraco negro de Kerr

5.4.1 Solução de Kerr

A solução de Kerr trata de uma distribuição de massa com momento angular. Por causa da rotação, não se espera simetria esférica. Para uma distribuição de massa neutra e com momento angular, nós temos o elemento de linha (na forma desenvolvida por Boyer e Lindquist):

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} - [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (5.41)$$

Onde nós temos que:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (5.42)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (5.43)$$

De imediato, pela análise dos termos do elemento de linha, vê-se que a solução de Kerr não é esfericamente simétrica (termos mistos de com dt). Isso era de se esperar, já que é conhecido que objetos que giram tendem a não apresentar tal simetria (como a Terra, que é ligeiramente oblata). A inversão simultânea de t e ϕ , ou seja, $t = -t$ e $\phi = -\phi$ mantém a métrica inalterada, o que sugere que o campo seja produzido por uma distribuição que gira (com esperado). Podemos ver também que a substituição de t por \tilde{t} e a por \tilde{a} mantém a métrica igual, o que sugere que a seja uma quantidade ligada a direção desta rotação.

Assim como as outras métricas, a solução de Kerr tende à de um espaço-tempo plano, de Minkowski, quando $r \rightarrow \infty$.

5.4.2 Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera

A partir da análise dos termos da métrica, conseguimos identificar quais são as singularidades previstas por tal solução. Calculando o escalar de Kretschmann, vemos que apenas o caso de

$\rho = 0$ resulta em singularidades físicas.[13] Desta forma:

$$\rho^2 = 0 \Rightarrow r = \cos \theta = 0 \quad (5.44)$$

Analisando a situação em coordenadas cartesianas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.45)$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi + a \sin \theta \sin \varphi \quad (5.46)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi - a \sin \theta \cos \varphi \quad (5.47)$$

$$z = r \cos \theta \quad (5.48)$$

Sendo assim, a partir de (5.44) e (5.45), temos que:

$$x^2 + y^2 = a^2, z = 0 \quad (5.49)$$

A expressão (5.49) nos mostra que a singularidade no caso do Buraco Negro de Kerr possui o formato de um anel, de raio a , centrado na origem e situado no plano xy .

A métrica de Kerr também apresenta diferenças entre os elementos g_{00} e g^{11} . Na métrica de Schwarzschild e Reissner-Nordström, esses dois elementos são idênticos. Desta vez, não. Isso faz com que duas regiões sejam formadas, e não apenas o Horizonte de Eventos (relacionado a g^{11}).

No estudo de sistemas em rotação, há um efeito chamado de Lense-Thirring, em que o sistema de coordenadas é puxado pela rotação da distribuição de massa. A solução de Kerr proporciona um efeito de Lense-Thirring tão forte que, a partir de uma determinada região no espaço-tempo, é impossível não estar em movimento em relação a um referencial no infinito. Um objeto próximo ao buraco-negro de Kerr então, ao entrar nesta região em questão, passará a se mover seguindo a rotação apresentada pelo buraco negro. Esta região é definida como a região de limite estacionário. A região é delimitada pela superfície determinada por:

$$g_{00} = r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (5.50)$$

$$r_{S_{\pm}} = m \pm (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (5.51)$$

Como mostrado pela equação (4.47), este termo da métrica está relacionado com o desvio para o vermelho. Conforme ele tende a zero nestes valores de raio acima, o desvio para o vermelho tende a um valor infinito. É esse efeito que também nomeia estas interfaces de superfícies de redshift infinito.

Da mesma forma que nos casos de Schwarzschild e Reissner-Nordström, também teremos dois horizontes de evento:

$$g^{11} = r^2 - 2mr + a^2 = 0 = 0 \tag{5.52}$$

$$r_{\pm} = m \pm (m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.53}$$

Em ambos os casos nós devemos considerar situações em que $a^2 < m^2$. Percebe-se a partir de (5.51) e (5.53) que a primeira superfície de limite estacionário se situa à frente do primeiro horizonte de eventos. Ou seja, um objeto caindo no buraco negro primeiramente cruzará essa superfície de limite estacionário para depois adentrar o horizonte de eventos (com exceção nos polos).

À região entre o horizonte de eventos e a superfície de limite estacionário se dá o nome de Ergosfera. Por não estar dentro do horizonte de eventos, seria possível adentrar a Ergosfera, mas conseguir sair.

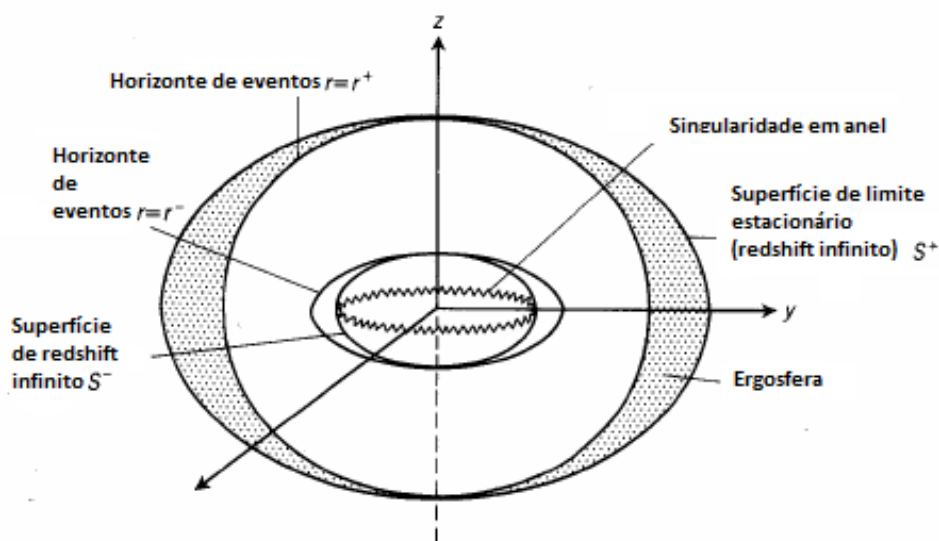


Figura 8 – Esquemática de um buraco negro de Kerr [3]

6 -

Conclusão

Ao longo do trabalho, foi feita uma análise dos pilares da relatividade especial e da relatividade geral e do processo que levou à criação das mesmas. O espaço absoluto Newtoniano deixou de ser utilizado, e os movimentos e posições relativas, de um referencial em relação ao outro, foram demonstrados como os únicos existentes. O tempo absoluto também se tornou obsoleto, com a simultaneidade sendo mostrada inexistente. Da mesma forma como o espaço, o tempo se tornou relativo. Juntos, formaram uma nova estrutura, o espaço-tempo, com 4 dimensões. E não só possui 4 dimensões como não é mais plano, podendo ter curvatura, sendo ela gerada pela presença de matéria e energia, conceitos que também se tornaram uno.

As equações de Einstein matematiza a geometrização da Gravidade. Se a dinâmica Newtoniana foi abandonada, sua gravitação também seria atualizada. Antes conhecida apenas como uma força, a gravidade passa a ser resultado da curvatura do espaço-tempo. Através da resolução das equações de Einstein para o vácuo, de uma distribuição de massa esfericamente simétrica e neutra, foi possível obter a métrica de Schwarzschild. Essa foi a primeira solução encontrada e para o trabalho nesta monografia apresentado, a mais importante. Dela é possível extrair o que definem buracos negros: a existência de singularidades e horizontes de evento.

Os primeiros são ainda um dos maiores desafios da física e não podem ser plenamente estudados pela relatividade geral. Neles, o potencial gravitacional, ou seja, a curvatura do espaço-tempo, assume um valor infinito. Os horizontes são o que tornam negros os buracos negros, não permitindo que nem mesmo a luz, quando dentro de seus domínios, possa sair. Tais fenômenos foram demonstrados a partir da análise das geodésicas nulas, que são por onde a luz caminha no contexto da relatividade geral. Tais geodésicas delimitam os cones de luz, estruturas também analisadas, onde estão as trajetórias que partículas massivas podem percorrer. Por eles

que foi obtido que, cruzando o horizonte de eventos, o destino de toda partícula massiva seria chegar à singularidade. Isso não foi feito, no entanto, sem uma mudança de coordenadas, visto que as cilíndricas, antes usadas, tiveram que ser abandonadas por não descreverem bem o espaço-tempo de Schwarzschild.

Essas características foram mostradas como presentes também nos outros espaços-tempos, para outras distribuições de massa. Novamente, mudanças de coordenadas foram necessárias. O espaço-tempo de Reissner-Nordström demonstrou ainda a existência de um outro horizonte, interno ao primeiro (mais similar ao caso de Schwarzschild), e que circunda a singularidade. Dentro dele, no entanto, os cones de luz indicam que é possível não ter como destino final a singularidade.

Analisando os buracos negros de Kerr, obtivemos também não só dois horizontes de evento, mas como duas outras superfícies. Nelas, a luz sofre um desvio para o vermelho infinito, fenômeno que nomeia essas interfaces. Conclui-se ainda a existência de uma região onde nenhum objeto pode estar parado (em relação a um referencial no infinito), zona chamada de Ergosfera. Esta região está situada fora do primeiro horizonte de eventos, dentro da primeira superfície de redshift infinito, sendo assim de possível acesso.

Apêndices

A Cálculo Tensorial

A.1 Covariância e Contravariância e operações

O estudo da relatividade especial e geral requer o uso de tensores de várias ordens, por estarmos tratando de velocidades em diversas coordenadas, dependência do sistema de coordenadas, entre outros [9]. Tensores de ordem 0 são simplesmente escalares, números. A partir dos tensores de ordem 1, os vetores, passamos a ter duas possibilidades: eles serem covariantes ou contravariantes.

Seja x^μ – contravariância leva índices superescritos – um vetor contravariante n-dimensional, podendo representar um deslocamento. Em relação a um parâmetro qualquer λ , temos que sua taxa de variação é dada por:[3]

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (\text{A-1})$$

Ao realizarmos uma mudança de coordenadas para coordenadas \tilde{x}^μ , teremos:

$$\tilde{x}^\mu = \sum_{\alpha}^n \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (\text{A-2})$$

Derivando em relação ao parâmetro λ , temos então:

$$\tilde{v}^\mu = \sum_{\alpha}^n \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} v^\alpha \quad (\text{A-3})$$

Esta é a dependência de tensores de ordem 1 em relação ao sistema de coordenadas que define a contravariância.

A definição para vetores covariantes é obtida através da definição de escalar como o resultado do produto de vetores covariantes e contravariantes:

$$a = \sum_{\alpha}^n u_{\alpha} v^{\alpha} \quad (\text{A-4})$$

Esta é a definição de produto escalar na forma tensorial.

A partir das equações (6.2), temos que vetores covariantes variam com:

$$\tilde{u}_{\alpha} = \sum_{\mu}^n \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} v_{\mu} \quad (\text{A-5})$$

Vetores contravariantes são escritos na forma de coluna enquanto os covariantes são escritos como linha. Desta forma é fácil ver que o produto (matricial) dos dois resulta em um escalar.

Através da convenção da soma de Einstein, podemos simplificar as equações acima. Na convenção, índices repetidos cruzados – ou seja, um covariante e outro contravariante – são os somados. Exemplificando para a equação acima, teremos simplesmente:

$$\tilde{u}_{\alpha} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} v_{\mu} \quad (\text{A-6})$$

O índice que está sendo somado está livre e pode ser substituído por qualquer outro não utilizado, ou seja

$$\tilde{u}_{\alpha} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} v_{\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} v_{\nu} \quad (\text{A-7})$$

A partir dessas definições, podemos generalizar e obter as definições de tensores de maior ordem. Já utilizando a convenção da soma, tensores de ordem 2 são:

$$T^{\alpha\beta} = a^{\alpha} b^{\beta} \quad (\text{A-8})$$

$$T_{\alpha\beta} = a_{\alpha} b_{\beta} \quad (\text{A-9})$$

$$T^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha} b_{\beta} \quad (\text{A-10})$$

Onde os tensores acima são contravariantes (2, 0), covariantes (0, 2) e misto (1, 1), respectivamente. Como a notação acima indica, em (p, q) , p indica o número de índices contravariantes e q o de covariantes.

Para cada componente (covariante e/ou contravariante) vale a respectiva regra de mudança de sistema de coordenadas. Exemplificando para o caso misto, teremos então:

$$\widetilde{T}_{\beta}^{\alpha} = \widetilde{a}^{\alpha} \widetilde{b}_{\beta} = \frac{\partial \widetilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} a^{\nu} b_{\mu} \quad (\text{A-11})$$

Tensores de ordem (2,0) podem ser interpretados como matrizes, desta forma podemos representa-los em termos de suas componentes como

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & \dots & T^{1n} \\ T^{21} & T^{22} & \dots & T^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{n1} & T^{n2} & \dots & T^{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{A-12})$$

A partir da notação da soma, percebe-se outras características da álgebra tensorial. Uma delas é o abaixamento e levantamento de índices. Como o nome sugere, significa tornar componentes covariantes em contravariantes e vice-versa. Exemplos a seguir:

Os casos mais simples são na verdade a total remoção de índices:

$$T^{\mu\nu}{}_{\nu} = T^{\mu} \quad (\text{A-13})$$

$$T^{\mu}{}_{\mu} = T \quad (\text{A-14})$$

No exemplo número (6.14), temos que a quantidade T é chamada de traço de um tensor, e vale também para tensores de ordem maior.

A.2 Derivada Covariante

Derivadas parciais como conhecidas no cálculo vetorial convencional não seguem a lei de transformação de tensores como em (3) ou (6). Simplesmente derivando parcialmente a equação (3) e utilizando a regra da cadeia:[3]

$$\frac{\partial \widetilde{V}^{\mu}}{\partial \widetilde{x}^{\gamma}} = \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \widetilde{x}^{\gamma}} + \frac{\partial^2 \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial \widetilde{x}^{\gamma}} V^{\alpha} = \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \widetilde{x}^{\gamma}} \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \widetilde{x}^{\gamma}} V^{\alpha} \quad (\text{A-15})$$

Como vê-se acima, a regra das transformações de tensores seria respeitada para um o tensor derivada parcial de V^{μ} em relação a x^{γ} – que é um tensor (1,1) – caso o segundo termo da

equação à direita não existisse. Para que tenha-se uma operação que se transforme como deve, precisamos somar a ambos os lados um termo tal que o segundo termo da equação à direita seja anulado e que o restante se comporte como a nova equação à esquerda.

Assim, somando um termo $Y_{mm}^l V^n$ em ambos os lados, onde l, m, n são os índices necessários para manter o μ contravariante e γ covariante, temos:

$$\frac{\partial \tilde{V}^\mu}{\partial \tilde{x}^\gamma} + \tilde{Y}_{\gamma\kappa}^\mu \tilde{V}^\kappa = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\gamma} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + Y_{\beta\sigma}^\alpha V^\sigma \right) \quad (\text{A-16})$$

Desta forma a quantidade que segue a lei da transformação de tensores é

$$\nabla_\gamma V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\kappa}^\mu V^\kappa \quad (\text{A-17})$$

Essa é a definição de derivada covariante de V^μ , onde usa-se a notação usual $Y_{\beta\sigma}^\alpha \equiv \Gamma_{\gamma\kappa}^\mu$ para representar a chamada conexão afim.

Para tensores de primeira covariantes, o processo utilizado é semelhante. A derivada covariantes em relação a esse tipo de índice será:

$$\nabla_{\text{gamma}} V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}^\kappa V^\kappa \quad (\text{A-18})$$

A derivada covariante é então formada pela derivada simples somada (ou subtraída) ao produto da conexão com o vetor sendo derivado

Pode-se generalizar as regras de derivação covariante para tensores de ordem superior:

$$\begin{aligned} \nabla_a T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} = & \frac{\partial}{\partial x^a} (T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}) + \Gamma_{\kappa a}^\mu T^{\kappa\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} + \Gamma_{\kappa a}^\nu T^{\mu\kappa\dots}_{\alpha\beta\dots} + \dots \\ & - \Gamma_{\alpha a}^\kappa T^{\mu\nu\dots}_{\kappa\beta\dots} - \Gamma_{\beta a}^\kappa T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\kappa\dots} - \dots \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Para escalares, a derivada covariante é igual a derivada simples, porque para este caso a derivada parcial usual segue a lei de transformação para escalares. A conexão afim, também conhecida como símbolos de Christoffel, são abordadas na próxima seção.

B Geometria Riemanniana

A relatividade geral é inteiramente baseada na interação dos corpos com a geometria do espaço-tempo. Desta forma, é necessário ter conhecimento de conceitos de geometria Riemanniana, já que estamos tratando de espaço-tempo curvo.

B.1 Métrica

Métrica pode ser definida por qualquer campo tensorial n-dimensional de rank 2 que seja covariante e simétrico, como $g_{ab}(x)$, com a e b de 1 a n . Usamos a métrica para definir distâncias e comprimentos em um espaço, ou seja, realizará o produto tensorial (que em um espaço euclidiano tridimensional é o produto interno).

O quadrado da distância infinitesimal entre dois pontos é dada pelo produto tensorial:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b \quad (\text{B-20})$$

De forma mais geral, a norma de um vetor X^a é dada por:

$$X^2 = g_{ab}(x)X^a X^b \quad (\text{B-21})$$

O ângulo entre vetores é dado por:

$$\cos(x,y) = \frac{g_{ab}X^a Y^b}{(|g_{cd}X^c Y^d|)^{\frac{1}{2}} (|g_{ef}X^e Y^f|)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B-22})$$

O inverso do tensor métrico g_{ab} é definido por:

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c \quad (\text{B-23})$$

A métrica também abaixará e levantará índices como visto anteriormente:

$$T_{cd\dots}^{ab\dots} g_{a\alpha} g^{c\gamma} = T_{\alpha d\dots}^{b\gamma\dots} \quad (\text{B-24})$$

B.2 Tensor de Riemann

Derivadas covariantes geralmente não comutam. Definindo o comutador para um tensor qualquer como:[3]

$$\nabla_c \nabla_d T_{b\dots}^{a\dots} - \nabla_d \nabla_c T_{b\dots}^{a\dots} \quad (\text{B-25})$$

Expandindo os cálculos para um vetor contravariante:

$$\nabla_d \nabla_c X^a = \frac{\partial}{\partial x^d} \left(\frac{\partial X^a}{\partial x^c} + \Gamma_{bc}^a X^b \right) + \Gamma_{ed}^a \left(\frac{\partial X^e}{\partial x^c} + \Gamma_{bc}^e X^b \right) - \Gamma_{cd}^e \left(\frac{\partial X^a}{\partial x^e} + \Gamma_{be}^a X^b \right) \quad (\text{B-26})$$

$$\nabla_c \nabla_d X^a = \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial X^a}{\partial x^d} + \Gamma_{bd}^a X^b \right) + \Gamma_{ec}^a \left(\frac{\partial X^e}{\partial x^d} + \Gamma_{bd}^e X^b \right) - \Gamma_{dc}^e \left(\frac{\partial X^a}{\partial x^e} + \Gamma_{be}^a X^b \right) \quad (\text{B-27})$$

Usando as expressões acima e assumindo que as derivadas parciais usuais comutam, temos:

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R^a{}_{bcd} X^b + (\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{dc}^e) \nabla_e X^a \quad (\text{B-28})$$

Onde $R^a{}_{bcd}$ é o chamado Tensor de Riemann e é definido por:

$$R^a{}_{bcd} = \frac{\partial}{\partial x^c} \Gamma_{bd}^a - \frac{\partial}{\partial x^d} \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \quad (\text{B-29})$$

Podemos abaixar o índice a usando a métrica:

$$R_{abcd} = g_{ae} R^e{}_{bcd} \quad (\text{B-30})$$

B.3 Equação da Geodésica

A derivada covariante de um tensor ao longo de uma curva $C(X^\mu)$ é definida como:

$$\frac{DA^\mu}{Ds} \equiv \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\gamma}{ds} A^\nu \quad (\text{B-31})$$

Onde s é parâmetro afim e que pode ser substituído por τ devido a relação entre o invariante espaço-temporal e o tempo próprio. Sendo assim, temos que a equação acima se torna, ao identificar a quadri-velocidade u^λ

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\gamma A^\nu \quad (\text{B-32})$$

Aplicando a regra da cadeia no primeiro termo do lado direito e identificando o resultado como uma derivada covariante, obtém-se:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} u^\lambda + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\gamma A^\nu = u^\lambda A_{;\lambda}^\mu \quad (\text{B-33})$$

O transporte paralelo de um vetor é definido como:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0 \quad (\text{B-34})$$

Se o vetor escolhido for o próprio quadri-vetor velocidade, tem-se, por (6.34):

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{du^\mu}{dx} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\gamma u^\nu = 0 \quad (\text{B-35})$$

Sendo assim, pela definição de quadri-velocidade:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (\text{B-36})$$

Esta é a equação da geodésica sobre o parâmetro afim τ , que é o tempo próprio.

Um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada só permanecerá o mesmo após completar a volta em torno da curva caso o Tensor de Riemann do domínio seja nulo. Ele ser nulo é uma condição necessária e suficiente para a variedade ser afim plana.

B.4 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel, também conhecidos como conexão afim, são definidos por:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}) \quad (\text{B-37})$$

Onde a notação $_{,x}$ indica derivada parcial em relação à coordenada x em questão.[14]

B.5 Identidades de Bianchi, Tensor e Escalar de Ricci

Diferenciando a equação em relação a x^λ , usando as definições dos símbolos de Christoffel em função da métrica, obtemos:[8]

$$R_{abcd,\lambda} = \frac{1}{2} (g_{ad,bc\lambda} - g_{ac,bd\lambda} + g_{bc,ad\lambda} - g_{bd,ac\lambda}) \quad (\text{B-38})$$

Pela simetria da métrica e a comutação das derivadas parciais, temos:

$$R_{abcd,\lambda} + R_{ab\lambda c,d} + R_{abd\lambda,c} = 0 \quad (\text{B-39})$$

Como quer-se essa equação válida em todos os referenciais, pelo princípio da covariância (ver Relatividade Geral):

$$R_{abcd;\lambda} + R_{ab\lambda c;d} + R_{abd\lambda;c} = 0 \quad (\text{B-40})$$

Essas são as identidades de Bianchi.

Pode-se contrair ainda mais o Tensor de Riemann:

$$R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \quad (\text{B-41})$$

Essa contração é chamada de Tensor de Ricci, e é a única contração possível do tensor de Riemann.

Uma última contração, dessa vez do tensor de Ricci, usando a métrica, fornece um escalar, o Escalar de Ricci:

$$R \equiv g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (\text{B-42})$$

C Tensor Energia-Momento

Na relatividade especial, a massa de um corpo (ou melhor, a densidade dele) deixa de ser conservada. A massa está agora relacionada a energia e ao momento através da equação (2.40). As leis de conservação estão atreladas a energia e ao momento. Desta forma, a fonte de campo gravitacional não envolverá apenas a massa mas estas duas quantidades. Seguindo o caráter tensorial da relatividade especial, também espera-se que a fonte seja um tensor, que é chamado de tensor de energia-momento.[7]

O tensor de energia-momento, de rank 2, descreve a distribuição e fluxo de energia e momento em uma região do espaço-tempo. Como estamos tratando de um espaço-tempo quadridimensional, o tensor possui 16 componentes, das quais 10 são independentes pelo tensor ser simétrico. O significado de suas componentes é:

- T^{00} : densidade local de energia

- T^{0i} : taxa de fluxo de energia por unidade de área ou, equivalentemente, densidade da i -ésima componente do momento
- T^{ij} : taxa do fluxo da i -ésima componente do momento por unidade de área

É possível construir tensores de energia-momento para poeira sem pressão, fluido ideal e campo eletromagnético. Respectivamente:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu \quad (\text{C-43})$$

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (\text{C-44})$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_\sigma^\mu F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) \quad (\text{C-45})$$

Uma propriedade importante do tensor de energia-momento é seu divergente nulo:

$$\Delta_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C-46})$$

Referências

- [1] M. Jammer, "Concepts of space: the history of theories of space in physics" 3rd. enlarged ed., Dover Publications, New York, 1993
- [2] M. Gleiser, "A dança do Universo: dos mitos de criação ao big-bang", Companhia das Letras, São Paulo, 2006
- [3] R. A. d'Inverno, "Introducing Einstein's Relativity", Oxford University Press, New York, 1992.
- [4] H. Reichenbach, "From Copernicus to Einstein", Dover, New York, 1980.
- [5] F. T. Falciano, "Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral", Revista Brasileira de Ensino de Física, v.31, n. 4, 4308(2009).
- [6] H. Reichenbach, "The Philosophy of Space and Time", Dover Publications, New York, 1958.
- [7] R.J.A. Lambourne, "Relativity, Gravitation and Cosmology", Cambridge University Press, 2010
- [8] B. F. Schutz, "A first course in general relativity", Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [9] A. Papapetrou, "Lectures on General Relativity", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1974
- [10] L. Ryder, "Introduction to General Relativity", Cambridge University Press, 2009
- [11] A. A. P. Videira, "Einstein e o Eclipse de 1919", Física na Escola, v. 6, n. 1, 2005
- [12] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", John Wiley and Sons, Inc., Canada, 1972
- [13] R. C. Henry, "Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole", The Astrophysical Journal, 535:350-353, 2000

- [14] J. B. Hartle, "Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity", Addison-Wesley Pub., San Francisco, 2003.