

**UNIVERSIDADE FEDERAL
FLUMINENSE**

Instituto de Matemática

**Dinâmica no infinito de folheações
 \mathbb{R} -cobertas em variedades de dimensão 3**

Guido Gerson Espiritu Ledesma

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Paulo Henrique C. Gusmão

Niterói, 29 de Março de 2010

Dinâmica no infinito de folheações \mathbb{R} -cobertas em variedades de dimensão 3

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração : Matemática

Aprovada por:

Paulo H. C. Gusmão - UFF
(Orientador)

Leonardo Navarro de Carvalho - UFF

Carlos Alberto Maquera Apaza- ICMC

Paul Schweitzer- PUC

Niterói, 29 de Março de 2010

Dedicatória

À minha mãe Antonia e a minha noiva Meylin.

Agradecimentos

A Meylin pela força e amor que sempre me deu nos momentos de fraqueza.

A minha mãe pelo apoio e a força que sempre me deu.

A minhas família em geral pela ajuda que sempre me deu.

A meu pai e irmãos, pelo apoio incondicional.

A meu orientador professor Paulo H. C. Gusmão pela paciência, encorajamento.

Ao professor Leonardo Navarro de Carvalho pela ajuda que sempre me deu.

Ao professor Mario Santiago Saldaña pelo apoio e sua amizade.

A meus amigos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

Conteúdo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 2 |
| 2 | Preliminares | 4 |
| 1 | Variedade e espaço tangente | 4 |
| 2 | Transversalidade | 6 |
| 3 | Folheações | 6 |
| 4 | Campo de planos | 9 |
| 5 | Orientação | 10 |
| 6 | Folheação orientável e transversalmente orientável | 10 |
| 7 | Espaço das folhas | 11 |
| 8 | Holonomia de uma folha | 11 |
| 9 | Teoremas clássicos | 13 |
| 10 | Geometria Hiperbólica | 15 |
| | 10.1 Algumas propriedades básicas | 15 |
| 11 | Quasi-isometrias | 17 |
| 12 | Extensão ao círculo no infinito da (k, c) -quasi-isometria | 21 |
| 3 | Folheação Uniforme | 24 |
| 1 | Introdução | 24 |
| 2 | Folheação \mathbb{R} -coberta | 25 |
| 3 | Círculo no infinito e sua topologia | 27 |
| 4 | Construção da folheação vertical-caso uniforme | 31 |
| 4 | Direções de Contração | 36 |
| 5 | Folheação Não-Uniforme | 39 |
| 1 | Introdução | 39 |
| 2 | Propriedades das folheações não-uniformes | 41 |
| 3 | Curvas invariantes | 48 |
| 4 | Construção da folheação vertical - caso não-uniforme | 57 |

Introdução

Uma folheação \mathcal{F} de uma 3–variedade fechada pode ser levantada ao recobrimento universal $\widetilde{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} ; se a folheação não tem componentes de Reeb, nem folhas homeomorfas a S^2 , as folhas levantadas são todas planas e Palmeira [Pa] mostrou que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é o \mathbb{R}^3 e também que a folheação em $\widetilde{\mathcal{M}}$ é homeomorfa a uma (folheação de \mathbb{R}^2 por retas) $\times \mathbb{R}$. Assim, o espaço das folhas de $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ coincide com o espaço das folhas da folheação de \mathbb{R}^2 . Quando tal espaço é Hausdorff (portanto homeomorfo a \mathbb{R}), dizemos que a folheação \mathcal{F} é \mathbb{R} –coberta. Exemplos de tais folheações são:

- 1) fibrações sobre o círculo
- 2) folheações definidas por 1–formas fechadas não singulares
- 3) a folheação estável /instável de uma grande classe de fluxos de Anosov
- 4) slitherings sobre o círculo, conforme definido por Thurston [Th3]
- 5) folheações uniformes (ver a definição no Capítulo 2)
- 6) Muitos exemplos de folheações \mathbb{R} –cobertas não induzidas por slitherings [Cal1].

Em um trabalho central [Th2], Thurston provou que no caso de fibração e a variedade sendo aesférica ou existe um toro incompressível transverso a fibração ou existe a suspensão de um fluxo que é Pseudo-Anosov, produzindo uma folheação singular estável/instável. Seguindo a idéia central de analisar a geometria transversa da folheação, Sergio Fenley e em paralelo Danny Calegari, estenderam esse resultado para o caso de folheações \mathbb{R} –cobertas em 3-variedades fechadas, irredutíveis e atoroidais. Uma parte importante desse

trabalho é a construção do cilindro no infinito \mathcal{A} associado à $\widetilde{\mathcal{M}}$ (Capítulo 3) e à folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$, munido de duas folheações transversais e invariantes pela ação de $\pi_1(M)$, além disso o $\pi_1(M)$ preserva a estrutura produto das folheações transversais. Em seguida, é a análise dessa ação que permite construir o fluxo Pseudo-Anosov. Nesta dissertação nos concentraremos na primeira parte.

O resultado principal é o seguinte

Teorema. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um, \mathbb{R} -coberta com folhas hiperbólicas em uma variedade fechada, irredutível e atoroidal de dimensão 3. Então existe um cilindro no infinito de $\widetilde{\mathcal{M}}$ munido de duas folheações transversais, definindo uma estrutura produto que é preservada pela ação de $\pi_1(M)$.*

A prova desse resultado é dividida em dois casos: 1) caso uniforme, isto é, a distância de Hausdorff entre quaisquer duas folhas no recobrimento universal é limitada.

2) o caso não uniforme que sob nossas hipóteses acarreta que a distância de Hausdorff entre qualquer par de folhas é não limitada.

Em ambos os casos a folheação, chamada de horizontal, é dada pelo círculo no infinito $S^1_\infty(F)$ (Capítulo 3), para $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$ visto que cada uma delas é isométrico ao plano hiperbólico.

No caso 1) mostra-se que existe um homeomorfismo canônico entre os círculos no infinito $S^1_\infty(F)$ e $S^1_\infty(E)$ para quaisquer duas folhas F e E . Isto nos dá um círculo universal que é naturalmente homeomorfo ao círculo no infinito de qualquer folha. É esse homeomorfismo que permite construir a folheação vertical em \mathcal{A} transversal à folheação horizontal com a requerida propriedade.

O caso 2) é provado, fazendo-se uma fina análise da dinâmica da folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$ o que permite definir os chamados marcadores em \mathcal{A} . Mostra-se que tais marcadores são curvas contínuas, e em seguida que formam um conjunto denso em \mathcal{A} que se estende a uma folheação transversal à folheação horizontal e com a propriedade desejada.

O trabalho é dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 2 fazemos um sobrevôo dos principais resultados da teoria clássica de folheações e da Geometria Hiperbólica em dimensão 2. No Capítulo 3 fazemos a construção das duas folheações no caso da folheação ser uniforme. No Capítulo 4 é tratado o conceito de direção de contração que permite definir curvas, chamadas por Thurston de marcadores. Essas curvas são fundamentais na construção da folheação vertical no cilindro no infinito. No Capítulo 5 são desenvolvidos todas as ferramentas necessárias para a construção da folheação vertical no caso da folheação não ser uniforme.

Preliminares

1 Variedade e espaço tangente

O nosso primer objetivo é dar a definição de variedade diferenciável primeiramente definimos uma *carta local* ou *sistema de coordenadas* no espaço topológico M como um par (U, φ) onde U é um aberto de M e $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^m .

Um atlas \mathfrak{A} de dimensão m e classe C^r sobre M é uma coleção de cartas locais cujos domínios cobrem M e tal que se $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathfrak{A}$ e $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, então a aplicação $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ é um difeomorfismo de classe C^r entre abertos de \mathbb{R}^m . Os difeomorfismos acima são chamados *mudanças de coordenadas*.

Sejam M e N espaços topológicos e suponhamos que \mathfrak{A} e \mathfrak{B} são atlas de classe C^r em M e N respectivamente. Dizemos que $f: M \rightarrow N$ diferenciável de classe C^k , $k \leq r$, se f é contínua e para cada $x \in M$ existem cartas locais $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ e $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$ com $x \in U$ e $f(x) \in V$, tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

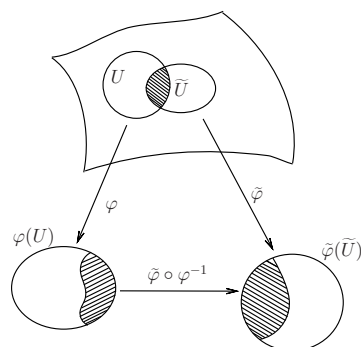
é de classe C^k .

Um atlas \mathfrak{A} de classe C^r sobre M é chamado maximal quando ele contém todas as cartas locais $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, cujas mudanças de coordenadas com elementos $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$$

são difeomorfismos C^r . Um atlas máximo de dimensão m e classe C^r sobre M é chamado também *estrutura diferenciável* de dimensão m e classe C^r sobre M .

Uma *variedade diferenciável* de classe C^r e dimensão m é um espaço topológico



de Hausdorff M com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r . Para denotar que M é uma variedade de dimensão m usaremos às vezes a notação M^m .

Um subconjunto $N \subset M^m$ é chamado subvariedade de M de dimensão n e classe C^r ($r \geq 1$), se para todo $p \in N$ existe uma carta local C^r , (U, φ) , com $\varphi(U) = V \times W$ onde $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ são bolas euclidianas, tal que $\varphi(N \cap U) = V \times 0$. Na situação acima dizemos também que a codimensão de N é $m - n = \dim(M) - \dim(N)$. Segue da definição que uma subvariedade é em particular uma variedade C^r .

Agora fixemos $x \in M$, consideremos o conjunto $C_x(M)$ de todas as curvas C^∞ , $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\epsilon > 0$ e $\alpha(0) = x$. Dada uma carta local $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in U$, as curvas $\alpha_u(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tu)$, $u \in \mathbb{R}^m$, estão em $C_x(M)$. Logo $C_x(M) \neq \emptyset$. Em $C_x(M)$ introduzimos a seguinte relação de equivalência: $\alpha \sim \beta$ se para alguma carta local (U, φ) , $x \in U$, temos

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t) \Big|_{t=0}$$

Observe que se (V, ψ) é outra carta local com $x \in V$, então $\psi \circ \alpha = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \alpha$, logo pela regra da cadeia, a relação \sim independe da carta escolhida.

O quociente de $C_x(M)$ pela relação \sim é chamado *espaço tangente* a M em x e é denotado por $T_x M$. O espaço $T_x M$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial real de dimensão m .

Observação 2.1. No trabalho faremos uso da teoria de grupo fundamental e espaço de recobrimento, mais especificamente dos seguintes teoremas.

Teorema 2.1. (*Levantamento de caminhos*) Sejam $\pi: (E_0, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento e $\alpha: I \rightarrow (X, x_0)$ um caminho contínuo tal que $\alpha(0) = x_0$.

Então existe um único caminho contínuo $\tilde{\alpha}: I \rightarrow E$ que levanta α tal que $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. O ponto e_0 é chamado ponto base de $\tilde{\alpha}$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Li]. \square

Dizemos que o recobrimento $\pi: E \rightarrow X$ é um *recobrimento universal* se E for simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos.

Exemplo 2.1. Seja M uma variedade de dimensão 2. Se M é distinto de S^2 e distinto do espaço projetivo real de dimensão 2, então o recobrimento universal de M é \mathbb{R}^2 .

Neste caso o grupo de automorfismos de recobrimento $G(E, \pi, X)$ tem uma descrição bastante simples. Fixemos $e_0 \in E$, $x_0 = \pi(e_0) \in X$. Dado $f \in G(E, \pi, X)$, seja $\hat{\alpha}: I \rightarrow E$ tal que $\hat{\alpha}(0) = e_0$ e $\hat{\alpha}(1) = f(e_0)$. Coloquemos $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$. Então $x_0 = \alpha(0) = \pi \circ \hat{\alpha}(0) = \pi(e_0) = \pi \circ f(e_0) = \pi \circ \hat{\alpha}(1) = \alpha(1)$, ou seja α é uma curva fechada em X com $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Denote $\pi_1(X, x_0)$ o grupo fundamental de X com ponto base x_0 . Definamos $\varphi: G(E, \pi, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ por $\varphi(f) = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ onde α é como acima. Do fato que E é simplesmente conexo, segue que φ está bem definida.

Teorema 2.2. Se E é o recobrimento universal de X e $e_0 \in E$, $x_0 = \pi(e_0)$ e $\varphi: G(E, \pi, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ como acima, então φ é um isomorfismo de grupos. Além disto dado $e_1 \in \pi^{-1}(x_0)$, existe um único automorfismo $f \in G(E, \pi, X)$ tal que $f(e_0) = e_1$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li] \square

2 Transversalidade

Sejam $f: M \rightarrow N$ uma aplicação C^r ($r \geq 1$) e $S \subset N$ uma subvariedade de N . Dizemos que f é *transversal* a S em $x \in M$ se $y = f(x) \notin S$ ou $y = f(x) \in S$ e a condição abaixo é satisfeita:

$$T_y N = T_y S + Df(x) \cdot (T_x M).$$

Quando f for transversal a S em todo ponto de M dizemos que f é *transversal* a S .

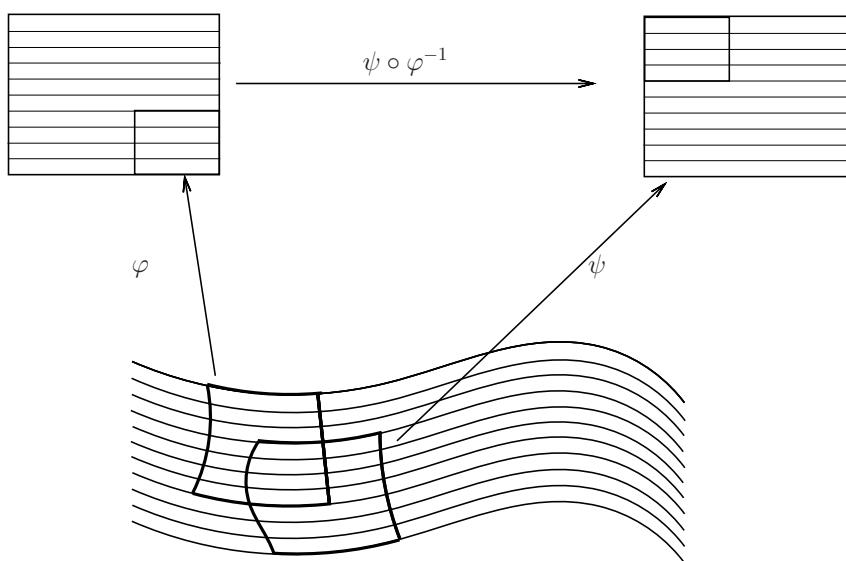
3 Folheações

Definição 2.1. Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma *folheação* de classe C^r e dimensão n de M é um atlas maximal \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguinte propriedades:

- a) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.
- b) Se (U, φ) e (V, ψ) em \mathcal{F} são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (h_1(x, y), h_2(y))$$

Dizemos também que M é folheada por \mathcal{F} , ou ainda que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M .



Observação 2.2.

Quando dizemos que M é uma variedade C^∞ que possui um atlas \mathcal{F} como acima estamos implicitamente dizendo que M possui um atlas \mathcal{A} cujas mudanças de coordenadas são de classe C^∞ ; porém, se $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ e $U \cap V \neq \emptyset$ então $\phi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \phi^{-1}$ são de classe C^r . A única relação entre \mathcal{A} e \mathcal{F} é que as mudanças de variáveis mistas, como acima são de classe C^r .

Daqui em diante consideraremos apenas folheações de classe C^r , $r > 1$. As cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ serão também chamadas cartas trivializadoras de \mathcal{F} .

Exemplo 2.2. Qualquer submersão $f: M \rightarrow N$ define uma folheação $\mathcal{F}(f)$ de M cujas folhas são as componentes conexas das fibras de f a codimensão

de $\mathcal{F}(f)$ é igual à dimensão de N . Um atlas representante de $\mathcal{F}(f)$ é derivado da forma canônica local da submersão f . Folheações associadas às submersões são também chamadas folheações *simples*. As folheações associadas à submersões com fibras conexas são chamadas *estritamente simples*. Uma folheação simples é estritamente simples quando o espaço das folhas é hausdorff.

Exemplo 2.3. (Folheação de Reeb) Consideremos o disco unitário $D := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, e definamos a submersão $f : \text{Int}(D) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(z, x) = e^{\frac{1}{1-|z|^2}} - x.$$

Assim temos a folheação $\mathcal{F}(f)$ de $\text{Int}(D) \times \mathbb{R}$, a qual pode ser estendida a uma folheação do cilindro $D \times \mathbb{R}$ adicionando uma nova folha: a folheação de $D \times \mathbb{R}$ induz uma folheação do toro sólido. Denotaremos a folheação por \mathcal{R} . Qualquer outra folha de \mathcal{R} é difeomorfa a \mathbb{R}^2 , e tem a folha fronteira em seu conjunto de pontos de aderência em X . A folheação de Reeb de X é qualquer folheação \mathcal{F} de X de codimensão 1 para a qual existe um homeomorfismo de X que aplica as folhas de \mathcal{F} nas folhas de \mathcal{R} .

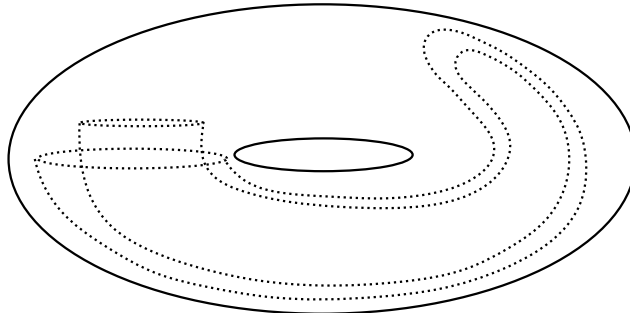


Figura 2.1: Folheação de Reeb do toro sólido

Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^r e dimensão n , $0 < n < m$ de uma variedade M^m . Consideremos uma carta local (U, φ) de \mathcal{F} tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados placas de U , ou ainda placas de \mathcal{F} . Fixado $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r de M , além disto se α e β são placas de U então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Um caminho de placas de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de \mathcal{F} , podemos definir em M a seguinte relação de equivalência: " pRq se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$ ". As classes de equivalência da relação R são chamadas folhas de \mathcal{F} . Da definição segue que uma folha de \mathcal{F} é um subconjunto de M conexo por caminhos. Com efeito, se F é uma folha de \mathcal{F} e $p, q \in F$, então existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Como as placas α_j são conexas por caminhos e $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, é imediato que $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \subset F$ é conexo por caminhos, logo existe um caminho contínuo em F ligando p a q .

Lema 2.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de uma variedade M . Existe uma cobertura $C = \{U_i | i \in I\}$ de M por domínio de cartas locais de \mathcal{F} tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido no domínio de uma carta local de \mathcal{F} .*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. □

4 Campo de planos

Um campo de k -planos numa variedade M é uma aplicação contínua P que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de T_qM . Um campo de 1 -planos é também chamado de *campo de linhas*. Por exemplo, se X é um campo de vetores sem singularidade em M , podemos definir um campo de linhas P em M colocando $P(q) = \mathbb{R} \cdot X(q)$, subespaço de dimensão um em T_qM gerado por $X(q)$.

Reciprocamente, se P é um campo de linhas em M , podemos definir um campo de vetores (localmente) sem singularidades em M escolhendo em cada ponto $q \in M$ um vetor não nulo em $P(q)$. Dizemos que um campo de linhas em M é de classe C^r quando para todo $q \in M$ existe um campo de vetores X , de classe C^r , definido em uma vizinhança V de q , tal que $P(x) = \mathbb{R} \cdot X(x)$ para todo $x \in V$. Analogamente ao caso de campos de linhas, dizemos que um campo de k -planos P em M é de classe C^r se para todo $q \in M$ existem k campos de vetores C^r , X^1, \dots, X^k , definidos numa vizinhança V de q tais que para todo $x \in V$, $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base de $P(x)$. Um fato relevante é o seguinte.

Proposição 2.1. *Toda folheação \mathcal{F} de dimensão k e classe C^r , $r \geq 1$, em M , define um campo de k -planos de classe C^{r-1} em M , o qual será denotado por $\mathbb{T}\mathcal{F}$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li] □

5 Orientação

Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, dizemos que duas bases ordenadas de E , $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, definem a mesma orientação em E se a matriz de mudança de base $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definida por $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, tem determinante positivo.

Se \mathcal{B} é o conjunto das bases ordenadas de E , a relação " \mathcal{B} e \mathcal{B}' definem a mesma orientação em E " é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são chamadas as *orientações* de E .

Seja P um campo de k -planos contínuo em M . Diremos que P é orientável se para cada $x \in M$ for possível escolher uma orientação $\mathcal{O}(x)$ em $P(x)$ de tal forma que a aplicação $x \mapsto \mathcal{O}(x)$ seja continua no seguinte sentido. Consideremos uma cobertura de M por abertos $(U_i)_{i \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, a restrição $P|_{U_i}$ é definida por k campos de vetores contínuos X^1, \dots, X^k . Para cada $x \in U_i$, as bases $\mathcal{B}(x) = \{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ e $\mathcal{B}'(x) = \{-X^1(x), X^2(x), \dots, X^k(x)\}$ definem duas orientações distintas de $P(x)$, \mathcal{O}_i^+ e \mathcal{O}_i^- digamos. Dizemos que a escolha de \mathcal{O} é contínua se $\mathcal{O}|_{U_i} = \mathcal{O}_i^+$ para todo i e sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $\mathcal{O}_i^+ = \mathcal{O}_j^+$ na interseção. Se $k = \dim(M)$ e $P(x) = T_x M$ dizemos que M é orientável.

6 Folheação orientável e transversalmente orientável

Seja P um campo de k -planos em M . Dizemos que \tilde{P} é um campo complementar a P ou transversal a P , se para todo $x \in M$ tivermos $P(x) + \tilde{P}(x) = T_x M$ e $P(x) \cap \tilde{P}(x) = \{0\}$. É claro da definição que \tilde{P} é um campo de planos de codimensão k .

Definição 2.2. Seja P um campo contínuo de k -planos. Dizemos que P é *transversalmente orientável* se existe um campo complementar a P contínuo e orientável.

Proposição 2.2. *Se P é transversalmente orientável qualquer campo de k -planos contínuo e complementar de P é orientável.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. □

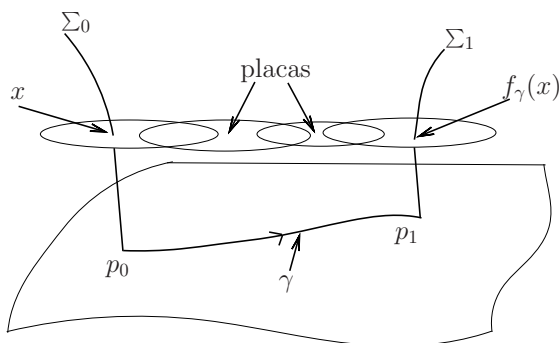
Definição 2.3. Uma folheação \mathcal{F} de classe C^r ($r \geq 1$) é *orientável* se o campo de planos tangentes a \mathcal{F} é orientável. Similarmente, \mathcal{F} é *transversalmente orientável* se o campo de planos tangentes a \mathcal{F} é transversalmente orientável.

7 Espaço das folhas

Seja M^m uma variedade folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão $n < m$. O *espaço das folhas* de \mathcal{F} , M/\mathcal{F} é o espaço quociente de M pela relação de equivalência R que identifica dois pontos de M se eles estão na mesma folha de \mathcal{F} . Em M/\mathcal{F} consideremos a topologia quociente. A topologia de M/\mathcal{F} é em geral pode não ser Hausdorff.

8 Holonomia de uma folha

Sejam $\gamma: [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo e Σ_0, Σ_1 pequenas seções transversais a \mathcal{F} de dimensão $m - n$ passando por $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$ respectivamente. Definiremos uma transformação local entre Σ_0 e Σ_1 "ao longo" das folha de \mathcal{F} , sobre o caminho γ levando p_0 em p_1 . Segue do lema

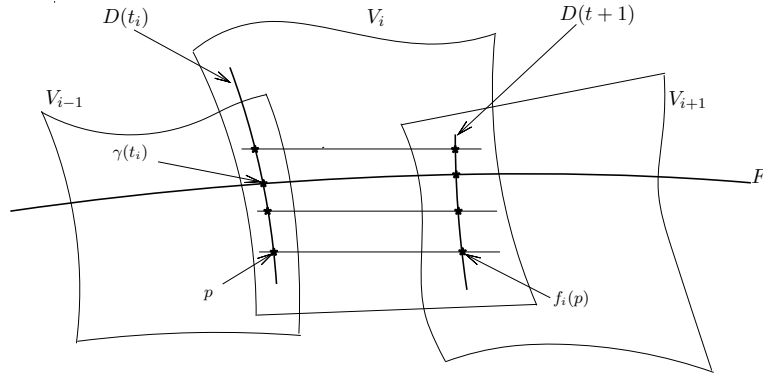


2.1 que existe uma sequência de cartas locais $(U_i)_{i=0}^k$ e uma partição de $[0, 1]$, $0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$ tais que

- Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido em uma carta local de \mathcal{F}
- $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Dizemos então que existe uma *cadeia subordinada* a γ ou, por simplicidade, que $(U_i)_{i=0}^k$ é uma cadeia subordinada a γ .

Para cada $0 \leq i \leq k$ fixemos uma seção transversal a \mathcal{F} , $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$ homeomorfo a um disco de dimensão n passando por $\gamma(t_i)$. Colocando também $D(0) = \Sigma_0$ e $D(1) = \Sigma_1$, então para cada $x \in D(t_i)$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$, a placa de U_i que passa por x intersecta $D(t_{i+1})$ num único ponto $f_i(x)$.



O domínio da aplicação f_i contém um disco $D'_i \subset D(t_i)$ contendo $\gamma(t_i)$. Daí é claro que a composição

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0$$

está bem definida em uma vizinhança de $p_0 \in \Sigma_0$. Chamaremos f_γ de aplicação de holonomia associada a γ .

Lema 2.2. *A aplicação f_γ independe dos discos $(D(t_i))_{i=1}^k$ e da cadeia subordinada, isto é, se \tilde{f}_γ e f_γ são duas aplicações de holonomia associadas ao mesmo caminho, então \tilde{f}_γ e f_γ coincidem na interseção dos seus domínios.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. □

Definição 2.4. Sejam X, Y espaços topológicos e $x \in X$. No conjunto de aplicações $f: V \subset X \rightarrow Y$, onde V é uma vizinhança de x , introduzimos a relação de equivalência $R: fRg$ se existe uma vizinhança W de x tal que $f|_W = g|_W$.

A classe de equivalência de f é denominada *germe* de f em x . Quando $X = Y$, o conjunto $G(X, x)$ de germes de homeomorfismos locais que deixam fixo x é um grupo com a multiplicação germe $(f) \circ \text{germe}(g) = \text{germe}(f \circ g)$, sendo que o domínio de $f \circ g$ é a interseção do domínio de g com $g^{-1}(\text{domínio de } f)$.

Teorema 2.3. *Sejam $\gamma_i: I \rightarrow M, i = 0, 1$, caminhos contidos numa folha F de \mathcal{F} tais que $\gamma_i(0) = p_0, \gamma_i(1) = p_1, i = 0, 1$. Sejam Σ_0, Σ_1 seções transversais a F em p_0, p_1 ; $f_{\gamma_i}: D_i \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ aplicação de holonomia associada a γ_i e φ_{γ_i} o germe de f_{γ_i} em p_0 .*

1. Se $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel}(0, 1)$ então $\varphi_{\gamma_0} = \varphi_{\gamma_1}$.
2. Se $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, então a transformação $\gamma \rightarrow \varphi_{\gamma^{-1}}$ induz um homeomorfismo.

$$\Phi: \pi_1(F, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0), \quad \Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}}$$

do grupo fundamental de F em p_0 no grupo de germes de difeomorfismos C^r de Σ_0 que deixa p_0 fixo.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. \square

Definição 2.5. O subgrupo $\text{HOL}(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$ de $G(\Sigma_0, p_0)$ é chamado grupo de holonomia de F em p_0 .

9 Teoremas clássicos

Lema 2.3. (*Lema da trivialização global*) Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^r , $r \geq 1$, e codimensão n de uma variedade M^m e seja $\gamma: I \rightarrow M$ um caminho contínuo, simples (isto é, injetivo) cuja imagem está contida em uma folha F de \mathcal{F} . Existe uma vizinhança $V \supset \gamma(I)$ e um difeomorfismo C^r

$$h: D^{m-n} \times D^n \rightarrow V$$

tal que $h^*\mathcal{F}$ é uma folheação cujas folhas são as superfícies $P^{-1}(\mathbf{y})$, onde $P: D^{m-n} \times D^n \rightarrow D^n$ é a projeção $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. \square

Teorema 2.4. (*Teorema de Heafhtiger*) Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e classe C^2 de uma variedade M . Suponha que existe uma curva fechada transversal a \mathcal{F} homotópica a um ponto. Então existem uma folha F de \mathcal{F} e uma curva fechada $\Gamma \subset F$ cujo germe de holonomia num segmento J transversal a \mathcal{F} , com $x_0 = J \cap \Gamma$, é a identidade em uma das componentes de $J - x_0$ mas difere da identidade em qualquer vizinhança de x_0 em J .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. \square

Corolário 2.1. Seja M uma variedade analítica real na qual está definida uma folheação analítica \mathcal{F} de codimensão um . Toda curva fechada transversal a \mathcal{F} representa um elemento de ordem infinita de $\pi_1(M)$.

Teorema 2.5. (*Teorema de Novikov*) Toda folheação de classe C^2 e codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três com grupo fundamental finito possui uma folha compacta.

Em particular toda folheação de classe C^2 e codimensão um da esfera S^3 possui uma folha compacta homeomorfa a T^2 . A prova de este teorema é dada no "Séminaire Bourbaki 20e année, 1967-68, Num. 339, p. 433-444".

Definição 2.6. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em uma variedade M . Um ciclo evanescente de \mathcal{F} é uma aplicação $f: S^1 \times [0, \epsilon] \rightarrow M$ (para algum $\epsilon > 0$) tal que se denotamos $f_t(x) = f^x(t) = f(x, t)$, $\forall (x, t) \in S^1 \times [0, \epsilon]$, valem as seguintes propriedades:

1. $f_t(S^1)$ é uma curva fechada contida em uma folha $A(t)$ de \mathcal{F} , $\forall t$;
2. $f_t(S^1)$ é nula homotópica em $A(t)$ se, e somente se, $t > 0$;
3. $f^x([0, \epsilon])$ é transversal a \mathcal{F} , $\forall x$.

A prova deste teorema é consequência direta dos seguintes dois teoremas.

Teorema 2.6. Toda folheação de C^2 e codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três com grupo fundamental finito tem um ciclo evanescente.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Sc-Mo]. □

Teorema 2.7. Toda folheação transversalmente orientável de classe C^1 de codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três com um ciclo evanescente tem uma folha compacta.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Sc-Mo]. □

Demonstração. (*Demonstração do teorema de Novikov*) Seja \mathcal{F} uma folheação de C^2 e de codimensão um de uma variedade compacta M de dimensão três com $\pi_1(M)$ finito. Seja $P: \widehat{M} \rightarrow M$ um recobrimento finito de M tal que o levantamento $\widehat{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} é transversalmente orientável. $\pi_1(\widehat{M})$ é finito pois $\pi_1(\widehat{M}) < \pi_1(M)$ e $\pi_1(M)$ é finito. Pelo teorema 2.6 temos que $\widehat{\mathcal{F}}$ tem um ciclo evanescente. Assim $\widehat{\mathcal{F}}$ tem uma folha compacta \widehat{F} pelo teorema 2.7. Então $F = P(\widehat{F})$ é uma folha compacta de \mathcal{F} provando o resultado. □

Corolário 2.2. Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^2 e codimensão um sem folhas compactas de uma variedade M de dimensão três. Então o levantamento de \mathcal{F} no recobrimento universal de M é uma folheação por planos.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Sc-Mo]. □

10 Geometria Hiperbólica

10.1 Algumas propriedades básicas

O espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 tem as seguintes propriedades:

1. **A formula de Gauss-Bonnet:** Se $[abc]$ é um triângulo geodésico em \mathbb{H}^2 então a soma de ângulos em $[abc]$ é $\pi - \text{Area}([abc])$.
2. **Trigonometria de \mathbb{H}^2** Considere um triângulo com vértices A, B, C de modo que os ângulos em A, B, C são α, β, γ e seus lados opostos tem comprimento a, b, c respectivamente.

(A) Fórmula do cosseno hiperbólico:

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c)$$

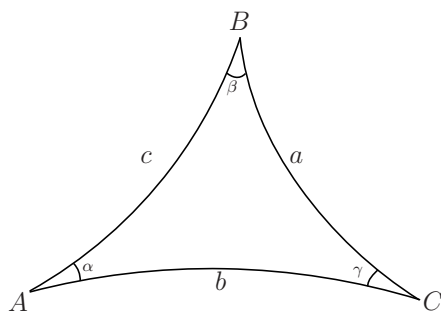
$$\cosh(c) = -\cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)\cos(\gamma)$$

(B) Fórmula do seno hiperbólico:

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

- (C)** Seja $[ABCD] \subset \mathbb{H}^2$ um quadrilátero (mergulhado) de modo que os ângulos em A, B, C são $\frac{\pi}{2}$ e o ângulo em D é γ . Então

$$\sinh(d(A, B))\sinh(d(A, D)) = \cos(\gamma)$$



Lema 2.4. *Considere o quadrilátero **twisted** em \mathbb{H}^2 : como uma configuração de quatro pontos A, B, C, D em \mathbb{H}^2 tal que*

$$\angle ABC \geq \pi/2, \angle DAB = \pi/2, \angle ADC \geq \pi/2$$

onde " \angle " denota a medida do ângulo e $d(D, A) \geq h$. Então $\sinh(d(A, B)) \leq 1/\sinh(h)$

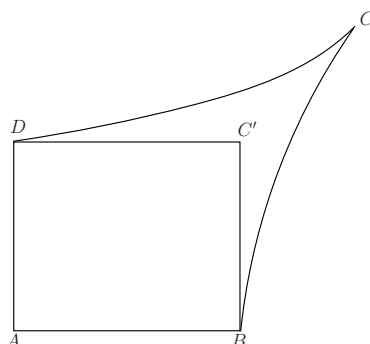


Figura 2.2: Quadriláteros em \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Pelas hipóteses pode-se encontrar um ponto C' no interior do quadrilátero $[ABCD]$ tal que

$$\angle ABC' = \angle DAB = \angle ADC' = \pi/2$$

então a fórmula (C) acima implica que

$$\sinh(d(A, B)) \cdot \sinh(d(A, D)) = \cos(\angle DC'B),$$

donde

$$\sinh(d(A, B)) \cdot \sinh(d(A, D)) \leq 1.$$

Agora pelas hipóteses $d(A, D) \geq h$ isto implica que $1/d(A, D) \leq 1/\sinh(h)$, donde segue o resultado. \square

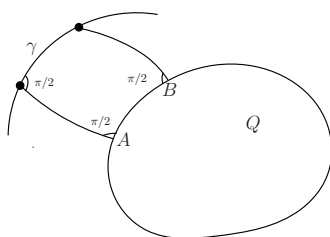
Agora, pegamos uma geodésica γ em \mathbb{H}^2 e definimos a função $\text{proj}_\gamma: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ como aquela que pega um ponto qualquer em \mathbb{H}^2 e o faz corresponder com o ponto mais próximo da geodésica.

Lema 2.5. *Suponha que γ é uma geodésica em \mathbb{H}^2 e $Q \subset \mathbb{H}^2$ um subconjunto fechado convexo tal que $d(\gamma, Q) \geq h \geq 0.2$. Então o diâmetro da projeção no ponto mais próximo de γ a Q é no máximo $4 \exp(-h)$.*

Demonstração. Suponha que $A \in Q$, $D \in \gamma$ realizam a distância mínima entre Q e γ . Seja $C \in \gamma - \{D\}$ qualquer ponto e $B \in Q$ sua projeção. Agora, aplicamos o lema 2.4 à configuração A, B, C, D :

$$d(A, B) \leq \sinh(d(A, B)) \leq 1/\sinh(h).$$

Por hipótese tem-se que $h \geq 0.2$ então $1/\sinh(h) \leq 4 \exp(-h)$



□

Corolário 2.3. *Seja Q um segmento geodésico em \mathbb{H}^2 e α uma curva geodésica por partes, a qual consiste de no máximo r segmentos. Suponha que $d(Q, \alpha) \geq h \geq 0.2$. Então o comprimento da projeção no ponto mais próximo de α a Q é no máximo $4r \exp(-h)$.*

Demonstração. É só aplicar o lema 2.5, repetidamente. □

11 Quasi-isometrias

Nesta seção damos a definição geral de uma quasi-isometria entre espaços métricos e no caso em que a quasi-isometria esteja definida entre espaços hiperbólicos de dimensão 2 (em geral de dimensão $n \geq 2$), pode-se estender a uma aplicação entre seus bordos ideais de um modo contínuo.

Definição 2.7. Uma aplicação $\varphi : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ é chamada (k, c) -quasi-isométrica entre dois espaços métricos se satisfaz: existem constantes $K > 0$, $c \leq 0$ tais que

$$\frac{1}{K} d_1(x, y) - c < d_2(\varphi(x), \varphi(y)) < K d_1(x, y) + c$$

para quaisquer $x, y \in M_1$. Um (k, c) -quasi-isométrica é chamado uma (k, c) -quasi-isometria se ela admite uma *inversa aproximada*, isto é uma $\bar{f}: M_2 \rightarrow M_1$ que é (k, c) -quasi-isométrica e verifica:

$$d_{M_1}(\bar{f}f(x), x) \leq c, \quad d_{M_2}(f\bar{f}(y), y) \leq c$$

para quaisquer $x \in M_1, y \in M_2$. Se a constante é importante dizemos que φ é uma (k, c) -quasi-isometria.

Os espaços M_1 e M_2 são chamados quasi-isométricos.

Definição 2.8. Uma *quasi-geodésica* em um espaço métrico M é uma função $\gamma: I \rightarrow M$, definida sobre um intervalo I , tal que existem $c \geq 1, k \geq 0$ com a seguinte propriedade

$$\forall t, t' \in I, \quad \frac{1}{c}|t - t'| - k \leq d_M(\gamma(t), \gamma(t')) \leq c|t - t'| + k \quad (1)$$

Observação 2.3. Se pegamos $K = \max\{c, k\}$ e trocamos c e k por K em (1) temos que γ é uma K -quasi-isometria entre I e $\gamma(I)$.

Definição 2.9. Dado (X, d) um espaço métrico e A, B subconjuntos de X , dizemos que a *distância de Hausdorff* de A a B é b , e denotamos por $d_H(A, B) = b$, se para cada $a \in A$ existe um $b' \in B$ tal que $d(a, b') \leq b$.

Dados dois pontos x, y em \mathbb{H}^2 denotemos por $[x, y]$ a geodésica que os liga. Então tem-se o seguinte lema:

Lema 2.6. *Existe uma função $\tau(k, c)$ tal que para qualquer (k, c) -quasi-geodésica $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{H}^2$ temos:*

$$d_H(f([0, T]), [f(0), f(T)]) \leq \tau(k, c)$$

onde $k > 1, c > 1$.

Demonstração. Seja γ a geodésica em \mathbb{H}^2 ligando $f(0)$ e $f(T)$. Agora, mudamos f por uma curva geodésica por partes como segue: seja $h = 2kc$, $N = \lfloor T/h \rfloor$, $t_i = hi$, $0 \leq i \leq N$. Seja $D = 2kh$, note que

$$\log\left(\frac{2}{c}\right) = \log\left(\frac{4k}{h}\right) < 1 < D \quad (2)$$

Em cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ escolhemos aplicações geodésicas $\varphi: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{H}^2$ que une $f(t_i)$ com $f(t_{i+1})$. A distância entre f e φ é uniformemente

limitada, isto é pegamos $t \in I$ então $t \in [t_i, t_{i+1}]$ para algum i entre 0 e N logo

$$\begin{aligned} d(f(t), \varphi(t)) &\leq d(f(t), f(t_i)) + d(f(t_i), \varphi(t)), \\ &\leq k|t - t_{i-1}| + c + d(f(t_i), f(t_{i+1})), \\ &\leq 2(kh + c). \end{aligned}$$

Assim é suficiente mostrar o lema para φ . Seja $x_i := \varphi(t_i)$. Então $d(x_i, x_{i+1}) \leq kh + c \leq 2kh$ pois f é uma quasi-geodésica. Considere a curva $\alpha_{ij} = \varphi([t_i, t_j])$, $i < j$. Então

$$\text{long}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=i}^{j-1} d(x_s, x_{s+1}) \leq 2k|t_j - t_i|$$

donde $\text{long}(\alpha)$ denota o comprimento da curva α . O fato de que f é uma quasi-geodésica implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}|t_j - t_i| - c &\leq d(x_i, x_j), \\ |t_j - t_i| &\leq kc + kd(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Note que

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{h}{k}|j - i| - c = \frac{h}{k}(j - i) - \frac{h}{2k} \geq \frac{h}{k}(j - i) - \frac{h}{2k}(j - i)$$

assim temos que

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{h}{2k}|j - i| \quad (3)$$

e

$$\text{long}(\alpha_{ij}) \leq 2kh|j - i|. \quad (4)$$

Seja $\text{proj}_\gamma: \mathbb{H}^2 \rightarrow \gamma$ denota a projeção no ponto mais próximo a γ . Suponha que a curva φ não esteja contida em uma D -vizinhança de γ , então seja x_i o primeiro ponto fora da vizinhança e x_j o último ponto fora dela. Temos que $d(x_i, \gamma) \leq 2D$ e $d(x_j, \gamma) \leq 2D$. Com efeito, temos que $i > 1$ então $i - 1 \geq 1$ logo temos que $\text{long}(\alpha_{i-1, i}) \leq k + c < D$ e como x_{i-1} pertence a esta vizinhança então $d(x_i, \gamma) < 2D$, analogamente $d(x_j, \gamma) < 2D$.

O nosso objetivo é limitar $m = |j - i|$ em função de k, c . A curva $\lambda_{i,j}$ consiste de m segmentos geodésicos, assim do corolário 2.3 temos que

$$\text{long}(\text{proj}_\gamma(\alpha_{i,j})) \leq \exp(-D)m$$

logo

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, \text{proj}_\gamma(x_i)) + d(\text{proj}_\gamma(x_i), \text{proj}_\gamma(x_j)) + d(\text{proj}_\gamma(x_j), x_j), \\ &\leq 2D + d(\text{proj}_\gamma(x_i), \text{proj}_\gamma(x_j)) + 2D, \\ &\leq 4D + \exp(-D)m, \end{aligned}$$

assim aplicando a desigualdade (3) temos que

$$\begin{aligned} \frac{h}{2k}m &\leq \exp(-D) + 4D, \\ m\left(\frac{h}{2k} - \exp(-D)\right) &\leq 4D. \end{aligned}$$

A desigualdade (2) implica que

$$\frac{h}{4k} < \frac{h}{2k} - \exp(-D),$$

portanto

$$m \leq \frac{16Dk}{h} = 32k^2.$$

Agora da desigualdade (2) temos

$$\text{long}(\alpha_{i,j}) \leq 2khm \leq 2kh(32k^2) = 2^7k^4c$$

portanto a curva toda está contida em uma $2D + 2^7k^4c$ -vizinhança de γ . Isto implica que a curva geodésica por partes $\text{Image}(\varphi)$ está contida em uma $4k^2c + 2^7k^4c$ vizinhança de α . Desde que a distância entre γ e φ é menor que $2(kh + c)$ conclui-se que

$$\text{Imag}(f) \subseteq \text{Nbd}_{\tau(k,c)}(\gamma),$$

onde $\text{Nbd}_{\tau(k,c)}$ denota a vizinhança de γ de radio $\tau(k,c)$ e $\tau(k,c) = 2^8k^4c$. A composição $\text{proj}_\gamma \circ \varphi$ é contínua, isto mostra que γ está contida em uma $\tau(k,c)$ -vizinhança da imagem de f . □

Lema 2.7. (lema de Morse) Seja $Q \subseteq \mathbb{H}^2$ um raio (k,c) -quasi-geodésica ou uma completa (k,c) -quasi-geodésica. Então existe Q^* que é um raio geodésico ou uma geodésica em \mathbb{H}^2 de modo que Q está contido em $\text{Nbd}_{\tau(k,c)+1}(Q^*)$.

Demonstração. Só consideremos o caso de um raio quasi-geodésico $q: [0, \infty) \rightarrow Q \subseteq \mathbb{H}^2$, o caso da quasi-geodésica se reduz a dois deste. Considere a sequência de segmentos (k, c) -quasi-geodésica

$$q_j = q|_{[0, j]}: [0, j] \rightarrow \mathbb{H}^2.$$

Seja γ_j o segmento geodésico $[q(0), q(j)] \subseteq \mathbb{H}^2$. Então $d_H(q([0, j]), \gamma_j) \leq \tau(k, c)$. Considere os pontos de intersecção z_j de γ_j com a esfera unitária $S_1(q(0))$. Agora seja α_j a geodésica ligando os pontos $q(j-1)$ e $q(j)$, assim temos que $\text{long}(\alpha_j) \leq k$, logo para j suficientemente grande temos que $d(D_1(q(0)), \alpha_j) \geq j/k \geq 0,2$. O lema 2.5 implica que a distância de z_i a z_{i+1} é maior que $4 \exp(-\frac{j}{k})$, então a sequência $\{z_i\}$ é de cauchy em $S_1(q(0))$. Assim os segmentos geodésicos γ_j convergem a um raio geodésico $Q^* = \text{Imagen}(\gamma^*)$. Agora tem-se que verificar que $Q \subseteq \text{Nbd}_{\tau(k, c)+1}(Q^*)$. Escolhamos um $x = q(t)$ em Q e seja $r = d(q(0), x)$. Então para $j > t$ temos os pontos $y_j \in \gamma_j$ próximos de x . Os pontos y_j estão contidos na bola $B_r(q(0))$. Desde que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j|_{[0, 2t]} = \gamma^*|_{[0, 2t]}$$

deduz-se que $d(y_j, Q^*) \leq 1$ para j grande. \square

12 Extensão ao círculo no infinito da (k, c) -quasi-isometria

Seja $\varphi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma (k, c) -isometria, com $k, c > 1$, nesta parte do trabalho queremos estender φ de um jeito natural a uma aplicação $\phi: \partial_\infty \mathbb{H}^2 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e mostrar que ela é de fato um homeomorfismo.

Para poder definir-la, tomamos $x \in \mathbb{H}^2$ e $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ quaisquer. Existe um único raio geodésico γ_p que parte de x e tem ponto ideal p , logo temos que $\varphi \circ \gamma_p$ é uma (k, c) -quasi-geodésica e pelo lema 2.7 está numa vizinhança de um verdadeiro raio geodésico α_p , que parte de $\varphi(x)$. Denotamos por $\phi(p)$ seu ponto ideal. Dessa maneira definimos ϕ , e vamos a mostrar que esta definição não depende de x . Com efeito, pegamos y em \mathbb{H}^2 , distinto de x , então existe um único raio geodésico γ'_p que parte de y e tem ponto ideal p assim pelas propriedades da geometria hiperbólica temos que γ_p e γ'_p são assintóticas, logo elas estão a uma distância limitada e desde que φ é uma quasi-isometria temos que $\varphi \circ \gamma_p$ e $\varphi \circ \gamma'_p$ estão a uma distância limitada logo $\varphi \circ \gamma'_p$ está próximo de α_p e portanto ϕ está bem definida.

Agora temos que mostrar que ϕ é bijetiva.

Injetiva: Suponha que exista $p, q \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ tais que $\phi(p) = \phi(q)$, sejam γ_p

e γ_q os raios geodésicos que partem de x e tem pontos ideais p e q respectivamente. Desde que p é distinto de q , temos que existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, \infty)$, $x_n = \gamma_p(t_n)$ e $y_n = \gamma_q(t_n)$ tal que

$$t_n \rightarrow \infty \text{ e } d(x_n, y_n) \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

agora como $\phi(p) = \phi(q)$ então as quasi-geodésicas $\phi \circ \gamma_p$ e $\phi \circ \gamma_q$ estão numa vizinhança limitada de uma geodésica e portanto estão a uma distância limitada uma da outra isto é

$$d(\phi \circ \gamma_p(t), \phi \circ \gamma_q(t)) < r$$

para algum $r > 0$. Logo temos

$$\frac{1}{k} d(x_n, y_n) - c \leq d(\phi(x_n), \phi(y_n)) < r$$

que é uma contradição. O que mostra a injetividade.

Sobrejetiva: Agora pegamos $q \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, então existe um único raio geodésico α_q que parte de $\varphi(x)$ e tem ponto ideal q , seja ψ a sua inversa aproximada então $\psi \circ \alpha_q$ é uma quasi-geodésica em \mathbb{H}^2 com ponto inicial $\psi(\varphi(p))$. Agora pelo lema 2.7 existe um raio geodésico γ_p com ponto ideal p e uma aplicação $\tau(k, c)$ tal que

$$d(\gamma_p(t), \psi(\alpha_q(t))) < \tau(k, c) + 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} d(\alpha_q, \varphi(\gamma_p(t))) &\leq d(\alpha_q(t), \varphi(\psi(\alpha_q(t))) + d(\varphi(\psi(\alpha_q(t))), \varphi(\gamma_p(t))), \\ &\leq c + kd(\psi(\alpha_q(t)), \gamma_p(t)) + c, \\ &\leq k + k(\tau(k) + 1) + c. \end{aligned}$$

Assim $\varphi(\gamma_p(t))$ está a uma distância limitada de α_q e pela boa definição de ϕ temos que $\phi(p) = q$. Portanto ϕ é sobrejetiva.

Agora vamos mostrar que ϕ é contínua. Pegamos $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e uma sequência $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergindo a p , isto é pegamos x como ponto base e consideremos o fibrado tangente unitário em x . Temos que esta sequência define direções v_i convergindo à direção v definida por p . Agora sejam γ_i os raios geodésicos que partem de x e tem ponto ideal p_i e seja γ o raio geodésico que parte de x e tem ponto ideal p , então $\varphi \circ \gamma_i$ é uma quasi-geodésica em \mathbb{H}^2 , assim pelo lema 2.7, existe α_i raios geodésicos, tais que

$$d(\varphi(\gamma_i(t)), \alpha_i(t)) < \tau(k, c) + 1 \text{ para todo } t > 0.$$

Os α_i definem direções u_i no fibrado tangente unitário em $\varphi(x)$. O nosso objetivo é mostrar que u_i converge a u , a direção definida por $\phi(p)$. Suponha que isto não acontece, então existe uma subsequência de $\{u_i\}$ que por comodidade denotamos do mesmo jeito tais que u_i converge a \hat{u} , distinto de u . Sejam α e β os raios geodésicos que partem de $\varphi(x)$ e com direções \hat{u} e u respectivamente. Desde que $u \neq \hat{u}$, então existe um ponto y na geodésica α tal que

$$d(y, \beta) > 2\tau(k, c) + k + c + 3$$

Como u_i converge a \hat{u} temos que

$$y = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i(\hat{t}) \quad \text{para algum } \hat{t} > 0.$$

Por outro lado temos que a sequência $\{\gamma_i(\hat{t})\}$ admite uma subsequência $\{\gamma_{n_i}(\hat{t})\}$ convergente, isto é $\{\gamma_{n_i}(\hat{t})\}$ converge a um w , mas como os v_i convergem a v temos que $w \in \gamma$ e pelo lema 2.7 temos que

$$d(\varphi(\gamma(t)), \alpha(t)) < \tau(k, c) + 1 \quad \text{para todo } t > 0.$$

e o fato que φ é uma quasi-isometria implica que

$$\begin{aligned} d(y, \varphi(w)) &\leq d(y, \alpha_{n_i}(\hat{t})) + d(\alpha_{n_i}(\hat{t}), \varphi(\gamma_{n_i}(\hat{t}))) + d(\varphi(\gamma_{n_i}(\hat{t})), \varphi(w)) \\ &\leq d(y, \alpha_{n_i}(\hat{t})) + \tau(k, c) + 1 + kd(\gamma_{n_i}(\hat{t}), w) + c, \end{aligned}$$

assim para i suficientemente grande temos que

$$d(y, \varphi(\gamma(\hat{t}))) \leq \tau(k, c) + k + c + 2$$

Finalmente

$$\begin{aligned} d(y, \beta) &\leq d(y, \alpha(\hat{t})), \\ &\leq d(y, \varphi(w)) + d(\varphi(w), \alpha(\hat{t})), \\ &\leq \tau(k, c) + k + c + 2 + \tau(k, c) + 1, \\ &= 2\tau(k, c) + k + c + 3. \end{aligned}$$

que é uma contradição. Logo ϕ é contínua, do mesmo jeito pode-se mostrar que ϕ^{-1} é contínua e portanto ϕ é um homeomorfismo.

Folheação Uniforme

1 Introdução

De agora em diante, \mathcal{M} representa uma variedade de dimensão 3 fechada e orientada, $\widetilde{\mathcal{M}}$ seu recobrimento universal, \mathcal{F} uma folheação de codimensão um transversalmente orientável e $\widetilde{\mathcal{F}}$ sua folheação pullback no recobrimento universal. \mathcal{H} sempre denotará o espaço das folhas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $\pi: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ denota a projeção do recobrimento universal em \mathcal{M} .

Definição 3.1. Uma folheação *taut* \mathcal{F} de uma variedade de dimensão 3 é uma folheação com a propriedade que existe um círculo na variedade, transversal a \mathcal{F} , a qual intersecta qualquer folha de \mathcal{F} .

Observação 3.1. Em uma variedade de dimensão 3 atoroidal, taut é equivalente à condição de não ter uma folha toro.

Lembremos que uma métrica riemanniana numa variedade \mathcal{M} é uma aplicação que a cada ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ associa um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido no espaço tangente a \mathcal{M} em \mathbf{p} . A métrica é chamada de classe C^r se para cada ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ existe um sistema de coordenadas $\varphi = (x_1, \dots, x_m): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ tal que as aplicações $g_{ij}(\mathbf{q}) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{q}), \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{q}) \rangle$ são de classe C^r para todo $i, j = 1, \dots, m$.

É fácil verificar que em qualquer variedade existe uma métrica riemanniana de classe C^∞ . Temos o seguinte resultado devido a Alberto Candel [Can].

Teorema 3.1. (Candel) *Seja \mathcal{F} é uma folheação taut de uma variedade \mathcal{M} atoroidal e irredutível. Então existe uma métrica riemanniana sobre \mathcal{M} tal que a métrica induzida sobre as folhas tem curvatura constante -1 .*

Dizemos que tal folheação tem *folhas hiperbólicas*. Denotemos por d a distância dada pelo teorema anterior e para cada $F \in \mathcal{F}$ denotemos por d_F a distância na folha.

2 Folheação \mathbb{R} -coberta

Definição 3.2. \mathcal{F} é \mathbb{R} -coberta se, somente se \mathcal{H} é homeomorfo a \mathbb{R} .

No que segue as folheações são \mathbb{R} -cobertas com folhas hiperbólicas. O que implica que no recobrimento universal, as folhas de \mathcal{F} são isométricas a cópias de planos hiperbólicos \mathbb{H}^2 e portanto cada uma delas tem um círculo no infinito. Para cada folha λ de $\tilde{\mathcal{F}}$, seja $S_\infty^1(\lambda)$ denota o seu círculo no infinito.

Lema 3.1. \mathcal{F} é \mathbb{R} -coberta se, somente se \mathcal{H} é hausdorff.

Demonstração. Assumamos que \mathcal{H} é hausdorff. Suponha que existe uma transversal fechada γ em $\tilde{\mathcal{M}}$ transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$. Então γ borda um disco D imerso que pode-se colocar em posição geral, isto pela construção do círculo evanescente, feita por Haefliger [Ca-Li]. Uma análise da folheação induzida em D mostra que existem curvas α_1, α_2 de tal jeito que α_1 é uma curva fechada e α_2 se espirala em torno de α_1 . Sejam F_1, F_2 as folhas que contêm α_1 e α_2 respectivamente. Assim F_2 se acumula sobre F_1 , logo para qualquer vizinhança de F_1 contém F_2 , o que contradiz o fato de que \mathcal{H} é hausdorff. portanto qualquer curva transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ é projetada no espaço das folhas \mathcal{H} injetivamente, assim \mathcal{H} é uma variedade de dimensão 1 com base enumerável, logo ela é ou o círculo ou a reta real. No caso do círculo pode-se construir uma transversal fechada a $\tilde{\mathcal{F}}$, que é uma contradição. Assim \mathcal{F} é \mathbb{R} -coberta. A recíproca é trivial. \square

Observação 3.2. Dada uma sequência de pontos p_i em $\tilde{\mathcal{M}}$, a menos de fazer translações por elementos de $\pi_1(\tilde{\mathcal{M}})$ podemos supor que alguma subsequência de p_i converge. Com efeito, temos que $\pi(p_i)$ é uma sequência de pontos em \mathcal{M} , a qual é compacta, assim existe uma subsequência convergente a um ponto $\hat{p} \in \mathcal{M}$ que também denotaremos por $\pi(p_i)$. Pegamos p_0 um levantamento de \hat{p} , então existem vizinhanças folheada U de \hat{p} e V de p_0 tal que $\pi : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo, logo existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq n_0$ os $\pi(p_i)$ estão em U . Assim existem $\hat{p}_i \in \tilde{\mathcal{M}}$ tais que $\pi(\hat{p}_i) = \pi(p_i)$, portanto existem $g_i \in \pi_1(\tilde{\mathcal{M}})$ tais que $g_i(p_i) = \hat{p}_i$, e os \hat{p}_i convergem a p_0 o que conclui a afirmação.

Lema 3.2. *As folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ são uniformemente próprias; isto é, existe uma função $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $f(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e tal que para cada folha λ , e quaisquer dois pontos p, q em λ que estão distantes de t em $\tilde{\mathcal{M}}$ estão distantes no máximo de $f(t)$ em λ .*

Demonstração. Suponha que o lema é falso, então existe uma sequência de pontos p_i, q_i , distantes de t em $\tilde{\mathcal{M}}$ que estão em folhas F_i onde a distância ao longo das folhas entre p_i e q_i vai para ∞ . Pela observação 3.2, fazendo translações por elementos $g_i \in \pi(M)$, de alguns p_i 's temos uma subsequência convergente, que denotamos por $g_{n_i}(p_{n_i})$, convergindo a $p \in \tilde{\mathcal{M}}$. Agora, como os g_i são isometrias, temos que os trasladados de p_i e q_i estão à mesma distância t em $\tilde{\mathcal{M}}$ e estão ambos na folha $g_i(F_i)$. Logo, como $g_{n_i}(p_{n_i})$ converge e a distância de $g_{n_i}(p_{n_i})$ a $g_{n_i}(q_{n_i})$ é limitada por t para qualquer i , então a sequência $\{g_{n_i}(q_{n_i})\}$ é limitada, portanto existe uma subsequência, a qual chamamos de $\{g_{n_k}(q_{n_k})\}$, convergente a $q \in \tilde{\mathcal{M}}$. Como o espaço das folhas é hausdorff, p e q estão na mesma folha F ; Com efeito, suponha que $p \in F$ e $q \in G$ onde $F, G \in \tilde{\mathcal{F}}$ e sejam U e V vizinhanças quaisquer de p e q respectivamente. Então existe um i suficientemente grande tal que $g_{n_k}(p_{n_k})$ está em U e $g_{n_k}(q_{n_k})$ está em V , donde a folha $g_{n_k}(F_{n_k})$ encontra-se com ambas as vizinhanças. Como U e V são arbitrárias, isto mostra que quaisquer duas vizinhanças de F e G se intersectam, implicando que \mathcal{H} é não hausdorff, contradição. Assim p e q pertencem à mesma folha F e a distância entre eles ao longo da folha é limitada. Segue-se que o limite da distância no longo das folhas entre p_i e q_i é $d_F(p, q)$ e portanto é limitada, contradizendo a suposição. \square

Observação 3.3. A função f pode ser escolhida de modo que ela seja crescente.

Lema 3.3. *Para \mathcal{F} uma folheação \mathbb{R} -coberta de M , e \mathcal{H} o espaço das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$, para qualquer $\lambda \in \mathcal{H}$ a órbita de λ pela ação de $\pi_1(M)$ vai no infinito em ambas direções.*

Demonstração. Fixamos uma orientação em \mathcal{H} . Suponha que ela é limitada superiormente, assim existe uma menor cota superior λ' deste conjunto. Então λ' é invariante pela ação de $\pi_1(M)$. Com efeito, se existe um $\beta \in \pi_1(M)$ tal que $\beta(\lambda') \neq \lambda'$ temos $\beta(\lambda') < \lambda'$, primeiro caso, O fato de que λ' é o supremo deste conjunto e que β é um homeomorfismo de \mathcal{H} em si mesmo, implica que existe um $\alpha \in \pi_1(M)$ tal que $\beta(\alpha(\lambda)) > \lambda'$ o que é uma contradição. O outro caso é similar só considerando β^{-1} .

Afirmção 3.1. $\pi(\lambda')$ é fechada.

Com efeito, pegamos uma sequência $\{z_i\}$ em $\pi(\lambda')$ convergindo para z_0 , com $z_0 \notin \pi(\lambda')$. Então pegamos uma vizinhança folheada V de z_0 e pegamos \hat{z}_0 um levantamento de z_0 ao recobrimento universal. Assim, existe uma vizinhança U de \hat{z}_0 tal que $\pi|_U: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Como $z_0 \notin \pi(\lambda')$, os z_i 's para i suficientemente grande estão em V e seus levantamentos em U pertence a transladados da folha λ' arbitrariamente próximos de \hat{z}_0 . Mas isto é um absurdo, visto que λ' é invariante. Vemos assim que $\pi(\lambda')$ é fechada. Como $\lambda' = \mathbb{R}^2$ segue que $\lambda'/\pi_1(M)$ é um $K(\pi_1, 1)$, logo homotopicamente equivalente a M . Isto é um absurdo pois M é tridimensional.

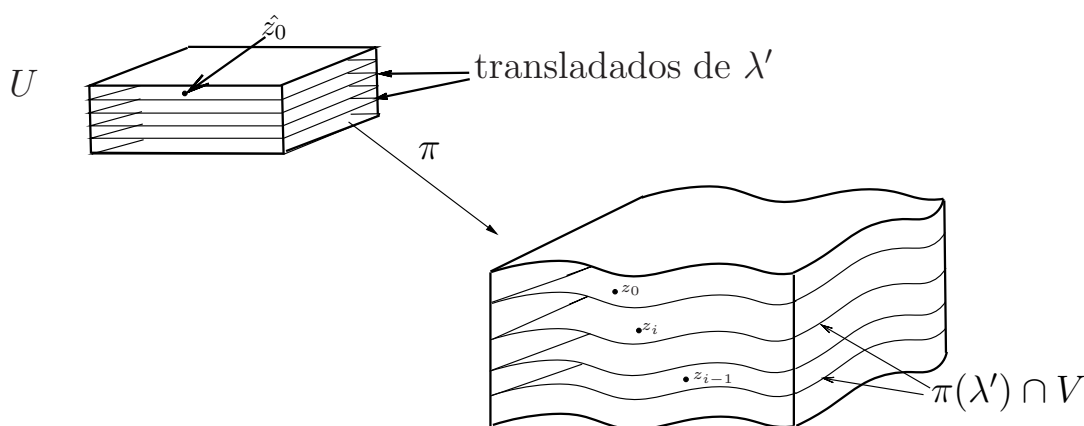


Figura 3.1: esboço da prova

□

Definição 3.3. Uma folheação \mathcal{F} é *uniforme* se dado duas folhas quaisquer E, F of \mathcal{F} , existe uma constante b , de modo que a distância hausdorff entre E, F é menor que b ; explicitamente, para qualquer ponto $x \in E$ existe um ponto $y \in F$ tal que $d(x, y) < b$ (a distância é medida na variedade) e reciprocamente. Esta constante só depende das folhas E e F .

3 Círculo no infinito e sua topologia

Se E, F são folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$, o conjunto (E, F) denota o conjunto das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ separando E de F . Como \mathcal{H} é homeomorfo a \mathbb{R} , então se E, F são distintos e o conjunto (E, F) é homeomorfo a um intervalo. Seja $[E, F]$ a união de (E, F) com as folhas E, F .

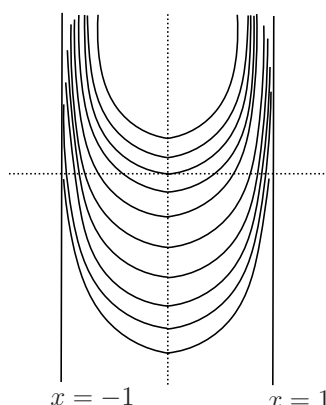


Figura 3.2: Uma folheação que não é uniforme

Definição 3.4. (Cilindro no infinito) Seja \mathcal{F} uma folheação \mathbb{R} -coberta com folhas hiperbólicas. Seja

$$\mathcal{A} = \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} S_{\infty}^1(F)$$

chamado de cilindro no infinito de $\tilde{\mathcal{F}}$. A união de todos os círculos no infinito das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Desde que $\tilde{\mathcal{F}}$ é \mathbb{R} -coberta, então intuímos que \mathcal{A} é o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. O primer passo é definir uma topologia em \mathcal{A} de modo que este seja homeomorfo ao cilindro.

Notação: Dado $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $F(x)$ denota a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ contendo x .

Cada raio geodésico em $F(x)$ começando em x define um único ponto ideal em $S_{\infty}^1(F(x))$ dando um homeomorfismo entre o fibrado tangente unitário de $F(x)$ em x e $S_{\infty}^1(F(x))$. Seja $T_1\tilde{\mathcal{F}}$ o fibrado tangente unitário de $\tilde{\mathcal{F}}$. Dado qualquer $B \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$, seja $\tilde{\mathcal{F}}_B$ a união de folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ que intersectam B e

$$\mathcal{A}_B = \bigcup_{\lambda \in \tilde{\mathcal{F}}_B} S_{\infty}^1(\lambda)$$

Isto é particularmente útil se $B = \mu$ é uma transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$. Com esta notação denotamos por $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{\mu}$ o fibrado tangente unitário a $\tilde{\mathcal{F}}$ restrito à transversal μ . Definimos agora de um jeito natural a seguinte aplicação

$$\pi_{\mu} : T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{\mu} \rightarrow \mathcal{A}_{\mu}$$

como segue. Para $v \in T_x \mathcal{F}$ com $x \in F$, existe um único raio geodésico γ_v em F partindo de x e em direção a v . Este raio define um único ponto $\pi_\mu(v)$. A restrição de π_μ a $T_x \mathcal{F}$ para qualquer $x \in \mu$ é obviamente um homeomorfismo. Claramente π_μ é uma bijeção, então definimos uma topologia em \mathcal{A} como sendo a requerida para fazer π_μ um homeomorfismo para cada transversal μ .

Proposição 3.1. *A topologia sobre \mathcal{A} definida pelas aplicações π_μ é bem definida. Com respeito a esta topologia, \mathcal{A} é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. A união $\widetilde{\mathcal{M}} \cup \mathcal{A}$ tem uma topologia natural fazendo-a homeomorfo a $D^2 \times \mathbb{R}$, onde D^2 é o disco fechado unitário e $D^2 \times \{t\}$ corresponde à união $F \cup S_\infty^1(F)$ para F uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Temos que provar a boa definição desta topologia em \mathcal{A}_μ , isto é temos que mostrar: dado outra transversal λ a $\widetilde{\mathcal{F}}$ tal que sua projeção em \mathcal{H} é a mesma que μ , então a coleção de abertos definidas em $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\lambda$ é a mesma. Agora como ambas as topológicas são 1-enumeráveis então basta considerar o comportamento das sequências. Consideremos a sequência y_i , $i \in \mathbb{N}$ convergindo a y_0 na topologia \mathfrak{T}_μ . Então y_i 's estão em $S_\infty^1(F_i)$, para folhas F_i 's unicamente definidas que estão em $\widetilde{\mathcal{F}}_\mu$ (igual a $\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$). Sejam

$$x_i = F_i \cap \mu, \quad z_i = F_i \cap \lambda$$

Então a sequência F_i converge a F_0 in \mathcal{H} , F_0 uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}_\mu$. Também

$$x_i \rightarrow x_0 \text{ em } \mu, \text{ com } x_0 \text{ em } F_0 \text{ e } z_i \rightarrow z_0 \text{ em } \lambda$$

Para cada i seja l_i , s_i raios geodésicos em F_i partindo de x_i , z_i respectivamente com ponto ideal y_i em $S_\infty^1(F_i)$. Isto vem da identificação dos fibrados tangente unitários a $\widetilde{\mathcal{F}}$ em x_i , z_i com $S_\infty^1(F_i)$ respectivamente. Desde que a sequência y_i converge a y_0 em \mathfrak{T}_μ então as direções de l_i em x_i convergem à direção de l_0 em x_0 .

Note que y_i converge para y_0 em \mathfrak{T}_λ se e somente se as direções de s_i em F_i convergem à direção de s_0 em F_0 . Desde que x_i converge para x_0 e z_i converge para z_0 então a distância de x_i e z_i é limitada na variedade, para todo i , logo pelo lema 3.2 temos que $d_{F_i}(x_i, z_i)$ é limitada por cima para todo i . Em adição temos que os raios l_i , s_i para $i \geq 1$ definem o mesmo ponto ideal y_i em $S_\infty^1(F_i)$. Assim, l_i e s_i são assintóticas em F_i . Estes fatos implicam que dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um positivo $\alpha_i(\epsilon)$ de modo que salvo um comprimento inicial de $\alpha_i(\epsilon)$ o restante dos raios l_i , s_i estão em uma ϵ -vizinhança um da outra, em F_i . O fato de que $d_{F_i}(x_i, z_i)$ é limitada implica

que os $\alpha_i(\epsilon)$ são limitados. Com efeito, suponha o contrário, isto é, que os $\alpha_i(\epsilon) \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Agora pegamos \hat{x}_i em l_i , com $d_{F_i}(x_i, \hat{x}_i) \geq \alpha_i(\epsilon)$ logo passando a subsequência pode-se supor que \hat{x}_i converge e pelo fato que os l_i convergem a l_0 temos que o limite \hat{x}_0 desta sequência fica em l_0 logo

$$d(x_i, \hat{x}_i) \leq d(x_i, x_0) + d(x_0, \hat{x}_0) + d(\hat{x}_0, \hat{x}_i),$$

donde temos que $d(x_i, \hat{x}_i)$ é limitada superiormente e pelo lema 3.2 é limitada na folha, o que contradiz a hipótese.

Portanto podemos pegar uma cota superior $\alpha(\epsilon)$ dos $\{\alpha_i(\epsilon)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Então exceto um segmento de comprimento $\alpha(\epsilon)$ o restante dos raios l_i , s_i estão em uma ϵ -vizinhança um da outra, para qualquer i .

Considere qualquer subsequência s_{i_k} de modo que s_{i_k} converge no raio ν_0 em F_0 ou equivalentemente que as direções de s_{i_k} em z_{i_k} converge à direção ν_0 em z_0 . Para simplificar a notação assuma que é a sequência original s_i . A propriedade acima e o fato de que l_i , s_i convergem a l_0 e ν_0 respectivamente implica a seguinte afirmação

Afirmção 3.2. Salvo um segmento inicial de comprimento $\alpha(\epsilon)$, o restante dos raios l_0 e s_0 estão em uma ϵ -vizinhança um do outro em F_0 .

Precisamente, se w é um ponto de l_0 tal que $d_{F_0}(x_0, w)$ é maior que $\alpha(\epsilon)$, então

$$w = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i \quad \text{com} \quad w_i \in l_i \quad \text{e} \quad d_{F_i}(x_i, w_i) > \alpha(\epsilon),$$

e pelo lema 3.2 temos que $d_{F_i}(x_i, w_i)$ é limitada superiormente. Pela propriedade acima existem u_i em s_i com $d_{F_i}(w_i, u_i)$ menor que ϵ . Agora temos que conseguir um $u \in \nu_0$ tal que $d_{F_0}(w, u)$ seja menor ou igual a ϵ e salvo subsequência podemos supor que os u_i convergem. Como u_i e z_i são sequências convergentes $d(u_i, z_i)$ é limitada superiormente na variedade então pelo lema 3.2 tem-se que a $d_{F_i}(u_i, z_i)$ é limitada superiormente. Por conseguinte o limite dos comprimentos dos segmentos de geodésicas unindo z_i e u_i é limitado assim os u_i convergem a um ponto u em ν_0 . Logo $d_{F_0}(w, u)$ é limitada superiormente por ϵ e reciprocamente. Isto implica que l_0 e ν_0 tem sub-raios que estão em uma ϵ -vizinhança um do outro, segue-se da geometria hiperbólica, que eles são assintóticos em F_0 . Isto significa que ν_0 define o ponto ideal y_0 em $S^1_\infty(F_0)$ portanto os raios ν_0 e s_0 são iguais. Isto equivale a dizer que as direções de s_i convergem à direção de s_0 . Mas este fato só é verdade para uma subsequência da sequência original. Isto prova que qualquer sequência convergente y_i convergindo a y_0 em \mathfrak{T}_μ tem uma subsequência a qual converge a y_0 em \mathfrak{T}_λ como queríamos provar. Assim

provamos que a topologia em \mathcal{A}_μ é bem definida. Agora podemos olhar \mathcal{A} como

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\mu_i}$$

com μ_i intersectando mais e mais o espaço das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$. A topologia definida em \mathcal{A}_{μ_i} a faz homeomorfo no $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{\mu_i}$ que é homeomorfo a $S^1 \times (0, 1)$, assim cada \mathcal{A}_{μ_i} é homeomorfo no cilindro e assim \mathcal{A} é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Similarmente pode-se definir uma topologia só

$$\bigcup_{x \in \mu} (F(x) \cup S_\infty^1(F(x))),$$

que o torna homeomorfo a $D^2 \times (0, 1)$, onde cada folha com seu círculo no infinito corresponde a $D^2 \times \{t\}$. Segue que $\tilde{\mathcal{M}} \cup \mathcal{A}$ é naturalmente homeomorfo a $D^2 \times \mathbb{R}$. \square

Se g é uma translação de recobrimento de $\tilde{\mathcal{M}}$ e L é uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$, então g leva L em $g(L)$ por uma isometria, logo ela manda geodésicas em geodésicas, assim mesmo ela transporta o fibrado tangente unitário a um ponto $x \in L$ em outro fibrado tangente unitário no ponto $g(x) \in g(L)$ que permite estender g a um homeomorfismo g_∞ entre os círculos no infinito. Isto produz uma bijeção de \mathcal{A} em si mesmo. A topologia definida em \mathcal{A} , faz desta extensão um homeomorfismo de \mathcal{A} , que é chamado homeomorfismo de recobrimento. Em certas situações fazemos um abuso da notação e escrevemos g em lugar de g_∞ . Com isto obtemos que $\pi_1(M)$ atua no círculo no infinito.

Claramente $\mathcal{A} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ tem uma folheação por círculos, que são os círculos no infinito das folhas. Isto é o que chamamos de folheação "horizontal" de \mathcal{A} . Naturalmente temos que a folheação horizontal é invariante pela ação de $\pi_1(M)$. Em geral a ação de $\pi_1(M)$ sobre $\mathcal{A} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, não respeita a folheação vertical dada por $\{x\} \times \mathbb{R}$. O principal objetivo do capítulo é produzir uma folheação vertical de \mathcal{A} que é associada à geometria da folheação e que seja invariante pela ação de $\pi_1(M)$.

4 Construção da folheação vertical-caso uniforme

Proposição 3.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação \mathbb{R} -coberta uniforme com folhas hiperbólicas. Então quaisquer duas folhas E, F de $\tilde{\mathcal{F}}$ são quasi-isométricas.*

Demonstração. Com efeito, fixamos E, F em $\tilde{\mathcal{F}}$ e $b_1 > 0$ de modo que a distância hausdorff entre E e F seja menor que b_1 . Definamos uma aplicação $\varphi : E \rightarrow F$:

$$\varphi(x) = y \quad \text{para algum } y \text{ em } F \text{ com } d(x, y) < b_1$$

A aplicação φ não está bem definida, mas está *amplamente definida*; pelo lema 3.2 existe b_2 de modo que se $x \in E$ e y, z em F com

$$d(x, y) < b_1, \quad d(x, z) < b_1, \quad \text{então } d_F(y, z) < b_2 = f(2b_1)$$

Conclui-se que φ está bem definida módulo um conjunto de diâmetro b_2 em F . Este é o significado *amplamente definida*. Agora queremos mostrar que φ é uma quasi-isometria de E em F .

Para quaisquer $x, y \in E$ escolhemos um arco geodésico mínimo γ de x a y em E tendo comprimento a_1 e seja n o inteiro $\lfloor a_1 \rfloor$ onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função máximo inteiro. Então $d_E(x, y)$ é um número no intervalo $[n, n+1)$. Divida γ por pontos $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n+1} = y$, com $d_E(x_{i-1}, x_i)$ igual a 1 para qualquer i menor que n e $d_E(x_n, x_{n+1})$ menor que 1. Então

$$\begin{aligned} d(\varphi(x_{i-1}), \varphi(x_i)) &\leq d(\varphi(x_{i-1}), x_{i-1}) + d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, \varphi(x_{i-1})) \\ &\leq b_1 + 1 + b_1 = (2b_1 + 1). \end{aligned}$$

Seja $b_3 = f(2b_1 + 1)$ assim se w, z estão na folha F e $d(w, z)$ é menor que $2b_1 + 1$ então $d_{F(z)}(z, w)$ é menor que b_3 . Segue que

$$\begin{aligned} d_F(\varphi(x), \varphi(y)) &\leq \sum_{i=1}^{n+1} d_F(\varphi(x_i), \varphi(x_{i-1})) \\ &\leq (n+1)b_3 \\ &< (d_E(x, y) + 1)b_3 = d_E(x, y)b_3 + b_3 \end{aligned}$$

Isto mostra um lado da desigualdade requerida para a quasi-isometria. Do mesmo jeito existe uma aplicação ξ de F em E com $d(w, \xi(w))$ menor que b_1 para todo w em F . Assim,

$$d(w, \varphi\xi(w)) \leq d(w, \xi(w)) + d(\xi(w), \varphi\xi(w)) \leq 2b_1$$

e portanto

$$d_F(w, \varphi\xi(w)) \leq b_2 = f(2b_1)$$

para todo $w \in F$. De forma similar pode-se mostrar que $d_E(x, \xi\varphi(x))$ é menor que b_4 para todo x em E . Dado x, y em E , seja $z = \varphi(x)$ e $w = \varphi(y)$. Os argumentos acima implicam que

$$d_E(\xi(z), \xi(w)) \leq b_3 d_F(z, w) + b_3.$$

Também

$$\begin{aligned} d_E(x, y) &\leq d_E(x, \xi\varphi(x)) + d_E(\xi\varphi(x), \xi\varphi(y)) + d_E(\xi\varphi(y), y) \\ &\leq 2b_2 + b_3 d_F(\varphi(x), \varphi(y)) + b_3, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{b_3} d_E(x, y) - \left(\frac{2b_2}{b_3} + 1 \right) \leq d_F(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Pela observação 3.3 temos que $b_2 = f(2b_1) \leq f(2b_1 + 1) = b_3$ assim

$$\frac{2b_2}{b_3} + 1 \leq 3$$

logo pegamos $k = \max\{3, b_3\}$, assim φ é uma k -quasi-isométrica. \square

Teorema 3.2. (*folheação vertical-caso uniforme*) *Seja \mathcal{F} uma folheação \mathbb{R} -coberta, uniforme com folhas hiperbólicas. Então dado quaisquer duas folhas E, F de $\tilde{\mathcal{F}}$, existe um homeomorfismo canônico entre $S_\infty^1(E)$ e $S_\infty^1(F)$. Isto nos dá um círculo universal que é naturalmente homeomorfo a qualquer círculo no infinito. Existe uma folheação vertical em \mathcal{A} que é transversal à folheação horizontal e é invariante pela ação de $\pi_1(M)$.*

Demonstração. Existe uma breve demonstração deste resultado em [Th3]. Pela proposição anterior temos que para quaisquer duas folhas E, F em $\tilde{\mathcal{F}}$ existe uma k -quasi-isometria $\varphi_E^F: E \rightarrow F$ e tem-se mostrado que ela se estende a um homeomorfismo $\phi_E^F: S_\infty^1(E) \rightarrow S_\infty^1(F)$.

Agora produzimos uma folheação vertical em \mathcal{A} . Fixemos E em $\tilde{\mathcal{F}}$. Para qualquer y em $S_\infty^1(E)$ e qualquer F em $\tilde{\mathcal{F}}$, então $\phi_E^F(y)$ é um ponto em $S_\infty^1(F)$. Seja

$$\alpha_y = \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \phi_E^F(y).$$

Pelo que vimos acima α_y intersecta qualquer círculo $S_\infty^1(F)$ em um só ponto. Agora mostremos que α_y é uma curva contínua em \mathcal{A} . Seja μ uma transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ e x_i uma sequência em μ convergindo a x_0 . Seja $F_i = F(x_i)$ para todo $i \geq 0$. Buscaremos mostrar que $y_i = \phi_E^{F_i}(y)$ produz uma sequência

convergindo a $y_0 = \phi_E^{F_0}(y)$ e isso bastará para mostrar que α_y é contínua. Considere l_i o raio geodésico em F_i iniciando em x_i e com ponto ideal y_i . Por simplicidade assumimos que todos os F_i , com i maior que 1 estão no intervalo (F_0, F_1) . Tal F_i separa F_0 de F_1 em $\widetilde{\mathcal{M}}$. A distância de hausdorff é monótona crescente: se $[F, G]$ é um subconjunto de $[L, H]$ em \mathcal{H} , então $d_H(F, G)$ é menor ou igual que $d_H(L, H)$. Portanto

$$d_H(F_0, F_i) \text{ é limitado superiormente por } d_H(F_0, F_1)$$

para todo $i \geq 0$. Agora, para cada i temos que $\phi_{F_0}^{F_i}$ é uma k_i -quasi-isometria; lembrando a demonstração da proposição anterior, a constante k_i só dependia da distância de Hausdorff e além disso pela observação 3.3 tem-se que $k_i \leq k_1$, assim todas as $\phi_{F_0}^{F_i}$ são quasi-isometrias uniformes: elas são todas k -quasi-isometrias para um k fixo. As imagens $\phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ são quasi-geodésicas em F_i com ponto ideal y_i .

Afirmção 3.3. As imagens $\phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ estão a uma distância uniformemente limitada de l_i em F_i .

Note primeiramente que pelo lema 2.7 existe uma geodésica α_i partindo de $z_i = \phi_{F_0}^{F_i}(x_0)$ e com ponto ideal y_i e uma função $\tau(k)$ tal que

$$d_H(\phi_{F_0}^{F_i}(l_0), \alpha_i) < \tau(k) + 1 \quad (1)$$

por outro lado temos que, x_i converge a x_0 , assim a $d(x_i, x_0)$ é limitada superiormente e portanto

$$\begin{aligned} d(x_i, z_i) &\leq d(x_i, x_0) + d(x_0, z_i) \\ &= d(x_i, x_0) + d(x_0, \phi_{F_0}^{F_i}(x_0)) \\ &\leq d(x_i, x_0) + d_H(F_0, F_1), \end{aligned}$$

o que implica, pelo lema 3.2 que $d_{F_i}(x_i, z_i)$ é limitada superiormente por k' , para qualquer $i \geq 1$. Este fato implica que os l_i estão a uma distância uniforme de $\phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ em F_i , isto é $d_H(\phi_{F_0}^{F_i}(l_0), l_i)$ é uniformemente limitada. Com efeito, pegamos um $w \in l_i$, o nosso objetivo é encontrar um $q_0 \in \phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ que esteja a uma distância limitada (não dependente de i) de w . Seja, $\text{proj}_{\alpha_i}: F_i \rightarrow \alpha_i$, denota a função projeção no ponto mais próximo de α_i , então temos que

$$d_{F_i}(w, \text{proj}_{\alpha_i}(w)) \leq d_{F_i}(x_i, z_i)$$

Agora como $\text{proj}_{\alpha_i}(w) \in \alpha_i$ então por (1), existe um $q \in l_0$, tal que $d(\phi_{F_0}^{F_i}(q), \text{proj}_{\alpha_i}(w)) \leq \tau(k) + 1$, logo pelo lema 3.2 temos que

$$d_{F_i}(\phi_{F_0}^{F_i}(q), \text{proj}_{l_i}(w)) \leq f(\tau(k) + 1)$$

portanto

$$\begin{aligned} d_{F_i}(w, \varphi_{F_0}^{F_i}(q)) &\leq d_{F_i}(w, \text{proj}_{l_i}(w)) + d_{F_i}(\text{proj}_{l_i}(w), \varphi_{F_0}^{F_i}(q)) \\ &\leq f(\tau(k) + 1) + d_{F_i}(x_i, z_i) \\ &\leq f(\tau(k) + 1) + k' = b_1. \end{aligned}$$

Agora se pegamos $w' \in \varphi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ a prova de que existe um $\hat{w} \in l_i$ tal que $d_{F_i}(w', \hat{w})$ é limitada superiormente e esta cota não depende de i , é a mesma. Assim, temos provada a afirmação.

Queremos mostrar que a menos de passo a uma subsequência que a sequência l_i converge a l_0 . Suponha que não, isto é $l_i \rightarrow v_0 \neq l_0$.

Afirmção 3.4. $d_H(l_i, l_0)$ é limitado superiormente por α_0 para alguma constante globalmente definida α_0 .

Com efeito, temos que a distância de Hausdorff é calculada em $\widetilde{\mathcal{M}}$. Agora pegamos um $w \in l_i$. Pela afirmação 3.3 temos que existe um $w_1 \in \varphi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ tal que $d(w, w_1) < d_{F_i}(w, w_1) < b_1$, como w_1 pertencem a $\varphi_{F_0}^{F_i}(l_0)$ existe um $w_2 \in l_0$ tal que $\varphi_{F_0}^{F_i}(w_2) = w_1$ assim temos que

$$\begin{aligned} d(w, w_2) &\leq d(w, \varphi_{F_0}^{F_i}(w_2)) + d(\varphi_{F_0}^{F_i}(w_2), w_2) \\ &\leq d(w, w_1) + d_H(F_0, F_1) \\ &\leq b_1 + d_H(F_0, F_1) = \alpha_0. \end{aligned}$$

Note que esta desigualdade não depende de i , o outro sentido da definição (distância de Hausdorff) também é verdade assim temos a prova da afirmação. Assim, temos que $d_H(v_0, l_0)$ é limitada superiormente por α_0 e pelo lema 3.2 temos que $d_{F_0}(v_0, l_0)$ é limitada, contradizendo o fato de que, ao serem distintas com o mesmo ponto inicial, elas divergem exponencialmente em F_0 . Portanto l_i converge a l_0 .

Assim, α_y é uma curva contínua em \mathcal{A} . Considere a coleção de $\{\alpha_y\}$ donde y é qualquer em $S_\infty^1(E)$. Para qualquer ponto z de \mathcal{A} , z está em $S_\infty^1(F)$ para algum F de $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $z = \phi_E^F(y)$ para um único y em $S_\infty^1(E)$. Equivalentemente

$$z = \alpha_y \cap S_\infty^1(F(z)) \quad \text{e assim} \quad \mathcal{A} = \bigcup_{y \in S_\infty^1(E)} \alpha_y.$$

Além disso, o conjunto $\{\alpha_y\}$ com y em $S_\infty^1(E)$ são disjuntos para distintos y . Desde que elas são curvas contínuas elas produzem uma trivialização de $\mathcal{A} \cong S^1 \times \mathbb{R}$. Desde que as translações de recobrimento preservam distâncias e relações entre distâncias isto implica que está folheação de \mathcal{A} é invariante por translações de recobrimento, produzindo uma folheação vertical em \mathcal{A} . \square

Direções de Contração

Definição 4.1. Seja x um ponto da folha L de $\tilde{\mathcal{F}}$ e seja $\{\gamma(t), t \in [0, +\infty)\}$ um raio geodésico em L começando no ponto x e com vetor tangente v em x . Seja p em $S_\infty^1(L)$ o ponto ideal de γ . Então γ (ou v) é uma *direção de contração* se acontece o seguinte: existe uma transversal μ a $\tilde{\mathcal{F}}$ contendo x (pode ser como um ponto final ou como um ponto interior) de modo que qualquer folha E de $\tilde{\mathcal{F}}$ que intersecta μ a distância $d(E, \gamma(t))$ converge a 0 quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras a holonomia no longo de γ (ou na direção de v) contrai uma vizinhança de folhas perto de L . Similarmente pode-se definir direção de contração em \mathcal{F} .

Observação 4.1. A direção de contração é uma propriedade do ponto p em $S_\infty^1(L)$ e é independente do ponto inicial e do raio geodésico definindo em p . Isto acontece pois todo tais raios são assintóticos, assim um pacote de folhas é contraído ao mesmo tempo independente do ponto inicial ou raio.

Lema 4.1. *Seja x em L com uma direção de contração dada por um raio geodésico $\{\gamma(t)\}$ e μ a transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ contraída na direção de γ . Para qualquer E de $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectando μ , a direção de contração γ define um ponto ideal $\zeta(E)$ de E e qualquer raio geodésico de E com ponto ideal $\zeta(E)$ é contraída a L . Em adição para qualquer F em $\tilde{\mathcal{F}}$ existe no máximo uma direção em F que contrai-se na direção de γ .*

Demonstração. Fixemos um campo de linhas em \mathcal{F} e levantemos a $\tilde{\mathcal{F}}$. Seja E em $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectando μ . Para qualquer positivo α_0 existe um positivo t_0 de modo que $d(\gamma(t), E)$ é menor de que α_0 para t muito maior que t_0 . Se α_0 é pequeno, o transladado de $\gamma(t)$ para t muito maior que t_0 para E no longo da folheação transversal é definido para todo tempo (pois elas estão

muito perto) e é uma curva com curvatura geodésica muito pequena em E . Assim, o transladado é uma quasi-geodésica em E [Th3] e então ela define um ponto ideal em $S_\infty^1(E)$ que é denotado por $\zeta(E)$. Também para α_0 cada vez menor os transladados tem curvatura geodésica cada vez menor e assim ela se aproxima mais de mais de uma geodésica. Assim o raio geodésico em E com ponto ideal $\zeta(E)$ é assintótico com o raio inicial γ em L .

Finalmente suponha se existe F em $\tilde{\mathcal{F}}$ com duas direções contraindo-se para γ , então existem raios geodésicos r_1, r_2 em F que são assintóticos a γ . Portanto eles são assintóticos um ao outro. Mas como \mathcal{F} é sem componente de Reeb, não existe uma transversal fechada em $\tilde{\mathcal{F}}$. Isto implica que quando r_1 e r_2 são próximas em $\tilde{\mathcal{M}}$ eles tem que estar na mesma carta local de $\tilde{\mathcal{F}}$. Isto implica que r_1, r_2 são assintóticas em F . Portanto elas definem a mesma direção em F . \square

Direções de contração em $\tilde{\mathcal{F}}$ definem marcadores no cilindro no infinito:

Definição 4.2. Seja L em $\tilde{\mathcal{F}}$ com uma direção de contração dada pelo raio geodésico γ que contrai um segmento transversal μ . Para qualquer E intersectando μ seja $\zeta(E)$ o único ponto ideal definido no lema prévio. O conjunto de $\{\zeta(E)\}$ com E intersectando μ é um subconjunto de \mathcal{A} que define um *marcador* em \mathcal{A} associado ao par (γ, μ) . Para qualquer E intersectando μ dizemos que existe um marcador entre $S_\infty^1(L)$ e $S_\infty^1(E)$ ou equivalentemente uma direção de contração entre L e E . Algumas vezes abusamos da notação e dizemos que isto produz um marcador entre L e E . Denotamos por ζ marcador.

Observação 4.2. Se \mathcal{F} não é uma folheação \mathbb{R} -coberta com folhas hiperbólicas não existe um cilindro global no infinito. Entretanto a união dos círculos no infinito associados a uma transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ ainda é um cilindro e pode-se definir marcadores associados à intervalos de folhas no espaço das folhas.

Agora damos algumas propriedades necessárias dos marcadores. Se ζ é um marcador e E um folha em $\tilde{\mathcal{F}}$, seja $\zeta(E)$ a intersecção de ζ e $S_\infty^1(E)$ que é no máximo um ponto.

Lema 4.2. Se α, β são marcadores em \mathcal{A} que se intersectam, então a intersecção não é transversal. Isto é: Para qualquer E em $\tilde{\mathcal{F}}$ com $\alpha(E), \beta(E)$ não vazio, então $\alpha(E) = \beta(E)$.

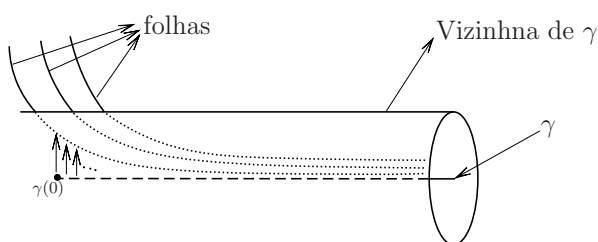
Demonstração. Sejam α, β marcadores que se intersectam em um ponto p e seja E em $\tilde{\mathcal{F}}$ com $\alpha(E), \beta(E)$ ambos não vazios. Existe L em $\tilde{\mathcal{F}}$ com p igual

a $\alpha(L)$ e $\beta(L)$. Seja r um raio geodésico em L com ponto ideal p . Sejam r_1, r_2 raios geodésicos em E com ponto ideal $\alpha(E), \beta(E)$ respectivamente.

Como $p, \alpha(E)$ estão em α então r e r_1 são assintóticos (em $\widetilde{\mathcal{M}}$). Similarmemente r e r_2 são assintóticos, assim r_1 e r_2 são assintóticos. Pelo lema 4.1 isto implica que r_1 e r_2 são assintóticos em E . Em outras palavras $\alpha(E), \beta(E)$ são iguais. \square

Lema 4.3. *Os marcadores são curvas contínuas em \mathcal{A} .*

Demonstração. Considere uma direção de contração em uma folha F de $\widetilde{\mathcal{F}}$ definida por um raio geodésico $\gamma = \{\gamma(t), t \text{ em } [0, \infty)\}$ e ponto ideal p em $S_\infty^1(F)$. Existe um pacote de folhas próximas a F que se contrai para F na direção de γ . Para qualquer positivo ϵ o pacote todo está ϵ próximo de $\gamma(t)$ para qualquer t maior que t_0 para algum $t_0 > 0$, dependendo só de ϵ . Desde que o restante é um segmento inicial compacto $\gamma([0, t_0])$, se o pacote é reduzido, o raio todo está ϵ próximo de qualquer folha no pacote.



Assim pode-se mover a curva toda γ em folhas próximas usando a folheação transversal. Estas curvas tem curvatura geodésica arbitrariamente pequena, a qual converge a 0 quando ϵ vai para 0. Assim a curva fica mais e mais proxima de uma verdadeira geodésica e seus pontos ideais estão mais e mais determinados pelas direções iniciais. Mas as direções iniciais do segmento inicial convergem à direção de γ em $\gamma(0)$ e de modo que os pontos ideais das curvas levantadas nas folhas próximas convergem ao ponto ideal p e como p é arbitrário isto completa a prova.

A prova mostra que os marcadores definidos por um arco transversal é uma imagem homeomorfa de μ em \mathcal{A} que é transversal à folheação horizontal em \mathcal{A} . \square

Folheação Não-Uniforme

1 Introdução

Agora consideraremos o caso das folheações \mathbb{R} -cobertas não-uniformes. Temos um resultado, que no caso de folheações \mathbb{R} -cobertas, a existência de uma folha compacta implica que a folheação é uniforme:

Lema 5.1. *(folha compacta) Se \mathcal{F} é uma \mathbb{R} -coberta folheação em M^3 , fechada e não finitamente recoberta por $S^2 \times S^1$, então \mathcal{F} é taut. Ademais se \mathcal{F} tem uma folha compacta R , então \mathcal{F} é uniforme.*

A hipótese de M^3 não ser finitamente recoberta por $S^2 \times S^1$ é necessário: cole duas componentes de Reeb pelo bordo de maneira a obter $S^2 \times S^1$ com uma folheação \mathbb{R} -coberta mais não taut. Quando não existem folhas compactas pode-se reduzir ao caso minimal:

Proposição 5.1. *(caso minimal) Suponha que \mathcal{F} é \mathbb{R} -coberta, não tem folha compacta e não é minimal. Então pode-se colapsar \mathcal{F} a uma folheação minimal: Existe uma folheação \mathcal{F}' que é minimal o qual é obtida de \mathcal{F} colapsando de no máximo uma quantidade enumerável de I-bundles de \mathcal{F} a simples folha.*

Uma prova destes fatos pode ser encontrada em [Fe]. Uma vez mais, o nosso objetivo é produzir uma folheação vertical em \mathcal{A} . O lema 5.1 mostra que \mathcal{F} não tem folha compacta e pela proposição 5.1 pode-se supor que \mathcal{F} é minimal. Assim:

As hipóteses para o resto da seção. \mathcal{F} é uma folheação minimal, \mathbb{R} -coberta, não-uniforme com folhas hiperbólicas.

As primeiras consequências das hipóteses são os seguintes lemas:

Lema 5.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação minimal de codimensão um e classe C^r ($r \geq 2$) de uma variedade de dimensão 3. Para qualquer $\lambda \in \widetilde{\mathcal{F}}$ o conjunto $\{\alpha(\lambda) / \alpha \in \pi_1(\mathcal{M})\}$ é denso em \mathcal{H} .*

Demonstração. Seja $U \subset \mathcal{H}$ uma aberto, então existem folhas $E, F \in \widetilde{\mathcal{F}}$ tal que $(E, F) \subseteq U$ e pegamos $z \in \widetilde{\mathcal{M}}$ entre de E e F então existem vizinhanças folheadas U, V de z e $\pi(z)$ respectivamente tal que $\pi|_U: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Agora reduzindo a vizinhanças pode-se supor que U está entre E e F , logo desde que \mathcal{F} é minimal temos que $\pi(\lambda) \cap V \neq \emptyset$, assim no recobrimento universal temos que existe $g \in \pi_1(\mathcal{M})$ tal que $g(\lambda) \cap U \neq \emptyset$, portanto temos que $g(\lambda) \in U$ o que mostra o lema. \square

Definição 5.1. Dado um espaço métrico (X, d) , e um subconjunto Y de X , dizemos que Y é ϵ -net para X , se para qualquer $x \in X$ existe um $y \in Y$ tal que $d(x, y) < \epsilon$.

Lema 5.3. *Se \mathcal{F} é uma folheação taut de \mathcal{M} tal que qualquer folha é densa, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $R > 0$ tal que para qualquer $p \in \mathcal{M}$ e folha λ contendo p , o disco de raio R em λ com centro em p é ϵ -net para \mathcal{M} .*

Demonstração. O fato de que qualquer folha de \mathcal{F} é densa implica que um tal $R(p)$ existe para qualquer $p \in \mathcal{M}$. Seja $\epsilon > 0$ e $R_1 = \max\{R(p), f(3\epsilon + R(p))\}$ donde f é definida como no lema 3.2. Considere a bola B com centro em p e raio ϵ em \mathcal{M}

Afirmção 5.1. Para qualquer $q \in B$ a bola com centro em q e raio R_1 em $F(q)$ é ϵ -net para \mathcal{M} .

Com efeito, pegamos um $q \in B$ e um $x \in \mathcal{M}$ quaisquer, então existe z na bola centrada em p e raio $R(p)$, na folha $F(p)$ tal que

$$d(z, x) < \epsilon \quad \text{e} \quad d(z, p) \leq d_{F(p)}(z, p) \leq R(p).$$

Agora existe z' em $F(q)$ tal que $d(z', x) < \epsilon$ logo

$$\begin{aligned} d(z', q) &\leq d(z', x) + d(x, z) + d(z, p) + d(p, q) \\ &< 3\epsilon + R(p). \end{aligned}$$

Assim, pelo lema 3.2 temos que

$$d_{F(q)}(z', q) < f(3\epsilon + R(p))$$

o que conclui a afirmação. Agora como a variedade é compacta pode-se encontrar um R suficientemente grande tal que a propriedade se verifica para qualquer $p \in \mathcal{M}$. \square

Observação 5.1. Com as hipóteses acima, pode-se mostrar do mesmo jeito o seguinte fato, dada uma transversal μ em \mathcal{M} , existe um R tal que para qualquer ponto $p \in \mathcal{M}$ e folha λ contendo p , o disco de raio R em λ com centro em p contém pontos na transversal, que estão a uma distância menor que ϵ do ponto médio da transversal.

2 Propriedades das folheações não-uniformes

Fixemos uma orientação em \mathcal{H} .

Lema 5.4. *Qualquer duas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ não estão a uma distância limitada uma da outra.*

Demonstração. Suponha que existem folhas E, F de $\tilde{\mathcal{F}}$ que estão a uma distância limitada uma da outra. Seja \mathcal{J} é o intervalo $[E, F]$ de \mathcal{H} e considere a união de \mathcal{J} com todos seus transladados pelas translações de recobrimento. Pegamos a componente \mathcal{C} contendo \mathcal{J} . Suponhamos primeiro que \mathcal{C} é um intervalo limitado em \mathcal{H} . Então o transladado de \mathcal{C} é ou \mathcal{C} mesmo ou disjuncto de \mathcal{C} . Segue-se que o fecho $\hat{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} em \mathcal{H} é invariante. Mais então as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ correspondentes aos transladado de $\partial\mathcal{C}$ projetam-se num conjunto fechado não trivial de \mathcal{F} em \mathcal{M} . Isto não é possível pelas hipóteses. Se \mathcal{C} não é limitada inferiormente em \mathcal{H} , ele tem que ser invariante pela ação de $\pi_1(\mathcal{M})$ e assim ele também não é, digamos limitado superiormente, logo \mathcal{C} é igual a \mathcal{H} , mas como a distância de Hausdorff é monótona crescente, isto implica que quaisquer duas folhas estão a uma distância limitada uma da outra, ou seja que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uniforme contradizendo o suposto. Isto termina a prova. \square

Proposição 5.2. *(Compressão do recobrimento universal e direções de contração) Dadas folhas arbitrárias distintas E, F de $\tilde{\mathcal{F}}$ e B um conjunto limitado, existe uma translação de recobrimento de B contida entre E e F . Como consequência existe pelo menos uma direção de contração em E e F .*

Demonstração. Por hipótese $d_H(E, F)$ é infinito. Pode-se assumir sem perda de generalidade que \mathcal{F} é transversalmente orientável, F está na frente de E e escolhamos

$$p_i \in E \quad \text{com } d(p_i, F) \text{ convergindo no infinito.}$$

Seja B um conjunto limitado em $\tilde{\mathcal{M}}$. Procuramos um transladado $h(B)$ de B de modo que $h(B)$ esteja na frente de E e atrás de F , isto é entre E e F . Escolhamos translações de recobrimento g_i , com $g_i(p_i)$ convergindo a p_0 ,

isto é possível pela observação 3.2, e assim $g_i(E)$ convergindo a E_0 contendo p_0 . Seja L folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ muito próxima de E_0 .

Afirmamos que pode-se encontrar uma translação de recobrimento $h(B)$ contida na frente de L . Com efeito, suponha que todo translado de B intersecta L , isto implica que todo translado de L intersecta B o que contradiz o lema 5.2. Agora, se algum translado $h(B)$ está atrás de L , então como B é limitado sua projeção em H é limitada assim pelo lema 3.3 temos que existe um translado $\beta(L)$, tal que $h(B)$ está na frente de $\beta(L)$, assim $\beta^{-1}(h(B))$ está no frente de L , o que prova a afirmação.

Como os $g_i(E)$ convergem a E_0 , então para i suficientemente grande, L está na frente de $g_i(E)$ e assim também $h(B)$. Então

$$d(g_i(p_i), g_i(F)) \rightarrow \infty, \quad \text{mas } d(g_i(p_i), h(B)) \text{ é limitada.}$$

Segue que $g_i(F)$ não intersecta $h(B)$ e não separa $h(B)$ de $g_i(E)$ para i suficientemente grande. Desde que \mathcal{F} é \mathbb{R} -coberta isto implica que $h(B)$ está no frente de $g_i(E)$ e atrás de $g_i(F)$, isto é entre $g_i(F)$ e $g_i(E)$. Assim, $g_i^{-1}h(B)$ está entre E e F . Isto mostra a primeira parte da proposição, a compressão do recobrimento universal. Pegamos B intersectando E , F e escolhemos $g(B)$

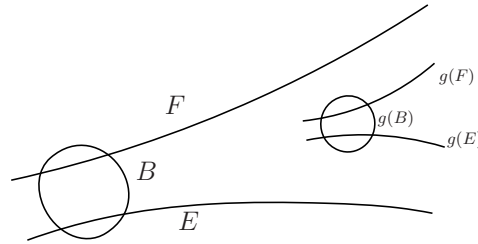


Figura 5.1: Contração no recobrimento universal.

entre E e F , como no desenho. Isto implica que $g(E)$, $g(F)$ estão entre E e F e assim

$$g([E, F]) \subset (E, F)$$

observe que $g: [E, F] \rightarrow [E, F]$ é um homeomorfismo que é uma contração assim existe um F_0 em (E, F) ponto fixo de g , isto é $g(F_0)$ é igual a F_0 e também $g^i(F)$ convergindo a F_0 quando i converge no infinito. Assim existe uma geodésica γ em F_0 com $g(\gamma) = \gamma$ que tem holonomia contrátil em um lado, isto é g contrai o intervalo $[F_0, F]$ a F_0 , quando i converge no infinito. Agora pegamos duas folhas U, V de $\tilde{\mathcal{F}}$ e um conjunto D limitado que

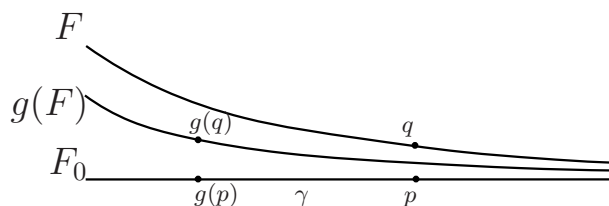


Figura 5.2: Produz uma direção de contração na folha.

intersecta as folhas U, V, F e F_0 logo pelo feito acima existe um $\alpha \in \pi_1(M)$ tal que $\alpha(D)$ está entre F e F_0 , assim α aplicará o intervalo $[U, V]$ de \mathcal{H} no interior de $[F_0, F]$. Desde que F_0 tem uma direção de contração isto produz uma direção de contração entre quaisquer duas folhas em $[F_0, F]$. Voltando pelo transladado inverso, isto produz uma direção de contração entre U e V . Isto termina a prova da proposição. \square

Lema 5.5. *Existe pelo menos duas direções de contração entre quaisquer duas folhas $E, F \in \tilde{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Suponha que existam folhas E_0, F_0 em $\tilde{\mathcal{F}}$ com só uma direção de contração entre elas. Para quaisquer E, F em $\tilde{\mathcal{F}}$ pela proposição anterior, pode-se aplicar $[E_0, F_0]$ no interior de $[E, F]$, assim só existe uma direção de contração entre $[E, F]$. Escolhamos E_i, F_i de $\tilde{\mathcal{F}}$ com E_i, F_i escapando para os infinitos opostos de \mathcal{H} e os pacote $[E_i, F_i]$ crescente. Segue-se que existe uma curva vertical α em \mathcal{A} que contém todos os marcadores. Para qualquer folha F seja α_F a intersecção de α e F . Lembrando que as translações de recobrimento preservam os marcadores, então α é invariante pela ação de $\pi_1(M)$, isto é as translações de recobrimento enviam α em si mesmo.

Dado uma translação de recobrimento g que não age livremente em \mathcal{H} , isto é existe uma folha F com $g(F) = F$, então existe uma geodésica axial l em F invariante por g . Como $g(\alpha_F) = \alpha_F$, então α_F é um ponto fixo de g e portanto um dos pontos ideais de l . Seja agora f qualquer outra translação de recobrimento, com $f(F)$ distinto de F . Então

$$(fgf^{-1})(f(F)) = f(F) \quad \text{e} \quad (fgf^{-1})(f(l)) = f(l)$$

assim $f(l)$ tem ponto ideal $\alpha_{f(F)}$. Isto implica que l e $f(l)$ são assintóticas em $\tilde{\mathcal{M}}$, agora como $g(l) = l$ então ela projeta-se em uma curva fechada em \mathcal{M} e assim existe uma distância mínima entre l e $f(l)$, que é uma contradição com

o fato que elas são assintóticas. Assim conclui-se que existem pelo menos duas marcadores entre quaisquer duas folhas. \square

Proposição 5.3. *Dado F em $\tilde{\mathcal{F}}$, Y um conjunto aberto em $S_\infty^1(F)$, e A qualquer componente conexa de $\mathcal{A} - S_\infty^1(F)$, existe um marcador com um ponto final em Y e contido no fecho de A .*

Demonstração. Isto mostra que existem marcadores em ambos os lados de Y em \mathcal{A} . Suponha que o resultado não é verdade. Sejam

- F uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$, Y um subconjunto em $S_\infty^1(F)$;
- A uma componente de $\mathcal{A} - S_\infty^1(F)$, de modo que não existe um marcador em \mathcal{A} com ponto final em Y e contida no fecho de A .

Escolhemos pontos p_i em F convergindo a p em Y . Fixamos uma pequena transversal μ a $\tilde{\mathcal{F}}$, sejam E, L folhas passando pelos pontos finais de μ . Desde que \mathcal{F} é minimal e pela observação 5.1, existe uma constante positiva α_0 de modo que qualquer ponto em uma folha de \mathcal{F} está α_0 -próximo (nesta folha) de um outro ponto muito próximo do centro de $\pi(\mu)$. Agora levantado a $\tilde{\mathcal{M}}$, existem q_i em F com $d_F(p_i, q_i)$ menor que α_0 e transformações de recobrimento g_i tais que $g_i(q_i) \in \mu$ e que estão próximos do centro de μ . Agora salvo passar a uma subsequência,

$$g_i(q_i) \text{ converge a } q_0 \in \mu, \quad q_0 \in F_0 \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

Note que em $F \cup S_\infty^1(F)$, os q_i também convergem a $p \in Y$, assim a medida visual de Y (em $S_\infty^1(F)$) medida desde q_i é θ_i , com θ_i convergindo a 2π . Portanto, a medida visual de $g_i(Y)$ medida desde $g_i(q_i)$ em $S_\infty^1(g_i(F))$ é θ_i também, isto pois a restrição de g_i à folha F , é uma isometria e portanto ela é conforme.

Pelo lema 5.5 existem pelo menos duas marcadores

$$\zeta_1, \zeta_2 \text{ de } S_\infty^1(E) \text{ a } S_\infty^1(L).$$

Use a parametrização dos círculos no infinito entre E e L dada por $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_\mu$. Os marcadores ζ_1, ζ_2 intersectam $S_\infty^1(F_0)$ em ângulos δ_1 e δ_2 medidos por esta identificação.

Desde que os marcadores são curvas disjuntas e contínuas, existe uma constante positiva α_1 de modo que qualquer G em $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectando μ os marcadores ζ_1, ζ_2 definem direções em G que estão separados de pelo menos um ângulo α_1 , como medidas em $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{(G \cap \mu)}$. Mas $g_i(F)$ converge a F_0

quando i converge no infinito e os marcadores em um lado de $S_\infty^1(g_i(F))$ estão obrigados (por hipóteses) a ter um ponto final em $S_\infty^1(g_i(F)) - g_i(Y)$. Este conjunto tem medida visual menor que $2\pi - \theta_i$ que converge a zero com i . Assim,

$$0 < \alpha_1 \leq 2\pi - \theta_i$$

quando i converge no infinito, isto nos dá uma contradição. Isto mostra a densidade local dos marcadores. \square

Os marcadores são introduzidos por Thurston em [Th7]: Ele mostrou que os marcadores são (localmente) densos em \mathcal{A} (Também no caso não- \mathbb{R} -coberta). Vamos mostrar um fato mais forte em nosso meio: Existe um conjunto denso de direções de contração entre *quaisquer duas folhas* de $\tilde{\mathcal{F}}$. Os marcadores serão o esqueleto da folheação vertical em \mathcal{A} . É fundamental para toda a análise que os marcadores sejam curvas contínuas em \mathcal{A} .

Lema 5.6. *Seja L uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ e Z um subconjunto fechado de $S_\infty^1(L)$. Para qualquer vizinhança aberta N de Z em \mathcal{A} , existem vizinhanças V de L em \mathcal{H} definidos por uma transversal μ a $\tilde{\mathcal{F}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}_\mu = V$) e W de Z em \mathcal{A} , de modo que qualquer marcador ζ que intersecta W então sua interseção com \mathcal{A}_μ está contida em N .*

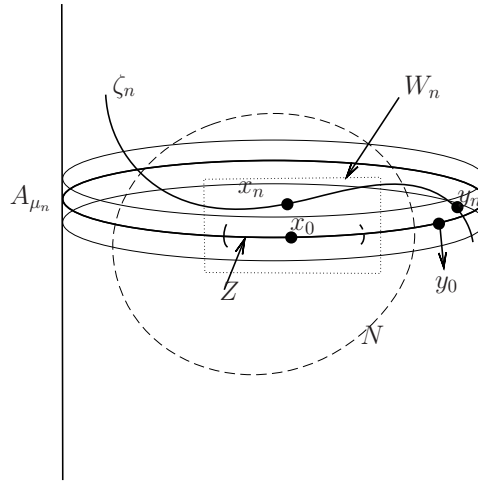
Demonstração. Se o lema não é verdade, existe

1. Uma folha L em \mathcal{F} ;
2. um subconjunto fechado Z de $S_\infty^1(L)$, e
3. uma vizinhança aberta N de Z em \mathcal{A} satisfazendo : existem vizinhanças decrescentes V_i de L em \mathcal{H} (isto é $\bigcap V_i = L$) definidas por transversais μ_i ($\tilde{\mathcal{F}}_{\mu_i} = V_i$), existem vizinhanças abertas decrescentes W_i de Z em \mathcal{A} (isto é $\bigcap W_i = Z$) e marcadores ζ_i com

$$\zeta_i \cap W_i \neq \emptyset \quad \text{mas} \quad \zeta_i \cap \mathcal{A}_{\mu_i} \not\subseteq N.$$

Observe que ao supor o lema falso, 1, 2, e 3 nos diz que pode acontecer de uma sequência de marcadores ζ_i 's se aproximarem de arcos horizontais. Assim, o que lema mostra é exatamente que tal situação não acontece. Escolhamos pontos x_i na interseção de W_i e ζ_i . Como os W_i decrescem a Z pode-se supor, salvo passara uma subsequência, que os x_i convergem a x_0 em Z . Existem

$$y_i \in \zeta_i \quad \text{com} \quad y_i \in \mathcal{A}_{\mu_i} \quad \text{mas eles não pertencem a } N.$$



Desde que os \mathcal{A}_{μ_i} decrescem a $S^1_\infty(L)$, pode-se escolher uma outra subseqüência de modo que y_i converge a y_0 , um ponto em $S^1_\infty(L)$. Mais y_i não está em N , isto pois N é um conjunto aberto, assim y_0 não está em Z assim x_0 e y_0 são distintos. Por simplicidade assumamos que y_i são pontos em $S^1_\infty(F_i)$, com F_i acima de L e só consideramos a parte dos marcadores sobre o correspondente lado de $S^1_\infty(L)$ em \mathcal{A} .

Desde que os marcadores são curvas contínuas em \mathcal{A} , então salvo outra subseqüência os marcadores tem um limite em no menos um dos segmentos definidos por x_0 e y_0 . Seja B este segmento. Se B tem um marcador ζ sobre este lado de $S^1_\infty(L)$ em \mathcal{A} , então como os ζ_i convergem sobre B , segue-se que ζ_i tem que intersecta-se com ζ para i suficientemente grande, agora pelo lema 4.2 tem-se que cada um dos i , ζ_i e ζ são parte de um possivelmente maior marcador ζ' . Assim, para i suficientemente grande temos que x_i está em ζ' e portanto

$$\{x_0\} = \zeta' \cap S^1_\infty(L) \subseteq N,$$

assim também para estes i 's, tem-se que a intersecção de ζ' e \mathcal{A}_{μ_i} é igual à intersecção de ζ_i e \mathcal{A}_{μ_i} . Agora o marcador ζ' é uma curva contínua em \mathcal{A} , transversal à folheação horizontal, assim para i suficientemente grande,

$$\zeta' \cap \mathcal{A}_{\mu_i} \subset N \quad \text{que implica} \quad \zeta_i \cap \mathcal{A}_{\mu_i} \subseteq N$$

que contradiz a hipótese. Agora, a outra opção de que não existe nenhum marcador naquele lado de $S^1_\infty(L)$ com ponto final em B , é descartado pela lema prévio. \square

O seguinte lema diz que se uma sequência de marcadores convergem a um ponto em um marcador ζ , então os marcadores todo convergem a ζ . Este fato será necessário para o análise da densidade global dos marcadores.

Lema 5.7. *Seja S, S' folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ e ζ_i com $i \geq 0$ uma sequência de marcadores de $S_\infty^1(S)$ a $S_\infty^1(S')$. Se a interseção a_i de ζ_i e $S_\infty^1(S)$ converge a a_0 com i , então os ζ_i convergem a ζ_0 em \mathcal{A} , isto é, para qualquer Z em $[S, S']$, a interseção b_i de ζ_i e $S_\infty^1(Z)$ converge a b_0 , a interseção de ζ_0 e $S_\infty^1(Z)$.*

Demonstração. Suponha que exista Z como acima de modo que b_i não converja a b_0 . Por simplicidade suponha que a sequência a_i para i maior que 0 esteja aninhada (com i) em $S_\infty^1(S)$. A intersecção não transversal dos marcadores implica que os b_i estão aninhados em $S_\infty^1(Z)$. Seja r um raio geodésico em S com ponto ideal a_0 e seja v um raio geodésico em Z com ponto ideal b_0 . Seja p_j uma sequência em r convergindo a a_0 . Lembrando que a_0 e b_0 pertencem a ζ_0 , então existem $q_j \in v$ com $d(p_j, q_j)$ convergindo a zero, desde que a_0 define uma direção contrátil de S a Z . Para cada positivo j seja $r_{j,i}$ (respectivamente $v_{j,i}$) o raio em S começando em p_j e com ponto ideal a_i (respectivamente em Z começando em q_j e com ponto ideal b_j). Para cada j tem-se a identificação de $S_\infty^1(S)$ com o fibrado tangente unitário em p_j , assim desde que os a_i convergem para a_0 , eles têm suas respectivas direções no fibrado tangente unitário convergindo para a direção definida pelo ponto ideal a_0 , logo pode-se escolher um $i(j)$ suficientemente grande de modo que o ângulo orientado em S em p_j de r a $r_{j,i(j)}$, é θ_j e θ_j converge para zero. Orientado significa ser medido de r a $r_{j,i(j)}$, no lado onde os $r_{j,i(j)}$ acumulam-se em r (quando i cresce). Por outro lado os $b_{i(j)}$ não convergem a b_0 , então visto de q_0 , o ângulo visual (α_j) do segmento em $S_\infty^1(Z)$, de b_0 a $b_{i(j)}$, não converge para zero. Segue-se que o ângulo orientado β_j em q_j entre os raios

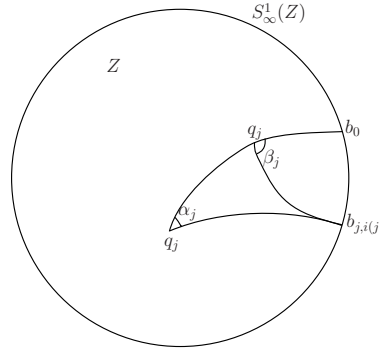
$$v \text{ e } v_{j,i(j)}$$

não converge a zero, isto pois a area definida pelo triângulo com vertices q_0 , b_0 e $b_{j,i(j)}$ é maior que a area do triângulo de vertices q_j , b_0 e $b_{j,i(j)}$, observe a figura. Agora, usando a formula de Gauss-Bonnet temos que

$$\pi - \alpha_j > \pi - \beta_j \quad \text{então} \quad \alpha_j < \beta_j$$

como α_j não convergem para zero, assim também os β_j não vão para zero (de fato eles vão para π). Agora escolhamos translações de recobrimento f_j de modo que $f_j(p_j)$ convergem a um ponto p_0 . Assim, temos que

$$\begin{aligned} d(f_j(q_j), p_0) &\leq d(f_j(q_j), f_j(p_j)) + d(f_j(p_j), p_0) \\ &= d(q_j, p_j) + d(f_j(p_j), p_0), \end{aligned}$$



assim $f_j(q_j)$ convergem também para p_0 . Em $f_j(p_j)$ o ângulo entre

$$f_j(r) \text{ e } f_j(r_{j,i(j)})$$

converge a 0, mas em q_j o ângulo entre $f_j(v)$ e $f_j(v_{j,i(j)})$ não converge a zero. Isto mostra que no menos um dos marcadores $f_j(\zeta_0)$ ou $f_j(\zeta_{i(j)})$ move uma quantidade fixa em deslocamento vertical arbitrariamente pequeno. Para j suficientemente grande, isto contradiz o lema 5.6. Isto finaliza a prova. \square

3 Curvas invariantes

Definição 5.2. Uma *curva invariante* em \mathcal{A} é uma curva mergulhada intersectando cada círculo no infinito exatamente uma vez e é invariante pela ação de $\pi_1(M)$. Uma curva invariante que é limite de marcadores cada vez maiores é chamada de curva limite invariante.

Estas curvas nos ajudarão a mostrar que o conjunto de direções de contração entre quaisquer duas folhas é denso. A idéia é supor que o conjunto de direções de contração entre duas folhas não é denso e então construir uma curva limite invariante \mathcal{L} em \mathcal{A} . Pode-se mostrar que as folhas são assintóticas fora da curva invariante - Isto é toda direção, com exceção de uma, são de contração. Assim, em qualquer caso tem-se um conjunto denso de direções de contração. A estratégia aqui é analisar primeiro as curvas limites invariante em detalhes nos seguintes lemas e proposição.

Lema 5.8. *Qualquer curva invariante limite \mathcal{L} não tem pontos associados a direções de contração de \mathcal{F} .*

Demonstração. Suponha que a curva limite invariante \mathcal{L} tem um ponto q associado a uma direção de contração. Então existe um marcador ζ_0 passando por q . Por hipótese existem marcadores ζ_i que convergem ponto a

ponto a \mathcal{L} . Pelo lema 5.7 esses marcadores convergem ponto a ponto a ζ_0 nos círculos no infinito que ζ_0 intersecta. Isto mostra que \mathcal{L} contém o marcador ζ_0 , isto é \mathcal{L} coincide com ζ_0 localmente. Pode-se aplicar qualquer intervalo $[U, U']$ de \mathcal{H} dentro de este pequeno segmento pela ação de algum $g \in \pi_1(M)$ e pelo fato de que a curva é invariante pela ação de $\pi_1(M)$, temos que $g([U, U'] \cap \mathcal{L}) \subset \mathcal{L} \cap \zeta_0$. Assim, como g^{-1} preserva marcadores temos que $[U, U'] \cap \mathcal{L}$ é um marcador, então a curva toda é um marcador. Assim isto é uma contradição pelo feito na demonstração do lema 5.5. \square

Agora usamos a distância pelo fluxo transversal entre pontos e folhas: Fixamos uma campo de linhas transversal a \mathcal{F} gerando uma folheação τ com levantamento $\tilde{\tau}$ a $\tilde{\mathcal{M}}$. Dado G em $\tilde{\mathcal{F}}$ e z em $\tilde{\mathcal{M}}$, considero o fluxo transversal τ_z passando por z . Como \mathcal{F} é sem componente de Reeb τ_z pode intersectar G no máximo uma vez. Se ela não intersecta, seja $d_\tau(z, G)$ infinito. Caso contrário, $d_\tau(z, G)$ é o comprimento do segmento de τ_z , de z à intersecção com G . Se \mathcal{L} é uma curva limite invariante em \mathcal{A} e L uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ seja \mathcal{L}_L a intersecção de $S_\infty^1(L)$ e \mathcal{L} .

Lema 5.9. *Seja \mathcal{L} uma curva limite invariante. Dado L em $\tilde{\mathcal{F}}$ e um lado de L em $\tilde{\mathcal{M}}$, existe G de $\tilde{\mathcal{F}}$ nesse lado de modo que: Para qualquer semiplano H de L que não tem limite sobre \mathcal{L}_L (o infinito de H não intersecta \mathcal{L}_L) e qualquer sequência de pontos z_i escapando em H tem o \limsup de $d_\tau(z_i, G)$ limitado superiormente (dependendo somente de H e G).*

Demonstração. Faremos a prova para G acima de L , a mesma prova aplica-se para G abaixo de L .

Aproximadamente o idéia da prova é a seguinte: se existe u em $S_\infty^1(L)$ distinto de \mathcal{L}_L de modo que d_τ explode próximo de u , então se pode aplicar qualquer segmento transversal a um segmento "próximo de u ". Isto produz translações de recobrimento com folhas invariantes em $\tilde{\mathcal{F}}$ e pontos fixos contráteis em \mathcal{L} - contradizendo o lema prévio.

Suponha que o lema é falso. Seja G_i uma sequência em $\tilde{\mathcal{F}}$ convergindo a L . Existe um semi-plano H em L tal que dado i existe uma sequência $z_{i,j}$ em H com $d_\tau(z_{i,j}, G_i)$ maior que j e $z_{i,j}$ escapa em H (com j crescente). Usando subsequências achamos

$$z_i \in H \quad \text{com} \quad d_\tau(z_i, G_i) > i \quad \text{e} \quad z_i \rightarrow u \in S_\infty^1(L), \quad u \quad \text{distinto de} \quad \mathcal{L}_L.$$

Fixemos v em L . Denote τ_v por α e α_i os subsegmentos de α entre L e G_i , cujo comprimento converge para zero.

Por outro lado temos os seguintes fatos:

Fato 1: Desde que \mathcal{F} é minimal qualquer folha é densa. Assim pela observação 5.1 dado um positivo α_0 existe um positivo α_1 de modo que se β é um segmento da folheação τ de comprimento maior que α_0 , w um ponto qualquer em \mathcal{M} e W a folha de \mathcal{F} contendo w então verifica-se que: W intersecta β em um ponto w' que está $\alpha_0/4$ -próximo do ponto médio de β (no comprimento de β pelo fluxo) e w' está no máximo a uma distância α_1 de w medida como distância em W .

Fato 2: Também existe um α_2 suficientemente pequeno, de modo que para qualquer segmento β' de τ de comprimento menor que α_2 , então se ele é movido pela holonomia de modo que seu ponto inicial é movido a uma distância menor que α_1 em sua folha (de \mathcal{F}), então o segmento final de τ tem comprimento limitado superiormente por $\alpha_0/4$. Com efeito, se pegamos β' um segmento transversal, seja E a folha que passa por um de seus pontos finais p , agora considere a bola fechada na folha com centro p e seja q um ponto qualquer desta bola. Fixamos um caminho ligando p à q . Fazendo uso do lema 2.3 temos que este caminho está contido em uma coleção finita de vizinhanças trivializantes, assim reduzindo a vizinhança que contem p pode-se obter um $\alpha_2(q)$ (que só depende do ponto q) suficientemente pequeno tal que o segmento β' é enviado pela holonomia em um segmento de τ de comprimento menor que $\alpha_0/4$ contido na vizinhança trivializante que contém q . Como a bola fechada em E com centro p é compacta, então temos que existe um $\alpha_2(p) > 0$ suficientemente pequeno que serve para todo q nesta bola. Agora, pegamos uma vizinhança trivializante do segmento β' suficientemente pequena de modo que qualquer segmento de τ contido nessa vizinhança seja levado pela holonomia à β' que por sua vez como acabamos de ver, é levado à um segmento de τ de comprimento menor que $\alpha_0/4$. Conseguimos assim, para cada ponto p um número $\alpha_2(p) > 0$ que satisfaz o afirmado numa vizinhança (em \mathcal{M}) do ponto p . O resultado segue da compacidade de \mathcal{M} .

Fato 3: Assim, qualquer segmento de τ de comprimento limitado por α_2 pode ser movido pela holonomia, com ponto inicial movido a uma distância menor que α_1 dentro de sua folha, para ter um ponto no segmento β $\alpha_0/4$ -próximo do ponto médio de β . Como o comprimento do transladado pela holonomia é menor que $\alpha_0/4$, o transladado final pela holonomia está inteiramente contida em β .

Tirando alguns termos, pode-se assumir que o comprimento de α_i 's estão limitados superiormente por α_2 . Seja β_i o segmento na folha de $\tilde{\tau}$ de comprimento α_0 com um ponto final em z_i e contido no lado positivo de L . A propriedade dos z_i 's implica que (pelo menos para i suficientemente grande)

todo β_i está na união de folhas S de $\tilde{\mathcal{F}}$ contidas no intervalo

$$[L, G_i] \text{ de } \mathcal{H}.$$

Pelo fato 1 temos que para i suficientemente grande existe um $w' \in \pi(L) \cap \pi(\beta_i)$ que está $\alpha_0/4$ -próximo do ponto médio de $\pi(\beta_i)$ (medida como distância em τ). Assim, no levantando a $\tilde{\mathcal{M}}$ existem translações de recobrimento h_i de modo que $h_i(v)$ está na folha $h_i(L)$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ com $h_i(L)$ intersectando β_i num ponto c_i a uma distância(em τ) de $\alpha_0/4$ de seu ponto médio e a distância na folha $h_i(L)$ entre $h_i(v)$ e c_i é menor do que α_1 . Pelo fato 3 a imagem de $h_i(\alpha_i)$ é aplicada pela holonomia no interior de β_i . Os pontos finais de α_i estão em L, G_i e os pontos finais de β_i estão em L e em outra folha entre L e G_i .

Isto implica que no nível do espaço das folhas h_i envia o intervalo $[L, G_i]$ de \mathcal{H} em um subconjunto de seu interior (L, G_i) - assim h_i tem um ponto fixo em (L, G_i) . Então $h_i^n(L)$ converge a uma folha L_i de $\tilde{\mathcal{F}}$ com n convergindo no infinito(para cada i !) e L_i é invariante por h_i . Note que L_i converge a L quando i converge no infinito, pois L_i está em (L, G_i) e G_i converge a L em \mathcal{H} .

Desde que $h_i(L_i) = L_i$ então h_i age como uma isometria hiperbólica em L_i e tem dois pontos fixos em $S_\infty^1(L_i)$. Seja

$$h_i^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_i^n(x)$$

para qualquer ponto x de L_i . Seja h_i^- o outro ponto fixo de h_i . O fato importante que precisamos é o seguinte lema

Lema 5.10. h_i^+ converge a u em \mathcal{A} quando i converge no infinito.

Demonstração. Seja N uma vizinhança de $u \in \mathcal{A}$ no lado superior de $S_\infty^1(L)$ (u definido como no início da prova do lema 5.9). Identificando N como um subconjunto de $T_1\alpha$ usando o círculo ideais. Então N contém um segmento aberto T em $S_\infty^1(L)$ com u em T . Como os marcadores são localmente densos em $S_\infty^1(L)$, existem marcadores

$$\zeta_1, \zeta_2 \text{ de } S_\infty^1(L) \text{ a } S_\infty^1(S_1)$$

com S_1 acima de L , intersectando $S_\infty^1(L)$ em $\zeta_1(L), \zeta_2(L)$ respectivamente de modo que: As interseções com $S_\infty^1(L)$ estão em T e definem um segmento menor em $S_\infty^1(L)$ com u no interior. Sejam r, r_1 e r_2 os segmentos geodésicos em L com ponto inicial em v e com ponto ideal $u, \zeta_1(L)$ e $\zeta_2(L)$ respectivamente. Note que r_1, r_2 são direções de contração entre L e S_1 . Seja α_3

um positivo muito pequeno. Desde que r_1, r_2 são direções de contração entre L e S_1 , existe S_2 em (L, S_1) de modo que qualquer ponto em r_1, r_2 está a α_3 -próximo de S_2 e assim está α_3 -próximo de qualquer S entre L e S_2 . Para qualquer tal S nós podemos mover r_1 e r_2 a S usando o fluxo transversal- se α_3 for suficientemente pequeno. A curvatura geodésica das curvas puxadas em S é pequena, tendendo a zero quando α_3 tende a zero. Assim elas são quase-geodésicas em S e suas direções iniciais dão estimativas arbitrariamente próximas das direções definidas pelos levantamentos de r_1, r_2 a S (ou seja as curvas em S cujas distâncias a r_1 respectivamente r_2 , vão para zero). Assim, essas direções estão em N e próximas à direção de r em $T_1\alpha$ (se N é pequeno). Os marcadores ζ_1, ζ_2 e os círculos $S_\infty^1(L), S_\infty^1(S_2)$ definem uma pequena vizinhança N_1 de u em \mathcal{A} nesse lado de $S_\infty^1(L)$ em \mathcal{A} . Pode-se escolher N_1 , como subconjunto de N .

Seja v_i é a intersecção de α e L_i . Então para i grande z_i está na região de L definida por r_1 e r_2 cujo bordo no infinito é T , assim a intersecção b_i de β_i e L_i estão na região definida pelas imagens (pelo fluxo) de r_1, r_2 em L_i . A direção do segmento geodésico em L_i de v_i a b_i está no interior desta região e define um ponto em N_1 e assim, em N . Agora temos que

$$\begin{aligned} d(h_i(v_i), b_i) &\leq d(h_i(v_i), h_i(v)) + d(h_i(v), c_i) + d(c_i, b_i), \\ &\leq \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0. \end{aligned}$$

Assim pelo lema 3.2 temos que a $d_{L_i}(h_i(v_i), b_i) \leq f(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) = \alpha_4$, o que implica que $h_i(v_i)$ e b_i estão limitadamente próximas em L_i , então a direção do segmento geodésico em L_i de v_i a $h_i(v_i)$ também define um ponto em N para i suficientemente grande. Os pontos v_i estão na transversal fixa α e próximos de v , assim eles estão em um subconjunto compacto de L_i . Como os pontos $h_i(v_i)$ estão limitadamente próximos a β_i assim também de z_i . Por outro lado

$$\begin{aligned} d(v, z_i) &\leq d(v, v_i) + d(v_i, b_i) + d(b_i, z_i), \\ &\leq \alpha_2 + d_{L_i}(v_i, b_i) + \alpha_0. \end{aligned}$$

Pelo lema 3.2 temos que

$$d_L(v, z_i) \leq f(\alpha_2 + d_{L_i}(v_i, b_i) + \alpha_0).$$

Agora, como $d_L(v, z_i)$ vai para infinito então $d_{L_i}(v_i, b_i)$ também vai para infinito, isto segue do lema 3.2, além disso

$$\begin{aligned} d_{L_i}(v_i, b_i) &\leq d_{L_i}(v_i, h_i(v_i)) + d_{L_i}(h_i(v_i), b_i), \\ &\leq d_{L_i}(v_i, h_i(v_i)) + \alpha_4, \end{aligned}$$

então

$$d_{L_i}(\nu_i, h_i(\nu_i))$$

também vai para infinito. Desde que h_i é uma isometria hiperbólica em L_i , isto implica que $h_i(\nu_i)$ está próximo a h_i^+ na compactificação $L_i \cup S_\infty^1(L_i)$. O argumento usado não dá informação de h_i^- . Isto mostra que a direção em L_i definida por h_i^+ está em N . Como N é arbitrário isto mostra que h_i^+ converge a u . \square

Observação 5.2. temos os seguintes fatos:

1. Este argumento de fato mostra: Se existe um positivo c_0 e existem z_i em L convergindo a u , G_i em $\tilde{\mathcal{F}}$ convergindo a L de modo que $d_\tau(z_i, G_i)$ é maior que c_0 , então obtemos $h_i \in \pi_1(M)$ com pontos fixos h_i^+ em \mathcal{A} convergindo a u .
2. De um jeito semelhante, se u em $S_\infty^1(L)$ é uma direção de contração sobre o lado positivo (de $\tilde{\mathcal{F}}$), trocando os papéis de α_i e β_i consegue-se: Seja G_i em $\tilde{\mathcal{F}}$ convergindo a L em todo o domínio da contração de holonomia na direção de u . Fixamos um raio geodésico r em L com ponto ideal u . Fixamos \tilde{i} e seja c_0 o comprimento de α_i . Como acima, existe um positivo muito pequeno c_1 de modo que qualquer segmento de $\tilde{\tau}$ de comprimento menor que c_1 pode ser transportado por holonomia a uma distância limitada no interior de um transladado de recobrimento de α_i . Como u é uma direção de contração escolhemos z_i em r com $d_\tau(z_i, G_i)$ menor que c_1 . Seja β_i definido como antes, agora com comprimento menor que c_1 . Isto produz $g_i \in \pi_1(M)$ com $g_i(\beta_i)$ contida no interior do conjunto das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectado por α_i . Os g_i^{-1} agem sobre \mathcal{A} tendo pontos fixos (positivos) c_i 's que convergem a u em \mathcal{A} . Isto mostra que arbitrariamente próximos de qualquer direção de contração existem pontos fixos de homeomorfismos de recobrimento.

Conclusão da prova do lema 5.9

Seja γ_i a geodésica axial em L_i de h_i , assim $h_i(\gamma_i) = \gamma_i$. Os pontos ideais de γ_i são h_i^+ , h_i^- . Então

$$h_i \text{ translada } [L, L_i] \text{ sobre } (L, L_i]$$

e não tem outra folha invariante em $(L, L_i]$, isto pois L_i converge a L . Assim, h_i contrai o espaço das folhas próximos de L_i e portanto, as direções de γ_i

associadas a h_i^+ são uma direção de expansão de $\tilde{\mathcal{F}}$: folhas próximas de $\tilde{\mathcal{F}}$ divergem em L_i nessa direção.

Isto implica que as direções de γ_i associadas a h_i^- uma direção de contração (ou equivalentemente h_i^- expande o espaço das folhas próximos de L_i). Mas $h_i(\mathcal{L}) = (\mathcal{L})$, assim os pontos ideais de γ_i estão em \mathcal{L} . Como h_i^+ converge a u e este é distinto de \mathcal{L}_L então para i suficientemente grande h_i^- é \mathcal{L}_{L_i} mas isto implica que \mathcal{L} tem um ponto h_i^- associado a uma direção de contração. Isto contradiz o lema 5.8 e finaliza a prova. \square

Com um pouco mais de trabalho pode-se mostrar que $d_\tau(z_i, G)$ converge a zero:

Lema 5.11. *Suponha que existe uma curva limite invariante \mathcal{L} . Para qualquer L em $\tilde{\mathcal{F}}$ e um lado de L em $\tilde{\mathcal{M}}$ existe G de $\tilde{\mathcal{F}}$ nesse lado de modo que: para qualquer u em $S_\infty^1(L)$ distinto de \mathcal{L}_L e qualquer sequência z_i em L convergindo à u então $d_\tau(z_i, G)$ converge à zero. Em particular u é uma direção de contração entre L e G .*

Demonstração. Dado L e um lado dela, escolhamos uma G dada pelo lema 5.9. Suponha que o lema não é verdade. Então existe um $u \in S_\infty^1(L)$ distinto de \mathcal{L}_L e uma sequência z_i com $d_\tau(z_i, G)$ não convergindo para zero. Pelo lema 5.9 o \limsup de $d_\tau(z_i, G)$ é limitado superiormente por uma constante α_4 a qual só depende de L , G e u . Desde que $d_\tau(z_i, G)$ não converge à zero, salvo sub-sequência pode-se supor que $d_\tau(z_i, G)$ converge para um positivo α_5 . Salvo uma outra sub-sequência, escolhamos f_i em $\pi_1(M)$ com $f_i(z_i)$ convergindo a z_0 , isto pela observação 3.2. Então $f_i(L)$ converge a L_0 contendo z_0 e $f_i(G)$ converge a uma folha G_0 pois a $d_\tau(z_i, G)$ converge a α_5 . Assim G_0, L_0 são folhas distintas, pois $\alpha_5 > 0$. Para qualquer $w \in L_0$, $d_{L_0}(w, z_0)$ é finita, assim w é o limite de w_i , com w_i em $f_i(L)$ e $d_{f_i(L)}(w_i, f_i(z_i))$ é limitada, isto pelo lema 3.2(a cota só depende de $d_{L_0}(w, z_0)$). Os pontos $f_i^{-1}(w_i)$ de L estão a uma distância limitada de z_i e em particular

$$f_i^{-1}(w_i) \rightarrow u \in S_\infty^1(L) \quad \text{quando } i \rightarrow +\infty.$$

Portanto o \limsup de $d_\tau(f_i^{-1}(w_i), G)$ é menor que α_4 . Salvo uma sub-sequência $d_\tau(f_i^{-1}(w_i), G)$ converge para α_6 , que é distinto de zero pois $d(f_i^{-1}(w_i), z_i)$ é limitada superiormente e $d_\tau(z_i, G)$ é limitada inferiormente por uma constante positiva. Existem y_i em G com $y_i, f_i^{-1}(w_i)$ na mesma folha de $\tilde{\tau}$ e $d_\tau(y_i, f_i^{-1}(w_i))$ convergindo para α_6 . Então $f_i(y_i)$ converge a um ponto y em τ_w e $d_\tau(w, y)$ é igual a α_6 . Mas $f_i(y_i)$ está em $f_i(G)$ e $f_i(G)$ converge à G_0 , assim y está em G_0 . Isto produz uma aplicação de L_0 para G_0 dada por

$\varphi(w) = y$. Note que para qualquer w em L_0 , os w , $\varphi(w)$ estão na mesma folha de $\tilde{\tau}$ e $d_\tau(w, \varphi(w))$ é menor que α_4 .

A aplicação φ de L_0 a G_0 é injetiva, pois \mathcal{F} é sem componente de Reeb ($\tau_y = \tau_w$ não pode intersectar duas vezes a folha L_0). Ela é contínua, de fato, seja c um ponto qualquer de L_0 e c_i uma sequência em $f_i(L)$ convergindo para c , agora existem únicos e_i em G_0 tal que $\varphi(c_i) = e_i$. Temos que c define um único ponto e em G_0 , tem-se que mostrar que e_i converge para e . Pegamos uma vizinhança V de e em G_0 agora pelo fato de que c e e estão na mesma folha de $\tilde{\tau}$ eles definem um segmento compacto, assim pelo teorema do fluxo tubular pode-se obter uma vizinhança U onde o fluxo é trivializado e reduzindo ela pode-se supor que $U \cap G_0$ está contida em V . Agora, como c_i converge para c , para i suficientemente grande os c_i ficam em U e portanto os e_i ficam em $U \cap G_0$ e portanto em V , isto mostra a continuidade; do mesmo jeito pode-se mostrar que $\varphi^{-1}|_{\varphi(L_0)}$ é contínua. Assim φ é uma homeomorfismo sobre sua imagem. Se $\varphi(L_0)$ não é todo L_0 então existe b em G_0 com b no bordo de $\varphi(L_0)$ (como subconjunto de G_0). Escolhamos s_j em $\varphi(L_0)$ convergindo a b . Seja x_j em L_0 com $\varphi(x_j) = s_j$. Então

$$d(x_j, s_j) \leq d_\tau(x_j, s_j) \leq \alpha_4$$

e como s_i converge a b temos que $d(x_j, b)$ é limitada e assim também $d(x_j, x_1)$, agora pelo lema 3.2 temos que $d_{L_0}(x_j, x_1)$ é limitada (isto é o fato importante). Salvo subsequência suponha que x_j converge a x_0 . Então $s_j = \varphi(x_j)$ converge a $\varphi(x_0)$ - um ponto em G_0 . Mas b é igual a $\varphi(x_0)$ e está em $\varphi(L_0)$ contradizendo a hipóteses.

Conclui-se que φ é sobrejetiva e de fato, para qualquer ponto s em G_0 , $d_\tau(s, L_0)$ é menor que α_4 . Usando o fato que \mathcal{F} é minimal isto mostra que quaisquer duas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ estão a uma distância limitada uma da outra, contradizendo a hipóteses de não-uniformidade. Isto finaliza a prova do lema. \square

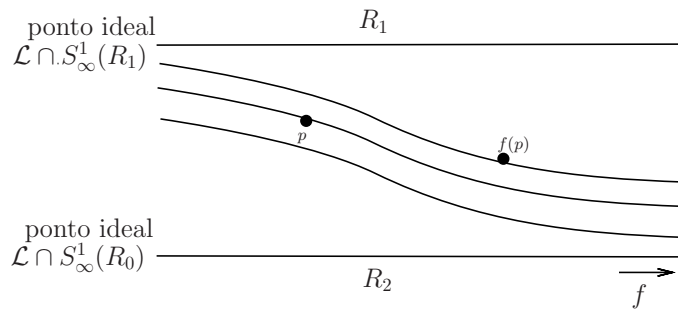
Desde que \mathcal{L} em \mathcal{H} e u em $S_\infty^1(L) - \mathcal{L}_L$ são arbitrários, o lema 5.11 mostra que qualquer ponto u de $\mathcal{A} - \mathcal{L}$ está no interior de uma marcador ζ em \mathcal{A} . Se dois marcadores se intersectam sua união é um marcador. Isto produz uma folheação 1-dimensional \mathcal{N} em $\mathcal{A} - \mathcal{L}$ consistindo da coleção de todos os marcadores. O objetivo é mostrar que qualquer folha de \mathcal{N} intersecta todo os círculos no infinito.

Proposição 5.4. *Suponha que exista uma curva limite invariante \mathcal{L} . Para quaisquer E, F in $\tilde{\mathcal{F}}$ e qualquer v em $S_\infty^1(E)$ distinto de \mathcal{L}_E , v é uma direção de contração com F - isto é, qualquer direção salvo a de \mathcal{L} é uma direção de contração entre folhas arbitrárias.*

Demonstração. Seja v em $\mathcal{A} - \mathcal{L}$ um ponto fixo de um homeomorfismo de recobrimento f , ζ a folha de \mathcal{N} passando por v e R_0 em $\tilde{\mathcal{F}}$ com v em $S_\infty^1(R_0)$. Por simplicidade assumamos que ζ não encontra algum $S_\infty^1(R)$ com R acima de R_0 . Seja R_1 acima de R_0 o menor dos R 's que não encontra ζ . O conjunto dos R tal que ζ intersecta $S_\infty^1(R)$ é uma conjunto aberto em \mathcal{H} pois qualquer ponto em $\mathcal{A} - \mathcal{L}$ está no interior de um marcador. Então,

$$f(\zeta) = \zeta \quad \text{implica} \quad f(R_1) = R_1$$

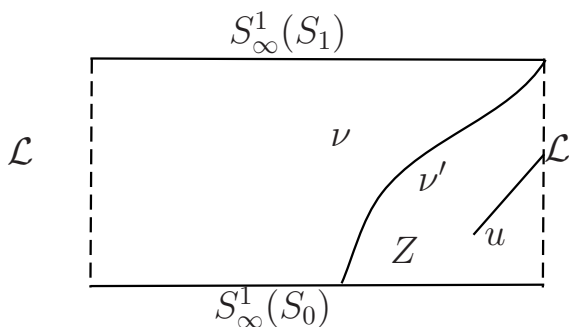
pois \mathcal{F} é \mathbb{R} -coberta. Também para qualquer R no intervalo (R_0, R_1) de \mathcal{H} tem-se que $f(R)$ e R são distintos, pois todo tal R é assintótico a R_0 na direção de v e não pode ser deixado invariante por translações de recobrimento associado a esta direção. Se necessário trocamos f, f^{-1} de modo que v é uma ponto fixo atrator de f em $S_\infty^1(R_0)$. Então R_0 é um ponto de expansão para a ação de f em $[R_0, R_1]$. A ação de f sobre o intervalo fechado



$$B = \mathcal{L} \cap \left(\bigcup_{R \in [R_0, R_1]} S_\infty^1(R) \right)$$

tem um ponto fixo de expansão em \mathcal{L}_{R_0} . Como f não tem uma folha invariante em (R_0, R_1) , a ação de f sobre B tem \mathcal{L}_{R_1} como um ponto atrator. Como $f(R_1) = R_1$ isto mostra que \mathcal{L}_{R_1} corresponde a uma direção de contração em R_1 , contradizendo o lema 5.8. Conclui-se que ζ intersecta todos os círculos no infinito.

Agora, seja v uma folha de \mathcal{N} intersectando $S_\infty^1(S_0)$ que não intersecta todos os círculo no infinito; suponha que exista um limite superior $S_\infty^1(S_1)$. Então v se aproxima de \mathcal{L} próximo de $S_\infty^1(S_1)$. Segue que $v, S_\infty^1(S_0)$ e \mathcal{L} limitam uma região \mathcal{Z} a qual não intersecta $S_\infty^1(S_1)$. Qualquer marcador intersectando \mathcal{Z} está limitado superiormente. Agora escolhamos u em \mathcal{Z} que



é um ponto fixo de alguma translação de recobrimento. Mostramos antes que qualquer direção de contração é o limite de pontos fixos de translações de recobrimento. Seja ν' a folha de \mathcal{N} passando por u . Como ν' está em Z então ν' é limitada superiormente, o que pelo visto anteriormente não acontece.

A conclusão é que para qualquer marcador ζ em \mathcal{A} , então ζ intersecta todos os círculos no infinito. Em particular dado E, F em $\tilde{\mathcal{F}}$ e u em $S_\infty^1(E) - \mathcal{L}_E$, então o marcador ζ passando por u intersecta $S_\infty^1(F)$ - isto é, u é uma direção de contração entre E e F . Isto finaliza a prova. \square

4 Construção da folheação vertical - caso não-uniforme

Teorema 5.1. *(folheação vertical - caso não-uniforme) Seja \mathcal{F} é uma folheação minimal, não-uniforme, \mathbb{R} -coberta e com folhas hiperbólicas. Dados quaisquer F, E de $\tilde{\mathcal{F}}$, existe um conjunto denso de direções em F contraindo-se a E . O conjunto de marcadores estende-se a uma folheação vertical em \mathcal{A} que é invariante por $\pi_1(M)$.*

Demonstração. O argumento é como segue: Se os marcadores não são densos, conseguimos produzir uma curva limite invariante \mathcal{L} e então aplicando a proposição anterior, obtemos uma contradição visto que nele é provado que todo ponto $u \in S_\infty^1(E) - \mathcal{L}_E$ é direção de contração, para qualquer folha E . Suponha que a proposição não é verdadeira. Então existe F e E em $\tilde{\mathcal{F}}$ (pode-se supor E acima de F) sem um conjunto denso de direções de contração de F para E - isto é do ponto de vista de F !. Assim existe um intervalo aberto J_0 em $S_\infty^1(F)$ de modo que nenhum ponto de J_0 corresponde a uma direção de contração entre F a E . Seja q_0 em J_0 . Desde que q_0 não é uma direção de contração entre F e E , existe um positivo ϵ e p_1 em F convergindo a q_0

ao longo de um raio geodésico l e de modo que $d(p_i, E)$ é maior que ϵ . Na folha F , a medida visual de J_0 medida do ponto p_i é θ_i convergindo a 2π quando i converge ao infinito. Salvo subsequências de p_i escolhemos translações de recobrimento g_i com $g_i(p_i)$ convergindo a p_0 e se for necessário passamos a uma outra subsequência do jeito que os $g_i(l)$ convergem a l_0 . Seja F_0 em $\tilde{\mathcal{F}}$ contendo p_0 . Seja

$$\mathcal{O} = \{G \in \tilde{\mathcal{F}} \mid G = f(F_0), \text{ para algum } f \in \pi_1(M)\} \subset \mathcal{H}$$

Vamos definir uma função η de \mathcal{O} em \mathcal{A} que escolhe a direção do marcador limite e produzira uma curva limite invariante. Desde que $d(g_i(E), g_i(p_i))$ é maior que ϵ então $g_i(E)$ não tem uma subsequência convergindo a F_0 . Claramente um marcador de $g_i(F)$ para $g_i(E)$ no máximo, começa no conjunto

$$U_i = S_\infty^1(g_i(F)) - g_i(J_0).$$

Do ponto de vista de $g_i(p_i)$ em $g_i(F)$, a medida visual de U_i é $2\pi - \theta_i$ que converge a 0. Também visualmente de $g_i(p_i)$ o conjunto U_i é muito próximo à direção do segmento de $g_i(l_i)$ de $g_i(p_1)$ a $g_i(p_i)$. Dado que a direção de $g_i(l)$ converge à direção l_0 e a topologia de \mathcal{A} é dada pela a topologia visual das transversais a $\tilde{\mathcal{F}}$, segue que o segmento U_i converge a um único ponto em $S_\infty^1(F_0)$.

Definição 5.3. (função η) Definamos $\eta: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}$ por

$$\eta(F_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} U_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (S_\infty^1(g_i(F)) - g_i(J_0))$$

e para qualquer translação de recobrimento f definamos

$$\eta(f(F_0)) = f(\eta(F_0)).$$

Pelo feito acima temos que o limite dos U_i 's é só um ponto assim a função η é bem definida, além disso pela definição temos que $\eta(f(F_0)) \in S_\infty^1(f(F_0))$. As folhas F, E, F_0 de $\tilde{\mathcal{F}}$ bem como as transformações de recobrimento g_i estarão fixadas nesta prova.

Lema 5.12. A função η de \mathcal{O} a \mathcal{A} se estende a $\eta: \mathcal{H} \cong \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$.

Demonstração. Desde que \mathcal{F} é uma folheação minimal o conjunto \mathcal{O} é denso em \mathcal{H} assim o jeito natural de estender η é pegar um $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, então existe uma sequência de $L_i \in \mathcal{O}$ convergindo a L e definimos

$$\eta(L) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(L_i).$$

Agora, temos que provar a boa definição desta extensão. Suponha que pode-se encontrar duas sequências L_j e H_j convergindo a L com $\eta(L_j)$ convergindo a \mathbf{a} , $\eta(H_j)$ convergindo a \mathbf{b} , com \mathbf{a}, \mathbf{b} pontos distintos. Desde que os $\eta(L_i) \in S_\infty^1(L_i)$ e L_i converge a L implica que $\mathbf{a} \in S_\infty^1(L)$, analogamente $\mathbf{b} \in S_\infty^1(L)$. Os L_j, H_j são transladados de recobrimento de F_0 :

$$L_j = f_j(F_0), \quad H_j = h_j(F_0) \quad \text{para algum } f_j, h_j \in \pi_1(M).$$

Escolhamos pequenas vizinhanças abertas disjuntas V_a, V_b de \mathbf{a}, \mathbf{b} respectivamente em \mathcal{A} . O lema 5.6 mostra que existem pequenas vizinhanças abertas disjuntas V'_a, V'_b de \mathbf{a}, \mathbf{b} respectivamente em \mathcal{A} , e uma vizinhança V de L em \mathcal{H} definida por uma transversal μ a $\tilde{\mathcal{F}}$, de modo que qualquer marcador atravessando V'_a e contido em \mathcal{A}_μ está contido em V_a e similarmente qualquer marcador que intersecte V'_b está contido em V_b . Em particular os dois conjuntos de marcadores contidos em \mathcal{A}_μ atravessando V'_a e V'_b são disjuntos um do outro. O lema 4.2 implica que qualquer marcador em \mathcal{A} atravessando V'_a não intersecta V'_b .

Fixamos j suficientemente grande de modo que $\eta(L_j)$ está em V'_a e $\eta(H_j)$ está em V'_b . Como $L_j = f_j(F_0)$ então

$$\eta(L_j) = f_j(\eta(F_0)) = f_j(\lim_{i \rightarrow \infty} U_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_j(U_i) \in V'_a.$$

Similarmente

$$\eta(H_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_j(U_i) \in V'_b.$$

Agora, fixamos i suficientemente grande de modo que $f_j(U_i)$ está contido em V'_a e $h_j(U_i)$ está contido em V'_b , isto implica que qualquer marcador passando por $f_j(U_i)$ é disjunto de um marcador passando por $h_j(U_i)$. Escolhamos A em $\tilde{\mathcal{F}}$ com A menor que L na ordem linear de \mathcal{H} . Escolhendo j, i suficientemente grandes pode-se assumir que L_j, H_j são maiores que A e assim também

$$f_j(g_i(F)) \quad , \quad h_j(g_i(F))$$

lembre que $U_i \subset g_i(F)$. Também escolhemos B em $\tilde{\mathcal{F}}$ com B maior que ambos $f_j(g_i(E))$ e $h_j(g_i(E))$ em \mathcal{H} . Um marcador de $S_\infty^1(A)$ a $S_\infty^1(B)$ tem que passar através de $S_\infty^1(f_j(g_i(F)))$ e através de $S_\infty^1(h_j(g_i(E)))$, pois as folhas $f_j(g_i(F))$ e $f_j(g_i(E))$ separam A de B . Pela a propriedade de U_i , segue que os marcadores têm que passar através de $f_j(U_i)$ contido em V'_a . Similarmente qualquer tal marcador tem que passar através de $S_\infty^1(h_j(g_i(F)))$ e $S_\infty^1(h_j(g_i(E)))$. Assim este tem que passar através de $h_j(U_i)$ contido em V'_b . Mas provamos que nenhum marcador pode passar através de ambos V'_a e V'_b . Isto implica que

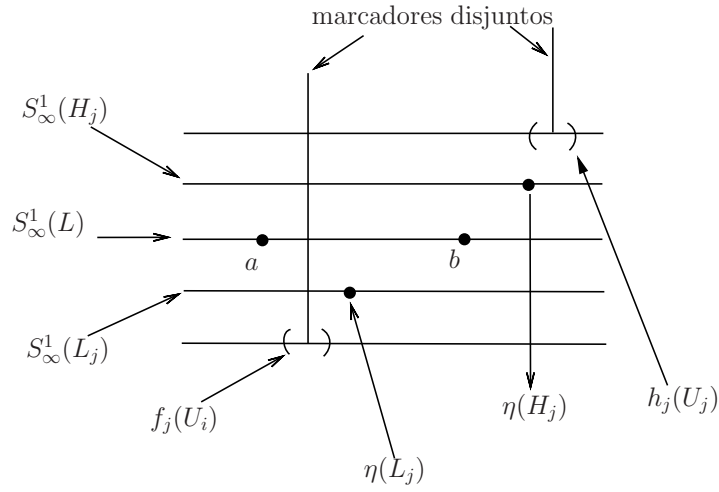


Figura 5.3: Se η não é contínua, isto faz que os marcadores estejam em regiões disjuntas ao mesmo tempo- contradição

não existe um marcador de $S_\infty^1(A)$ a $S_\infty^1(B)$ o que contradiz a proposição 5.2. Isto mostra que η pode ser estendida a uma função contínua do fecho de \mathcal{O} para \mathcal{A} . Mas como \mathcal{F} é minimal, então $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{H}$, assim $\eta: \mathcal{H} \cong \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$. A imagem é uma curva \mathcal{L} a qual intersecta todo círculo no infinito, isto pois $\eta(L) \in S_\infty^1(L)$ para qualquer $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ e ela é transversal à folheação horizontal. Isto finaliza a prova. \square

Conclusão da prova da Proposição 5.1

O conjunto

$$\eta(f(F_0)), \quad f \in \pi_1(M)$$

é um subconjunto invariante de \mathcal{A} , pela ação de $\pi_1(M)$, pois se pegamos uma translação de recobrimento g e pegamos algum elemento $\eta(f(F_0))$ do conjunto, com $f \in \pi_1(M)$, então temos da definição que

$$g(\eta(f(F_0))) = g(f(\eta(F_0))) = \eta(gf(F_0)),$$

estando por tanto no mesmo conjunto. Pelo lema 5.12 temos que para quaisquer $g \in \pi_1(M)$ e $p \in \mathcal{L}$ então $p \in S_\infty^1(L)$, para algum L e

$$p = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(L_i)$$

onde L_i converge a L e $L_i \in \mathcal{O}$, logo temos que

$$g(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(\eta(L_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(g(L_i))$$

Assim $g(L_i) \in \mathcal{O}$, então $g(p)$ pertence a \mathcal{L} , logo \mathcal{L} é uma curva invariante. Também dado qualquer translação de recobrimento g com uma folha invariante L ($g(L) = L$), então um dos pontos fixos de g em $S_\infty^1(L)$ está em \mathcal{L} .

Seja L em \mathcal{O} , $L = g(F_0)$. Então L é o limite de $g(g_i(F))$ quando i converge a infinito. Qualquer marcador de

$$S_\infty^1(g(g_i(F))) \quad \text{para} \quad S_\infty^1(g(g_i(E)))$$

tem ponto inicial em $g(U_i)$. Lembremos que $g(U_i)$ converge a $\eta(L)$ quando i converge no infinito. Escolhamos uma coleção de folhas G_k, R_k em $\tilde{\mathcal{F}}$, escapando para os fins opostos de \mathcal{H} e G_k sempre menor que R_k em \mathcal{H} . Para cada k escolhamos um marcador ζ_k de $S_\infty^1(G_k)$ a $S_\infty^1(R_k)$. Fixamos um vizinhança N de $\eta(L)$ em \mathcal{A} . Escolhamos i suficientemente grande de modo que $g(U_i)$ está contida em N . Para k suficientemente grande as folhas $G_k, g(g_i(F)), g(g_i(E))$ e R_k estão linearmente ordenados em ordem crescente em \mathcal{H} , assim ζ_k tem que passar através de algum ponto z_k em $g(U_i)$, donde z_k está em N .

Afirmção 5.2. $\lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta_k \cap S_\infty^1(L)) = \eta(L)$

Com efeito, suponha que $\zeta_k \cap S_\infty^1(L)$ não converge a $\eta(L)$, então existe um vizinhança N_1 de $\eta(L)$ de tal jeito que nenhum $\zeta_k \cap S_\infty^1(L)$ está em N_1 , agora pelo lema 5.6 existem vizinhanças N'_1 de $\eta(L)$ e uma vizinhança V , dada por uma transversal μ a $\tilde{\mathcal{F}}$ ($V = \mathcal{A}_\mu$), de L tal que si um marcador ζ intersecta N'_1 a sua intercessão com \mathcal{A}_μ está contida em N_1 . Agora para um i suficientemente grande temos que $g(U_i)$ pertencem a N'_1 assim para k suficientemente grande temos que $G_k, g(g_i(F)), g(g_i(E))$ e R_k , estão ordenados de forma crescente em \mathcal{H} . Logo o marcador ζ_k tem que cortar $g(U_i)$ em algum z'_k assim $\zeta_k \cap N'_1 \neq \emptyset$ então $\zeta_k \cap \mathcal{A}_\mu \subset N_1$ que implica que $\zeta_k \cap S_\infty^1(L) \in N_1$ contradizendo a suposição. Então

$$\text{para todo } L \text{ em } \mathcal{O}, \quad \eta(L) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta_k \cap S_\infty^1(L)) \quad (1)$$

Como o conjunto \mathcal{O} é denso em \mathcal{H} , e η é contínua em \mathcal{H} , o lema 5.6 implica que a equação (1) é verdadeira para todo G em $\tilde{\mathcal{F}}$. Com efeito, pegamos $G \in \tilde{\mathcal{F}}$ qualquer, então existem $L_i \in \mathcal{O}$, com L_i convergindo a G e $\eta(L_i)$ convergindo a $\eta(G)$, agora suponha que a afirmação é falsa, então existe

uma vizinhança N_2 de $\eta(G)$ onde $\zeta_k \cap S_\infty^1(L_i) \notin N_2$ para todo k , uma vez mais pelo lema 5.6 existe uma vizinhança N'_2 de $\eta(G)$ e uma vizinhança V' , dada por uma transversal ν a $\tilde{\mathcal{F}}$ ($V = \tilde{\mathcal{F}}_\nu$). Assim para j suficientemente grande $\eta(L_j)$ está em N'_2 logo como

$$\eta(L_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta_k \cap S_\infty^1(L))$$

temos que existe um k grande tal que $\zeta_k \cap S_\infty^1(L)$ está em N'_2 assim, ζ_k intersecta N'_2 , logo temos que $\zeta_k \cap V' \subset N_2$ donde $S_\infty^1(L) \cap \zeta_k \in N_2$, o que contradiz a suposição. Assim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k \cap S_\infty^1(G) = \eta(G)$$

para qualquer $G \in \tilde{\mathcal{F}}$. Então conclui-se que \mathcal{L} é o limite de uma sequência de marcadores η_k cada vez maior e \mathcal{L} é uma curva invariante. Mas neste caso a proposição 5.4 implica que dadas quaisquer G, H folhas em $\tilde{\mathcal{F}}$ e qualquer u em $S_\infty^1(G) - \mathcal{L}_G$ então u é uma direção de contração entre G e H . Isto contradiz a hipótese na prova da proposição 5.1 de que não existe um conjunto denso de direções de contração entre F e E .

Agora, finalizamos a prova da proposição 5.1. Dado duas folhas arbitrárias G, H , o conjunto denso de marcadores entre $S_\infty^1(G)$ e $S_\infty^1(H)$, estende-se a uma folheação vertical da região de \mathcal{A} entre $S_\infty^1(G)$ e $S_\infty^1(H)$. Isto é por que ele é denso do ponto de vista de ambos G e H !. Em adição se G', G, H, H' estão ordenados linearmente em \mathcal{H} , fazendo a mesma operação usando G', H' , a folheação resultante é uma extensão da folheação entre $S_\infty^1(G)$ e $S_\infty^1(H)$. Isto é por que marcadores de $S_\infty^1(G')$ e $S_\infty^1(H')$ produzem marcadores de $S_\infty^1(G)$ e $S_\infty^1(H)$ e existe uma única extensão da folheação a um anel maior. Conseqüentemente existe uma folheação vertical bem definida em \mathcal{A} . Desde que a coleção de marcadores em \mathcal{A} é invariante pela ação por translações de recobrimento, a folheação vertical também, e é uma folheação natural associada a \mathcal{F} . Isto finaliza a prova da construção da folheação vertical no caso não uniforme. □

Bibliografia

- [Cal1] D. Calegari, *\mathbb{R} -covered foliation of hyperbolic 3-manifolds*, *Geom. Topol.* 3 (1999) 137-153(electronic).
- [Cal2] D. Calegari, *The geometry of \mathbb{R} -covered foliation*, *Geom. Topol.* 4 (2002) 457-515(electronic).
- [Cal3] D. Calegari, *The geometry and topology of \mathbb{R} -covered foliations*, *Elec. Res. Ann. of the AMS*, 6 (2002) 31-39.
- [Ca-Li] Camacho, A. Lins Neto., *Geometric theory of foliations*, traducido do português por Sue Goodman. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA (1985).
- [Can] A. Candel, *Uniformization of surface lamination*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 26(1993) 489-516.
- [Fe] Sergio R. Fenley., *Foliation, topology and geometry of 3-manifold: \mathbb{R} -covered foliation and transverse pseudo-Anosov flows*, *Comment. Math. Helv.* 77(2002) 415-490.
- [K] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and Discrete Grups: Lectures on thurston's hyperblisation*, *Progress en Math.*, Birkhauser, 2000.
- [Li] E. Lima., *Espaço de recobrimento e grupo fundamental*, *Coleção Matemática Universitária*, IMPA, 1998.
- [Pa] F. Palmeira *Open manifolds foliated by planes*, *Ann. of Math.* 107(1978), 109-131.
- [Sc-Mo] Scárdua, C. Morales, *Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds*, 24^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2003.
- [Th1] W. Thurston, *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton lecture notes (1979).

- [Th2] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surface*, Bull. A.M.S 19 (1998), 417-431.
- [Th3] W. Thurston, *Three manifold, foliations and circles I*, arxiv:math.GT/9712268.