

**UNIVERSIDADE FEDERAL  
FLUMINENSE**

**Instituto de Matemática**

**Generalizações do Teorema de  
Poincaré-Birkhoff**

**Jesus Enrique Achire Quispe**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Andres Koropecki

Niterói, 08 de Março de 2010

# Dedicatória

Para minha família.

# Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar a Deus por me dar a vida.

Também quero agradecer a muitas pessoas que me ajudaram de uma ou outra forma a realizar este trabalho. Infelizmente não poderei citar todas, contudo gostaria agradecer algumas delas.

Ao meu orientador Andres Koropecki por acreditar em minhas capacidades, pela paciência e a compreensão durante o mestrado na UFF, muito obrigado!

A meus professores Francisco Fontanelli, Gabriel Calsamiglia, Valentin Sisko pelos ensinamentos. Ao professor Sebastião Firmo, quem foi meu coorientador, pelas conversas que tivemos.

Aos funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da UFF por tornarem os tramites burocráticos mais simples. Em especial a Mariana e ao coordenador da posgraduação.

A meus pais Meliton Achire e Agripina Quispe, pelo apoio, amor, por se sacrificarem fazendo de tudo para me proporcionar as oportunidades que nunca tiveram. Muito obrigado amados pais!

A meus professores da graduação na UNSA, em especial aos amigos professores Walter Torres e Richard Troncoso pelos seus sábios conselhos e por enxergar em nós qualidades e capacidades que desconhecíamos.

A minha noiva Marina por sempre estar ao meu lado e ser uma companheira maravilhosa.

A todos meus amigos do IME da UFF por tornarem nosso ambiente de trabalho mais agradável, em especial a Claudio, Claudia, Cristian, Michael, Gerson, Sonia, Pati, Tito, Camilo, Jaque, Cris, Fernando, Gladis, Alvaro. Muito obrigado pessoal!

À CAPES pelo auxílio financeiro.

## RESUMO

No presente trabalho apresentaremos algumas generalizações do seguinte teorema.

**Teorema de Poincaré-Birkhoff:** *Todo homeomorfismo de torção do anel fechado que preserva área tem pelo menos dois pontos fixos.*

A primeira generalização que apresentaremos é devido a J. Franks [*Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*], substituindo a condição de torção por uma condição mais topológica em termos de discos de retorno. A condição de preservar área também é substituída pela condição de não ter pontos errantes. Esse teorema, a diferencia de Poincaré-Birkhoff vale também para o anel aberto.

Outro resultado que iremos expor é uma versão um pouco mais geral do teorema de Franks devida a Richerson e Wiseman. Nessa versão, em vez de supor que não há pontos errantes, supõe que o conjunto não errante é conexo.

Vemos também que o teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel fechado segue desta generalização. Finalmente damos alguns exemplos que mostram que os resultados expostos são “ótimos”.

## ABSTRACT

In this work we present some generalizations of the following theorem:

**Theorem Poincaré-Birkhoff:** *Every area-preserving homeomorphism of the closed annulus which satisfy a boundary twist condition has at least two fixed points.*

The first generalization that we present is due to J. Franks [*Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*], by substituting the boundary twist condition for a condition more topological in terms of returning disks. The area-preserving condition is also replaced by the weaker condition that every point be no-wandering. Thus, this theorem is also applied to the open annulus.

Another result, which we also expose, is a version slightly more general than Frank's theorem due to Richerson and Wiseman. In this version, instead of assuming that all point is no-wandering, assumes that the set of the non-wandering points is connected.

We also see that the Poincaré-Birkhoff for the closed annulus follows from this generalization. Finally we give some examples which show that the results presented are "optimal".

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 O grupo fundamental . . . . .	3
1.2 Homotopia de aplicações . . . . .	5
1.3 Espaço de recobrimento . . . . .	7
1.4 Levantamento de caminhos e homotopias . . . . .	9
1.5 Teorema fundamental de levantamento . . . . .	11
1.6 Grau . . . . .	13
1.7 Índice . . . . .	17
<b>2 Homeomorfismos do anel</b>	<b>24</b>
2.1 Levantamentos de homeomorfismos do anel . . . . .	24
2.2 Teorema de Lefschetz para o anel fechado . . . . .	28
2.3 Homeomorfismos do anel que preservam área e homeomorfismos de torção	31
<b>3 Generalização do Teorema de Poincaré-Birkhoff</b>	<b>35</b>
3.1 Pontos não errantes e pontos recorrentes . . . . .	36
3.2 Cadeias de discos . . . . .	38
3.3 Discos de retorno . . . . .	46
3.4 Homeomorfismos do anel aberto . . . . .	49
3.5 Conseqüências do teorema 3.24 . . . . .	51
3.5.1 $\Omega(f)$ conexo . . . . .	51
3.5.2 Homeomorfismos do anel fechado . . . . .	53
3.5.3 Número de rotação . . . . .	55
3.6 Exemplos . . . . .	62



# Introdução

No presente trabalho apresentaremos algumas generalizações do teorema de Poincaré-Birkhoff.

**Teorema de Poincaré-Birkhoff:** *Todo homeomorfismo de torção do anel fechado que preserva área tem pelo menos dois pontos fixos.*

A primeira generalização que apresentaremos é devido a J. Franks [4], substituindo a condição de torção por uma condição mais topológica em termos de discos de retorno. A condição de preservar área também é substituída pela condição de não ter pontos errantes. Este teorema, ao contrario do teorema de Poincaré-Birkhoff, vale também para o anel aberto.

Outro resultado que iremos expor é uma versão um pouco mais geral do teorema de Franks devida a Richenson e Wiseman [3]. Nessa versão, em vez de supor que não há pontos errantes, supõe-se que o conjunto não errante é conexo.

No capítulo 1 faremos um resumo das ferramentas básicas que iremos usar nos seguintes capítulos. Definimos o índice de um ponto fixo e enunciamos seus principais propriedades.

No capítulo 2 veremos algumas propriedades dos homeomorfismos do anel. Veremos como são seus levantamentos e caracterizamos os levantamentos de homeomorfismos do anel homotópicos à identidade. Também provaremos uma versão particular do teorema de Lefschetz, que diz que a soma dos índices dos pontos fixos de uma aplicação contínua definida num compacto é igual ao numero de Lefschetz da aplicação. A versão que veremos é para o anel fechado no qual o número de Lefschetz é sempre zero.

No capítulo 3 provaremos o teorema principal (teorema 3.24). O primeiro passo chave para a demonstração deste teorema é generalizar o teorema de Brouwer, sobre homeomorfismos planares, usando o conceito de cadeia periódica de discos que introduziremos. Depois definiremos discos de retorno, e veremos que há uma importante relação entre cadeia periódica de discos e discos de retorno. De fato, veremos que levantando uma cadeia periódica de discos podemos obter discos de retorno. Uma vez provado o teorema,



veremos que o teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel fechado segue do resultado principal, e também veremos algumas conseqüências desses teoremas. Finalmente damos alguns exemplos que mostram que os resultados expostos são “ótimos”.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo faremos um resumo das ferramentas que usaremos nos próximos capítulos. As cinco primeiras seções contêm definições e resultados básicos de espaços de recobrimento e grupo fundamental. Na seção 1.6 definiremos o grau de um caminho no círculo e enunciaremos suas principais propriedades. Usando o conceito de grau de um caminho, definiremos, na seção 1.7, o índice de um caminho com respeito a uma aplicação contínua, o índice de um ponto fixo isolado de uma aplicação contínua e mostraremos algumas de suas propriedades.

### 1.1 O grupo fundamental

Seja  $X$  um espaço topológico. Um caminho em  $X$  é uma aplicação contínua  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ . O ponto  $x_0 = \alpha(0)$  é chamado ponto inicial e o ponto  $x_1 = \alpha(1)$  é chamado de ponto final. Diremos que  $\alpha$  é um caminho do ponto  $x_0$  ao ponto  $x_1$ . Se  $x_0 = x_1$ , chamamos  $\alpha$  de caminho fechado ou laço com ponto base  $x_0$ .

Dados dois caminhos  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  com os mesmos pontos iniciais e finais, i.e,  $\alpha(0) = \beta(0)$  e  $\alpha(1) = \beta(1)$ , uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$  é uma aplicação contínua  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que:

$$\begin{aligned}H(s, 0) &= \alpha(s), & H(s, 1) &= \beta(s) \\H(0, t) &= \alpha(0) = \beta(0) \\H(1, t) &= \alpha(1) = \beta(1)\end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $s, t$  em  $[0, 1]$ . Nesse caso dizemos que  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicos e escrevemos  $H: \alpha \simeq \beta$  ou simplesmente  $\alpha \simeq \beta$ .

Se  $\alpha$  é um caminho de um ponto  $x_0$  a um ponto  $x_1$  e  $\beta$  é um caminho de  $x_1$  a um ponto  $x_2$ , existe um caminho chamado caminho justaposto  $\alpha * \beta$ , que é o caminho de  $x_0$  a  $x_2$  percorrendo primeiramente  $\alpha$  e logo  $\beta$ , dado por:

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & ; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se  $\alpha$  é um caminho de  $x_0$  a  $x_1$ , existe um caminho chamado caminho inverso  $\alpha^{-1}$  que percorre  $\alpha$  de  $x_1$  a  $x_0$  :

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

Para qualquer ponto  $x$  em  $X$ , denotemos por  $\xi_x$  o caminho constante:

$$\xi_x(t) = x, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

No conjunto de caminhos em  $X$  de  $x_0$  ao ponto  $x_1$ , a relação de homotopia é uma relação de equivalência. Assim, dado  $\alpha$  caminho de  $x_0$  a  $x_1$  podemos considerar a classe de homotopia  $[\alpha]$  que consiste de todos os caminhos de  $x_0$  a  $x_1$  homotópicos a  $\alpha$ .

Verifica-se que dados  $\alpha \simeq \alpha'$  e  $\beta \simeq \beta'$  então  $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$  sempre que as justaposições  $\alpha * \beta$  e  $\alpha' * \beta'$  tenham sentido. Daí segue que dadas duas classes de homotopia  $[\alpha], [\beta]$  tal que o ponto inicial de  $\beta$  coincide com o ponto final de  $\alpha$  o produto  $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$  está bem definido, i.é, não depende do representante das classes de homotopia. Em particular podemos multiplicar caminhos fechados com mesmo ponto base.

**Teorema 1.1.** *Seja  $\Pi_1(X, x_0)$  o conjunto das classes de homotopia de laços em  $X$  com ponto base  $x_0$ . Se a multiplicação em  $\Pi_1(X, x_0)$  é definido por  $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$  para duas classes correspondentes aos laços  $\alpha$  e  $\beta$  com ponto base em  $x_0$ , então  $\Pi_1(X, x_0)$  é um grupo no qual o elemento neutro é a classe do laço constante  $\xi_{x_0}$  e a inversa de uma classe  $[\alpha]$  é a classe do laço inverso  $[\alpha^{-1}]$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [9], pág. 8.

O grupo  $\Pi_1(X, x_0)$  do teorema anterior é chamado o grupo fundamental de  $X$  com ponto base  $x_0$ .

Dados dois pontos  $x_0$  e  $x_1$  em  $X$ , se existe um caminho  $\gamma$  de  $x_0$  a  $x_1$ , então a aplicação  $\bar{\gamma}: [\alpha] \mapsto [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$  é um isomorfismo do grupo  $\Pi_1(X, x_0)$  sobre  $\Pi_1(X, x_1)$ . De fato, se  $\alpha, \beta \in \Pi_1(X, x_0)$  tem-se  $\bar{\gamma}([\alpha][\beta]) = \bar{\gamma}([\alpha * \beta]) = [\gamma * (\alpha * \beta) * \gamma^{-1}] = [(\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1})] = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}][\gamma * \beta * \gamma^{-1}] = \bar{\gamma}([\alpha])\bar{\gamma}([\beta])$  e além disso, é claro que

$[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$  é um inverso bilateral para  $\bar{\gamma}$ . Como consequência, se  $X$  é conexo por caminhos o grupo  $\Pi_1(X, x_0)$  é independente do ponto base  $x_0$  a menos de isomorfismo. Neste caso escrevemos simplesmente  $\Pi_1(X)$  em lugar de  $\Pi_1(X, x_0)$  e o chamamos o grupo fundamental de  $X$ .

Algumas vezes consideraremos também homotopias livres entre caminhos fechados. Dois caminhos fechados  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  dizem-se livremente homotópicos quando existe uma aplicação contínua  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $H(s, 0) = \alpha(s)$ ,  $H(s, 1) = \beta(s)$  e  $H(0, t) = H(1, t)$  para quaisquer  $s, t \in [0, 1]$ . A última igualdade significa que, para todo  $t \in [0, 1]$  o caminho  $H_t: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $H_t(s) = H(s, t)$  é fechado.

A relação de homotopia livre também é uma relação de equivalência.

Prova-se o seguinte resultado sobre caminhos livremente homotópicos (ver [5] págs 38 e 40).

**Proposição 1.2.** *Sejam  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  caminhos fechados com ponto base  $x_0$ . Então  $\alpha$  e  $\beta$  são livremente homotópicos se, e somente se, as classes  $[\alpha]$  e  $[\beta]$  são elementos conjugados do grupo  $\Pi_1(X, x_0)$ . Como consequência, se  $\Pi_1(X, x_0)$  é abeliano então  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicos.*

Se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua e  $f(x_0) = y_0$ , então  $f$  determina um homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} f_{\#}: \Pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \Pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

chamaremos  $f_{\#}$  de homomorfismo induzido. As seguintes propriedades são facilmente verificadas.

- (1) Se  $Y = X$  e  $f = \text{Identidade}$  de  $X$ , então  $f_{\#} = \text{Identidade}$ .
- (2) Dados  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  contínuas, tem-se  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ .

## 1.2 Homotopia de aplicações

Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g: X \rightarrow Y$  dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . A aplicação  $H$  é chamada uma homotopia de  $f$  a  $g$ . Nesse caso escrevemos  $H: f \simeq g$  ou simplesmente  $f \simeq g$ .

Dada uma homotopia  $H: f \simeq g$  consideremos para cada  $t \in [0, 1]$ , a aplicação contínua  $H_t: X \rightarrow Y$ , definida por  $H_t(x) = H(x, t)$ . Dar uma homotopia  $H$  equivale a definir “uma família contínua a um parâmetro”  $(H_t)_{t \in [0,1]}$  de aplicações de  $X$  em  $Y$ . A “continuidade” da família significa, neste caso, que  $(x, t) \mapsto H_t(x)$  é uma aplicação contínua. Temos  $H_0 = f$  e  $H_1 = g$ , de modo que a família  $(H_t)_{t \in [0,1]}$  começa com  $f$  e termina com  $g$ .

A relação de homotopia entre aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  é uma relação de equivalência. As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas classes de homotopia. A classe de homotopia de uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  é indicada pelo símbolo  $[f]$ . O conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  é representado pelo símbolo  $[X, Y]$ .

Uma isotopia entre dois homeomorfismos  $f, g: X \rightarrow Y$  é uma homotopia  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $g$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$  tem-se que a aplicação  $H_t: X \rightarrow Y$ ,  $H_t(x) = H(t, x)$ , é um homeomorfismo.

Provaremos um resultado que usaremos no seguinte capítulo.

**Lema 1.3.** *Sejam  $f, g: X \rightarrow Y$  homotópicos. Se  $\eta$  é um caminho fechado em  $X$ , então  $f \circ \eta$  e  $g \circ \eta$  são livremente homotópicos.*

*Demonstração.* Seja  $H: I \times X \rightarrow Y$  a homotopia tal que  $H(0, x) = f(x)$  e  $H(1, x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Definamos  $G: I \times I \rightarrow Y$  por  $G(s, t) = H(t, \eta(s))$ . Temos  $G(s, 0) = H(0, \eta(s)) = f(\eta(s))$ ,  $G(s, 1) = H(1, \eta(s)) = g(\eta(s))$  e  $G(0, t) = H(t, \eta(0)) = H(t, \eta(1)) = G(1, t)$  para todo  $t, s \in I$ . Assim,  $G$  é uma homotopia livre entre  $f \circ \eta$  e  $g \circ \eta$ .  $\square$

Verifica-se que a composição de aplicações preserva homotopias, i.e, se  $f, f': X \rightarrow Y$  e  $g, g': Y \rightarrow Z$  são aplicações contínuas tal que  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$ , então  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ .

Dizemos que dois espaços  $X$  e  $Y$  tem o mesmo tipo de homotopia se existem duas aplicações contínuas  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f$  é homotópico à identidade de  $X$  e  $f \circ g$  é homotópico à identidade de  $Y$ . Uma tal aplicação  $f$  é chamada de equivalência homotópica. Neste caso escrevemos  $X \equiv Y$  ou  $f: X \equiv Y$ .

Espaços do mesmo tipo de homotopia são equivalentes sob o ponto de vista homotópico. Por exemplo, se  $X \equiv X'$  e  $Y \equiv Y'$  então  $[X, Y]$  e  $[X', Y']$  possuem o mesmo número cardinal. Mais precisamente, se  $\varphi: X' \equiv X$  e  $\psi: Y \equiv Y'$  então  $[f] \mapsto [\psi \circ f \circ \varphi]$  é uma bijeção de  $[X, Y]$  sobre  $[X', Y']$ . Outro fato importante de espaços com mesmo tipo de homotopia é expressado na seguinte proposição.

**Proposição 1.4.** *Se dois espaços topológicos  $X, Y$  conexos por caminhos, têm o mesmo tipo de homotopia então seus grupos fundamentais são isomorfos.*

A demonstração de este fato pode ser encontrada em [5] pág. 39.

**Exemplo 1.5.** *Chamaremos de anel aberto ao produto  $A = S^1 \times (0, 1)$  e de anel fechado ao produto  $\bar{A} = S^1 \times [0, 1]$ . Consideremos as aplicações contínuas  $g: S^1 \rightarrow A$  e  $h: A \rightarrow S^1$  dadas por:*

$$g(w) = \left( w, \frac{1}{2} \right) \quad e \quad h(w, z) = w$$

*Temos que  $h \circ g = Id_{S^1}$  e  $g \circ h: (w, z) \mapsto (w, \frac{1}{2})$ .*

*Definimos a homotopia linear  $H: I \times A \rightarrow A$  por*

$$H(t, (w, z)) = \left( w, tz + (1-t)\frac{1}{2} \right).$$

*Temos*

$$H(0, (w, z)) = \left( w, \frac{1}{2} \right) = g \circ h(w, z)$$

*e*

$$H(1, (w, z)) = (w, z) = Id_A(w, z)$$

*Por tanto,  $H: g \circ h \simeq Id_A$ , i.e,  $g$  e  $h$  definem uma equivalência homotópica entre  $A$  e  $S^1$ . Assim  $A$  e  $S^1$  tem o mesmo tipo de homotopia. Note que isto é válido também para o anel fechado, então  $\bar{A}$  e  $S^1$  também tem o mesmo tipo de homotopia.*

*Daí, pela proposição anterior, podemos concluir que  $\Pi_1(A) \cong \Pi_1(S^1)$  (isomorfos). Mas diante veremos que o grupo fundamental do círculo é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  (ver seção 1.6), por tanto  $\Pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ . Além disso, denotando por  $[S^1, S^1]$  e  $[A, A]$  o conjunto das classes de homotopia de aplicações contínuas de  $S^1$  em  $S^1$  e de  $A$  em  $A$ , respectivamente, temos que  $[S^1, S^1]$  e  $[A, A]$  estão em correspondência biunívoca. O mesmo é válido para o anel fechado.*

### 1.3 Espaço de recobrimento

Sejam  $X$  e  $\tilde{X}$  espaços topológicos.

**Definição 1.6.** *Uma aplicação de recobrimento (ou simplesmente um recobrimento) é uma aplicação contínua  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  com a propriedade que cada ponto de  $X$  tem uma vizinhança aberta  $U$  tal que  $P^{-1}(U)$  é uma união disjunta de conjuntos abertos, cada*

uma das quais é aplicado homeomorficamente por  $P$  sobre  $U$ . Cada aberto  $U$  desse tipo chama-se vizinhança distinguida. O espaço  $\tilde{X}$  chama-se espaço de recobrimento de  $X$  e, para cada  $x \in X$  o conjunto  $P^{-1}(x)$  chama-se a fibra sobre  $x$ . Algumas vezes,  $X$  chama-se o espaço base.

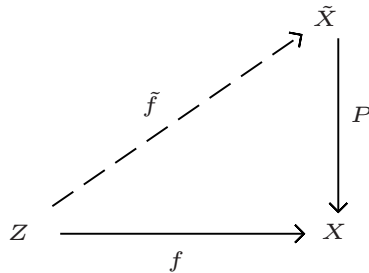
Um recobrimento é trivial se, na definição, pode-se tomar  $U$  sendo todo  $X$ . Os seguintes exemplos são recobrimentos não triviais.

**Exemplo 1.7.** A aplicação  $\xi_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\xi_0(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  é uma aplicação de recobrimento. Isto é verificado mais diante, no começo da seção 1.4.

**Exemplo 1.8.** Seja  $A = S^1 \times (0, 1)$  o anel aberto e seja  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  a faixa aberta. A aplicação  $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$  dada por  $\pi(t, s) = (\xi_0(t), s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s)$  é uma aplicação de recobrimento. Para mostrar isto tomemos  $(z, w) \in A$  arbitrário. Como  $\xi_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  é um recobrimento então existe uma vizinhança distinguida  $V(z)$  contendo  $z$ . Pondo  $U = V(z) \times (0, 1)$  tem-se  $\pi^{-1}(U) = \xi_0^{-1}(V(z)) \times (0, 1)$ . Agora, sendo  $V(z)$  uma vizinhança distinguida podemos escrever  $\xi_0^{-1}(V(z)) = \bigcup V_k$  onde cada  $V_k$  é homeomorfo a  $V(z)$ , logo  $\pi^{-1}(U) = \bigcup (V_k \times (0, 1))$  onde cada  $V_k \times (0, 1)$  é homeomorfo a  $U$ .

O mesmo argumento trocando  $(0, 1)$  por  $[0, 1]$  mostra que a aplicação  $\pi: \tilde{A} \rightarrow \bar{A}$ , onde  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$  e  $\bar{A} = S^1 \times [0, 1]$ , é uma aplicação de recobrimento.

Se  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  é um recobrimento e  $f: Z \rightarrow X$  é uma aplicação contínua, um levantamento de  $f$  é uma aplicação contínua  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $P \circ \tilde{f} = f$ . Esta situação se pode ver no seguinte diagrama:



Uma pergunta que surge é a existência de uma tal  $\tilde{f}$  para uma aplicação contínua  $f$ . Na seção 1.5 enunciaremos um teorema que, dada certas condições sobre os espaços  $X$ ,  $\tilde{X}$  e  $Z$ , assegura a existência do levantamento  $\tilde{f}$  de  $f$ . Outra pergunta que surge é a unicidade do levantamento; o seguinte lema dá uma espécie de unicidade para um tal levantamento se ele existir.

**Lema 1.9.** *Seja  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento e seja  $Z$  um espaço conexo. Suponha que existam aplicações contínuas  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  de  $Z$  a  $\tilde{X}$  tais que  $P \circ \tilde{f}_1 = P \circ \tilde{f}_2$ . Se  $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$  para algum ponto  $z$  em  $Z$ , então  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [10], pág 155.

## 1.4 Levantamento de caminhos e homotopias

Antes de passar a enunciar os teoremas de levantamento de caminhos e homotopias, vamos expor com muito detalhe o recobrimento do círculo dado no exemplo 1.7.

Seja  $\xi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a aplicação exponencial  $\xi(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$ . É claro que  $\xi$  é uma aplicação contínua. A igualdade  $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$  nos diz que a sobrejeção contínua  $\xi$  é um homomorfismo do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  sobre o grupo multiplicativo  $S^1$  (números complexos de módulo 1). O núcleo de  $\xi$  é o grupo  $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$ , formado pelos múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Assim, dado  $u \in S^1$ , temos  $\xi^{-1}(u) = \{t + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$  onde  $t \in \mathbb{R}$  é um número real qualquer tal que  $\xi(t) = u$ . Note-se que  $\xi(t) = u$  significa que  $t$  é uma determinação em radianos, do ângulo que  $u$  faz com o semi-eixo positivo das abscissas.

A restrição de  $\xi$  a todo intervalo  $(t, t + 2\pi)$  de comprimento  $2\pi$  é um homeomorfismo sobre  $S^1 - \{\xi(t)\}$ . Assim, todo ponto  $u = \xi(t) \in S^1$  possui uma vizinhança aberta  $V = S^1 - \{-u\}$ , cuja imagem inversa  $\xi^{-1}(V)$  é a reunião dos intervalos abertos  $I_n = (t + \pi(2n - 1), t + \pi(2n + 1))$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , cada um dos quais é aplicado homeomorficamente por  $\xi$  sobre  $V$ .

Assim fica demonstrado que  $\xi$  é uma aplicação de recobrimento. A aplicação  $\xi$  não difere da aplicação  $\xi_0$  do exemplo 1.7. Portanto, um argumento similar mostra que  $\xi_0$  é uma aplicação de recobrimento.

**Teorema 1.10.** *Dados um intervalo  $J = [a, b]$ , uma função contínua  $\alpha: J \rightarrow S^1$  e um número real  $t_0$  com  $\alpha(a) = e^{it_0}$ , existe uma única função contínua  $\tilde{\alpha}: J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(s) = \xi \circ \tilde{\alpha}(s)$  para todo  $s \in J$  e  $\tilde{\alpha}(a) = t_0$ .*

Em outras palavras o teorema diz que qualquer caminho no círculo pode ser levantado a um caminho na reta, e se fixamos um ponto inicial então o caminho é único.

*Demonstração.* Isto é válido no caso em que  $\alpha(J) \subset S^1 - \{y\}$  para algum  $y \in S^1$ : como  $\alpha(a) \neq y$ , existe um único  $x \in \xi^{-1}(y)$  tal que  $t_0 \in (x, x + 2\pi)$ . Então  $\xi_x = \xi|_{(x, x+2\pi)}$  é um homeomorfismo sobre  $S^1 - \{y\}$  e, pondo  $\tilde{\alpha} = \xi_x^{-1} \circ \alpha$ , obtemos a função desejada. No caso geral, particionamos o intervalo  $J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_k$  de tal forma que  $\alpha(J_i) \neq S^1$



para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ . Para  $\alpha_1 = \alpha|_{J_1}$  achamos um levantamento  $\tilde{\alpha}_1: J_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $\tilde{\alpha}_1(a) = t_0$ . Se  $s_1$  é o extremo comum de  $J_1$  e  $J_2$ , para  $\alpha_2 = \alpha|_{J_2}$  escolhemos um levantamento  $\tilde{\alpha}_2: J_2 \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\alpha_2$ , tal que  $\tilde{\alpha}_2(s_1) = \tilde{\alpha}_1(s_1)$ . E assim sucessivamente até obter  $\tilde{\alpha}_k: J_k \rightarrow \mathbb{R}$  levantamento de  $\alpha_k = \alpha|_{J_k}$ , tal que  $\tilde{\alpha}_k(s_{k-1}) = \tilde{\alpha}_{k-1}(s_{k-1})$  onde  $s_{k-1}$  é o ponto comum de  $J_{k-1}$  e  $J_k$ . Finalmente definimos  $\tilde{\alpha}: J \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_i(t)$  se  $t \in J_i$ . Para provar a unicidade basta observar que se  $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}: J \rightarrow \mathbb{R}$  são levantamentos de  $\alpha$ , i.e,  $\xi \circ \tilde{\alpha} = \xi \circ \hat{\alpha}$ , então  $\eta(s) = [\tilde{\alpha}(s) - \hat{\alpha}(s)]/2\pi$  é, para todo  $s \in J$ , um inteiro que depende continuamente de  $s$ . Segue-se que  $\eta$  é constante. Em particular, se  $\tilde{\alpha}(a) = \hat{\alpha}(a)$  então  $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$ .  $\square$

O teorema anterior é valido para recobrimentos em geral, como afirma o seguinte teorema.

**Teorema 1.11** (Levantamento de um caminho). *Seja  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento, e seja  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  um caminho em  $X$ . Seja  $y$  um ponto de  $\tilde{X}$  com  $P(y) = \alpha(0)$ . Então existe um único caminho  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = y$  e  $P \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$  para todo  $t$  no intervalo  $[0, 1]$ .*

A demonstração deste teorema é similar com a demonstração do teorema anterior e pode ser vista em [10] pág 156.

**Teorema 1.12** (Levantamento de uma homotopia). *Seja  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento com  $P(y_0) = x_0$ . Seja também  $f: Z \rightarrow X$  com  $f(z_0) = x_0$ , uma aplicação continua que têm um levantamento  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$  com  $\tilde{f}(z_0) = y_0$ . Então, qualquer homotopia  $F: Z \times [0, 1] \rightarrow X$  com  $F(z, 0) = f(z)$  para todo  $z \in Z$  pode ser levantada a uma homotopia  $\tilde{F}: Z \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  com  $\tilde{F}(z, 0) = \tilde{f}(z)$  para todo  $z \in Z$ .*

A demonstração pode ser vista em [9] pág 22.

Como corolário, temos o seguinte resultado que será útil depois.

**Lema 1.13.** *Se  $\alpha$  e  $\beta$  são caminhos em  $X$  homotópicos, com ponto inicial  $\alpha(0) = \beta(0) = y_0$  e ponto final  $\alpha(1) = \beta(1) = y_1$ , então seus levantamentos  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: I \rightarrow \tilde{X}$  começando no mesmo ponto inicial  $x_0$ , tem o mesmo ponto final e além disso são homotópicos.*

*Demonstração.* Seja  $H: I \times I \rightarrow X$  uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Pelo teorema anterior podemos levantar esta homotopia a uma homotopia  $\tilde{H}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{H}(0, s) = \tilde{\alpha}(s)$  para todo  $s \in I$ . Temos que  $\pi(\tilde{H}(0, t)) = H(0, t) = y_0$  e  $\pi(\tilde{H}(1, t)) = H(1, t) = y_1$  para todo  $t \in I$ , i.e,  $\tilde{H}(0, t) \in \pi^{-1}(y_0)$  e  $\tilde{H}(1, t) \in \pi^{-1}(y_1)$ . Agora, como as aplicações

$t \mapsto \tilde{H}(0, t)$  e  $t \mapsto \tilde{H}(1, t)$  são contínuas, sendo  $\pi^{-1}(y_0)$  e  $\pi^{-1}(y_1)$  discretos, então são constantes, logo  $\tilde{H}(0, t) = \tilde{H}(0, 0) = x_0$  e  $\tilde{H}(1, t) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{\alpha}(1)$  para todo  $t \in I$ . Em particular  $\tilde{H}(0, 1) = x_0$  e  $\tilde{H}(1, 1) = \tilde{\alpha}(1)$ . Assim, o caminho  $s \mapsto \tilde{H}(s, 1)$  começa em  $x_0$  e como  $\pi(\tilde{H}(s, 1)) = H(s, 1) = \beta(s)$ , pela unicidade de levantamentos de caminhos, concluímos que  $\tilde{H}(s, 1) = \tilde{\beta}(s)$  para todo  $s$ . Por tanto  $\tilde{H}$  é uma homotopia entre  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\beta}(1) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\alpha}(1)$ .  $\square$

## 1.5 Teorema fundamental de levantamento

Aqui enunciaremos sem demonstração um teorema muito importante que fala da existência do levantamento de uma aplicação contínua qualquer. Logo enunciaremos alguns corolários.

**Definição 1.14.** *Um espaço  $X$  é localmente conexo por caminhos se para cada ponto  $x \in X$  e cada aberto  $V$  contendo  $x$ , existe um conjunto aberto e conexo por caminhos  $U$  com  $x \in U \subset V$ .*

**Teorema 1.15** (Teorema fundamental de levantamentos). *Seja  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento, onde o espaço  $X$  é conexo por caminhos. Sejam  $Z$  um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e  $f: Z \rightarrow X$  uma aplicação contínua com  $f(z_0) = x_0$ . Dados  $y_0 \in P^{-1}(x_0)$ , a fim de que  $f$  possua um levantamento  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$  com  $\tilde{f}(z_0) = y_0$ , é necessário e suficiente que*

$$f_{\#}[\Pi_1(Z, z_0)] \subset P_{\#}[\Pi_1(\tilde{X}, y_0)].$$

A demonstração desse teorema pode ser vista em [10], pág 181.

Um espaço topológico  $X$  diz-se simplesmente conexo por caminhos quando é conexo por caminhos e, para todo  $x_0 \in X$ , tem-se  $\Pi_1(X, x_0) \cong \{0\}$ . Intuitivamente, um espaço simplesmente conexo por caminhos é um espaço conexo por caminhos no qual qualquer laço pode ser homotópicamente reduzido ao laço constante (a um ponto).

Observe que se  $Z$  é simplesmente conexo por caminhos então a condição no teorema  $f_{\#}[\Pi_1(Z, z_0)] \subset P_{\#}[\Pi_1(\tilde{X}, y_0)]$  é satisfeita, logo temos:

**Corolário 1.16.** *Sejam  $X$  conexo por caminhos e  $Z$  simplesmente conexo por caminhos. Então toda aplicação contínua  $f: Z \rightarrow X$ , admite um levantamento  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$ .*

Este corolário explica por que caminhos podem sempre ser levantados:  $[0, 1]$  é simplesmente conexo por caminhos.

Dados  $P_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  e  $P_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  dois recobrimentos com o mesmo espaço base  $X$ , um isomorfismo entre eles é um homeomorfismo  $h: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  tal que  $P_2 \circ h = P_1$ . Dizemos que os recobrimentos  $P_1$  e  $P_2$  são equivalentes se existe um isomorfismo entre eles.

**Corolário 1.17.** *Seja  $X$  um espaço conexo e localmente conexo por caminhos. Seja  $P_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  e  $P_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  dois recobrimentos, com  $\tilde{X}_1$  e  $\tilde{X}_2$  conexos e sejam  $P_1(x_1) = x$  e  $P_2(x_2) = x$ . A fim que exista um isomorfismo entre os recobrimentos preservando os pontos bases, é necessário e suficiente que*

$$P_{1\#} \left( \Pi_1(\tilde{X}_1, x_1) \right) = P_{2\#} \left( \Pi_1(\tilde{X}_2, x_2) \right)$$

**Corolário 1.18.** *Seja  $P_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  um recobrimento, cujo domínio  $\tilde{X}_1$  é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento  $P_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  com  $\tilde{X}_2$  conexo, existe um recobrimento  $P_3: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  tal que  $P_2 \circ P_3 = P_1$ .*

Para a demonstração ver [5] pág 163.

Por causa do corolário anterior, um recobrimento  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  com  $\tilde{X}$  simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos chama-se um recobrimento universal, pois  $\tilde{X}$  recobre qualquer outro recobrimento. Segue do corolário 1.17 que se existe um recobrimento universal, então ele é único a menos de isomorfismos.

Os recobrimentos nos exemplos 1.7 e 1.8 são recobrimentos universais. Nos seguintes capítulos consideraremos os exemplos 1.7 e 1.8 como recobrimento universal do círculo e do anel respectivamente,  $\mathbb{R}$  será o espaço de recobrimento universal do círculo e  $\tilde{A}$  será nosso espaço de recobrimento universal para o anel.

Dado um recobrimento  $P: \tilde{X} \rightarrow X$ , um automorfismo é um homeomorfismo  $h$  de  $\tilde{X}$  sobre si mesmo tal que  $P \circ h = P$ . O conjunto  $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$  dos automorfismos do recobrimento  $P$  constitui um grupo relativamente à composição de aplicações. Às vezes os automorfismos são chamados as “transformações de recobrimento”, ou “translações de recobrimento”.

**Corolário 1.19.** *Se  $P: \tilde{X} \rightarrow X$  é um recobrimento, com  $\tilde{X}$  simplesmente conexo e  $X$  localmente conexo por caminhos. então  $\Pi_1(X, x) \cong \text{Aut}(\tilde{X}|X)$ .*

**Exemplo 1.20.** *Sejam os recobrimentos universais do círculo e do anel dados nos exemplos 1.7 e 1.8. Os automorfismo para o recobrimento universal do círculo são os homeomorfismo da reta  $f$  que satisfazem  $\xi_0 \circ f = \xi_0$ , daí  $f$  é uma translação inteira. Assim*

$$\text{Aut}(\mathbb{R}|S^1) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(t) = t + k \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

Do mesmo modo, um automorfismo para o recobrimento universal do anel são os homeomorfismos  $h$  da faixa  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  tais que  $\pi \circ h = \pi$ , daí  $h$  é uma translação inteira na primeira coordenada. Assim

$$\text{Aut}(\tilde{A}|A) = \{f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A} : f(t, s) = (t + k, s) \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

## 1.6 Grau

Seja  $\xi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a aplicação de recobrimento universal do círculo,  $\xi(t) = (\cos t, \sin t)$ . Seja  $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$  um caminho em  $S^1$ . Fixado  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi(t_0) = \alpha(0)$ , pelo teorema 1.10, existe uma única aplicação contínua  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\tilde{\alpha}(0) = t_0$  e tal que  $\xi \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

A aplicação  $\tilde{\alpha}$  é um levantamento de  $\alpha$  e é chamado função ângulo para  $\alpha$ . Se  $\hat{\alpha}$  é outra função ângulo para  $\alpha$  então  $\xi \circ \hat{\alpha}(t) = \alpha(t) = \xi \circ \tilde{\alpha}(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , logo  $\hat{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t) + 2\pi k(t)$  onde  $k$  é uma função tomando valores inteiros, e além disso contínua, logo constante. Então  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + 2\pi k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim as demais funções ângulo para  $\alpha$  que devem ter início nos pontos  $t_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , têm a forma  $\hat{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t) + 2\pi k$ . Por tanto, o número real  $(\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0))/2\pi$  não depende da função ângulo escolhida.

O número  $(\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0))/2\pi$  associado ao caminho  $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$ , chama-se grau do caminho  $\alpha$ , e é denotado por:

$$\text{grau}(\alpha) = \frac{\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)}{2\pi}$$

Se  $\alpha$  é um caminho fechado, então  $\alpha(1) = \alpha(0)$ , logo  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0) + 2n\pi$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Por tanto, quando  $\alpha$  é um caminho fechado o grau( $\alpha$ ) é um número inteiro.

O grau de um caminho fechado indica o número “líquido” de voltas que o ponto móvel  $\alpha(t)$  dá, ao longo da pista  $S^1$ , quando o tempo  $t$  varia de 0 a 1. “líquido” significa o número de voltas positivas (contra o relógio) menos o número de voltas negativas (com o relógio).

**Proposição 1.21.** *Propriedades do grau de um caminho:*

- (1) *Sejam  $\alpha_1, \alpha_2: [0, 1] \rightarrow S^1$  caminhos tal que  $\alpha_1(1) = \alpha_2(0)$ . Se  $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$  é a justaposição dos caminhos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  então  $\text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\alpha_1) + \text{grau}(\alpha_2)$ .*
- (2) *Seja  $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$  um caminho no círculo. Se  $\alpha^{-1}$  é o caminho inverso de  $\alpha$ , então  $\text{grau}(\alpha^{-1}) = -\text{grau}(\alpha)$ .*

- (3) Se  $\alpha, \beta: \rightarrow S^1$  são caminhos fechados livremente homotópicos, então  $\text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\beta)$ .
- (4) Se  $\alpha$  e  $\beta$  são caminhos fechados com  $\text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\beta)$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  são livremente homotópicos. Além disso,  $\alpha$  é homotópico a  $\beta$  se eles têm o mesmo ponto básico.
- (5) Dados  $p \in S^1$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , existe um caminho fechado  $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$  com ponto base  $p$ , tal que  $\text{grau}(\alpha) = k$ .

*Demonstração.* (1) Sejam  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  levantamento de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, com  $\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\alpha}_2(0)$ . Então  $\tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  faz sentido e, como se vê facilmente,  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2$  é um levantamento para  $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$ . Ora,  $2\pi \text{grau}(\alpha) = \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2(1) - \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2(0) = \tilde{\alpha}_2(1) - \tilde{\alpha}_1(0) = [\tilde{\alpha}_2(1) - \tilde{\alpha}_2(0)] + [\tilde{\alpha}_1(1) - \tilde{\alpha}_1(0)] = 2\pi[\text{grau}(\alpha_2) + \text{grau}(\alpha_1)]$ .

(2) Seja  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  levantamento de  $\alpha$ . Então  $\tilde{\alpha}^{-1}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é levantamento de  $\alpha^{-1}$ . Assim  $2\pi \text{grau}(\alpha^{-1}) = \tilde{\alpha}^{-1}(1) - \tilde{\alpha}^{-1}(0) = \tilde{\alpha}(0) - \tilde{\alpha}(1) = -2\pi \text{grau}(\alpha)$ .

A demonstração de (3), (4) e (5) pode ser vista em [5], pág 56.  $\square$

Segue destas propriedades que a aplicação  $\text{grau}: \Pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\text{grau}([\alpha]) = \text{grau}(\alpha)$  está bem definida e é um isomorfismo.

A cada classe de homotopia  $\varphi = [f] \in [S^1, S^1]$  associaremos um número  $\text{grau}(\varphi)$ , definido do seguinte modo. Consideremos a sobrejeção contínua  $\xi_0: [0, 1] \rightarrow S^1$ , dada por  $\xi_0(t) = e^{2\pi it}$ , e poremos  $\text{grau}(\varphi) = \text{grau}(f \circ \xi_0)$ .

Se  $f, f': S^1 \rightarrow S^1$  forem homotópicas, então os caminhos fechados  $f \circ \xi_0$  e  $f' \circ \xi_0$  serão livremente homotópicos e daí  $\text{grau}(f \circ \xi_0) = \text{grau}(f' \circ \xi_0)$ . Logo, a definição  $\text{grau}(\varphi) = \text{grau}(f \circ \xi_0)$  não depende da escolha do representante  $f$  na classe de homotopia  $\varphi$ . Temos por tanto uma aplicação bem definida:

$$\text{grau}: [S^1, S^1] \longrightarrow \mathbb{Z},$$

a qual é sobrejetiva pois se  $k \in \mathbb{Z}$  for dado arbitrariamente, a aplicação  $f: S^1 \rightarrow S^1$ , onde  $f(z) = z^k$ , cumpre  $\text{grau}([f]) = k$ . Finalmente  $\text{grau}$  é injetiva pois se  $f, g: S^1 \rightarrow S^1$  são tais que  $\text{grau}([f]) = \text{grau}([g])$  então  $\text{grau}(f \circ \xi_0) = \text{grau}(g \circ \xi_0)$  e daí usando a proposição 1.21 temos que os caminhos fechados  $f \circ \xi_0$  e  $g \circ \xi_0$  são livremente homotópicos o que nos dá, por passagem ao quociente, uma homotopia  $f \simeq g$  (ver a observação 1.22 abaixo).

Concluimos assim que a correspondência  $\varphi \mapsto \text{grau}(\varphi)$  é uma bijeção do conjunto  $[S^1, S^1]$  (classes de homotopia de aplicações contínuas de  $S^1$  em  $S^1$ ) sobre o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros.

**Observação 1.22.** Considerando a sobrejeção contínua  $\xi_0: [0, 1] \rightarrow S^1$ , dada por  $\xi_0(t) = e^{2\pi it}$ . Como  $I$  é compacto e  $S^1$  é Hausdorff,  $\xi_0$  é uma aplicação quociente, isto é, uma aplicação  $\bar{a}: S^1 \rightarrow X$  é contínua se, e somente se,  $a = \bar{a} \circ \xi_0: [0, 1] \rightarrow X$  é contínua. Ora, um caminho  $a: [0, 1] \rightarrow X$  pode ser escrito sob a forma  $a = \bar{a} \circ \xi_0$  se, e somente se, é fechado. Segue-se que a correspondência  $\bar{a} \mapsto a = \bar{a} \circ \xi_0$  define uma bijeção entre os caminhos fechados em  $X$  e as aplicações contínuas do círculo  $S^1$  no espaço  $X$ .

Analogamente, considerando a sobrejeção contínua  $\zeta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$  dada por

$$\zeta(s, t) = (\xi_0(s), t),$$

concluimos como acima que existe uma bijeção entre as homotopias  $\bar{H}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  e as homotopias livres de caminhos fechados  $H = \bar{H} \circ \zeta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ . Os caminhos fechados

$$a = \bar{a} \circ \xi_0 \quad e \quad b = \bar{b} \circ \xi_0$$

são livremente homotópicos se, e somente se, as aplicações correspondentes  $\bar{a}, \bar{b}: S^1 \rightarrow X$  são homotópicas.

Outra forma de ver o grau de uma aplicação  $f: S^1 \rightarrow S^1$  é como segue. Considere a aplicação de recobrimento  $\xi_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\xi_0(t) = e^{2\pi it}$  como a projeção de recobrimento universal do círculo. Pelo corolário 1.16, podemos levantar a aplicação  $f \circ \xi_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a uma aplicação  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e, tal que  $\xi_0 \circ \tilde{f} = f \circ \xi_0$ . Uma tal aplicação  $\tilde{f}$  é chamado levantamento de  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \xi_0 \downarrow & & \downarrow \xi_0 \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Se  $\hat{f}$  é outro levantamento de  $f$ , então  $\xi_0 \circ \tilde{f} = \xi_0 \circ \hat{f}$ , logo  $\tilde{f}(t) - \hat{f}(t) = k(t)$  onde  $k$  é uma aplicação tomando valores inteiros. Como  $k$  é diferença de duas aplicações contínuas ela é contínua, logo constante. Assim existe um inteiro  $k$  tal que  $\tilde{f}(t) = \hat{f}(t) + k$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto, os demais levantamentos de  $f$  são da forma  $\tilde{f} + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Segue deste

fato que o número  $\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x)$  não depende do levantamento. Além disso, este número não depende do ponto  $x \in \mathbb{R}$ . De fato, como  $\xi_0(\tilde{f}(x+1)) = f(\xi_0(x+1)) = f(\xi_0(x)) = \xi_0(\tilde{f}(x))$ , igualando os extremos temos  $\xi_0(\tilde{f}(x+1)) = \xi_0(\tilde{f}(x))$ , logo  $\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = k(x)$  onde  $k$  é uma função contínua tomando valores inteiros, então constante. Assim existe um inteiro  $k$  tal que  $\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Observemos que na definição de grau de um caminho  $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$  consideramos a aplicação de recobrimento  $\xi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\xi(t) = e^{it}$ . Se consideramos a aplicação de recobrimento  $\xi_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\xi_0(t) = e^{2\pi it}$ , é fácil ver que se  $\tilde{\alpha}$  é um levantamento de  $\alpha$  com respeito a  $\xi$  então  $\hat{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}}{2\pi}$  é um levantamento de  $\alpha$  com respeito a  $\xi_0$ . Assim  $\hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(0) = \frac{\tilde{\alpha}(1)}{2\pi} - \frac{\tilde{\alpha}(0)}{2\pi} = \text{grau}(\alpha)$ .

Desta observação, pondo  $\alpha = f \circ \xi_0|_{[0,1]}$  vemos que  $\xi_0 \circ \tilde{f}|_{[0,1]} = f \circ \xi_0|_{[0,1]} = \alpha$ , i.é,  $\tilde{f}|_{[0,1]}$  é um levantamento de  $\alpha$  e por tanto  $\text{grau}(f) = \text{grau}(f \circ \xi_0|_{[0,1]}) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Assim, podemos definir o grau de uma aplicação contínua  $f: S^1 \rightarrow S^1$  como o inteiro  $\text{grau}(f)$  que satisfaz  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + \text{grau}(f)$  para todo levantamento  $\tilde{f}$  de  $f$  e qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Das observações anteriores vemos que as duas definições de grau de uma aplicação contínua  $f: S^1 \rightarrow S^1$  coincidem.

**Proposição 1.23.** *A aplicação  $f \mapsto \text{grau}(f)$  é contínua na topologia  $C^0$  (convergência uniforme) e por tanto é localmente constante.*

*Demonstração.* Suponha  $g, f: S^1 \rightarrow S^1$  aplicações uniformemente próximas. Denotando por  $\|\cdot\|_0$  a norma uniforme, suponhamos  $\|f - g\|_0 < 1$ . Temos assim, que para todo  $x \in S^1$ ,  $f(x)$  e  $g(x)$  não são antipodas, logo a aplicação  $H: [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$ , dada por

$$H(t, x) = \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}$$

é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Assim,  $\text{grau}(f) = \text{grau}(g)$ . Isto mostra que o grau é localmente constante.  $\square$

**Corolário 1.24.** *Seja  $(\gamma_n)$ ,  $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow S^1$ , uma seqüência de caminhos fechados em  $S^1$ . Se  $\gamma_n$  converge uniformemente para um caminho  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$  então  $\text{grau}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grau}(\gamma_n)$ .*

*Demonstração.* Com efeito, podemos ver os caminhos fechados  $\gamma_n$  como aplicações do círculo, via a aplicação quociente  $\xi_0: [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $\xi_0(t) = e^{2\pi it}$ . Mais precisamente, para cada  $\gamma_n$  corresponde uma aplicação contínua  $f_n: S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $\gamma_n = f_n \circ \xi_0$ , e para  $\gamma$

corresponde uma aplicação contínua  $f: S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $\gamma = f \circ \xi_0$  (ver observação 1.22). Dado que  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  uniformemente então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, logo, pela proposição anterior,  $\text{grau}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grau}(f_n)$ . Por tanto  $\text{grau}(\gamma) = \text{grau}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grau}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grau}(\gamma_n)$ .  $\square$

Dada uma aplicação qualquer  $f: X \rightarrow X$ , um ponto fixo para  $f$  é um ponto  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$ . Denotaremos por  $\text{Fix}(f)$  o conjunto dos pontos fixos de  $f$ . Na seguinte proposição  $\text{card}(\text{Fix}(f))$  denotará a cardinalidade do conjunto  $\text{Fix}(f)$ , i.e, o número de pontos fixos de  $f$ .

**Proposição 1.25.**  $\text{card}(\text{Fix}(f)) \geq |\text{grau}(f) - 1|$  para qualquer aplicação contínua  $f: S^1 \rightarrow S^1$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\text{grau}(f) = k$ , é suficiente encontrar pelo menos  $|k - 1|$  pontos fixos de  $f$ . Seja  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$ , temos  $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0) + k$ . Definamos a aplicação  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\phi(y) = \tilde{f}(y) - y$ , temos  $\phi(0) = \tilde{f}(0)$  e  $\phi(1) = \tilde{f}(1) - 1 = \tilde{f}(0) + k - 1$ . Logo deve existir um inteiro  $i$  tal que  $\phi(0) \leq i + 1, i + 2, \dots, i + |k - 1| < \phi(1)$ . Usando o teorema do valor intermediário, para cada  $j = 1, \dots, |k - 1|$  existem  $t_1, t_2, \dots, t_{|k-1|} \in [0, 1]$  tais que  $\phi(t_j) = i + j$ . Estes pontos  $t_j$  se projetam em pontos fixos distintos de  $f$ , i.e,  $\xi_0(t_j) = (\cos 2\pi t_j, \sin 2\pi t_j)$  são pontos fixos distintos de  $f$ .  $\square$

Denotemos por  $S_r(0)$  o círculo com centro no origem e de raio  $r$ .

**Corolário 1.26.** Seja  $f: S_r(0) \rightarrow S_r(0)$  contínua sem pontos fixos. Se  $h: S^1 \rightarrow S^1$  é definido por  $h(x) = \frac{rx - f(rx)}{\|rx - f(rx)\|}$  então  $\text{grau}(h) = 1$ .

*Demonstração.* Observe que pela proposição anterior é suficiente mostrar que  $h$  não tem pontos fixos. Suponha que existe  $x \in S^1$  tal que  $h(x) = x$  então  $f(rx) = (r + \|rx - f(rx)\|)x$  de onde  $f(rx) = rx$ , o qual é uma contradição pois  $f$  não tem pontos fixos. Por tanto  $h$  não tem pontos fixos e assim  $\text{grau}(h) = 1$ .  $\square$

## 1.7 Índice

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação contínua. Seja  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  um caminho em  $U$ . Se  $f$  não têm pontos fixos sobre  $\gamma$ , i.e,  $f(\gamma(t)) \neq \gamma(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , podemos considerar o caminho  $h_\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$  dado por:

$$h_\gamma(t) = \frac{\gamma(t) - f \circ \gamma(t)}{\|\gamma(t) - f \circ \gamma(t)\|}$$



Definimos o índice de  $\gamma$  com respeito a  $f$ , denotado por  $I(\gamma, f)$ , como o grau do caminho  $h_\gamma$ :

$$I(\gamma, f) = \text{grau}(h_\gamma).$$

**Observação 1.27.** Também podemos considerar o caminho  $\bar{h}_\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$  dado por:

$$\bar{h}_\gamma(t) = \frac{f \circ \gamma(t) - \gamma(t)}{\|f \circ \gamma(t) - \gamma(t)\|},$$

na definição do índice, já que  $\text{grau}(h_\gamma) = \text{grau}(\bar{h}_\gamma)$ . De fato, se  $g_1$  e  $g_2$  são funções ângulo para  $h_\gamma$  e  $\bar{h}_\gamma$  respectivamente, então  $g_1 = g_2 + (2k - 1)\pi$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , logo  $2\pi \text{grau}(h_\gamma) = 2\pi[g_1(1) - g_1(0)] = 2\pi[g_2(1) - g_2(0)] = 2\pi \text{grau}(\bar{h}_\gamma)$ .

Se  $\gamma$  é um caminho fechado, então  $h_\gamma$  também é fechado, logo  $I(\gamma, f)$  é um número inteiro.

O índice de uma curva  $\gamma$  em relação a  $f$  pode ser interpretado como a rotação total, que o vetor  $x - f(x)$  faz quando  $x$  se desloca ao longo do caminho  $\gamma$  de  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$ .

**Proposição 1.28.** *Propriedades do índice:*

- (1) Se  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$  é a justaposição dos caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , então  $I(\gamma, f) = I(\gamma_1, f) + I(\gamma_2, f)$ .
- (2) Se  $\gamma^{-1}$  é o caminho inverso de  $\gamma$ , então  $I(\gamma^{-1}, f) = -I(\gamma, f)$ .
- (3) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são caminhos fechados livremente homotópicos sem passar por  $\text{Fix}(f)$ , i.e., existe uma homotopia  $H: \gamma_1 \simeq \gamma_2$  em  $U$  tal que  $f(H(t, s)) \neq H(t, s)$  para todo  $t, s \in [0, 1]$ , então  $I(\gamma_1, f) = I(\gamma_2, f)$ .

*Demonstração.* (1) De fato, temos por definição

$$h_\gamma(t) = h_{\gamma_1 * \gamma_2}(t) = \begin{cases} \frac{\gamma_1(t) - f \circ \gamma_1(t)}{\|\gamma_1(t) - f \circ \gamma_1(t)\|} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\gamma_2(1-t) - f \circ \gamma_2(1-t)}{\|\gamma_2(1-t) - f \circ \gamma_2(1-t)\|} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

isto é  $h_\gamma = h_{\gamma_1} * h_{\gamma_2}$ . Logo, usando as propriedades de grau de um caminho (proposição 1.21, item (1)) temos  $I(\gamma, f) = \text{grau}(h_\gamma) = \text{grau}(h_{\gamma_1}) + \text{grau}(h_{\gamma_2}) = I(\gamma_1, f) + I(\gamma_2, f)$ .

(2) Se  $\gamma^{-1}$  é o caminho inverso de  $\gamma$ , então  $h_{\gamma^{-1}}(t) = h_\gamma(1-t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , isto é  $h_{\gamma^{-1}} = h_\gamma^{-1}$ , logo usando as propriedades do grau de um caminho (proposição 1.21, item (2)) temos  $I(\gamma, f) = \text{grau}(h_\gamma) = -\text{grau}(h_\gamma^{-1}) = -\text{grau}(h_{\gamma^{-1}}) = -I(\gamma^{-1}, f)$ .

(3) De fato, como  $f(H(t, s)) \neq H(t, s)$  temos que  $h_{H_t}(s) = \frac{H(t, s) - f \circ H(t, s)}{\|H(t, s) - f \circ H(t, s)\|}$  é uma homotopia livre entre  $h_{\gamma_1}$  e  $h_{\gamma_2}$  e daí por las propriedades do grau de um caminho (proposição 1.21, item (3)) concluimos que  $I(\gamma_1, f) = \text{grau}(h_{\gamma_1}) = \text{grau}(h_{\gamma_2}) = I(\gamma_2, f)$ .  $\square$

A continuação apresentaremos mais propriedades do índice que usaremos depois.

**Proposição 1.29.** *Sejam  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplicações contínuas e  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  um caminho fechado tal que  $f$  e  $g$  não têm pontos fixos sobre  $\gamma$ . Suponha que existe uma homotopia  $H: f \simeq g$  que não têm pontos fixos sobre  $\gamma$ , i.e.,  $H_t(\gamma(s)) \neq \gamma(s)$  para todo  $t, s \in [0, 1]$ . Então  $I(\gamma, f) = I(\gamma, g)$ .*

*Demonstração.* De fato, a aplicação:

$$(s, t) \mapsto \frac{\gamma(s) - H_t(\gamma(s))}{\|\gamma(s) - H_t(\gamma(s))\|},$$

é uma homotopia livre entre  $s \mapsto \frac{\gamma(s) - f \circ \gamma(s)}{\|\gamma(s) - f \circ \gamma(s)\|}$  e  $s \mapsto \frac{\gamma(s) - g \circ \gamma(s)}{\|\gamma(s) - g \circ \gamma(s)\|}$ . Assim, pelas propriedades do grau de um caminho, tais caminhos devem ter o mesmo grau. Observe que o grau do primeiro caminho é o índice de  $\gamma$  com respeito a  $f$  e o grau do segundo caminho é o índice de  $\gamma$  com respeito a  $g$ , por tanto  $I(\gamma, f) = I(\gamma, g)$ .  $\square$

**Proposição 1.30.** *Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua. Seja  $(\gamma_n), \gamma_n: [0, 1] \rightarrow U$  uma seqüência de caminhos fechados em  $U$ . Suponha que  $\gamma_n \subset K \subset U$  onde  $K$  é um compacto, e  $f$  não tem pontos fixos em  $K$ . Se  $\gamma_n$  converge uniformemente para um caminho  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  então  $I(\gamma, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\gamma_n, f)$*

*Demonstração.* Em virtude do corolário 1.24, é suficiente mostrar que  $h_{\gamma_n}$  converge uniformemente para  $h_\gamma$ . Com efeito, como  $f$  não tem pontos fixos no compacto  $K$  então a aplicação  $h: K \rightarrow S^1, h(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$  é uniformemente contínua, logo  $h_{\gamma_n} = h \circ \gamma_n$  converge uniformemente para  $h_\gamma = h \circ \gamma$ .  $\square$

Um caminho fechado simples é um caminho fechado  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que não tem auto-intersecções, isto é, se  $\gamma(t) = \gamma(s)$  então  $s, t \in \{0, 1\}$ . Uma curva de Jordan é qualquer subconjunto no plano homeomorfo a  $S^1$ . Equivalentemente uma curva de Jordan é a imagem de um caminho fechado simples.

O “teorema da curva de Jordan” afirma que se  $X$  é um subconjunto do plano homeomorfo a  $S^1$ , então seu complemento  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  tem duas componentes conexas, uma limitada, e outra ilimitada. Além disso  $X$  é fronteira comum de tais componentes. Chamaremos

de interior de  $X$  à componente limitada e de exterior de  $X$  à componente ilimitada. Uma versão mais forte do teorema de Jordan é o seguinte teorema devido a Schönflies.

**Teorema 1.31** (Teorema de Schönflies). *Qualquer homeomorfismo de  $S^1$  a  $X \subset \mathbb{R}^2$  pode-se estender a um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$ , aplicando o disco unitário aberto  $D_1(0)$  no interior de  $X$ , e o complemento do disco unitário fechado no exterior de  $X$ .*

Para mas detalhes do teorema de Shöenflies ver [10] pág 75.

**Observação 1.32.** *Em particular, o teorema de Shöenflies afirma que existe um homeomorfismo entre o fecho do interior de  $X$  e o disco unitário fechado. Este fato implica que, se a imagem de  $\gamma$  é uma curva de Jordan então  $\gamma$  pode-se reduzir homotópicamente a um ponto com a homotopia no fecho do interior de  $\gamma$ . De fato, o disco unitário fechado  $B_1(0)$  têm a propriedade que qualquer curva fechada pode-se reduzir homotópicamente a um ponto, em particular o círculo unitário é livremente homotópico a um ponto com a homotopia no disco fechado. Logo, usando o homeomorfismo do teorema de Shöenflies obtemos uma homotopia livre entre  $\gamma$  e um ponto com a homotopia no fecho do interior de  $\gamma$  (ver figura abaixo).*

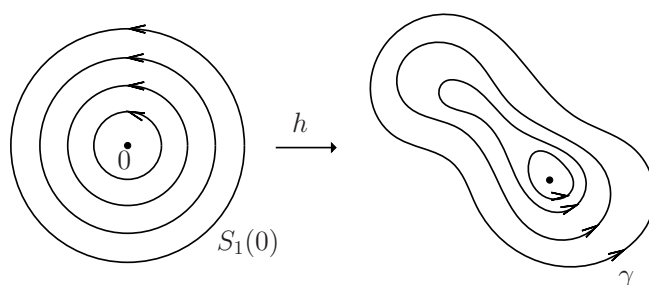


Figura 1.1: Deformação da curva  $\gamma$  a um ponto no seu interior

**Proposição 1.33.** *Suponha que  $U$  é um aberto simplesmente conexo e seja  $\gamma$  um caminho fechado simples em  $U$ . Se  $I(\gamma, f) \neq 0$  então  $f$  têm um ponto fixo no interior de  $\gamma$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  não tem pontos fixos no interior de  $\gamma$ . Pela observação anterior, a curva  $\gamma$  pode-se reduzir homotópicamente a um ponto (caminho constante) com a homotopia no fecho do interior de  $\gamma$ . Dado que  $U$  é simplesmente conexo, então o fecho do interior de  $\gamma$  está em  $U$ , assim a homotopia está em  $U$  e não passa por pontos fixos de  $f$ . Logo  $h_\gamma$  é também livremente homotópico a um ponto. Da definição do grau

é claro que o grau do caminho constante é zero, assim  $I(\gamma, f) = \text{grau}(h_\gamma) = 0$ . Esta contradição mostra que no interior de  $\gamma$  deve existir algum ponto fixo de  $f$ .  $\square$

Como antes, seja  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação contínua. Seja  $p \in U$  um ponto fixo isolado de  $f$ , i.e, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  que não contem pontos fixos de  $f$  além de  $p$ . Tomemos  $r > 0$  tal que a bola com centro  $p$  e de raio  $r$ , que denotaremos por  $B_r(p)$ , esteja contida em  $V$ . Então  $f$  tem  $p$  como único ponto fixo em  $B_r(p)$ . Denotemos por  $S_r(p)$  o círculo de centro  $p$  e raio  $r$  orientado positivamente (no sentido contrario ao relógio). Definimos o índice do ponto fixo isolado  $p$  como o índice de  $S_r(p)$  com respeito a  $f$ .

$$\text{Ind}(p, f) = I(S_r(p), f),$$

Se  $r_1, r_2 > 0$  são tal que  $B_{r_1}(p), B_{r_2}(p) \subset V$ , então  $S_{r_1}(p)$  e  $S_{r_2}(p)$  são livremente homotópicos sem passar por pontos fixos, logo  $I(S_{r_1}(p), f) = I(S_{r_2}(p), f)$ . Por tanto, a definição de índice de um ponto fixo dada acima não depende do  $r > 0$  escolhido.

Diremos que uma curva fechada simples  $\gamma$  é orientada positivamente se pode ser deformado homotópicamente (sem sobrepor-se) ao círculo unitário com orientação positiva. Dito de outra forma existe uma homotopia livre por caminhos fechados simples entre  $\gamma$  e o círculo  $S_1(0)$  orientado positivamente.

**Observação 1.34.** *Se  $\gamma \subset B_r(p)$  é qualquer curva fechada simples orientada positivamente e que contém  $p$  no seu interior então  $\text{Ind}(p, f) = I(\gamma, f)$ . De fato, seja  $\epsilon > 0$  tal que o círculo  $S_\epsilon(p)$  esteja contido no interior de  $\gamma$ . Orientamos  $S_\epsilon(p)$  no sentido positivo. Assim  $\gamma$  e  $S_\epsilon(p)$  são curvas fechadas simples, orientadas positivamente. Isto implica, pelo teorema de Schönflies, que  $\gamma$  e  $S_\epsilon(p)$  são livremente homotópicos sem passar por  $p$ . Então a homotopia não passa por  $\text{Fix}(f)$ . Daí segue do item (3) na proposição 1.28 que  $I(\gamma, f) = I(S_\epsilon(p), f) = \text{Ind}(p, f)$ .*

**Teorema 1.35.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto simplesmente conexo,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua e  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  uma curva fechada simples positivamente orientada. Suponha que  $f$  não tem pontos fixos em  $\gamma$  e que existe um número finito de pontos fixos no interior de  $\gamma$ , então:*

$$I(\gamma, f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x, f)$$

*Demonstração.* Seja  $k$  o número de pontos fixos no interior da curva  $\gamma$ .

O caso  $k = 1$  é a observação anterior.

O caso  $k = 2$ . Suponha  $p_1, p_2$  únicos pontos fixos de  $f$  no interior de  $\gamma$ . Considere a seqüência de caminhos  $\eta_n = \delta_n * \alpha_n * S_n * \alpha'_n * \delta'_n * \beta_n * S'_n * \beta'_n$  mostrados na figura 1.7. Consideremos a seqüência de caminhos de tal forma que quando  $n \rightarrow \infty$  as imagens dos caminhos  $\alpha_n$  e  $\alpha'_n$  convergem para a imagem de uma curva  $\alpha$ , igualmente as imagens dos caminhos  $\beta_n$  e  $\beta'_n$  convergem para a imagem de uma curva  $\beta$ , nesse caso os caminhos  $\delta_n, \delta'_n, S_n$  e  $S'_n$  também convergem. Escrevemos a continuação os caminhos limites  $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n, \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \alpha^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n, \delta' = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_n, \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n, S' = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n, \beta^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta'_n$  e  $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$ , onde a convergência é uniforme.

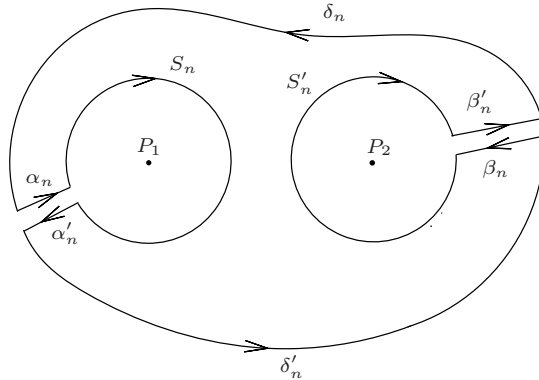


Figura 1.2: As seqüências de caminhos  $\delta_n$ 's,  $\alpha_n$ 's,  $\beta_n$ 's e  $S_n$ 's

Como  $\eta_n$  é um caminho fechado simples que não tem pontos fixos no seu interior, então, pela proposição 1.33,  $I(\eta_n, f) = 0$  para todo  $n > 0$ . Logo, usando o corolário 1.30 temos que

$$I(\eta, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\eta_n, f) = 0 \quad (1.1)$$

Por outro lado, sendo  $\eta = \delta * \alpha * S * \alpha^{-1} * \delta' * \beta * S' * \beta^{-1}$ , pelas propriedades de índice

(proposição 1.28) temos

$$\begin{aligned}
I(\eta, f) &= I(\delta, f) + I(\alpha, f) + I(S, f) + I(\alpha^{-1}, f) + I(\delta', f) \\
&\quad + I(\beta, f) + I(S', f) + I(\beta^{-1}, f) \\
&= I(\delta, f) + I(S, f) + I(\delta', f) + I(S', f) \\
&\quad + [I(\alpha, f) + I(\alpha^{-1}, f)] \\
&\quad + [I(\beta, f) + I(\beta^{-1}, f)] \\
&= I(\delta, f) + I(S, f) + I(\delta', f) + I(S', f) \\
&= I(\delta * \delta', f) + I(S, f) + I(S', f) \\
&= I(\gamma, f) + I(S, f) + I(S', f)
\end{aligned}$$

De aqui e de (1.1) temos

$$I(\gamma, f) + I(S, f) + I(S', f) = 0 \tag{1.2}$$

Observe que como  $\gamma$  esta orientado positivamente então os círculos  $S$  e  $S'$  estão orientados negativamente e então  $I(S, f) = -\text{Ind}(p_1, f)$  e  $I(S', f) = -\text{Ind}(p_2, f)$ . Substituindo isto em (1.2) temos o que queríamos provar

$$I(\gamma, f) = \sum_{i=1}^2 \text{Ind}(p_i, f).$$

A prova em geral para  $k$  pontos fixos no interior de  $\gamma$  se pode fazer por indução sobre  $k$ . De fato, suponha que  $p_1, p_2, \dots, p_k$  únicos pontos fixos de  $f$  no interior de  $\gamma$  então separamos  $p_k$  dos demais pontos fixos de  $f$  fechando a  $p_k$  num círculo e fechando os demais pontos  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$  no interior de uma curva fechada simples digamos  $\alpha$ . Logo, mediante um argumento similar para o caso  $k = 2$  mostrar que  $I(\gamma, f) = \text{Ind}(p_k, f) + I(\alpha, f)$ . Usando o passo de indução temos que  $I(\alpha, f) = \sum_{i=1}^{k-1} \text{Ind}(p_i, f)$  e assim  $I(\gamma, f) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}(p_i, f)$ . □

# Capítulo 2

## Homeomorfismos do anel

Denotaremos por  $A = S^1 \times (0, 1)$  e  $\bar{A} = S^1 \times [0, 1]$  o anel aberto e fechado respectivamente. O espaço de recobrimento universal de  $A$  e  $\bar{A}$  será denotado indistintamente por  $\tilde{A}$ , assim quando nos referimos ao recobrimento de  $A$  será  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  e quando nos referimos ao recobrimento de  $\bar{A}$  será  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ . Da mesma forma a aplicação de recobrimento  $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$  ou  $\pi: \tilde{A} \rightarrow \bar{A}$ , é dada por  $\pi(x, y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), y)$  em ambos os casos.

### 2.1 Levantamentos de homeomorfismos do anel

Seja  $f: A \rightarrow A$  (ou  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ ) um homeomorfismo. Sabemos dos resultados de espaços de recobrimento expostos no capítulo 1, que a aplicação  $f \circ \pi$  pode ser levantado a uma aplicação contínua do espaço de recobrimento  $\tilde{A}$ , i.e, existe uma aplicação contínua  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  tal que  $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ . Um tal levantamento de  $f \circ \pi$  será chamado levantamento do homeomorfismo  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{A} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Fixados  $z_0 \in \tilde{A}$  e  $w_0 \in \pi^{-1}[f(\pi(z_0))]$ , pelo teorema 1.9, existe um único levantamento  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  tal que  $\tilde{f}(z_0) = w_0$ .

Se  $\bar{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é outro levantamento de  $f$ , então  $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi = \pi \circ \bar{f}$ . Assim, se  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ , da igualdade  $\pi \circ \tilde{f} = \pi \circ \bar{f}$  segue que  $\tilde{f}_1 = \bar{f}_1 + k$  e  $\tilde{f}_2 = \bar{f}_2$ , onde  $k$  é uma função definida em  $\tilde{A}$  e tomando valores inteiros. Sendo  $k = \tilde{f}_1 - \bar{f}_1$ , a função  $k$  é contínua, logo constante. Por tanto existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{f}(x, y) = \bar{f}(x, y) + (k, 0)$  para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$ . Reciprocamente, se  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é um levantamento de  $f$ , denotando por  $\tilde{f} + (k, 0)$  a aplicação  $(x, y) \mapsto \tilde{f}(x, y) + (k, 0)$  tem-se que  $\tilde{f} + (k, 0)$  é um levantamento de  $f$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , pois  $\pi \circ (\tilde{f} + (k, 0)) = \pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ . Por tanto, se  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é um levantamento de  $f$  os demais levantamentos são da forma  $\tilde{f} + (k, 0)$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 2.1.** *Seja  $Id_A: A \rightarrow A$  a aplicação identidade. Qualquer levantamento  $\tilde{Id}_A$  deve satisfazer  $\pi \circ \tilde{Id}_A = Id_A \circ \pi = \pi$ . Então  $Id_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é um levantamento da identidade, e os demais levantamentos são as translações  $(x, y) \mapsto (x + k, y)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Exemplo 2.2.** *Seja  $R_\theta: A \rightarrow A$  a rotação em ângulo  $\theta$  dada por  $R_\theta(w, z) = (we^{i\theta}, z)$ . Se  $\tilde{R}_\theta$  é um levantamento de  $R_\theta$  então  $\pi \circ \tilde{R}_\theta = R_\theta \circ \pi$ , de onde as aplicações  $(x, y) \rightarrow (x + \frac{\theta}{2\pi} + k, y)$  são os levantamentos de  $R_\theta$ .*

**Exemplo 2.3.** *Seja  $r: A \rightarrow A$  a reflexão dada por  $r(w, z) = (\bar{w}, z)$  (onde  $\bar{w}$  denota a conjugada de  $w$  visto como número complexo). Um levantamento de  $r$  é a aplicação  $\tilde{r}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  dada por  $\tilde{r}(x, y) = (1-x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$ . Os demais levantamentos de  $r$  são as aplicações  $(x, y) \rightarrow (-x + k, y)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Da igualdade  $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ , como  $\pi$  é um homeomorfismo local, concluímos que  $\tilde{f}$  é um homeomorfismo local. Em realidade temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.4.** *Se  $f: A \rightarrow A$  (ou  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ ) é um homeomorfismo, então todo levantamento  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  de  $f$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Seja  $(x_0, y_0) \in \tilde{A}$  e  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento qualquer de  $f$  e seja  $\tilde{g}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  levantamento de  $f^{-1}$  tal que  $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$ . Temos que  $\pi \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = f^{-1} \circ \pi \circ \tilde{f} = f^{-1} \circ f \circ \pi = \pi$ , i.e.,  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  é um levantamento da identidade e assim  $\tilde{g} \circ \tilde{f} = Id_{\tilde{A}} + (k, 0)$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$  (ver exemplo 2.1). Da escolha  $\tilde{g} \circ \tilde{f}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$  concluímos que  $\tilde{g} \circ \tilde{f} = Id_{\tilde{A}}$ . Da mesma forma  $\tilde{f} \circ \tilde{g}$  é um levantamento da identidade em  $A$ , e da escolha  $\tilde{f} \circ \tilde{g}(\tilde{f}(x_0, y_0)) = \tilde{f}(x_0, y_0)$  segue que  $\tilde{f} \circ \tilde{g} = Id_{\tilde{A}}$ . Por tanto  $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$  e assim,  $\tilde{f}$  é um homeomorfismo.  $\square$



Se  $f: A \rightarrow A$  é uma aplicação contínua e se  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é um levantamento de  $f$  então  $\pi \circ \tilde{f}(x, y) = f \circ \pi(x, y) = f \circ \pi(x + 1, y) = \pi \circ \tilde{f}(x + 1, y)$  daí  $\tilde{f}(x + 1, y) = \tilde{f}(x, y) + (k(x, y), 0)$  onde  $k$  é uma função em  $\tilde{A}$  tomando valores inteiros e, além disso sendo diferença de aplicações contínuas é contínua, logo constante. Portanto existe um inteiro  $k$  tal que  $\tilde{f}(x + 1, y) = \tilde{f}(x, y) + (k, 0)$  para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$ . Definiremos o grau da aplicação  $f: A \rightarrow A$  como o inteiro  $k$  tal que se  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é levantamento de  $f$  tem-se  $\tilde{f}(x + 1, y) = \tilde{f}(x, y) + (k, 0)$ . Temos que, fixado um levantamento de  $f$ , o inteiro  $k$  sempre existe e é único, além disso o inteiro  $k$  não depende do levantamento; pois se  $\tilde{f} + (l, 0)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  é outro levantamento de  $f$  então  $(\tilde{f} + (l, 0))((x, y) + (1, 0)) = \tilde{f}((x, y) + (1, 0)) + (l, 0) = [\tilde{f}(x, y) + (k, 0)] + (l, 0) = [\tilde{f}(x, y) + (l, 0)] + (k, 0) = (\tilde{f} + (l, 0))(x, y) + (k, 0)$ . Assim o grau de uma aplicação contínua no anel fechado ou aberto está bem definida.

A continuação vamos a caracterizar os homeomorfismos de  $\tilde{A}$  que são levantamentos de homeomorfismo do anel aberto e fechado.

Diremos que um homeomorfismo  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  do anel fechado preserva as componentes da fronteira se  $f(S^1 \times \{0\}) = S^1 \times \{0\}$  e  $f(S^1 \times \{1\}) = S^1 \times \{1\}$ . Também diremos que um homeomorfismo  $h: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  do espaço de recobrimento universal  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ , preserva as componentes da fronteira se  $f(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$  e  $f(\mathbb{R} \times \{1\}) = \mathbb{R} \times \{1\}$ . Da mesma forma diremos que uma homotopia  $H_t$  no anel fechado preserva as componentes da fronteira se  $H_t(S^1 \times \{0\}) = S^1 \times \{0\}$  e  $H_t(S^1 \times \{1\}) = S^1 \times \{1\}$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

De aqui em adiante, sempre que nos referimos a um homeomorfismo do anel fechado nos estaremos referindo a um homeomorfismo que preserva as componentes da fronteira. Sempre que nos referimos a uma homotopia no anel fechado nos estaremos referindo a uma homotopia que preserva as componentes da fronteira.

**Proposição 2.5.** *Seja  $h: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um homeomorfismo de  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ . Então  $h$  é levantamento de um homeomorfismo  $f$  do anel aberto homotópico à identidade se, e somente se,  $h(x + 1, y) = h(x, y) + (1, 0)$  para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$ .*

**Proposição 2.6.** *Seja  $h: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um homeomorfismo de  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$  que preserva as componentes da fronteira. Então  $h$  é levantamento de um homeomorfismo  $f$  do anel fechado homotópico à identidade com a homotopia preservando as componentes da fronteira se, e somente se,  $h(x + 1, y) = h(x, y) + (1, 0)$  para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$ .*

*Demonstração.* Esta prova é para as duas proposições de acima. Suponha que  $h$  é levantamento de algum homeomorfismo  $f: A \rightarrow A$  homotópico à identidade. Tome qualquer  $(x, y) \in \tilde{A}$ . Sejam,  $\alpha$  o segmento unindo  $h(x, y)$  e  $h(x, y) + (1, 0)$ ,  $\beta$  a imagem por  $h$

do segmento unindo  $(x, y)$  e  $(x + 1, y)$ , e  $\eta$  a imagem por  $\pi$  do mesmo segmento unindo  $(x, y)$  e  $(x + 1, y)$  (ver figura 2.1).

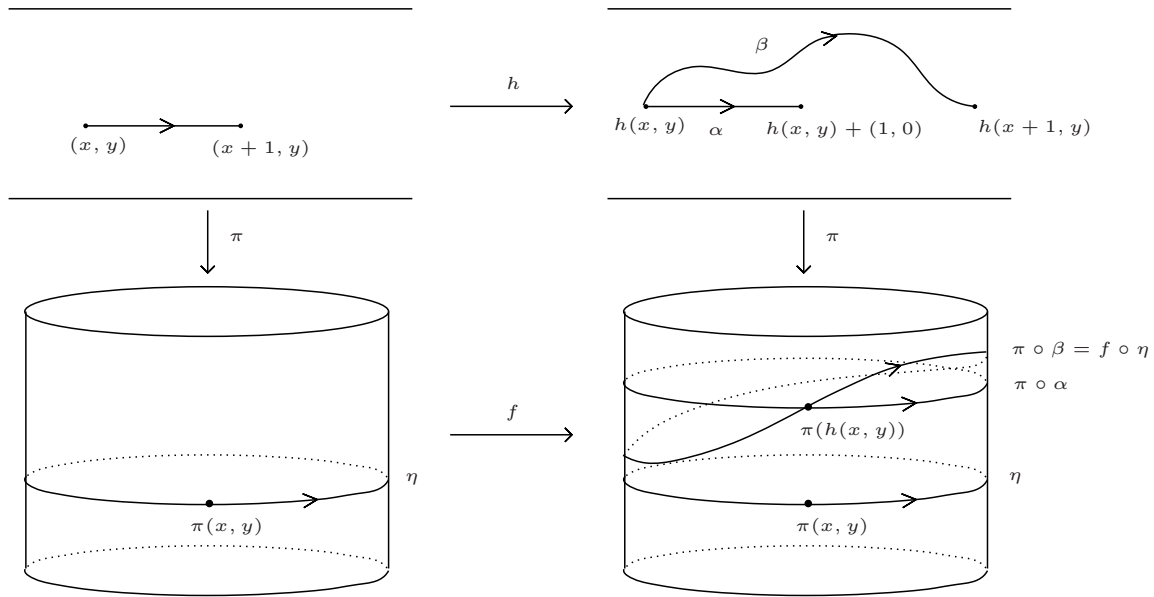


Figura 2.1: Os caminhos livremente homotópicos  $\eta$ ,  $\pi \circ \beta$  e  $\pi \circ \alpha$

Como  $f$  é homotópico à identidade, usando o lema 1.3,  $f \circ \eta$  e  $\eta$  são livremente homotópicos, e como  $\eta$  é livremente homotópico a  $\pi \circ \alpha$  e  $f \circ \eta = \pi \circ \beta$ , então por transitividade  $\pi \circ \alpha$  e  $\pi \circ \beta$  são livremente homotópicos e como tem o mesmo ponto básico  $\pi(h(x, y))$  concluímos que  $\pi \circ \alpha$  e  $\pi \circ \beta$  são homotópicos com ponto base  $\pi(h(x, y))$  [de fato, o grupo fundamental do anel é isomorfo ao conjunto dos inteiros, logo é abeliano. Neste caso, a proposição 1.2, nos diz que caminhos fechados livremente homotópicos e com mesmo ponto básico são homotópicos]. Agora, como  $\alpha$  e  $\beta$  são levantamentos de  $\pi \circ \alpha$  e  $\pi \circ \beta$  com mesmo ponto inicial, sendo  $\pi \circ \alpha$  e  $\pi \circ \beta$  homotópicos, pelo lema 1.13,  $\alpha$  e  $\beta$  devem ter o mesmo ponto final, i.e,  $h(x + 1, y) = h(x, y) + (1, 0)$ .

Reciprocamente suponha que  $h: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é um homeomorfismo tal que  $h(x + 1, y) = h(x, y) + (1, 0)$ . Dado  $z \in A$  tomemos qualquer  $(x, y) \in \pi^{-1}(z)$  e definamos  $f(z) = \pi(h(x, y))$ . Já que  $h(x + k, y) = h(x, y) + (k, 0)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que se  $(x + k, y)$  é outro ponto da fibra de  $z$  então  $\pi(h(x + k, y)) = \pi(h(x, y) + (k, 0)) = \pi(h(x, y))$ . Assim  $f$  está bem definida. Observemos que como  $\pi$  é um homeomorfismo local segue que  $f$  é um homeomorfismo local, além disso  $f$  é injetiva. De fato, se  $f(z) = f(w)$  então  $\pi(h(x, y)) =$

$\pi(h(x', y'))$  onde  $\pi(x, y) = z$  e  $\pi(x', y') = w$ , logo  $h(x, y) = h(x', y') + (k, 0) = h(x' + k, y')$  e daí  $(x, y) = (x' + k, y')$  e assim  $z = \pi(x, y) = \pi(x' + k, y') = \pi(x', y') = w$ . Por tanto concluímos que  $f$  assim definido é um homeomorfismo do anel  $A$ . É claro que  $h$  é um levantamento de  $f$ .

Agora mostraremos que  $f$  é homotópico á identidade. Definamos a homotopia linear  $G: [0, 1] \times \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  entre  $h$  e  $Id$  por  $G_t(x, y) = t(x, y) + (1 - t)h(x, y)$ . Como  $G_t(x + 1, y) = t(x + 1, y) + (1 - t)h(x + 1, y) = t((x, y) + (1, 0)) + (1 - t)(h(x, y) + (1, 0)) = t(x, y) + (1 - t)h(x, y) + (1, 0) = G_t(x, y) + (1, 0)$  então podemos definir uma homotopia  $H: [0, 1] \times A \rightarrow A$  a partir da homotopia  $G$  da mesma forma que a partir de  $h$  definimos  $f$ , i.e, para  $z \in A$  tomemos  $(x, y) \in \pi^{-1}(z)$  e definamos  $H_t(z) = \pi(G_t(x, y))$ . Assim,  $H_t$  está bem definida e é uma homotopia entre  $f$  e  $Id$ .

Observe que no caso do anel fechado a homotopia  $G_t$  preserva as componentes da fronteira de  $\tilde{A}$ , logo o mesmo faz  $H_t$ . Por tanto esta demonstração prova as duas proposições.  $\square$

**Corolário 2.7.** *Sejam  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo do anel fechado homotópico à identidade e  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  levantamento de  $f$ . Temos que  $\tilde{f}$  é uniformemente contínua.*

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário. Como  $\tilde{f}$  é contínua e  $R = [0, 2] \times [0, 1]$  é compacto então  $\tilde{f}|_R$  é uniformemente contínua, logo existe  $0 < \delta < 1$  tal que:

$$x, x' \in R, \quad \|x - x'\| < \delta \quad \Rightarrow \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| < \epsilon.$$

Sejam  $y, y' \in \tilde{A}$  tais que  $\|y - y'\| < \delta$ . Como  $\delta < 1$ , então  $|P(y) - P(y')| < 1$ , assim existe um inteiro  $k$  tal que  $y, y' \in [k, k + 2] \times [0, 1]$ , logo  $y - ke_1, y' - ke_1 \in R$ .

Dado que  $\|(y - ke_1) - (y' - ke_1)\| = \|y - y'\| < \delta$  então

$$\|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(y')\| = \|\tilde{f}(y - ke_1) - \tilde{f}(y' - ke_1)\| < \epsilon$$

onde estamos usando que  $\tilde{f}(y - ke_1) = \tilde{f}(y) - ke_1$  e  $\tilde{f}(y' - ke_1) = \tilde{f}(y') - ke_1$ , pois  $f$  é homotópico à identidade.  $\square$

## 2.2 Teorema de Lefschetz para o anel fechado

Seja  $M$  uma superfície topológica, i.e, um espaço Hausdorff localmente homeomorfo ao plano. Seja  $f: M \rightarrow M$  uma aplicação contínua. Dizemos que  $p \in M$  é um ponto fixo para  $f$  se  $f(p) = p$ . Um ponto fixo  $p$  é dito isolado se existe uma vizinhança  $V \subset M$  de  $p$  tal que  $f|_V$  só tem  $p$  como único ponto fixo.

Dado um ponto fixo isolado  $p$  de uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow M$ , seja  $\phi: V \rightarrow U$  uma carta de  $M$  com  $p \in U$  e  $q = \phi^{-1}(p)$ . A aplicação  $h: \phi^{-1}(U \cap f(U)) \rightarrow \phi^{-1}(U \cap f(U))$  dada por  $h = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$  tem a  $q$  como único ponto fixo. Assim, definimos o índice do ponto fixo  $p$  de  $f$  como o índice do ponto fixo  $q$  de  $h$ . Verifica-se que esta definição não depende da carta escolhida.

Consideremos o anel fechado  $\bar{A} = S^1 \times [0, 1]$ . Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  contínua, dizemos que  $f$  preserva as componentes da fronteira (ou do bordo), se deixa invariante cada componente conexa da fronteira de  $\bar{A}$ , i.e,  $f(S^1 \times \{0\}) \subset S^1 \times \{0\}$  e  $f(S^1 \times \{1\}) \subset S^1 \times \{1\}$ .

Da mesma forma se consideramos o anel fechado plano

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\},$$

a aplicação contínua  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  é dito que preserva as componentes da fronteira se deixa invariante cada componente conexa da fronteira de  $\mathbb{A}$ , i.e,  $f(S_1(0)) \subset S_1(0)$  e  $f(S_2(0)) \subset S_2(0)$ .

O seguinte teorema será usado depois, no Capítulo 3, quando consideraremos aplicações do anel fechado, em particular homeomorfismos do anel fechado.

**Teorema 2.8.** *Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  uma aplicação contínua do anel fechado que preserva as componentes da fronteira, que não tem pontos fixos na fronteira e que possui um número finito de pontos fixos. Então:*

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x, f) = 0.$$

Este teorema é um caso particular de um resultado geral chamado “formula de Lefschetz”, que afirma que dita soma é igual ao número de Lefschetz da aplicação  $f$  (ver [2] págs 326-327). No caso do anel fechado temos que este número é sempre zero.

*Demonstração.* Inicialmente mostraremos o teorema para uma aplicação contínua no anel fechado plano  $\mathbb{A}$ .

Seja  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  contínua, preservando as componentes da fronteira, que não tem pontos fixos na fronteira e tem só um número finito de pontos fixos. Consideremos  $D_3(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 3\}$  e definamos  $g: D_3(0) \rightarrow D_3(0)$  por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{2} f\left(\frac{2x}{\|x\|}\right) & ; \quad 2 < \|x\| < 3 \\ f(x) & ; \quad x \in \mathbb{A} \\ \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & ; \quad 0 < \|x\| < 2 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

É claro que  $g$  é contínua e que  $g$  é uma extensão de  $f$ . Observe que o comportamento de  $g$  nos círculos  $S_r(0)$  com  $2 < r < 3$  é o mesmo que o comportamento de  $f$  no círculo  $S_2(0)$ , similarmente, o comportamento de  $g$  nos círculos  $S_r(0)$  com  $0 < r < 1$  é o mesmo que o comportamento de  $f$  no círculo  $S_1(0)$ . Particularmente, como  $f$  não tem pontos fixos na fronteira de  $\mathbb{A}$ ,  $g$  não tem pontos fixos nos círculos  $S_r(0)$  com  $0 < r \leq 1$  e  $2 \leq r < 3$ . Também observe que  $0$  é um ponto fixo de  $g$ , portanto  $\text{Fix}(g) = \text{Fix}(f) \cup \{0\}$ .

Usando o teorema 1.35 para a aplicação contínua  $g$  e o círculo  $S_2(0)$  orientado positivamente, temos

$$\begin{aligned} I(S_2(0), g) &= \sum_{x \in \text{Fix}(g)} \text{Ind}(x, g) \\ &= \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x, f) + \text{Ind}(0, g). \end{aligned}$$

Agora, orientando  $S_1(0)$  positivamente,  $\text{Ind}(0, g) = I(S_1(0), g)$ , logo

$$I(S_2(0), g) - I(S_1(0), g) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x, f)$$

Por ultimo, como  $g$  deixa invariante os círculos  $S_1(0)$  e  $S_2(0)$ , da observação 2.9 abaixo,  $I(S_1(0), g) = I(S_2(0), g) = 1$ . Por tanto:

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x, f) = 0.$$

O teorema para o anel fechado  $\bar{A} = S^1 \times [0, 1]$  segue do fato que existe um homeomorfismo global  $\phi: \bar{A} \rightarrow \mathbb{A}$  (este homeomorfismo é uma carta para o anel aberto). Daí, temos por definição que o índice dos pontos fixos de  $f$  é igual ao índice dos pontos fixos de  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Por tanto, se o teorema é valido para o anel plano  $\mathbb{A}$  então é valido para qualquer superfície homeomorfa a  $\mathbb{A}$ . □

**Observação 2.9.** *Seja  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S_r(0)$ ,  $\gamma(t) = r\xi_0(t) = re^{2\pi it}$  uma parametrização de  $S_r(0)$ . Se  $g$  não tem pontos fixos sobre  $S_r(0)$ , podemos considerar  $h: S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $h(x) = \frac{rx - g(rx)}{\|rx - g(rx)\|}$ . Observemos que  $h_\gamma = h \circ \xi_0$  onde  $h_\gamma$  é o caminho no círculo associado ao caminho  $\gamma$  na definição de índice (ver definição de índice na seção 1.7). Logo, por definição, temos  $I(S_r(0), g) = \text{grau}(h_\gamma) = \text{grau}(h \circ \xi_0) = \text{grau}(h)$ . Se  $g$  deixa invariante  $S_r(0)$  então  $g|_{S_r(0)}$  é uma aplicação do círculo sem pontos fixos, logo, usando o corolário 1.26 conseguimos  $I(S_r(0), g) = 1$ .*

## 2.3 Homeomorfismos do anel que preservam área e homeomorfismos de torção

Seja  $\tilde{A}$  subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , tem-se em  $\tilde{A}$  uma noção de área, com efeito, a medida de Lebesgue. Dado  $X \subset \tilde{A}$  mensurável, denotaremos por  $\text{area}(X)$  a medida de Lebesgue do conjunto  $X$ . Vamos definir uma medida no anel fechado  $\bar{A}$  (e aberto também) da seguinte forma. Se  $R \subset \bar{A}$  é um conjunto mensurável (boreliano), definimos:

$$\mu(R) = \text{area}(\pi^{-1}(R) \cap U) = \int_{(\pi^{-1}(R) \cap U)} dx dy$$

onde  $U = \{(x, y) \in \tilde{A} : 0 < x < 1\}$ .

Se  $R_i \subset \bar{A}$  são borelianos disjuntos,

$$\begin{aligned} \mu \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right] &= \text{area} \left[ \pi^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right) \cap U \right] \\ &= \text{area} \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} (\pi^{-1}(R_i)) \cap U \right] \\ &= \text{area} \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} (\pi^{-1}(R_i) \cap U) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [\text{area}(\pi^{-1}(R_i) \cap U)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) \end{aligned}$$

Além disso,  $\mu(\emptyset) = \text{area}(\pi^{-1}(\emptyset) \cap U) = \text{area}(\emptyset) = 0$ .

Por tanto,  $\mu$  define uma medida em  $\bar{A}$  que chamaremos de área. Temos que  $\mu(\bar{A}) = \text{area}(U) = 1 < \infty$ , assim  $(\bar{A}, \mu)$  é um espaço de medida finita.

**Lema 2.10.** *Suponha que  $R \subset \tilde{A}$  é tal que  $\pi|_R$  é injetiva. Então  $\mu(\pi(R)) = \text{area}(R)$ .*

*Demonstração.* Escrevamos  $R = \cup R_i \cup N$ , onde  $R_i = R \cap (U + (i, 0))$  e  $N$  é um conjunto de medida nula. Então temos  $\text{area}(R) = \sum \text{area}(R_i)$ . Como  $\pi|_R$  é injetiva então os conjuntos  $\pi(R_i)$  são disjuntos e assim,  $\mu(\pi(R)) = \mu(\pi(\cup R_i)) = \mu(\cup(\pi(R_i))) = \sum \mu(\pi(R_i))$ . Por tanto, só basta verificar que  $\text{area}(R_i) = \mu(\pi(R_i))$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . De fato, por definição  $\text{area}(R_i) = \text{area}(R_i - (i, 0)) = \mu(\pi(R_i - (i, 0))) = \mu(\pi(R_i))$ .  $\square$

Assim podemos definir a área de um boreliano  $R \subset \bar{A}$  usando qualquer vizinhança  $V$  tal que  $\pi|_V$  seja injetiva e tal que a diferença simétrica  $\bar{A} \setminus \pi(V)$  tenha medida nula. Definimos,  $\mu(R) = \text{area}[\pi^{-1}(R) \cap V]$ .

**Definição 2.11** (Homeomorfismos que preservam área). *Seja  $X$  um espaço com uma medida  $\nu$ . Dizemos que um homeomorfismo  $f: X \rightarrow X$  preserva área se para todo conjunto mensurável  $R \in X$  a área de  $f(R)$  é igual à área de  $R$ , i.e,  $\nu(f(R)) = \nu(R)$ .*

**Proposição 2.12.** *Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo e  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ . Então,  $f$  preserva área se, e somente se,  $\tilde{f}$  preserva área.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\tilde{f}$  preserva área. Seja  $R \subset \bar{A}$  um boreliano.

$$\begin{aligned}\mu(R) &= \text{area}[\pi^{-1}(R) \cap U] \\ &= \text{area}[\tilde{f}(\pi^{-1}(R) \cap U)]\end{aligned}$$

Como  $\tilde{f}(\pi^{-1}(R) \cap U) \subset \tilde{f}(U)$  e  $\tilde{f}(U)$  é tal que  $\pi|_{\tilde{f}(U)}$  é injetiva, então:

$$\begin{aligned}\mu(R) &= \mu(\pi \circ \tilde{f}(\pi^{-1}(R) \cap U)) \\ &= \mu(f \circ \pi(\pi^{-1}(R) \cap U)) \\ &= \mu(f(R - \{\text{conjunto de medida nula}\})) \\ &= \mu(f(R) - \{\text{conjunto de medida nula}\}) \\ &= \mu(f(R))\end{aligned}$$

onde o conjunto de medida nula é parte de um segmento ou uma curva, imagem por  $f$  do segmento  $x = 0$  em  $\tilde{A}$ .

Reciprocamente suponha que  $f$  preserva área. Seja  $R \subset \tilde{A}$  boreliano. Ponhamos  $R_i = R \cap (U + (i, 0))$  então os  $R_i$  são disjuntos e a união  $\bigcup R_i$  difere de  $R$  num conjunto de medida nula, assim  $\text{area}(R) = \text{area}(\bigcup R_i) = \sum \text{area}(R_i)$ . Além disso, como  $\tilde{f}$  é um homeomorfismo, temos que a união  $\bigcup \tilde{f}(R_i)$  é disjunta e difere de  $\tilde{f}(R)$  num conjunto de medida nula, e assim  $\text{area}(\tilde{f}(R_i)) = \text{area}(\bigcup \tilde{f}(R_i)) = \sum \text{area}(\tilde{f}(R_i))$ . Por tanto, para mostrar que  $\text{area}(\tilde{f}(R)) = \text{area}(R)$  basta mostrar que  $\text{area}(\tilde{f}(R_i)) = \text{area}(R_i)$ . De fato usando o lema anterior temos  $\text{area}(R_i) = \mu(\pi(R_i)) = \mu(f \circ \pi(R_i)) = \mu(\pi \circ \tilde{f}(R_i)) = \text{area}(\tilde{f}(R_i))$ .

□

A seguir consideramos o anel fechado  $\bar{A}$  e definiremos o que é um homeomorfismo de torção.

**Definição 2.13** (Homeomorfismo de torção). *Um homeomorfismo  $f : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  do anel fechado preservando as componentes da fronteira é um homeomorfismo de torção se pode ser levantado a um homeomorfismo  $\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  do recobrimento universal  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ , que move as duas componentes de fronteira de  $\tilde{A}$  em direções opostas, i.e, se  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$  então  $\tilde{f}_1(x, 0) < x < \tilde{f}_1(x, 1)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

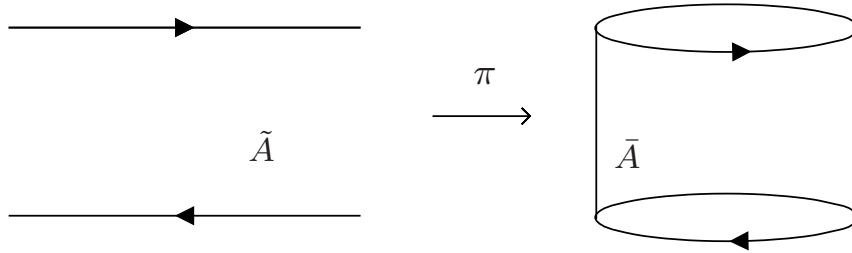


Figura 2.2: A condição de torção no levantamento

A condição de torção acima diz que  $\tilde{f}$  move a componente superior da fronteira de  $\tilde{A}$  para a direita e a componente inferior pra esquerda.

**Exemplo 2.14.** *Seja  $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, definimos  $F : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  por  $F(x, y) = (x + T(y), y)$ . Geometricamente  $F$  é uma translação sobre cada reta horizontal. É claro que  $F$  é um homeomorfismo que preserva as componentes da fronteira, e como  $F(x + 1, y) = F(x, y) + (1, 0)$  para todo  $(x, y \in \tilde{A})$ , então  $F$  é levantamento de um homeomorfismo  $f : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  do anel fechado que preserva as componentes da fronteira. Uma condição necessaria e suficiente para que  $f$  seja um homeomorfismo de torção é que exista um inteiro entre  $T(0)$  e  $T(1)$ , i.e, que se tenha  $T(0) < k < T(1)$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . De fato, nesse caso  $F + (-k, 0)$  é um levantamento de  $f$  que move as componentes da fronteira de  $\tilde{A}$  em direções opostas. Reciprocamente, se  $F + (k, 0)$  é um levantamento de  $f$  que move as componentes da fronteira de  $\tilde{A}$  em direções opostas então  $-k$  está entre  $T(0)$  e  $T(1)$ .*

O homeomorfismo  $F$  preserva área. De fato, tome um retângulo  $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , sua imagem  $F(C)$  é uma região como na figura 2.14.



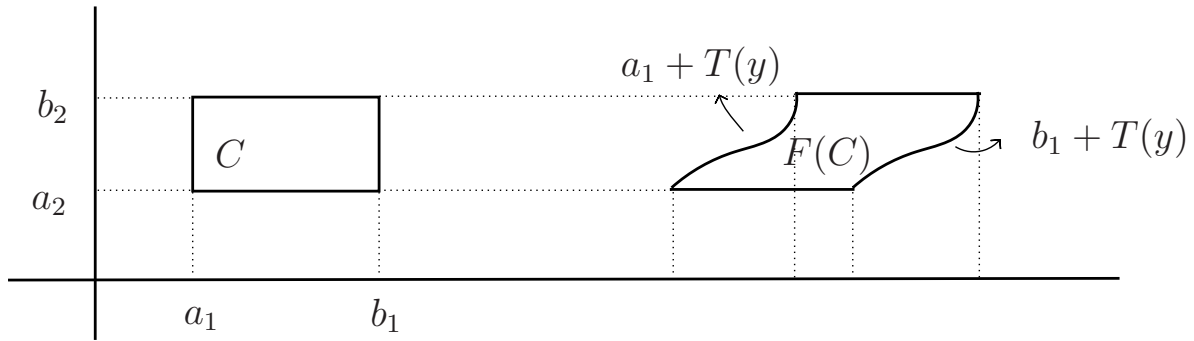


Figura 2.3: A imagem de  $C$  por  $F$ .

*Temos:*

$$\begin{aligned}
 \text{area}(F(C)) &= \int_{a_2}^{b_2} [(b_1 + T(y)) - (a_1 + T(y))] dy \\
 &= \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dy \\
 &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\
 &= \text{area}(C)
 \end{aligned}$$

Como os retângulos  $C$  geram a álgebra de borel, podemos concluir que  $F$ , e logo  $f$ , preserva área.

Note que se  $y_0$  é tal que  $T(y_0) = k \in \mathbb{Z}$  então os pontos da reta  $y = y_0$  são pontos fixos de  $F + (-k, 0)$  logo os pontos do círculo  $S^1 \times \{y_0\}$  são pontos fixos de  $f$ .

Se  $f$  é de torção existe  $k \in \mathbb{Z}$  entre  $T(0)$  e  $T(1)$ . Neste caso, sendo  $T$  continua, pelo teorema de valor intermediário, existe  $y_0 \in [0, 1]$  tal que  $T(y_0) = k$ . Por tanto um homeomorfismo de torção com levantamento deste tipo tem no mínimo os pontos de um círculo como pontos fixos.

## Capítulo 3

# Generalização do Teorema de Poincaré-Birkhoff

**Teorema 3.1** (Poincaré-Birkhoff). *Se  $f : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  é um homeomorfismo de torção que preserva área, então  $f$  possui pelo menos dois pontos fixos distintos.*

Neste capítulo provaremos uma generalização do teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel aberto, e veremos que o teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel fechado, pode ser obtido deste resultado.

Começamos dando as noções topológicas de ponto errante e ponto recorrente. Mostraremos que a condição de preservar área no teorema de Poincaré-Birkhoff implica que todo ponto é não errante. Na generalização que apresentaremos a condição de preservar área será substituída pela hipótese mais fraca que todo ponto é não errante. A seguir, nas seções 3.2 e 3.3 definiremos os conceitos chaves que usaremos na demonstração do teorema principal deste trabalho, os conceitos de discos de retorno e de cadeia periódica de discos. O primeiro passo é generalizar o teorema de Brouwer que afirma que dado um homeomorfismo que preserva orientação do plano e que possui um ponto periódico que não é fixo, então existe uma curva fechada simples de índice um. Na generalização deste teorema que apresentaremos na seção 3.2 trocaremos a hipótese “possui um ponto periódico não fixo” pela hipótese mais fraca “possui uma cadeia periódica de discos”. Com este resultado na seção 3.4 mostraremos o teorema principal (teorema 3.24).

Na seção 3.5 consideramos homeomorfismos do anel fechado e veremos que do teorema 3.24 podemos obter algumas conseqüências. Em particular obteremos o teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel fechado.

### 3.1 Pontos não errantes e pontos recorrentes

Seja  $X$  um espaço topológico e  $f: X \rightarrow X$  uma aplicação contínua.

Um ponto  $x \in X$  é dito não errante para  $f$  se para toda vizinhança aberta  $U$  de  $x$ , existe  $n > 0$  tal que  $f^n(U) \cap U = \emptyset$ . Denotaremos por  $\Omega(f)$  o conjunto dos pontos não-errantes de  $f$ .

Diremos que um subconjunto  $W \subset X$  é  $f$ -invariante se  $f(W) \subseteq W$ .

**Proposição 3.2.** *O conjunto  $\Omega(f)$  é fechado e  $f$ -invariante.*

*Demonstração.* Seja  $x_k \in \Omega(f)$  tal que  $x_k \rightarrow x$ . Dado um aberto qualquer  $U$  contendo  $x$ , existe  $k$  tal que  $x_k \in U$  e sendo  $x_k$  não errante, existe  $n$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Como  $U$  é arbitrário,  $x \in \Omega(f)$ . Para mostrar que  $\Omega(f)$  é  $f$ -invariante, tomemos  $x \in \Omega(f)$  e seja  $U$  um aberto contendo  $f(x)$  então  $V = f^{-1}(U)$  é um aberto contendo o ponto não errante  $x$  e assim existe  $n > 0$  tal que  $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$  e logo  $f(f^n(V) \cap V) \subset f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ , por tanto  $f(x) \in \Omega(f)$ .  $\square$

**Proposição 3.3.** *Se  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  é um homeomorfismo do anel fechado que preserva área, então  $\Omega(f) = \bar{A}$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista  $x \in \bar{A}$  que é errante. Então existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  tal que  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $n > 0$ , equivalentemente a família  $\{f^n(U), n \geq 0\}$  é disjunta [de fato, se  $f^m(U) \cap f^n(U) \neq \emptyset$  com  $m > n$  então  $f^{m-n}(U) \neq \emptyset$ ]. Como  $f$  preserva área,  $f^n(U), n \geq 0$ , são abertos da mesma área e disjuntos. Logo  $\mu(\bar{A}) > \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^n(U)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(U) = \infty$ , o qual é uma contradição pois  $\mu(\bar{A}) = 1 < \infty$  [aqui  $\mu$  denota a área no anel fechado, ver seção 2.3].  $\square$

Mais geralmente, com a mesma demonstração se prova que: Se  $(X, \mu)$  é um espaço de probabilidade ( $\mu(X) = 1$ ) tal que  $\mu(U) > 0$  para todo aberto  $U \subset X$  e,  $f: (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$  é um homeomorfismo e preserva a medida  $\mu$ , i.e, para todo conjunto mensurável  $R \subset X$ ,  $\mu(f^{-1}(R)) = \mu(R)$ , então  $\Omega(f) = X$ .

Agora definiremos o  $\omega$ -limite de um ponto  $x \in X$  como o conjunto dos  $y \in X$  tais que para toda vizinhança  $U$  de  $y$  a relação  $f^n(x) \in U$  é satisfeita para infinitos valores  $n > 0$ . Se  $X$  é um espaço métrico, isto é equivalente a dizer  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), y) = 0$ .

Em outras palavras,  $\omega(x)$  é o conjunto dos pontos limites da seqüência  $(f^n(x))$ .

Observemos que  $\omega(x)$  é um subconjunto  $f$ -invariante, i.e,  $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$ . De fato, seja  $y \in \omega(x)$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $f(y)$ , então  $f^{-1}(U)$  é uma vizinhança

aberta de  $y$  logo a relação  $f^n(x) \in f^{-1}(U)$  é satisfeita para infinitos valores  $n > 0$ , assim  $f^{n+1}(x) \in U$  para infinitos valores  $n > 0$ .

Também observemos que o conjunto  $\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} \{f^n(x)\}}$ ,  $m \geq 0$  contém todos os pontos limites da seqüência  $(f^n(x))$  mais termos desta seqüência a partir de  $m$ . Logo  $\bigcap_{m=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} \{f^n(x)\}}$  é o conjunto dos pontos limites da seqüência  $(f^n(x))$ . Por tanto:

$$\omega(x) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} \{f^n(x)\}}$$

Dessa igualdade segue que  $\omega(x)$  é fechado. Assim se  $X$  é um espaço métrico compacto,  $\omega(x)$  é não vazio, compacto e  $f$ -invariante.

Um ponto  $x \in X$  é dito recorrente se  $x \in \omega(x)$ .

É claro que se  $x$  é recorrente, então  $x$  é não errante. Assim, denotando  $\omega(f)$  o conjunto dos pontos recorrentes, como  $\Omega(f)$  é fechado temos que:

$$\overline{\omega(f)} \subset \Omega(f)$$

Para terminar a seção mostraremos a existência de pontos recorrentes para aplicações contínuas em espaços compactos. Para a prova da existência usaremos o teorema de Zorn que passamos a enunciar.

Uma relação de ordem num conjunto  $Z$  é uma relação binária em  $Z$ , indicada geralmente com o símbolo  $\leq$ , gozando das seguintes propriedades:

- 1) Reflexiva:  $a \leq a$  para todo  $a \in Z$ ;
- 2) Anti-simétrica: se  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , então  $a = b$ ;
- 3) Transitiva: se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então  $a \leq c$ .

Um conjunto ordenado é um conjunto munido de uma relação de ordem nele definida.

Seja  $Z$  um conjunto ordenado. Um subconjunto  $\mathcal{C} \subset Z$  é linearmente ordenado se dados  $a, b \in \mathcal{C}$ , ou  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . Um subconjunto linearmente ordenado é chamado de cadeia.

Um elemento  $a \in Z$  chama-se elemento mínimo de  $Z$  quando não existe em  $Z$  nenhum elemento  $x$  tal que  $x \leq a$  e  $x \neq a$ .

Seja  $S$  um subconjunto de  $Z$ . Um elemento  $a \in Z$  chama-se um cota inferior de  $S$  se  $a \leq x$  para todo  $x \in S$ . O conjunto ordenado  $Z$  diz-se indutivo inferiormente quando todo subconjunto linearmente ordenado  $S \subset Z$  possui uma cota inferior.

**Teorema 3.4** (Teorema de Zorn). *Todo conjunto não vazio indutivo inferiormente possui elemento mínimo.*

Ver [6] pág 15.

**Proposição 3.5.** *Seja  $f: X \rightarrow X$  continua. Se  $X$  é compacto então  $f$  tem um ponto recorrente.*

*Demonstração.* Consideremos a família de compactos não vazios e  $f$ -invariantes:

$$\mathfrak{F} = \{K \subset X : K \text{ compacto } K \neq \emptyset, \text{ e } f(K) \subset K\}$$

Como  $X$  é compacto temos  $X \in \mathfrak{F}$ , assim  $\mathfrak{F}$  é não vazio.

Ordenamos o conjunto  $\mathfrak{F}$  por inclusão, ou seja, se  $K_1, K_2 \in \mathfrak{F}$  são tal que  $K_1 \subset K_2$  então escrevemos  $K_1 \leq K_2$ . Assim,  $\mathfrak{F}$  é um conjunto ordenado. Mostraremos que para qualquer cadeia em  $\mathfrak{F}$  podemos achar uma cota inferior.

Seja  $\mathcal{C} \subset \mathfrak{F}$  uma cadeia. O conjunto  $M = \bigcap_{K \in \mathcal{C}} K$  é fechado pois é intersecção de compactos, assim, sendo  $X$  compacto e  $M \subset X$ ,  $M$  é compacto. Além disso, como  $\mathcal{C}$  é uma cadeia então tem a propriedade de intersecção finita, i.e, para qualquer família finita  $K_1, K_2, \dots, K_n \in \mathcal{C}$  temos  $K_1 \cap K_2 \dots \cap K_n \neq \emptyset$  (de fato podemos ordenar tais conjuntos, trocando os índices se necessário, de tal forma que  $K_1 < K_2 < \dots < K_n$  e assim  $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n = K_1 \neq \emptyset$ ). Logo, sendo  $X$  compacto tem-se que  $M = \bigcap_{K \in \mathcal{C}} K$  é não vazio. Também temos que  $M$  é  $f$ -invariante, pois  $f(M) = f(\bigcap_{K \in \mathcal{C}} K) \subset \bigcap_{K \in \mathcal{C}} f(K) \subset \bigcap_{K \in \mathcal{C}} K = M$ . Por tanto  $M \in \mathfrak{F}$  e assim  $M$  é uma cota inferior de  $\mathcal{C}$ .

Usando Teorema de Zorn concluímos que  $\mathfrak{F}$  possui elemento mínimo, i.e, existe  $C \in \mathfrak{F}$  tal que não existe nenhum compacto  $K \in \mathfrak{F}$  tal que  $K \subset C$  e  $K \neq C$ .

Seja  $x \in C$ . Como  $C$  é compacto e  $f$ -invariante então  $\omega(x) \subset C$ . Por outro lado, sendo  $X$  compacto,  $\omega(x)$  é não vazio, compacto e  $f$ -invariante. Pela minimalidade de  $C$  temos  $\omega(x) = C$ , logo  $x$  é recorrente.  $\square$

Como corolário, se  $X$  é compacto então  $\Omega(f) \neq \emptyset$ .

## 3.2 Cadeias de discos

Seja  $M$  uma superfície topológica, i.e, um espaço topológico Hausdorff localmente homeomorfo ao plano.

Um disco aberto, ou simplesmente um disco, em  $M$  é um subconjunto  $U \subset M$  que com a topologia induzida de  $M$  é homeomorfo ao disco unitário aberto  $D(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Assim, um disco aberto em  $\mathbb{R}^2$  ou num aberto de  $\mathbb{R}^2$  é um subconjunto do plano homeomorfo a  $D(0, 1)$ . O teorema de invariância de domínios (ver [10] pág 73) nos afirma que um disco aberto no plano é um aberto do plano. Isto implica que em geral um disco aberto em  $M$  é um aberto de  $M$ .

**Definição 3.6.** *Seja  $f: M \rightarrow M$  contínua. Um subconjunto  $U \subset M$  é livre de  $f$  se  $f(U) \cap U = \emptyset$ .*

**Observação 3.7.** *Note que se  $V \subset U$  e  $U$  é livre de  $f$ , então  $V$  também é livre de  $f$ .*

*Também note que nenhum subconjunto que contém um ponto fixo pode ser livre. Reciprocamente, se  $x \in M$  é um ponto não fixo de  $f$  então podemos achar um aberto contendo  $x$  livre de  $f$ . De fato, existem abertos disjuntos,  $V(x)$  contendo  $x$  e  $V(f(x))$  contendo  $f(x)$ ; logo o conjunto  $V = V(x) \cap f^{-1}[V(f(x))]$  é um aberto contendo  $x$  tal que  $f(V) \cap V = \emptyset$ . Mais ainda, dado que qualquer disco  $D \subset V$  será livre, podemos achar um disco livre contendo  $x$ , é só pegar um disco  $D \subset V$  contendo  $x$ .*

Um conceito chave que usaremos na demonstração do teorema principal é de cadeia de discos, que definiremos agora.

**Definição 3.8.** *Seja  $f: M \rightarrow M$  um homeomorfismo. Uma cadeia de discos é um conjunto finito  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de discos abertos contidos em  $M$  satisfazendo:*

- (1) *Os  $U_i$  são livres de  $f$ ;*
- (2) *Para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  temos que  $U_i \cap U_j = \emptyset$  com a exceção de  $U_1 \cap U_n$ , onde poderia ser  $U_1 = U_n$  ou  $U_1 \cap U_n = \emptyset$ ;*
- (3) *Para cada  $i < n$  existe un inteiro positivo  $m_i > 0$  tal que  $f^{m_i}(U_i) \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ .*

*Se  $U_1 = U_n$  então dizemos que  $U_1, U_2, \dots, U_n$  é uma cadeia periódica de discos.*

**Observação 3.9.** *Dada uma cadeia periódica de discos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  para  $f$  podemos escolher uma subsequência de discos abertos  $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}$  que também é uma cadeia periódica de discos para  $f$  e tal que é minimal no sentido que não podemos escolher uma subsequência própria desta última que também é uma cadeia periódica de discos para  $f$ . Também podemos escolher os  $m_i$  na definição anterior sendo os menores inteiros*

positivos tal que se tem a propriedade  $f^{m_i}(U_i) \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ . Com estas escolhas observe que se  $x \in U_i$  é tal que  $f^{m_i}(x) \in U_{i+1}$  tem-se que a semiórbita  $\{f(x), f^2(x), \dots, f^{m_i-1}(x)\}$  é disjunta de  $\bigcup_{i=1}^n U_i$ . De fato, se  $f^n(x) \in U_j$  para algum  $n$  com  $1 \leq n \leq m_i - 1$ , então pela minimalidade de  $m_i$  tem-se que  $j \neq i + 1$ , assim  $U_1, \dots, U_i, U_j, \dots, U_n$  é uma subsequência própria de  $U_1, \dots, U_n$ , o qual é uma contradição a minimalidade de  $U_1, \dots, U_n$ .

Seja  $f: M \rightarrow M$  um homeomorfismo. Lembremos que um ponto periódico de  $f$  é um ponto  $x$  tal que  $f^n(x) = x$  para algum  $n > 0$ . Se  $n = 1$ ,  $x$  é chamado ponto fixo de  $f$ .

**Observação 3.10.** *Se  $f$  tem um ponto periódico que não é fixo, então  $f$  tem uma cadeia periódica de discos.*

De fato, seja  $x$  um ponto periódico de  $f$  que não é fixo, e seja  $n > 1$  o menor inteiro positivo tal que  $f^n(x) = x$ . Como os  $f^j(x)$  para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  (estamos denotando  $f^0(x) = x$ ) são não fixos para  $f$ , pela observação 3.7 podemos achar discos livres  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$  tais que  $f^j(x) \in V_j$ . E como  $f^j(x)$  são distintos, ainda podemos reduzir os discos  $V_j$  de tal forma que sejam disjuntos dois a dois. Agora, já que  $f^j(x) \in V_j$ , então  $f^{j+1}(x) \in V_{j+1} \cap f(V_j)$  para para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$  e  $x \in V_0 \cap f(V_{n-1})$ . Assim, a seqüência de discos abertos  $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}, V_n = V_0$  é uma cadeia periódica de discos para  $f$ .

Lembremos que definimos, no final do capítulo 1, um caminho fechado simples no plano estar positivamente orientado se existe uma homotopia livre por caminhos fechados simples entre o caminho e o círculo unitário com a orientação positiva. Diremos que um homeomorfismo do plano preserva orientação quando leva caminhos fechados simples positivamente orientados em caminhos fechados simples também positivamente orientados. Mais precisamente um homeomorfismo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  preserva orientação se para qualquer caminho fechado simples  $\gamma$  orientado positivamente temos que  $f \circ \gamma$  é um caminho fechado simples orientado positivamente. Observemos que se  $f$  é isotópico à identidade então  $f$  preserva orientação. De fato, seja  $H: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isotopia entre  $f$  e a identidade, então  $H_t \circ \gamma: s \mapsto H_t(\gamma(s))$  é uma homotopia livre por caminhos fechados simples entre  $\gamma$  e  $f \circ \gamma$ , por tanto se  $\gamma$  está orientado positivamente então  $f \circ \gamma$  também está orientado positivamente. Pode-se provar também a recíproca, isto é um homeomorfismo que preserva orientação é isotópico à identidade.

Um resultado muito importante, que usaremos fortemente na prova dos resultados deste capítulo, é o famoso teorema de Brouwer sobre homeomorfismos do plano. Uma demonstração simples e elegante dada por M. Brown pode ser encontrada em [7]. Também tem outra prova dada por A. Fhati [1].

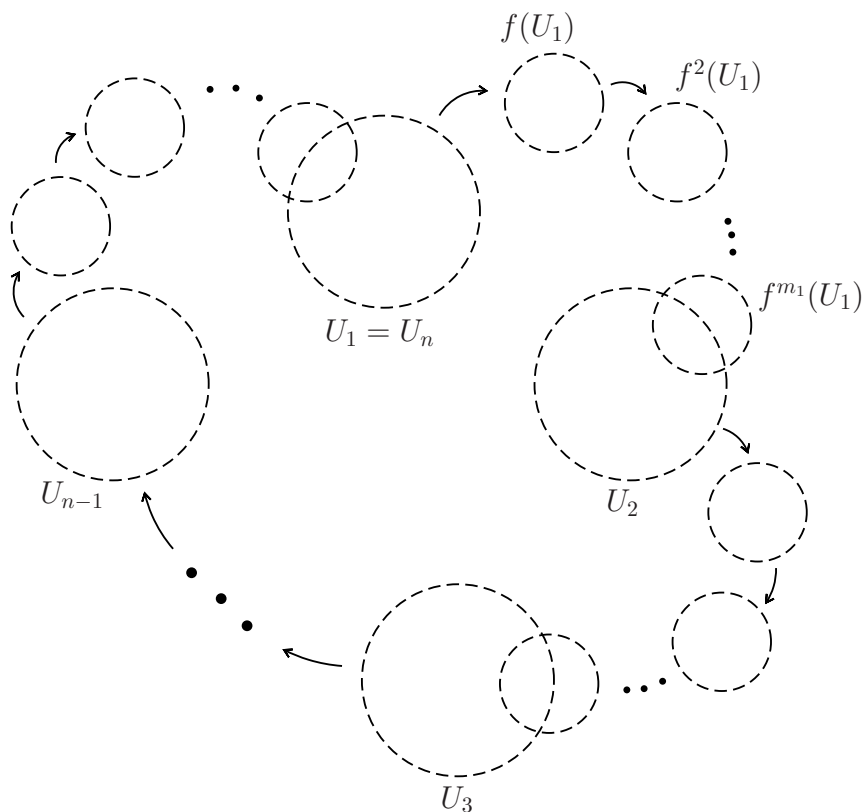


Figura 3.1: Uma cadeia periódica de discos minimal

**Teorema 3.11** (Brouwer). *Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo preservando orientação e que possui um ponto periódico que não é fixo. Então existe uma curva fechada simples  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $I(\gamma, f) = 1$ .*

Para nossos propósitos precisamos generalizar este resultado substituindo “ponto periódico não fixo” na hipótese do teorema por “cadeia periódica de discos”. Antes desta generalização mostraremos um lema que usaremos na prova de dita generalização.

**Lema 3.12.** *Seja  $D$  um disco aberto em  $\mathbb{R}^2$ , e  $p, q \in D$ . Então existe uma isotopia  $H: \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:*

- (1)  $H_0 = Id$ ;
- (2)  $H_1(p) = q$ ;
- (3)  $H_t(x) = x$ , para todo  $x \notin D$ .



*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $D = D(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < 1\}$  é o disco aberto unitário centrado no origem. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^\infty$  tal que  $f > 0$  em  $D$  e  $f = 0$  fora de  $D$ . Consideremos o campo  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $X(z) = f(z)(q - p)$ . Sabemos que o fluxo  $\phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $X$  é uma família de difeomorfismos que variam continuamente e tal que  $\phi_0 = Id$ .

Seja  $\phi_t(p)$  a órbita que passa por  $p$ , dado que o campo  $X$  não tem singularidades em  $D$  então quando  $t \rightarrow \infty$  a órbita se aproxima a  $\partial D$  por tanto  $q$  deve pertencer á órbita positiva que passa por  $p$ . Assim existe  $\tau > 0$  tal que  $\phi_\tau(p) = q$ . Pondo  $H_t = \phi_{t\tau}$  para  $t \in [0, 1]$ , obtemos a isotopia desejada.

Agora, seja  $D$  um disco aberto arbitrário do plano. Pelo teorema de Shöenflies, existe um homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(D) = D(0, 1)$ . Assim, dados  $p, q \in D$ , como  $h(p), h(q) \in D(0, 1)$  pelo já feito no disco unitário, existe uma isotopia  $H_t$  no disco unitário  $D(0, 1)$  tal que  $H_0 = Id$ ,  $H_1(h(p)) = h(q)$  e  $H_t(x) = x$  para  $x \notin D(0, 1)$ . Logo definindo  $G_t = h^{-1} \circ H_t \circ h$  no plano, vemos que é uma isotopia e satisfaz  $G_1(p) = h^{-1} \circ H_1 \circ h(p) = q$ ,  $G_0 = Id$  e  $G_t(x) = x$  para todo  $x \notin D$ .  $\square$

**Teorema 3.13.** *Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo preservando orientação e que possui uma cadeia periódica de discos. Então existe uma curva fechada simples  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $I(\gamma, f) = 1$ .*

*Demonstração.* A idéia da prova é alterar o homeomorfismo  $f$  a um homeomorfismo  $g$  que também preserve orientação e que tenha um ponto periódico que não é fixo, logo usar o teorema de Brouwer para achar uma curva fechada simples  $\gamma$  tal que  $I(\gamma, f) = 1$ . Finalmente mostrar que as alterações foram feitas de tal modo que  $I(\gamma, f) = I(\gamma, g)$ .

Pela hipótese,  $f$  possui uma cadeia periódica de discos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  e se tem que os discos  $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$  são disjuntos e, para cada  $i < n$  existem  $m_i$  tais que  $f^{m_i}(U_i) \cap (U_{i+1}) \neq \emptyset$ . Podemos escolher  $m_i$  os menores inteiros positivos tais que se tem a propriedade anterior. Além disso vamos a tomar a cadeia periódica de discos como sendo minimal no sentido da observação 3.9.

Assim para cada  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  existem  $x_{i+1} \in f^{m_i}(U_i) \cap (U_{i+1})$  e  $z_i = f^{-m_i}(x_{i+1}) \in U_i$ . Só para não fazer confusão com os índices ponhamos  $x_1 = x_n$ , assim  $x_i, z_i \in U_i$ .

Seja

$$P = \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{m_i-1} \{f^j(z_i)\},$$

a união das órbitas parciais começando em  $f(z_i)$  e terminando em  $f^{m_i-1}(z_i) = f^{-1}(x_{i+1})$ .

Pela observação 3.9 tem-se que  $P \cap \bigcup_{i=1}^n U_i = \emptyset$ . Logo, para cada  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  podemos escolher caminhos  $\alpha_i$  de  $x_i$  a  $z_i$ , tal que  $\alpha_i \subset U_i$ .

Sejam  $V_i$  discos abertos tais que  $\alpha_i \subset V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$  (ver figura 3.2).

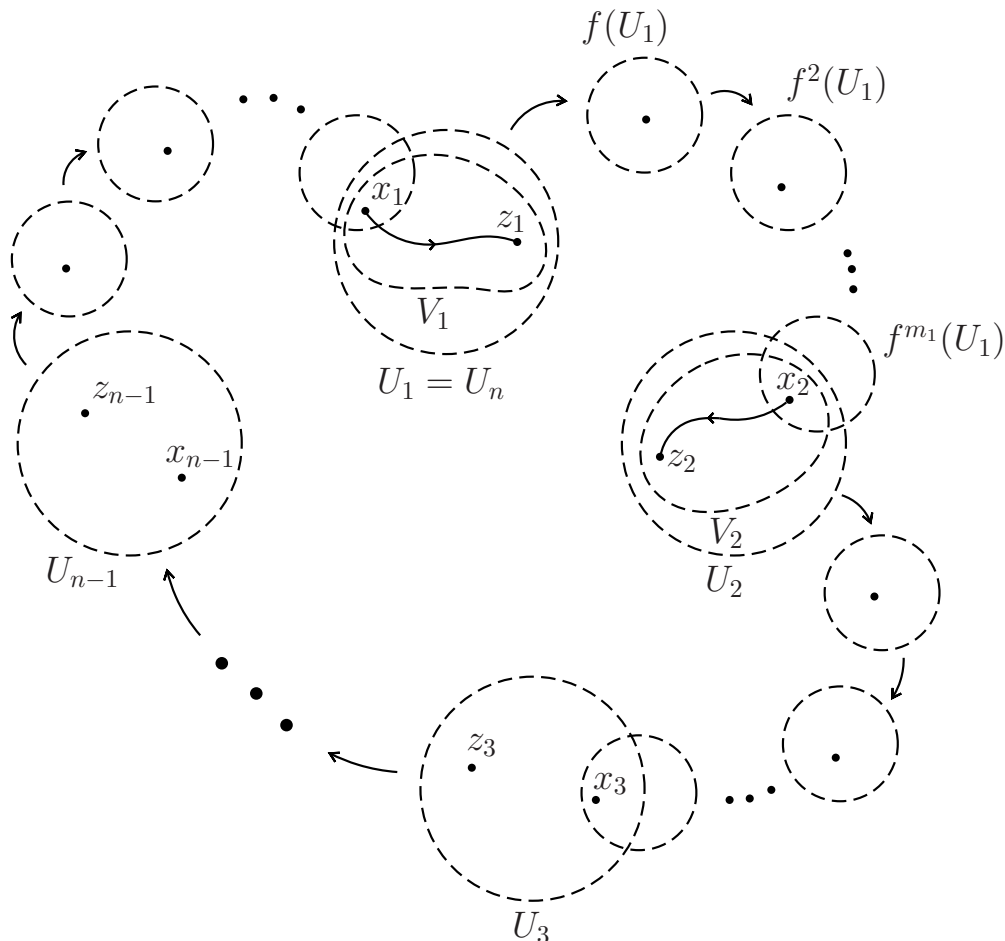


Figura 3.2: Os discos  $U_i$ 's e os discos  $V_i$ 's

Usando o lema anterior, para cada  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  existem isotopias  $h_t^i: U_i \rightarrow U_i$ ,  $t \in [0, 1]$ , tais que:

- (1)  $h_0^i = Id: U_i \rightarrow U_i$
- (2)  $h_1^i(x_i) = z_i$
- (3)  $h_t^i(x) = x$  para todo  $x \in U_i - \bar{V}_i$ .

Com estas isotopias definimos  $h_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 1]$ , pondo:

$$h_t(x) = \begin{cases} h_t^i(x) & \text{se } x \in U_i \\ x & \text{se } x \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \end{cases}$$

Temos que  $h_t$  é uma isotopia entre  $Id$  e  $h_1$ . De fato; observe que as aplicações

$$(t, x) \mapsto h_t^i(x) \quad \text{para } t \in [0, 1], x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$$

$$(t, x) \mapsto x \quad \text{para } t \in [0, 1], x \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} \bar{V}_i$$

são isotopias que coincidem na intersecção de seus domínios, já que  $h_t^i(x) = x$  para  $x \in U_i - \bar{V}_i$ . Também observe que  $h_t$  coincide com cada uma de estas isotopias em seus respectivos domínios, e como a união dos domínios de estas isotopias é todo  $\mathbb{R}^2$  então podemos concluir que de fato,  $h_t$  é uma isotopia entre  $h_0 = Id$  e  $h_1$ .

Definamos  $g = f \circ h_1$ . Como  $h_1$  é isotópico à identidade ele preserva orientação, logo  $g$  preserva orientação.

Observemos que  $g(x) = f \circ h_1(x) = f(x)$  para todo  $x \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ . Então temos

$$g(x_i) = f(h_1(x_i)) = f(z_i)$$

$$g^2(x_i) = g(f(z_i)) = f(f(z_i)) = f^2(z_i) \text{ pois } f(z_i) \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$$

$$g^3(x_i) = g(f^2(z_i)) = f(f^2(z_i)) = f^3(z_i) \text{ pois } f^2(z_i) \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$$

assim sucessivamente

$$g^{m_i}(x_i) = g(f^{m_i-1}(z_i)) = f(f^{m_i-1}(z_i)) = f^{m_i}(z_i) = x_{i+1} \text{ pois } f^{m_i-1}(z_i) \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$$

daí

$$g^{m_1+m_2+\dots+m_{n-1}}(x_1) = x_n = x_1$$

Assim,  $g$  satisfaz as hipóteses do teorema de Brouwer e por tanto existe uma curva fechada simples  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  com  $I(\gamma, g) = 1$ .

Para finalizar mostraremos que  $I(\gamma, g) = I(\gamma, f)$ . Para isto, observe que  $f \circ h_t$  é uma isotopia entre  $f$  e  $g$ , logo, em virtude da proposição 1.29, basta provar que a isotopia não tem pontos fixos sobre  $\gamma$ , i.e,  $f \circ h_t(\gamma(s)) \neq \gamma(s)$  para todo  $t, s \in [0, 1]$ .

De fato, se  $\gamma(s) \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$  então  $f \circ h_t(\gamma(s)) = f(\gamma(s)) = f \circ h_1(\gamma(s)) = g(\gamma(s))$  e como  $g$  não tem pontos fixos sobre  $\gamma$  (por definição de índice), temos  $f \circ h_t(\gamma(s)) = g(\gamma(s)) \neq \gamma(s)$ .

E se  $\gamma(s) \in U_i$  então  $f \circ h_t(\gamma(s)) = f(h_t^i(\gamma(s))) \in f(U_i)$ , e como  $U_i$  é livre temos  $f \circ h_t(\gamma(s)) \neq \gamma(s)$ .

Por tanto  $I(\gamma, f) = I(\gamma, g) = 1$ . □

**Corolário 3.14.** *Seja  $f$  como no teorema. Se  $f$  tem só pontos fixos isolados, então  $f$  tem um ponto fixo de índice positivo.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior existe uma curva fechada simples  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $I(\gamma, f) = 1$ . Se  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são os pontos fixos no interior de  $\gamma$ , usando a proposição 1.35 temos:

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}(p_i, f) = I(\gamma, f) = 1$$

Logo algum ponto fixo  $p_i$  é de índice positivo. □

**Corolário 3.15.** *Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo que preserva orientação. Se  $\Omega(f) \neq \emptyset$  então  $f$  tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $x \in \Omega(f)$ . Se  $x$  não é fixo, então podemos achar um disco livre  $U$  contendo  $x$ . Dado que  $x$  é não errante, existe  $n > 1$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Assim,  $U_1 = U_2 = U$  é uma cadeia periódica de discos para  $f$ . Pelo teorema, existe uma curva fechada simples  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $I(\gamma, f) = 1$ . Logo  $f$  tem um ponto fixo no interior de  $\gamma$ . □

Observe que como  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  por um homeomorfismo preservando orientação, então o corolário anterior também é válido trocando  $\mathbb{R}^2$  por  $\tilde{A}$ . Por este mesmo motivo temos uma versão do corolário 3.14 para  $f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ .

**Lema 3.16.** *Suponha  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um homeomorfismo da faixa  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  que preserva orientação e que tem só pontos fixos isolados. Se  $\tilde{f}$  possui uma cadeia periódica de discos então  $\tilde{f}$  tem um ponto fixo de índice positivo.*

*Demonstração.* Seja  $g: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo que preserva orientação. Consideremos o homeomorfismo conjugado  $h = g \circ \tilde{f} \circ g^{-1}$ , temos que  $h$  preserva orientação e se  $U_1, U_2, \dots, U_n$  é uma cadeia periódica de discos para  $\tilde{f}$  então  $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_n)$  é uma cadeia periódica de discos para  $h$ . Pelo corolário 3.14,  $h$  tem um ponto fixo de índice positivo, logo  $f$  também tem um ponto fixo de índice positivo. □

### 3.3 Discos de retorno

Nesta seção consideraremos discos no anel aberto  $A = S^1 \times (0, 1)$  e no recobrimento universal  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ . A projeção de recobrimento  $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$  é dada por  $\pi(x, y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), y)$ .

Se  $U \subset \tilde{A}$  é um disco aberto, denotaremos:

$$U + k = \{(x + k, y) : (x, y) \in U\}$$

para  $k \in \mathbb{Z}$ , e chamaremos aos discos  $U + k$  de trasladadas inteiras de  $U$ .

**Observação 3.17.** *Seja  $U_0 \subset A$  um disco aberto, e seja  $U$  uma componente conexa de  $\pi^{-1}(U_0)$ . As demais componentes conexas são  $U + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . De fato, se existir componentes conexas de  $\pi^{-1}(U_0)$  que não são trasladadas inteiras de  $U$ , seja  $V$  a união de todas elas, então  $\pi(V)$  e  $\pi(U)$  são abertos disjuntos não vazios tais que  $\pi(V) \cup \pi(U) = U_0$ . Isto é uma contradição pois  $U_0$  sendo disco é conexo.*

**Observação 3.18.** *A restrição  $\pi|_U: U \rightarrow U_0$  é injetiva, pois se não fosse existiria  $x, x + k \in U$  com  $k \neq 0$ . Como  $U$  é componente conexa aberta (logo conexo por caminhos), podemos unir  $x$  e  $x + k$  por um caminho  $\gamma$  contido em  $U$  e assim teríamos que o caminho  $\pi \circ \gamma$  é um caminho em  $U_0$  que não é homotópico a um ponto, o qual não pode acontecer pois  $U_0$  sendo disco é simplesmente conexo. Isto mostra a injetividade e como sabemos que  $\pi$  é um homeomorfismo local concluímos que  $\pi|_U$  é um homeomorfismo, mostrando que  $U$  é um disco aberto de  $\tilde{A}$ .*

Dado que não se pode ter  $x, x + k \in U$  concluímos também que a união:

$$\pi^{-1}(U_0) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (U + k)$$

é disjunta.

Como vimos nas observações anteriores, se  $U_0 \subset A$  é um disco aberto então qualquer componente conexa de  $\pi^{-1}(U_0)$  é um disco aberto em  $\tilde{A}$ . Uma componente conexa de  $\pi^{-1}(U_0)$  é chamado de levantamento do disco  $U_0$ . Os demais levantamentos de  $U_0$  são da forma  $U + k$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

Das observações acima concluímos que para que um disco aberto  $U \subset \tilde{A}$  seja levantamento de um disco aberto em  $A$  é necessário e suficiente que  $\pi(U)$  seja disco em  $A$ .

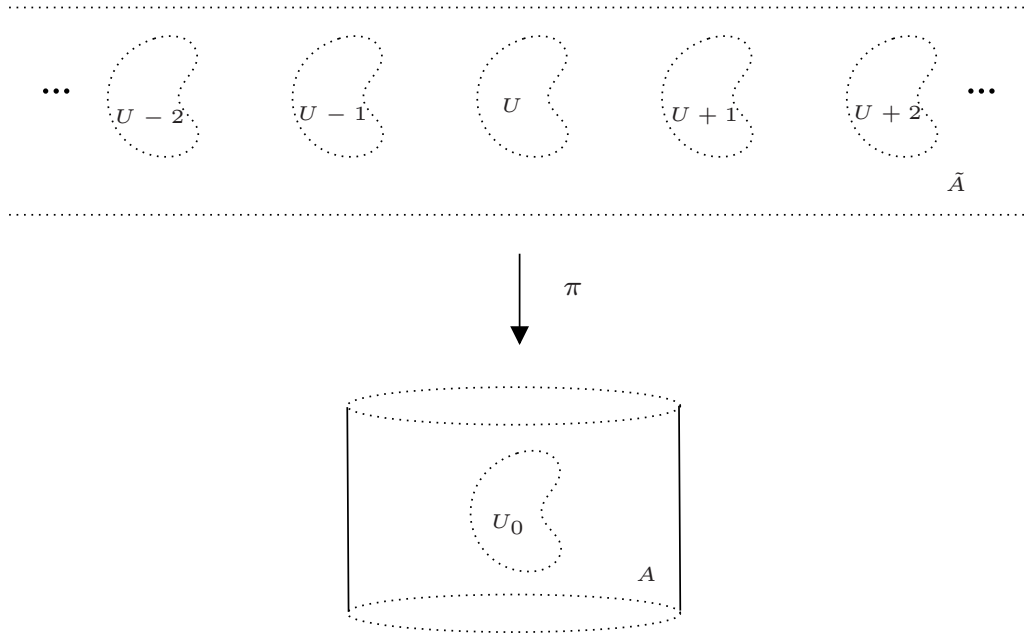


Figura 3.3: Levantamento do disco  $U_0 \subset A$  ao espaço de recobrimento  $\tilde{A}$ .

**Definição 3.19** (Disco de retorno). *Seja  $f: A \rightarrow A$  um homeomorfismo do anel aberto e seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ . Um disco livre  $U \subset \tilde{A}$  que é levantamento de um disco em  $A$ , é dito disco de retorno  $k$ , se existe um inteiro positivo  $n$  tal que:*

$$\tilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$$

*Um disco de retorno  $k$  com  $k > 0$  ( $k < 0$ ) será chamado disco de retorno positivo (negativo).*

**Observação 3.20.** (i) *Observe que a definição de disco de retorno depende do levantamento  $\tilde{f}$  de  $f$ . Por exemplo, seja  $f = Id_A$ . Se  $\tilde{f} = Id_{\tilde{A}}$ , então nenhum disco pode ser livre assim nenhum disco é de retorno. Mais, se  $\tilde{f} = Id_{\tilde{A}} + (k, 0)$ ,  $k \neq 0$ , então  $U = \{(x, y) \in \tilde{A}, : 0 < x < 1\}$  é um disco de retorno  $k$ .*

(ii) *Seja  $U$  um disco de retorno  $k$ . Se  $U \subset V$  então  $\tilde{f}^n(U) \cap (U + k) \subset \tilde{f}^n(V) \cap (V + k)$  para todo  $n$ , logo se  $\tilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$  então  $\tilde{f}^n(V) \cap (V + k) \neq \emptyset$ . Assim, se  $V$  é um disco livre que é levantamento de um disco em  $A$ , e que contém um disco de retorno  $k$ , então  $V$  também é um disco de retorno  $k$ .*

(iii) *Observe também que se  $U$  é um disco de retorno  $k$  e  $f$  é homotópico à identidade então qualquer trasladada inteira de  $U$  é um disco de retorno  $k$ . De fato, como  $f$*

é homotópica á identidade então  $\tilde{f}(x+1, y) = \tilde{f}(x, y) + (1, 0)$  para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$  [ver proposição 2.5], de onde  $\tilde{f}^n(U+j) = \tilde{f}^n(U) + j$  para todo  $n > 0$  e  $j \in \mathbb{Z}$ . Logo, se  $\tilde{f}^n(U) \cap (U+k) \neq \emptyset$  então

$$\begin{aligned} \tilde{f}^n[U+j] \cap [(U+j)+k] &= [\tilde{f}^n(U) + j] \cap [(U+k) + j] \\ &= [\tilde{f}^n(U) \cap (U+k)] + j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Seja  $f: A \rightarrow A$  um homeomorfismo do anel aberto e  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  levantamento de  $f$ . Denotemos por  $\text{Fix}(f)$  o conjunto dos pontos fixos de  $f$ , e por  $\text{Fix}(\tilde{f})$  o conjunto dos pontos fixos de  $\tilde{f}$ .

**Lema 3.21.** *Se  $x \notin \text{Fix}(\tilde{f})$ , e  $\pi(x) \in \Omega(f)$ , então  $x$  pertence a um disco de retorno.*

*Demonstração.* Como  $x \notin \text{Fix}(\tilde{f})$ , então  $x$  pertence a um disco livre  $U$ . Podemos reduzir  $U$  de tal forma que  $\pi(U)$  seja um disco em  $A$ . Como  $\pi(x) \in \pi(U)$  é não errante, existe  $n > 0$  tal que  $f^n(\pi(U)) \cap \pi(U) \neq \emptyset$ . Seja  $y \in f^n(\pi(U)) \cap \pi(U) = \pi \circ \tilde{f}^n(U) \cap \pi(U)$ , existem  $p, q \in U$  tais que  $y = \pi(p) = \pi \circ \tilde{f}^n(q)$ . Logo  $\tilde{f}^n(q) = p + k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $\tilde{f}^n(q) \in \tilde{f}^n(U) \cap (U+k)$ . Por tanto  $U$  é um disco de retorno  $k$  contendo  $x$ .  $\square$

**Lema 3.22.** *Se  $\Omega(f) = A$  então todo disco livre que é levantamento de um disco de  $A$ , é um disco de retorno.*

*Demonstração.* Segue da demonstração do lema anterior.  $\square$

**Lema 3.23.** *Suponha que  $f: A \rightarrow A$  é um homeomorfismo que preserva orientação e homotópico à identidade, e seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ . Se existe um disco  $U \subset \tilde{A}$  que é disco de retorno positivo e disco de retorno negativo ao mesmo tempo, então  $\tilde{f}$  possui uma cadeia periódica de discos.*

*Demonstração.* Suponha  $U \subset \tilde{A}$  disco de retorno positivo e negativo ao mesmo tempo. Assim,  $U$  é livre, é tal que  $\pi(U)$  é disco em  $A$  e existem inteiros positivos  $n_1, n_2, k_1, k_2$  tais que:

$$\tilde{f}^{n_1}(U) \cap (U + k_1) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \tilde{f}^{n_2}(U) \cap (U - k_2) \neq \emptyset$$

Consideremos a seguinte seqüência de discos

$$U, U + k_1, U + 2k_1, \dots, U + k_2k_1, U + (k_1 - 1)k_2, \dots, U + 2k_2, U + k_2, U. \quad (3.1)$$

Como  $f$  é homotópico à identidade, tem-se que  $\tilde{f}(x+i, y) = \tilde{f}(x, y) + (i, 0)$  para todo  $(x, y) \in \tilde{A}$  e  $i \in \mathbb{Z}$ . Então  $\tilde{f}(U+i) = \tilde{f}(U) + i$ , logo  $\tilde{f}^n(U+i) = \tilde{f}^n(U) + i$  para todo  $n > 0$  e  $i \in \mathbb{Z}$ .

Sendo  $U$  livre, tem-se  $\tilde{f}(U+i) \cap (U+i) = (\tilde{f}(U)+i) \cap (U+i) = (\tilde{f}(U) \cap U) + i = \emptyset$ . Assim os discos da seqüência (3.1) são livres.

E como  $\pi(U)$  é disco em  $A$  então  $(U+i) \cap (U+j) = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Logo a seqüência de discos em (3.1) satisfaz a condição (2) da definição 3.8.

Também temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{n_1}(U+ik_1) \cap (U+(i+1)k_1) &= \left( \tilde{f}^{n_1}(U) + ik_1 \right) \cap (U+k_1+ik_1) \\ &= \left( \tilde{f}^{n_1}(U) \cap (U+k_1) \right) + ik_1 \neq \emptyset \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{n_2}(U+ik_2) \cap (U+(i-1)k_2) &= \left( \tilde{f}^{n_2}(U) + ik_2 \right) \cap (U-k_2+ik_2) \\ &= \left( \tilde{f}^{n_2}(U) \cap (U-k_2) \right) + ik_2 \neq \emptyset \end{aligned}$$

Por tanto, a seqüência de discos em (3.1) é uma cadeia periódica de discos para  $\tilde{f}$ .  $\square$

### 3.4 Homeomorfismos do anel aberto

Nesta seção usaremos os resultados até agora para demonstrar a seguinte versão do teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel aberto.

**Teorema 3.24.** *Seja  $f: A \rightarrow A$  um homeomorfismo do anel aberto que preserva orientação, que é homotópico á identidade e que satisfaz as seguintes condições:*

- (1)  $\Omega(f) = A$
- (2)  $f$  tem no máximo um número finito de pontos fixos.
- (3) Existe um levantamento de  $f$  que possui um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo.

Então  $f$  tem um ponto fixo de índice positivo.

*Demonstração.* Seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  o levantamento de  $f$  que possui um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo.

Vamos a considerar três casos cobrindo todas as possibilidades:

**Caso 1.** *Existe um disco de retorno zero para  $\tilde{f}$ .*

Seja  $U \subset \tilde{A}$  disco de retorno zero para  $\tilde{f}$ . Então  $U$  é livre, e existe  $n > 0$  tal que  $\tilde{f}^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Pondo  $U_1 = U_2 = U$  e  $m_1 = n$ , temos que  $U_1, U_2$  é uma cadeia periódica



de discos para  $\tilde{f}$ . Logo, pelo lema 3.16,  $\tilde{f}$  tem um ponto fixo de índice positivo, por tanto  $f$  também tem um ponto fixo de índice positivo.

**Caso 2.** *Existe um disco que é de retorno positivo e de retorno negativo ao mesmo tempo.*

Neste caso, pelo lema 3.23,  $\tilde{f}$  possui uma cadeia periódica de discos e outra vez como no caso anterior  $f$  tem um ponto fixo de índice positivo.

**Caso 3.** *Nem o caso 1 nem o caso 2 valem.*

Definamos os conjuntos:

$$B_+ = \{x \in \tilde{A} : x \text{ pertence a um disco de retorno positivo}\}$$

$$B_- = \{x \in \tilde{A} : x \text{ pertence a um disco de retorno negativo}\}$$

Supondo o caso 3 vamos a chegar a uma contradição, mostrando assim que este caso não pode ocorrer. A idéia é mostrar que  $B_+ \cup B_- = \tilde{A} - \text{Fix}(\tilde{f})$  é uma partição, por abertos, não trivial de  $\tilde{A} - \text{Fix}(\tilde{f})$ . Por outro lado, como  $f$  tem no máximo um número finito de pontos fixos então  $\text{Fix}(\tilde{f})$  é discreto, logo  $\tilde{A} - \text{Fix}(\tilde{f})$  é conexo, chegando a uma contradição.

(i) Os conjuntos  $B_+$  e  $B_-$  são abertos.

De fato,  $B_+$  e  $B_-$  são a união de todos os discos de retorno positivo e negativo, respectivamente, por tanto são abertos.

(ii)  $B_+$  e  $B_-$  são não vazios.

Pela hipótese (3) do teorema.

(iii)  $B_+ \cap B_- = \emptyset$ .

Suponha que existe  $x \in B_+ \cap B_-$ . Então existem discos livres  $U_1, U_2$  contendo  $x$ , que são levantamentos de discos de  $A$  tais que  $U_1$  é um disco de retorno positivo e  $U_2$  é um disco de retorno negativo.

Escolhemos um disco aberto  $U \subset \tilde{A}$  tal que  $x \in U \subset U_1 \cap U_2$ . Como  $U_1$  é livre, então  $U$  é livre. Pelo lema 3.22, dado que  $\Omega(f) = A$ ,  $U$  é um disco de retorno. Como estamos supondo que o caso 1 não vale o disco  $U$  não é de retorno zero. Então só restam duas possibilidades,  $U$  é de retorno positivo ou é de retorno negativo.

Se  $U$  é de retorno positivo, como  $U \subset U_2$ , pelo item (ii) da observação 3.20 segue que  $U_2$  é de retorno positivo. E, se  $U$  é disco de retorno negativo, de  $U \subset U_1$  segue que  $U_1$  é de retorno negativo.

Assim  $U_1$  ou  $U_2$  é um disco de retorno positivo e negativo ao mesmo tempo. Isto é uma contradição pois estamos supondo que caso 2 não vale. Por tanto  $B_+ \cap B_- = \emptyset$ .

(iv)  $B_+ \cup B_- = \tilde{A} - \text{Fix}(\tilde{f})$ .

Se  $x \in B_+ \cup B_-$ , então  $x$  pertence a um disco livre para  $\tilde{f}$ , logo  $x \notin \text{Fix}(\tilde{f})$ .

Se  $x \notin \text{Fix}(\tilde{f})$  então, pelo lema 3.21,  $x$  pertence a um disco de retorno. Mais, como estamos supondo que o caso 1 não vale,  $x$  deve pertencer a um disco de retorno não zero, i.e,  $x \in B_+ \cup B_-$

Das observações (i)-(iv) segue que  $B_+$  e  $B_-$  são abertos disjuntos cuja união é o conexo  $\tilde{A} - \text{Fix}(\tilde{f})$ . Esta contradição mostra que o caso 3 não ocorre. Isto completa a demonstração do teorema.  $\square$

Observe que o teorema é valido se trocamos a hipótese (3) pela condição: “existe um levantamento que possui um disco de retorno zero”, de fato este é o caso 1. Da mesma forma trocando a hipótese (3) por: “existe um levantamento de  $f$  que possui um disco que é ao mesmo tempo disco de retorno positivo e disco de retorno negativo”, de fato, este é o caso 2.

Também observemos que no teorema a condição de todo ponto não errante é necessária para concluir a existência de um ponto fixo de índice positivo, tal como mostra o exemplo 3.40 onde temos um homeomorfismo com um único ponto fixo, e tal ponto fixo é de índice zero. Na seguinte seção veremos que quando o conjunto não errante é conexo podemos concluir que  $f$  tem um ponto fixo, mas neste caso tal ponto fixo poderia ser de índice zero.

## 3.5 Conseqüências do teorema 3.24

### 3.5.1 $\Omega(f)$ conexo

Nesta subseção veremos um resultado encontrado no artigo de David Richenson e Jim Wiseman [3], onde se considera o caso em que o conjunto dos pontos não errantes  $\Omega(f)$  é conexo. Mas, como veremos neste caso, o teorema que mostraremos assegura a existência de um ponto fixo mas não fala nada sobre seu índice, ou seja, tal ponto fixo poderia ter índice zero.

Seja  $f: A \rightarrow A$  um homeomorfismo do anel aberto e seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ .

Definamos os seguintes conjuntos:

$$\Omega^+(f) = \{x \in \Omega(f) : x \in \pi(U) \text{ para algum disco de retorno positivo } U\}$$

$$\Omega^-(f) = \{x \in \Omega(f) : x \in \pi(U) \text{ para algum disco de retorno negativo } U\}$$

Observe que  $\Omega^+(f) = \pi(B_+) \cap \Omega(f)$  e  $\Omega^-(f) = \pi(B_-) \cap \Omega(f)$  onde  $B_+$  e  $B_-$  são como na demonstração do teorema 3.24, assim  $\Omega^+(f)$  e  $\Omega^-(f)$  são subconjuntos abertos de  $\Omega(f)$ .

**Lema 3.25.**  $\Omega(f) = \Omega^+(f) \cup \Omega^-(f) \cup \pi(\Omega(\tilde{f}))$ .

*Demonstração.* Seja  $y \in \Omega(\tilde{f})$ , vamos a mostrar que  $\pi(y) \in \Omega(f)$  e assim, como  $y$  é arbitrário,  $\pi(\Omega(\tilde{f})) \subset \Omega(f)$  mostrando que  $\Omega^+(f) \cup \Omega^-(f) \cup \pi(\Omega(\tilde{f})) \subset \Omega(f)$ . De fato, seja  $V$  um aberto contendo  $\pi(y)$  então  $\pi^{-1}(V)$  é um aberto contendo  $y$ , e como  $y$  é não errante para  $\tilde{f}$ , existe  $n > 0$  tal que  $\tilde{f}^n(\pi^{-1}(V)) \cap (\pi^{-1}(V)) \neq \emptyset$ . Logo, como  $\pi\left(\tilde{f}^n(\pi^{-1}(V)) \cap (\pi^{-1}(V))\right) \subset f^n(V) \cap V$  então  $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ .

Para mostrar a outra inclusão, tome  $x \in \Omega(f)$  e seja  $y \in \tilde{A}$  tal que  $\pi(y) = x$ . Se  $y \in \text{Fix}(\tilde{f})$  então é claro que  $y \in \Omega(\tilde{f})$ , logo  $x \in \pi(\Omega(\tilde{f}))$ . Suponha que  $y \notin \text{Fix}(\tilde{f})$ . Seja  $V$  um aberto contendo  $y$ , como  $y$  não é fixo para  $\tilde{f}$  podemos achar um disco livre  $U$  tal que  $y \in U \subset V$  e  $\pi(U)$  é disco em  $A$ . Sendo  $x$  não errante para  $f$ , existe  $n > 0$  tal que  $f^n(\pi(U)) \cap (\pi(U)) \neq \emptyset$ , logo, levantando, existe um inteiro  $k$  tal que  $\tilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$ . Se  $k \neq 0$  então  $U$  é um disco de retorno positivo ou negativo e assim  $x \in \Omega^+(f) \cup \Omega^-(f)$ . Se  $k = 0$  temos  $\tilde{f}^n(U) \cap U \neq \emptyset$  e, como  $U \subset V$ , segue que  $\tilde{f}^n(V) \cap V \neq \emptyset$ . Sendo  $V$  arbitrário, concluímos que  $y \in \Omega(\tilde{f})$  e assim  $x \in \pi(\Omega(\tilde{f}))$ . Por tanto  $x \in \Omega^+(f) \cup \Omega^-(f) \cup \pi(\Omega(\tilde{f}))$ .  $\square$

**Teorema 3.26.** *Seja  $f: A \rightarrow A$  um homeomorfismo do anel aberto que preserva orientação, que é homotópico à identidade e tal que  $\Omega(f)$  é conexo. Se existe um levantamento  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  de  $f$  que possui um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo ambos intersectando  $\pi^{-1}(\Omega(f))$ , então  $\tilde{f}$ , e logo  $f$ , tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  levantamento de  $f$  possuindo um disco de retorno negativo e um disco de retorno positivo intersectando  $\pi^{-1}(\Omega(f))$ . Isto significa que  $\Omega^+(f)$  e  $\Omega^-(f)$  são não vazios.

Suponhamos que  $\tilde{f}$  não tem pontos fixos. A observação feita depois do corolário 3.15 implica que  $\Omega(\tilde{f}) = \emptyset$ . Logo  $\Omega(f) = \Omega^+(f) \cup \Omega^-(f)$ . Como  $\Omega^+(f)$  e  $\Omega^-(f)$  são abertos de  $\Omega(f)$  não vazios, sendo  $\Omega(f)$  conexo, segue que  $\Omega^+(f) \cap \Omega^-(f) \neq \emptyset$ .

Sejam  $x \in \Omega^+(f) \cap \Omega^-(f)$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Existe um disco de retorno positivo  $U_1$  e um disco de retorno negativo  $U_2$  tal que  $x \in \pi(U_1) \cap \pi(U_2)$ . Como toda translação inteira de

um disco de retorno  $j$  é um disco de retorno  $j$ , então podemos tomar os discos  $U_1$  e  $U_2$  de tal forma que  $y \in U_1 \cap U_2$ . Seja  $U \subset U_1 \cap U_2$  um disco aberto contendo  $y$ . Como  $x$  é não errante para  $f$  então existe  $n > 0$  tal que  $f^n(\pi(U)) \cap \pi(U) \neq \emptyset$ . Logo, levantando, existe um inteiro  $k$  tal que  $\tilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$ . Já que estamos supondo  $\Omega(\tilde{f}) = \emptyset$  deve-se ter  $k \neq 0$  para algum disco  $U$ , i.e, existe um disco  $U \subset U_1 \cap U_2$  de retorno positivo ou negativo. Isto implica que  $U_1$  ou  $U_2$  é um disco de retorno positivo e negativo ao mesmo tempo. Daí, pelo lema 3.23,  $\tilde{f}$  tem um ponto fixo, chegando a uma contradição. Assim  $\tilde{f}$  tem um ponto fixo.  $\square$

Observemos que se existe um disco de retorno zero para  $\tilde{f}$  então  $\tilde{f}$  deve ter um ponto fixo e daí  $f$  tem um ponto fixo.

Também observemos que não é tão necessária a hipótese  $\Omega(f)$  conexo. Basta pedir que os discos de retorno positivo e negativo intersectem a mesma componente conexa de  $\Omega(f)$ ; neste caso a mesma demonstração serve para encontrar um ponto fixo para  $\tilde{f}$ .

No exemplo 3.41 vemos que  $\tilde{f}$  tem discos de retorno positivo perto da reta  $y = \frac{1}{3}$ , e tem discos de retorno negativo perto da reta  $y = \frac{2}{3}$ . Observe que nesse exemplo, os discos de retorno negativo não intersectam a componente  $y = \frac{1}{3}$  e os discos de retorno positivo não intersectam a componente  $y = \frac{2}{3}$ . Em tanto  $\tilde{f}$  e  $f$  não tem pontos fixos.

### 3.5.2 Homeomorfismos do anel fechado

Denotemos por  $P: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção sobre a primeira coordenada,  $P(t, s) = t$  para todo  $(t, s) \in \tilde{A}$ .

Lembremos que um homeomorfismo  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  que preserva as componentes da fronteira de  $\bar{A}$ , é de torção se existe um levantamento  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  de  $f$  tal que:

$$P(\tilde{f}(t, 1)) > t > P(\tilde{f}(t, 0)) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

A condição de torção (3.2) diz que  $\tilde{f}$  move a componente superior da fronteira de  $\tilde{A}$  para a direita e a inferior para a esquerda. Note que  $\tilde{f}$  não pode ter pontos fixos na fronteira de  $\tilde{A}$ .

Mostraremos que a condição de torção (3.2) implica a existência de discos de retorno positivo e negativo no anel aberto.

**Proposição 3.27.** *Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo de torção do anel fechado. Se  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é o levantamento de  $f$  que satisfaz a condição de torção de fronteira, então  $\tilde{f}|_{\text{int}(\tilde{A})}$  possui um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo.*

*Demonstração.* Denotemos  $\partial\bar{A}^+ = S^1 \times \{1\}$  e  $\partial\bar{A}^- = S^1 \times \{0\}$  as componentes superior e inferior da fronteira de  $\bar{A}$ , e por  $\partial\tilde{A}^+ = \mathbb{R} \times \{1\}$  e  $\partial\tilde{A}^- = \mathbb{R} \times \{0\}$  as componentes superior e inferior da fronteira de  $\tilde{A}$ , respectivamente.

Seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  o levantamento de  $f$  que move a componente superior  $\partial\tilde{A}^+$  para a direita e a componente inferior  $\partial\tilde{A}^-$  para a esquerda.

Dado que  $f$  preserva as componentes da fronteira, a restrição  $f|_{\partial\bar{A}^+}$  está bem definida e é um homeomorfismo do círculo. Como  $\partial\bar{A}^+$  é compacto, pela proposição 3.5,  $f|_{\partial\bar{A}^+}$  tem um ponto recorrente  $x_0 \in \partial\bar{A}^+$ . Seja  $(t_0, 1) \in \partial\tilde{A}^+$  tal que  $\pi(t_0, 1) = x_0$  então o ponto  $(t_0, 1)$  não pode ser fixo para  $\tilde{f}$ , por tanto podemos achar um aberto de  $\tilde{A}$  contendo  $(t_0, 1)$  que é livre para  $\tilde{f}$ . Em particular podemos achar  $\epsilon > 0$  tal que o conjunto:

$$D_\epsilon = \left\{ (t, s) \in \tilde{A} \quad : \quad \|(t, s) - (t_0, 1)\| < \epsilon \right\}$$

seja livre para  $\tilde{f}$ , i.e,  $\tilde{f}(D_\epsilon) \cap D_\epsilon = \emptyset$ . Em particular  $\text{int}(D_\epsilon)$  será livre para  $\tilde{f}$ . Podemos ainda reduzir  $\epsilon$  de tal forma que  $\text{Int}(D_\epsilon)$  seja levantamento de um disco aberto de  $A$ .

Sendo  $x_0$  um ponto recorrente. Como  $x_0 \in \pi(D_\epsilon)$ , existe um inteiro  $n > 0$  tal que  $f^n(x_0) \in \pi(D_\epsilon)$ . Seja  $(s_0, 1) \in D_\epsilon$  tal que  $\pi(s_0, 1) = f^n(x_0)$ . Como  $f^n(x_0) = \pi(\tilde{f}^n(t_0, 1))$  então  $\pi(s_0, 1) = \pi(\tilde{f}^n(t_0, 1))$ , logo existe um inteiro  $k$  tal que  $\tilde{f}^n(t_0, 1) = (s_0, 1) + (k, 0)$ , assim  $\tilde{f}^n(t_0, 1) \in \tilde{f}^n(D_\epsilon) \cap (D_\epsilon + k)$ . Observe que como  $\tilde{f}$  translada  $\partial\tilde{A}^+$  para a direita e  $D_\epsilon$  é livre de  $f$  então  $P(\tilde{f}^n(t_0, 1)) > s_0$ , assim  $k > 0$ . Temos que o conjunto  $\tilde{f}^n(D_\epsilon) \cap (D_\epsilon + k)$  é um aberto não vazio de  $\tilde{A}$ , logo  $\text{Int}(\tilde{f}^n(D_\epsilon)) \cap (\text{Int}(D_\epsilon) + k) = \text{Int}(\tilde{f}^n(D_\epsilon) \cap (D_\epsilon + k)) \neq \emptyset$ . Agora, como  $\tilde{f}$  preserva as componentes da fronteira e aplica pontos interiores em pontos interiores então  $\tilde{f}^n$  faz o mesmo, i.e,  $\text{int}(\tilde{f}^n(D_\epsilon)) = \tilde{f}^n(\text{int}(D_\epsilon))$ . Assim  $\tilde{f}^n(\text{Int}(D_\epsilon)) \cap (\text{Int}(D_\epsilon) + k) \neq \emptyset$ .

Por tanto, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno,  $\text{Int}(D_\epsilon)$  é um disco de retorno positivo para  $\tilde{f}$ .

Similarmente, como  $\tilde{f}$  translada  $\partial\tilde{A}^-$  para a esquerda, podemos achar um disco de retorno negativo para  $\tilde{f}$  em  $\text{int}(\tilde{A})$ . □

Agora mostraremos uma generalização do clássico teorema de Poincaré-Birkhoff para o anel fechado. Nesta generalização a hipótese “preservar área” é trocada pela hipótese topológica mais fraca “todo ponto é não errante”(ver proposição 3.3).

**Teorema 3.28.** *Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo de torção homotópico à identidade, que preserva orientação e com todo ponto não errante. Então  $f$  tem pelo menos dois pontos fixos distintos.*

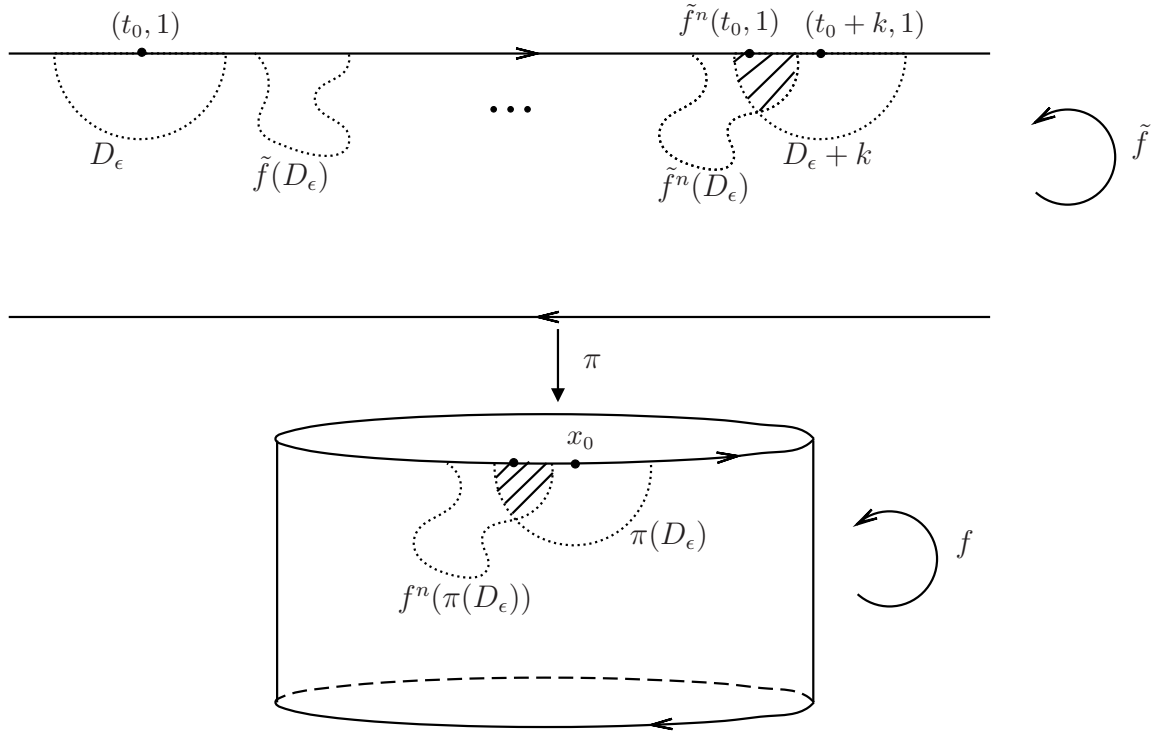


Figura 3.4: O  $\text{Int}(D_\epsilon)$  é um disco de retorno positivo

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  tem um número finito de pontos fixos.

Seja  $\tilde{f}$  o levantamento de  $f$  que move as componentes da fronteira em direções opostas. Pela proposição 3.27 temos que  $\tilde{f}|_{\text{int}(\bar{A})}$  possui um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo, assim  $f|_A$  satisfaz as condições do teorema 3.24. Por tanto  $f$  tem um ponto fixo de índice positivo em  $A$ .

Se  $f$  tem um ponto fixo na fronteira de  $\bar{A}$ , então  $f$  tem dois pontos fixos. Suponhamos que  $f$  não tem pontos fixos na fronteira. Usando o teorema 2.8, a soma dos índices dos pontos fixos de  $f$  é zero, logo  $f$  deve ter um ponto fixo de índice negativo. Assim,  $f$  tem pelo menos dois pontos fixos distintos.  $\square$

### 3.5.3 Número de rotação

Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo do anel fechado que preserva as componentes da fronteira e é homotópica à identidade. Seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ . Fixado

$x \in \tilde{A}$ , consideremos a seguinte seqüência

$$\frac{1}{n}P\left(\tilde{f}^n(x) - x\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Esta seqüência poderia não convergir ou bem poderia convergir para alguns  $x$  e para outros não. Quando a seqüência (3.3) converge, o limite é chamado de número de rotação do ponto  $x$  com respeito a  $\tilde{f}$  e é denotado por  $\rho(x, \tilde{f})$ .

**Observação 3.29.** *Seja  $f: S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Se  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um levantamento de  $f$ , então  $\tilde{f}$  é um homeomorfismo crescente. Por injetividade o grau de um homeomorfismo do círculo é 1 quando preserva orientação ou  $-1$  quando reverte orientação. Assim, temos  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  consideremos a seqüência  $\frac{1}{n} \left[ \tilde{f}^n(x) - x \right]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pode-se mostrar que esta seqüência converge para todo  $x \in \mathbb{R}$  e além disso, o limite não depende do ponto  $x$  (ver [2] pág 387). Este limite é chamado número de rotação de  $\tilde{f}$ . Também pode-se mostrar que o número de rotação de  $\tilde{f}$  é zero se, e somente se,  $\tilde{f}$  tem um ponto fixo (ver [2] pág 389).*

Da observação anterior, como  $f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  preserva as componentes da fronteira e preserva orientação, então para todo  $x$  na fronteira de  $\tilde{A}$ , a seqüência 3.3 converge e o limite não depende do ponto  $x$ . Porém, nos pontos  $x \in \text{int}(\tilde{A})$  a seqüência (3.3) poderia não convergir, mas a propriedade  $\tilde{f}(x+e_1) = \tilde{f}(x) + e_1$  permite provar que esta seqüência é limitada, para todo  $x \in \tilde{A}$ .

De fato, definamos a aplicação  $\varphi: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi(y) = P(\tilde{f}(y) - y)$  para todo  $y \in \tilde{A}$ . Temos que a função  $\varphi$  é contínua e além disso, a propriedade  $\tilde{f}(y+e_1) = \tilde{f}(y) + e_1$  implica que  $\varphi$  é periódica de período  $e_1$ , i.e,  $\varphi(y+e_1) = \varphi(y)$  para todo  $y \in \tilde{A}$ .

Seja  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Sendo  $\varphi$  contínua e  $R$  compacto segue que  $\varphi(R)$  é compacto e por tanto limitado. Por outro lado, a periodicidade de  $\varphi$  implica que  $\varphi(\tilde{A}) = \varphi(R)$ . Por tanto  $\varphi$  é limitada, assim, existe  $C > 0$  tal que  $|\varphi(y)| \leq C$  para todo  $y \in \tilde{A}$ .

Agora observemos o seguinte:

$$\frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x) = \frac{1}{n} \left[ P(\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^{n-1}(x)) + \dots + P(\tilde{f}(x) - x) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\tilde{f}^k(x)).$$

Logo

$$\left| \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \varphi(\tilde{f}^k(x)) \right| \leq \frac{Cn}{n} = C.$$

Assim, temos provado que a seqüência (3.3) é limitada.

**Proposição 3.30.** *Seja  $f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  levantamento de um homeomorfismo  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  homotópico à identidade. Fixado  $x \in \tilde{A}$ , a seqüência  $\frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x)$  é limitada.*

Da proposição anterior temos que os seguintes limites são números reais bem definidos.

$$\rho^+(x, \tilde{f}) = \limsup \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x)$$

$$\rho^-(x, \tilde{f}) = \liminf \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x)$$

Observe que os pontos limites da seqüência (3.3) estão entre  $\rho^-(x, \tilde{f})$  e  $\rho^+(x, \tilde{f})$ . Por este motivo, o intervalo  $[\rho^-(x, \tilde{f}), \rho^+(x, \tilde{f})]$  é chamado intervalo de rotação do ponto  $x$  com respeito de  $\tilde{f}$ . Quando os limites acima coincidem, então a seqüência (3.3) converge e o intervalo de rotação degenera em um ponto.

**Lema 3.31.** *Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo homotópico à identidade e  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ . Se existe  $x \in \tilde{A}$  tal que  $\rho^+(x, \tilde{f}) > 0$ , então  $\tilde{f}|_{\text{int}(\tilde{A})}$  possui um disco de retorno positivo. E, se existe  $y \in \tilde{A}$  tal que  $\rho^-(y, \tilde{f}) < 0$  então  $\tilde{f}|_{\text{int}(\tilde{A})}$  possui um disco de retorno negativo.*

Deixaremos para o final da seção a demonstração de este lema. A continuação, usaremos o anterior lema e o teorema 3.24 para mostrar a seguinte generalização do teorema de Poincaré-Birkhoff.

**Teorema 3.32.** *Sejam  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo do anel fechado, homotópico à identidade, que preserva orientação e com todo ponto não errante e  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  um levantamento de  $f$ . Se existem pontos  $x, y \in \tilde{A}$  tais que  $\rho^-(y, \tilde{f}) < 0 < \rho^+(x, \tilde{f})$  então  $f$  tem pelo menos dois pontos fixos distintos.*

*Demonstração.* Suponha que existem pontos  $x, y \in \tilde{A}$  tais que  $\rho^-(y, \tilde{f}) < 0 < \rho^+(x, \tilde{f})$ . Usando o lema anterior,  $\tilde{f}|_{\text{int}(\tilde{A})}$  possui um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo. Assim, se  $f$  não tem infinitos pontos fixos então  $f|_A$  satisfaz as hipóteses do teorema 3.24, logo  $f$  tem um ponto fixo de índice positivo em  $A$ . Se  $f$  não tem pontos fixos na fronteira de  $\bar{A}$ , dado que a soma dos índices dos pontos fixos de  $f$  é zero,  $f$  deve ter um ponto fixo de índice negativo. Por tanto,  $f$  tem pelo menos dois pontos fixos distintos.  $\square$

Mostraremos a seguir que a usual condição de torção implica que existem pontos  $x, y \in \tilde{A}$  tais que  $\rho^-(y, \tilde{f}) < 0 < \rho^+(x, \tilde{f})$ . Assim, o teorema anterior é uma generalização, mais forte do que o teorema 3.28, do teorema de Poincaré-Birkhoff.



**Proposição 3.33.** *Seja  $f: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  um homeomorfismo de torção que preserva orientação. Então existem pontos  $x, y \in \tilde{A}$  tais que  $\rho^-(y, \tilde{f}) < 0 < \rho^+(x, \tilde{f})$ .*

*Demonstração.* Denotemos  $\partial\tilde{A}^+ = \mathbb{R} \times \{1\}$ ,  $\partial\tilde{A}^- = \mathbb{R} \times \{0\}$ ,  $\partial\bar{A}^+ = S^1 \times \{1\}$  e  $\partial\bar{A}^- = S^1 \times \{0\}$  as componentes de fronteira de  $\tilde{A}$  e  $\bar{A}$ .

Seja  $\tilde{f}$  levantamento de  $f$  que satisfaz a condição de torção de fronteira. Podemos ver às restrições  $f|_{\partial\bar{A}^+}$  e  $f|_{\partial\bar{A}^-}$  como homeomorfismos do círculo e  $\tilde{f}|_{\partial\tilde{A}^+}$  e  $\tilde{f}|_{\partial\tilde{A}^-}$  seus respectivos levantamentos.

Seja  $x \in \partial\tilde{A}^+$ . Como  $\tilde{f}$  move a componente  $\partial\tilde{A}^+$  para a direita, então  $\frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x) > 0$ , logo  $\lim \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x) \geq 0$ . Dado que  $\tilde{f}|_{\partial\tilde{A}^+}$  não tem pontos fixos tem-se  $\rho^+(x, \tilde{f}) = \lim \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x) > 0$  (ver observação 3.29).

Similarmente, tomando  $y \in \partial\tilde{A}^-$ , como  $\tilde{f}$  move a componente  $\partial\tilde{A}^-$  para a esquerda, obtemos  $\rho^-(y, \tilde{f}) = \lim \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(y) - y) < 0$ .  $\square$

### Demonstração do lema 3.31

Seja  $x \in \tilde{A}$  satisfazendo

$$\rho^+(x, \tilde{f}) = \limsup \frac{1}{n}P(\tilde{f}^n(x) - x) > 0.$$

Ponhamos  $\alpha = \rho^+(x, \tilde{f})$ . Então existe uma subsequência  $n_i$  tal que

$$\lim \frac{1}{n_i}P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x) = \alpha.$$

Isto significa que para  $i$  grande,  $\tilde{f}^{n_i}$  move o ponto  $x$  uma media de  $\alpha$  unidades por iteração na direção positiva.

Observemos que

$$P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x) = n_i \frac{P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x)}{n_i}$$

e como  $\alpha > 0$  então

$$\lim P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x) = \infty.$$

Seja  $C > 0$  tal que  $|P(\tilde{f}(w) - w)| \leq C$  para todo  $w \in \tilde{A}$  (ver proposição 3.30).

**Afirmção 3.34.** *Dado  $K \geq C$ , existe  $n$  tal que*

$$P(\tilde{f}^n(x) - x) > K \quad e \quad P(\tilde{f}^{n+1}(x) - \tilde{f}^n(x)) > \alpha/2.$$

*Demonstração.* De fato; como  $\lim P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x) = \infty$ , então existe  $J > 0$  tal que para  $i > J$  tem-se  $P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x) > K$ .

Para  $i > J$ , definamos  $N_i = \max\{n < n_i : P(\tilde{f}^n(x) - x) \leq K\}$ . Como  $K \geq C$  então os números  $N_i$  sempre existem. Pela definição dos  $N_i$ 's, para  $n$  tal que  $N_i < n \leq n_i$  temos  $P(\tilde{f}^n(x) - x) > K$ . Suponhamos que para todo  $n$  com  $N_i < n \leq n_i$  se tenha  $P(\tilde{f}^{n+1}(x) - \tilde{f}^n(x)) \leq \alpha/2$ , então segue que

$$\begin{aligned} P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x) &= P(\tilde{f}^{N_i}(x) - x) + P(\tilde{f}^{N_i+1}(x) - \tilde{f}^{N_i}(x)) + P(\tilde{f}^{n_i}(x) - \tilde{f}^{N_i+1}(x)) \\ &\leq K + C + (n_i - N_i - 1) \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

logo

$$\frac{P(\tilde{f}^{n_i}(x) - x)}{n_i} \leq \frac{K + C}{n_i} + \frac{(n_i - N_i - 1) \alpha}{n_i} \frac{1}{2} < \frac{K + C}{n_i} + \frac{\alpha}{2}$$

de onde, tomando limite, obtemos  $\alpha \leq \alpha/2$  o qual é uma contradição. Por tanto, existe  $n$  tal que  $P(\tilde{f}^n(x) - x) > K$  e  $P(\tilde{f}^{n+1}(x) - \tilde{f}^n(x)) > \alpha/2$ . Isto prova a afirmação feita.  $\square$

**Afirmção 3.35.** *Existe uma seqüência  $m_i$  de números naturais tal que*

$$\lim P(\tilde{f}^{m_i}(x)) = \infty \quad e \quad P(\tilde{f}^{m_i+1}(x) - \tilde{f}^{m_i}(x)) > \alpha/2.$$

*Demonstração.* De fato; tomemos  $K_1 = C$ , usando a afirmação anterior existe  $m_1$  tal que

$$P(\tilde{f}^{m_1}(x) - x) > K_1 \quad e \quad P(\tilde{f}^{m_1+1}(x) - \tilde{f}^{m_1}(x)) > \alpha/2.$$

Logo, tomemos  $K_2 > \max_{n \leq m_1} \{P(\tilde{f}^n(x) - x), 2C\}$ , outra vez usando a afirmação anterior, existe  $m_2$  tal que

$$P(\tilde{f}^{m_2}(x) - x) > K_2 \quad e \quad P(\tilde{f}^{m_2+1}(x) - \tilde{f}^{m_2}(x)).$$

Pela escolha de  $K_2$  temos que  $m_2 > m_1$ .

Assim, sucessivamente, achamos uma subseqüência  $m_i$  dos números naturais tal que

$$P(\tilde{f}^{m_i}(x) - x) > K_i \quad e \quad P(\tilde{f}^{m_i+1}(x) - \tilde{f}^{m_i}(x)) > \alpha/2.$$

onde  $K_i > \max_{n \leq m_{i-1}} \{P(\tilde{f}^n(x) - x), iC\}$ .

Como  $K_i > iC$  então

$$\lim P(\tilde{f}^{m_i}(x) - x) = \infty$$

logo

$$\lim P(\tilde{f}^{m_i}(x)) = \infty$$

Isto mostra a afirmação feita.  $\square$

Seja  $m_i$  a seqüência de números naturais dada pela afirmação anterior. A seqüência  $\pi(\tilde{f}^{m_i}(x)) = f^{m_i}(\pi(x))$  está no anel fechado que é compacto, assim tem uma subsequência, que também denotaremos por  $m_i$  (abusando a notação), que converge a um ponto  $z_0 \in \bar{A}$ .

**Afirmção 3.36.** *Se  $z \in \tilde{A}$  é tal que  $\pi(z) = z_0$ , então  $P(\tilde{f}(z) - z) \geq \alpha/2$ .*

*Demonstração.* De fato, seja  $\epsilon > 0$  arbitrário. Como  $\tilde{f}$  é uniformemente contínua, existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que

$$y, y' \in \tilde{A}, \|y - y'\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(y')\| < \epsilon. \quad (3.4)$$

Seja  $D_\delta(z) = \{y \in \tilde{A} : \|y - z\| < \delta\}$ . Dado que  $\pi(\tilde{f}^{m_i}(x))$  converge a  $z_0$ , como  $z_0$  pertence a  $\pi(D_\delta(z))$ , existe  $J > 0$  tal que  $i > J$  implica que  $\pi(\tilde{f}^{m_i}(x)) \in \pi(D_\delta(z))$ , i.e. existe  $k_i$  tal que  $\tilde{f}^{m_i}(x) \in D_\delta(z) + k_i$ , escrito em outra forma

$$\|\tilde{f}^{m_i}(x) - (z + k_i e_1)\| < \delta \quad (3.5)$$

De (3.5) e (3.4) temos

$$\|\tilde{f}^{m_i+1}(x) - \tilde{f}(z + k_i e_1)\| < \epsilon \quad (3.6)$$

Das equações (3.5) e (3.6) temos

$$|P(\tilde{f}^{m_i}(x) - (z + k_i e_1))| < \delta \quad (3.7)$$

$$|P(\tilde{f}^{m_i+1}(x) - \tilde{f}(z + k_i e_1))| < \epsilon \quad (3.8)$$

Por tanto, de (3.7) e (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} P(\tilde{f}(z) - z) &= P(\tilde{f}(z + k_i e_1) - (z + k_i e_1)) \\ &> \left[ P(\tilde{f}^{m_i+1}(x)) - \epsilon \right] - \left[ P(\tilde{f}^{m-i}(x)) + \delta \right] \\ &= \left[ P(\tilde{f}^{m_i+1}(x)) - P(\tilde{f}^{m_i}(x)) \right] - \epsilon - \delta \\ &> \frac{\alpha}{2} - 2\epsilon \end{aligned}$$

Sendo  $\epsilon$  arbitrário concluímos que  $P(\tilde{f}(z) - z) \geq \alpha/2$ . □

Da afirmação anterior segue que  $z$  não é ponto fixo para  $\tilde{f}$ . Por tanto podemos achar  $\epsilon > 0$  tal que o conjunto aberto

$$D_\epsilon = \left\{ y \in \tilde{A} : \|y - z\| < \epsilon \right\}$$

seja livre para  $\tilde{f}$ , i.e.  $\tilde{f}(D_\epsilon) \cap D_\epsilon = \emptyset$ . Podemos ainda reduzir  $\epsilon$  de tal forma que  $\text{int}(D_\epsilon)$  seja levantamento de um disco aberto em  $A$ .

**Afirmção 3.37.** *Existe  $J > 0$  tal que se  $j > J$  então  $\tilde{f}^{m_j}(x) \in D_\epsilon + r(j)$ , onde  $r(j)$  é um inteiro e  $\lim_{j \rightarrow \infty} r(j) = \infty$ .*

*Demonstração.* De fato; dado que  $\pi(\tilde{f}^{m_i}(x)) \rightarrow z_0$ , como  $z_0 \in \pi(D_\epsilon)$ , então existe  $J > 0$  tal que  $i > J$  implica  $\pi(\tilde{f}^{m_i}(x)) \in \pi(D_\epsilon)$ . Daí, existe um inteiro  $r(j)$  tal que  $\tilde{f}^{m_j}(x) \in D_\epsilon + r(j)$ . Escrevendo de outra forma

$$\|\tilde{f}^{m_j}(x) - (z + r(j)e_1)\| < \epsilon$$

de onde

$$|P(\tilde{f}^{m_j}(x)) - P(z) - r(j)| < \epsilon,$$

logo

$$r(j) > P(\tilde{f}^{m_j}(x) - z) - \epsilon.$$

Por tanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r(j) = \infty.$$

□

**Afirmção 3.38.**  *$\text{int}(D_\epsilon)$  é um disco de retorno positivo para  $\tilde{f}$ .*

*Demonstração.* De fato, só falta provar que  $\text{int}(D_\epsilon)$  retorna positivamente, i.e, existem inteiros positivos  $n, k$  tais que  $\tilde{f}^n(\text{int}(D_\epsilon)) \cap (\text{int}(D_\epsilon) + k) \neq \emptyset$ .

Usando a afirmação anterior, como  $\lim_{j \rightarrow \infty} r(j) = \infty$ , então podemos achar  $l > j > J$  tais que  $m_l > m_j$  e  $r(l) > r(j)$ . Dado que

$$\tilde{f}^{m_j}(x) \in D_\epsilon + r(j) \quad \text{e} \quad \tilde{f}^{m_l}(x) \in D_\epsilon + r(l)$$

escrevendo  $\tilde{f}^{m_l}(x) = \tilde{f}^{m_l - m_j}(\tilde{f}^{m_j}(x))$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{m_l}(x) &\in \tilde{f}^{m_l - m_j}(D_\epsilon + r(j)) \cap (D_\epsilon + r(l)) \\ &= \tilde{f}^{m_l - m_j}(D_\epsilon + r(j)) \cap (D_\epsilon + (r(l) - r(j)) + r(j)) \\ &= \left[ \tilde{f}^{m_l - m_j}(D_\epsilon) \cap (D_\epsilon + r(l) - r(j)) \right] + r(j) \end{aligned}$$

Pondo  $n = m_l - m_j$  e  $k = r(l) - r(j)$  temos  $\tilde{f}^n(D_\epsilon) \cap (D_\epsilon + k) \neq \emptyset$ , logo  $\text{int}[\tilde{f}^n(D_\epsilon) \cap (D_\epsilon + k)] = \text{int}[\tilde{f}^n(D_\epsilon)] \cap (\text{int}(D_\epsilon) + k) \neq \emptyset$ . Sendo  $\tilde{f}^n$  um homeomorfismo, deve levar o interior no interior e a fronteira na fronteira, assim  $\text{int}(\tilde{f}^n(D_\epsilon)) = \tilde{f}^n(\text{int}(D_\epsilon))$ . Por tanto,  $\tilde{f}^n(\text{int}(D_\epsilon)) \cap (\text{int}(D_\epsilon) + k) \neq \emptyset$  como queríamos mostrar. □

Similarmente, dado que existe  $y \in \tilde{A}$  tal que  $\rho^-(y, \tilde{f}) < 0$ , pode-se achar um disco de retorno negativo para  $\tilde{f}$  em  $\text{int} \tilde{A}$ .

## 3.6 Exemplos

**Exemplo 3.39.** Considere a aplicação a tempo-um do fluxo mostrado na figura 3.5. A correspondente aplicação  $f$  no anel fechado é um homeomorfismo de torção com todo ponto não errante. De fato, o fluxo da figura 3.39 é topologicamente conjugado ao fluxo associado á equação do pêndulo simples. Observe que  $f$  tem exatamente dois pontos fixos.

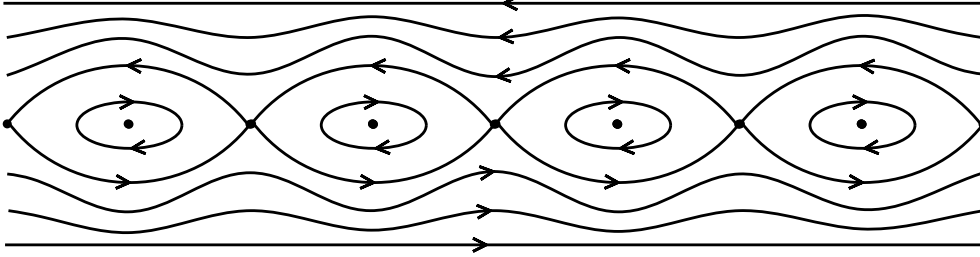


Figura 3.5: Um fluxo topologicamente conjugado ao fluxo do pêndulo

**Exemplo 3.40.** Considere o fluxo sobre  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  mostrado na figura 3.6 abaixo. Seja  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  a aplicação tempo-um deste fluxo e seja  $f: A \rightarrow A$  a aplicação correspondente sobre o anel aberto. Assim definido,  $f$  é um homeomorfismo com um único ponto fixo. Este ponto fixo é de índice zero. Este exemplo satisfaz as hipóteses do teorema 3.26.

**Exemplo 3.41.** Considere a aplicação a tempo-um,  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ , do fluxo mostrado na figura 3.7 abaixo. Seja  $f: A \rightarrow A$  a correspondente aplicação no anel aberto. A aplicação  $f$  é um homeomorfismo cujo conjunto não errante  $\Omega(f)$  é a união dos círculos  $S^1 \times \{\frac{1}{3}\}$  e  $S^1 \times \{\frac{2}{3}\}$ . Além disso,  $\tilde{f}$  possui discos de retorno positivo e discos de retorno negativo. Mas o conjunto  $\pi^{-1}(\Omega(f)) = \{y = \frac{1}{3}\} \cup \{y = \frac{2}{3}\}$  não é conexo. Mais ainda, os discos de retorno negativo estão perto do círculo  $S^1 \times \{\frac{2}{3}\}$  e os discos de retorno positivo estão perto do círculo  $S^1 \times \{\frac{1}{3}\}$ , mais precisamente, não existem um disco de retorno positivo e um disco de retorno negativo intersectando a mesma componente conexa de  $\pi^{-1}(\Omega(f))$ . Em tanto,  $f$  não tem pontos fixos.

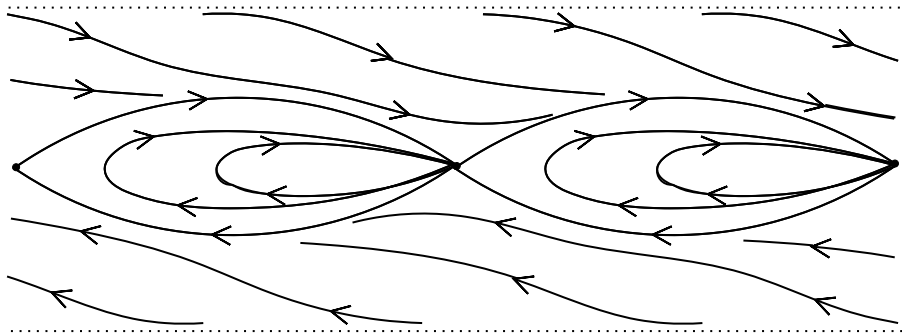


Figura 3.6: Um fluxo na faixa aberta  $\tilde{A}$  que se projeta num fluxo no anel aberto  $A$  que tem um único ponto fixo.

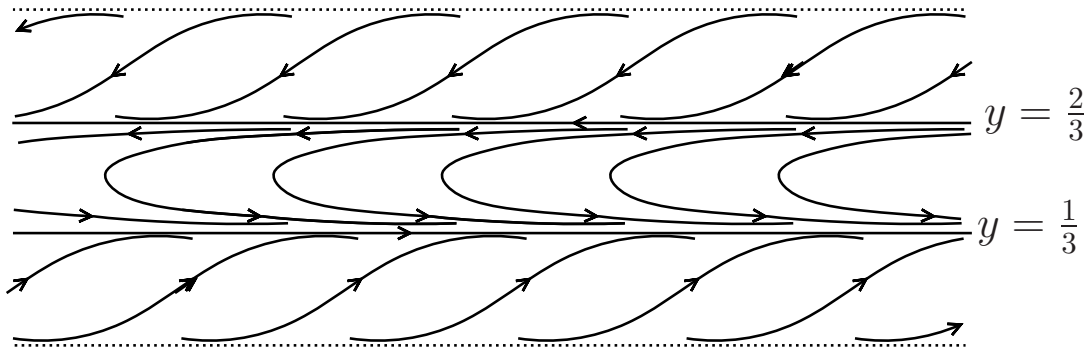


Figura 3.7: Um fluxo na faixa sem pontos fixos

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Fhati, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, L'enseignement Math. 33(1987), 315-322.
- [2] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004
- [3] D. Richeson and J. Wiseman, *Bounded homeomorphisms of the open annulus*, New York J. Math. 9 (2003), 55-68.
- [4] J. Franks, *Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Ann. of Math. 128 (1988), 139-151
- [5] E. Lages Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [6] E. Lages Lima, *Elementos de topologia geral*, Livros Tecnicos e Cientificos, Rio de Janeiro, 1976.
- [7] M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on traslation arcs*, Houston J. of Math. 10 (1984), 35-41.
- [8] M. Brown, W. D. Neumann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Michigan Math. J. 24 (1977), 21-31.
- [9] M. J. Grenberg and J. R. Harper. *Algebraic Topology A First Course*, Addisson-Wesley, Redwood City, California, 1981.
- [10] W. Fulton *Algebraic Topology: A First Course*, Springer, New York, 1995.