Centro de Estudos Gerais
Curso de Mestrado em Matemática
Coordenação de Pós Graduação em Matemática

YELTSIN ACAHUANA

CONJUNTOS DE ROTAÇÃO DE ENDOMORFISMOS DO CÍRCULO

Orientador: Alejandro Kocsard

NITERÓI
AGOSTO/2018

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

YELTSIN ACAHUANA

CONJUNTOS DE ROTAÇÃO DE ENDOMORFISMOS DO CÍRCULO

Dissertação apresentada por **Yeltsin Acahuana** ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Alejandro Kocsard

Niterói
2018

YELTSIN ACAHUANA

CONJUNTOS DE ROTAÇÃO DE ENDOMORFISMOS DO CÍRCULO

Dissertação apresentada por **YELTSIN ACAHUANA** ao Curso de Mestrado em Matemática - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Aprovada em: 10/08/2018

Banca Examinadora

Prof. Alejandro Kocsard - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Samuel Anton Senti - Membro
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Isabel Lugão Rios - Membro
Doutora - Universidade Federal Fluminense

Niterói
2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da UFF

A168 Acahuana, Yeltsin
Conjuntos de rotação de endomorfismos do círculo / Yeltsin Acahuana. – Niterói, RJ: [s.n.], 2018.

58 f.

Orientador: Prof. Dr. Alejandro Kocsard
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, 2018.

1.Círculo. 2. Homeomorfismo. 3. Endomorfismos. I. Título.

CDD 514

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Vitalia e Serafin Acahuana,
a meu pai Salomón.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado força, saudade, coragem e determinação diante de tantas dificuldades que a vida nos oferece.

Um agradecimento especial ao meu orientador, o professor Alejandro Kocsard, pela sua eficiente orientação, paciência, sabedoria e por ter aceitado me orientar.

A coordenação de Pós-Graduação pelo apoio nos momentos difíceis.

A minha família pelo apoio incondicional, pela força para não desistir.

A minha amiga Alejandra Postigo Rojas pela leitura deste trabalho, corrigindo vários erros gramáticos.

Finalmente, agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

RESUMO

O número de rotação introduzido por Henri Poincaré em [Poi85] é sem dúvida alguma o invariante dinâmico fundamental no estudo dos homeomorfismos do círculo (que preservam orientação).

Neste trabalho começamos lembrando os resultados centrais relativos ao número de rotação e os fundamentos da já clássica teoria de Poincaré.

A continuação, entramos no que é o cerne mesmo deste trabalho, o estudo dinâmico dos endomorfismos do círculo, i.e. aplicações contínuas do círculo nele mesmo de grau 1. Para isso introduziremos o conceito de *conjunto de rotação* e apresentaremos diversos resultados devidos a Newhoue, Palis e Takens [NPT83], Bamón, Malta, Pacífico e Takens [BMPF84] e Ito [Ito81] que visam compreender as propriedades topológicas do conjunto de rotação, assim como as propriedades dinâmicas dos endomorfismos que podem ser extraídas destes conjuntos.

palavras-chave: *círculo, homeomorfismo, endomorfismo, conjunto de rotação* .

ABSTRACT

The rotation number introduced by Henri Poincaré in [Poi85] is, undoubtedly, the fundamental dynamic invariant in the study of homeomorphisms of the circle (which preserve orientation).

In this work we start by recalling the central results to the number of rotation and foundations of the classical theory of poincaré.

Coming up next, we enter into what is the very core of this work,the study dynamics of the circle endomorphisms, i.e. continuous applications of the circle in himself of degree 1. For this we will introduce the concept of *rotation set* and we will present several results due to Newhoue, Palis e Takens [NPT83], Bamón, Malta, Pacífico e Takens [BMPF84] e Ito [Ito81] which aim to understand the topological properties of the rotation set, as well as dynamic properties of the endomorphisms that can be extracted of these sets.

key words: *circle*, *homeomorphism*, *endomorphism*, *rotation set*.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na presente dissertação apresentamos um estudo da dinâmica de endomorfismos do círculo, i.e. aplicações contínuas de grau 1. Os resultados pioneiros nesta área são devidos a Sheldon Newhouse, Jacob Palis e Floris Takens [NPT83]. Nesse trabalho é introduzido o *conjunto de rotação*, que acaba se tornando o invariante dinâmico fundamental para estudar estes sistemas e que estende e generaliza o já clássico *número de rotação* devido a Poincaré [Poi85], invariante dinâmico fundamental no estudo dinâmico do homeomorfismos do círculo.

No Capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos fundamentais visando tornar este trabalho tão auto-contido quanto seja possível. Nesse capítulo apresentamos o círculo, que denotaremos por $\mathbb{T}$ e identificaremos com $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e consideraremos as suas diferentes estruturas. Além disso, introduzimos o grupo de homeomorfismos do círculo que será notado por $\text{Homeo}(\mathbb{T})$.

Por outro lado definiremos o *número de rotação* como sendo,

$$\rho(f) = \Pi\left(\lim_{n\to\pm\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}\right)$$

para homeomorfismos de grau 1. Este número mede a rotação media da orbita de um ponto no círculo por ação dum homeomorfismo. Resumiremos as principais propriedades do número de rotação racional, além disso, baixo certas considerações de transitividade garantamos por conjugação topológica que os homeomorfismos de grau 1 se comportam como o modelo de uma rotação irracional; isto é, o que anuncia o teorema clássico de Poincaré.

No Capítulo 2 , estendemos a noção de número de rotação definido por H. Poincaré para homeomorfismos do círculo a endomorfismos do círculo de grau 1. O número de rotação é generalizado para um conjunto de rotação, pelo fato de que diferentes orbitas giram a velocidades diferentes. Denotamos por $\mathsf{End}(\mathbb{T})$ ao conjunto de funções contínuas de grau 1 no círculo. Se $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ então existe F levantamento de f ; tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ F$ onde $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ é a projeção natural. Desde que f é de grau 1, temos:

$$F(x+1) = F(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definimos o *intervalo de rotação* como,

$$\rho(f) = \overline{\{\rho^+(f,z) : z \in \mathbb{T}\}},$$

onde

$$\rho^+(f,z) = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right), \quad \text{para } x \in \Pi^{-1}(z).$$

Além disso, provaremos alguns resultados técnicos para endomorfismos do círculo para mostrar que o conjunto de rotação é um ponto ou um intervalo fechado e acotado, além disso não precisa tomar fecho, o que foi provado por Ito [Ito81].

No capitulo 3 definimos o *conjunto de rotação pontual* $\rho(f,z)$, onde $z \in \mathbb{T}$, como o conjunto de pontos limite da sequência $((F^n(x) - x)/n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\Pi(x) = z$, observe que $\rho(f,z) \subseteq \rho(f)$. O propósito deste capitulo é dar uma completa descrição de todos os conjuntos de rotação em términos do intervalo de rotação $\rho(f)$; para isso primeiro introduzimos a noção de *variedade local instável positiva* para pontos periódicos de endomorfismos do circulo e os conceitos de *domínio fundamental* e *itinerários* que jogam um papel importante na prova do teorema principal deste trabalho.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 O círculo

Ao longo desta dissertação, $\mathbb{R}^d$ denotará o espaço euclideano munido da norma $\|x\| := (x_1^2 + \ldots + x_d)^{1/2}$, onde $x = (x_1, \ldots, x_d)$ denota um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^d$. Desta forma, define-se a esfera unitária por $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$.

Por outro lado, definimos a seguinte relação em $\mathbb{R}$: dados $x, y \in \mathbb{R}$, denotamos

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

É fácil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. O espaço quociente correspondente $\mathbb{R}/\sim$ é o *círculo* e será denotado por $\mathbb{T}$. A projeção canônica correspondente será denotada por $\Pi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, i.e.

$$\begin{array}{cccc} \Pi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & & \tilde{x} & \longrightarrow & \tilde{x} + \mathbb{Z} \end{array}$$

Consideraremos sempre ao círculo $\mathbb{T}$ munido da sua topologia quociente correspondente, i.e. a topologia mais forte que torna a aplicação Π contínua.

Por outro lado, podemos definir a função $d_{\mathbb{T}} \colon \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to [0, 1/2]$ dada por

$$d_{\mathbb{T}}(x, y) := \min \Big\{ |\tilde{x} - \tilde{y}| : \tilde{x} \in \Pi^{-1}(x),\ \tilde{y} \in \Pi^{-1}(y) \Big\}. \tag{1.1}$$

Pode-se verificar que a função $d_{\mathbb{T}}$ é de fato uma distância em $\mathbb{T}$ e a topologia induzida por ela coincide com a topologia quociente.

A continuação mostraremos o seguinte resultado clássico:

Proposição 1.1.1. *O espaço $\mathbb{T}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$f(\tilde{x}) = \big(\cos(2\pi\tilde{x}), \sin(2\pi\tilde{x})\big), \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}.$$

É fácil observar que f é contínua.

Por outro lado, observemos que dados $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \mathbb{R}$ temos que

$$f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}') \iff \tilde{x} \sim \tilde{x}'. \tag{1.2}$$

Isto nos permite afirmar que existe uma única aplicação $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$g\big(\Pi(\tilde{x})\big) = f(\tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R},$$

e onde Π denota a projeção quociente. Vamos mostrar que g é de fato um homeomorfismo.

Primeiramente observemos que a aplicação g é contínua. De fato, seja (x_n) uma sequência arbitrária de pontos de $\mathbb{T}$ tal que $x_n \to x$, quando $n \to \infty$. Pela definição (1.1), vemos que existe $\tilde{x} \in \Pi^{-1}(x)$ e $\tilde{x}_n \in \Pi^{-1}(x_n)$, para cada $n \geqslant 1$, tais que $\tilde{x}_n \to x$ em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$. Isto nos permite afirmar que

$$g(x_n) = g\big(\Pi(\tilde{x}_n)\big) = f(\tilde{x}_n) \to f(\tilde{x}) = g\big(\Pi(\tilde{x})\big) = g(x),$$

quando $n \to \infty$. Portanto a função g é contínua.

Por outro lado, dado que f é sobrejetora, podemos concluir facilmente que g também será sobrejetora.

Para mostrar que g é injetiva, sejam $x, y \in \mathbb{T}$ pontos tais que $g(x) = g(y)$ e $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ pontos arbitrários de $\Pi^{-1}(x)$ e $\Pi^{-1}(y)$, respectivamente. Então teremos

$$f(\tilde{x}) = g\big(\Pi(\tilde{x})\big) = g(x) = g(y) = g\big(\Pi(\tilde{y})\big) = f(\tilde{y}).$$

Logo, por (1.2), concluímos que $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ e portanto $x = \Pi(\tilde{x}) = \Pi(\tilde{y}) = y$, e mostramos que g é injetora.

Finalmente, dado que $\mathbb{S}^1$ é compacto e g é contínua, injetiva e sobrejetiva, podemos concluir que g é de fato um homeomorfismo. □

1.2 Aplicações do círculo e levantamentos

Nesta seção introduzimos a noção de *levantamento* de uma aplicação contínua do círculo nele mesmo e estudaremos suas propriedades fundamentais.

Observação 1.2.1. É importante observarmos que a aplicação $\Pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ é chamado *recobrimento fundamental* do círculo. As propriedades que caracterizam a esta aplicação é que ela é contínua, o espaço $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo e Π é uma *aplicação de recobrimento*, i.e. para cada $x \in \mathbb{T}$ existe uma vizinhança U de x tal que $\Pi^{-1}(U)$ é a união disjunta de abertos $V_n \subset \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{Z}$, tais que $\Pi|_{V_n}\colon V_n \to U$ é um homeomorfismo.

Definição 1. Dada uma aplicação contínua $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$, um *levantamento de f* é uma aplicação contínua $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.

Proposição 1.2.2 (Existência de levantamentos)**.** *Seja $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ uma aplicação contínua, z_0 um ponto arbitrário de $\mathbb{T}$ e $w_0 := f(z_0)$. Então, dados quaisquer $x_0 \in \Pi^{-1}(z_0)$ e $y_0 \in \Pi^{-1}(w_0)$, existe um único mapa contínuo $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ tal que $F(x_0) = y_0$ e $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.*

Para provar a Proposição 1.2.2 primeiramente provaremos o seguinte.

Lema 1.2.3. *Seja $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ contínua. Dados $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sujeitos a $\Pi(x_0) = z_0$, $\Pi(y_0) = f(z_o)$. Então existe $C_f > 0$ independente de x_0, y_0, e uma função $F : [x_0 - C_f, x_0 + C_f] \to \mathbb{R}$ contínua que cumpre $\Pi \circ F = f \circ \Pi$ e $F(x_0) = y_0$. Além disso se existe outra função contínua $G : [x_0 - \tilde{C_f}, x_0 + \tilde{C_f}]$ tal que $\Pi \circ G = f \circ \Pi$ e $G(x_0) = y_0$, então $F(x) = G(x)$ na interseção de seus domínios.*

Demostração do Lema 1.2.3.

i. (Existência) Como $\mathbb{T}$ é compacto e f contínua, segue que f é uniformemente contínua. i.e. existe $C_f \in (0, 1/4)$ tal que

$$f\Big(B_{C_f}(z)\Big) \subset B_{1/4}\big(f(z)\big), \quad \forall z \in \mathbb{T}, \tag{1.3}$$

onde $B_r(z) := \{w \in \mathbb{T} : d_{\mathbb{T}}(w, z) < r\}$ e $d_{\mathbb{T}}$ é a distância dada por (1.1). Por outro lado, observe que $\Pi([x_0 - C_f, x_0 + C_f]) = B_{C_f}(z_0)$ e de (1.3) segue que

$$f \circ \Pi\big([x_0 - C_f, x_0 + C_f]\big) \subset \Pi\big([y_0 - \frac{1}{4}, y_0 + \frac{1}{4}]\big).$$

Por outro lado, pela Observação 1.2.1 sabemos que existe inversa local $\Pi^{-1} \colon B_{1/4}\big(f(z_0)\big) \to [y_0 - 1/4, y_0 + 1/4]$. Logo podemos definir

$$\begin{array}{rcl} F : [x_0 - C_f, x_0 + C_f] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & F(x) = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi(x) \end{array}$$

numa vizinhança de x_0. Como f e Π^{-1} são contínuas, temos que F também será contínua.

ii. (Unicidade) Seja $G : [x_0 - \tilde{C_f}, x_0 + \tilde{C_f}] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\Pi \circ G = f \circ \Pi$ e $G(x_0) = y_0$. Consideramos o conjunto

$$A = \{x \in [x_0 - C, x_0 + C] : F(x) = G(x)\}$$

Onde $C = \min\{C_f, \tilde{C_f}\} > 0$. É fácil ver que $A \neq \varnothing$. Além disso A é fechado, pois $A = (F - G)^{-1}(0)$ e $F - G$ é contínua. Assim basta provar que A é aberto, pois a conexidade de $[x_0 - C, x_0 + C]$ implica que $F(x) = G(x)$ para todo $x \in [x_0 - C, x_0 + C]$. Seja $a \in A$ tal que $(F - G)(a) = 0$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que para $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ tem-se $|(F - G)(x)| < 1$. Como $\Pi \circ F(x) = \Pi \circ G(x)$, para $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, então $F(x) = G(x) + k_x$ para algum $k_x \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$|F(x) - G(x)| = |k_x| < 1$$

Logo $k_x = 0$, pois $k_x \in \mathbb{Z}$. Por tanto $F(x) = G(x)$ para todo $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

□

Demonstração da Proposição 1.2.2. Fixe $z_0 \in \mathbb{T}$; $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sujeitos a $\Pi(x_0) = z_0$, $\Pi(y_0) = f(z_0)$. Pelo lema 1.2.3 existe $F : [x_0 - C, x_0 + C] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$ e $F(x_0) = y_0$. Se $x_1 = x_0 + C$ e $y_1 = F(x_1)$, definimos $z_1 = \Pi(x_1)$, para ter $\Pi \circ F(x_1) = f \circ \Pi(x_1)$ e $\Pi(y_1) = f(z_1)$. Porém podemos aplicar de novo o lema 1.2.3 e existirá

$$F : [x_1 - C, x_1 + C] \to \mathbb{R}$$

tal que $\Pi \circ F_1 = f \circ \Pi$ e $F_1(x_1) = y_1$. Logo como $F(x) = F_1(x)$, para $x \in [x_0, x_1]$, uma função é definida em $[x_0 - C, x_1 + C] = [x_0 - C, x_0 + 2C]$. Novamente projetando $x_2 = x_0 + 2C$ nós seguimos o procedimento indutivamente. O mesmo para valores menores que x_0 (a esquerda de x_0). □

O seguinte resultado caracteriza todos os possíveis levantamentos de uma aplicação:

Proposição 1.2.4 (Caracterização dos levantamentos)**.** *Sejam $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ um mapa contínuo e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então o conjunto de todos os levantamentos de f é dado por*

$$\{F + n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que se F_1, F_2 são dois levantamentos de f, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$F_1(x) = k + F_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para mostrar isto, observemos que $\Pi \circ F_1(x) = f \circ \Pi(x) = \Pi \circ F_2(x)$. Então $F_1(x), F_2(x)$ estão na mesma classe de equivalência, e assim $F_1(x) - F_2(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado que F_1 e F_2 são contínuas, então $F_1 - F_2$ também é contínua. Além disso $\mathbb{R}$ é conexo e portanto a imagem de $F_1 - F_2$ é um conjunto conexo em $\mathbb{Z}$. Logo, $F_1 - F_2 = k$, com $k \in \mathbb{Z}$ constante. □

Exemplo 1.2.5. Definimos $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \circlearrowleft$ tal que $\mathcal{R}_\alpha([x]) = [x + \alpha]$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $F_k : \mathbb{R} \circlearrowleft$ dada por $F_k(x) = x + \alpha + k, \quad k \in \mathbb{Z}$ é um levantamento pois verifica $\mathcal{R}_\alpha \circ \Pi(x) = \Pi \circ F_k(x)$. Além disso o conjunto dos levantamentos é dado por

$$\{F + k; \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

onde $F = Id_{\mathbb{R}} + \alpha$.

O seguinte resultado nos permite definir a noção de *grau* de uma aplicação do círculo:

Proposição 1.2.6 (Grau de um mapa do círculo)**.** *Seja $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ um mapa contínuo. Então vale o seguinte:*

a. Existe um número $\deg(f) \in \mathbb{Z}$*, chamado* grau de f*, tal que*

$$F(x+1) - F(x) = \deg(f), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e para todo levantamento $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ de f.

b. Se F é um levantamento qualquer de f, então

$$F(x+n) = F(x) + n\deg(f), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Seja $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ uma aplicação contínua e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f qualquer.

Para provar a primeira afirmação, observemos que dado um ponto $x \in \mathbb{R}$ qualquer, temos que

$$\Pi \circ F(x+1) = f \circ \Pi(x+1) = f \circ \Pi(x) = \Pi \circ F(x)$$

já que $x \sim x + 1$. Logo, $F(x+1) - F(x) \in \mathbb{Z}$; dado que F é contínua, concluímos que este inteiro independe do ponto x e portanto existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$F(x+1) = F(x) + n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este inteiro n será denotado por $\deg(f)$.

Para ver que este número independe da escolha do levantamento, seja F_1 um outro levantamento de f. Pela Proposição 1.2.4, existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$F_1(x) = F(x) + n_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$F_1(x+1) - F_1(x) = F(x+1) + n_1 - \big(F(x) + n_1\big) = \deg(f),$$

o que prova a independência.

A segunda afirmação será provada por indução. Observemos que pelo ponto $(a.)$, esta afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha agora que é valido para $n = k$; então temos:

$$F(x+k) = F(x) + k\deg(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostremos que a afirmação também é válida para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} F(x+k+1) &= F(x+k) + \deg(f) \\ &= F(x) + k\deg(f) + \deg(f) \\ &= F(x) + (k+1)\deg(f) \end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar que esta afirmação é verdadeira para os inteiros negativos, basta observar que:

$$F(x) = F(x+n-n) = F(x-n) + n\deg(f) \Rightarrow F(x-n) = F(x) - n\deg(f).$$

$\square$

Proposição 1.2.7. *O grau da composição de dois mapas contínuos do círculo é igual ao produto dos graus. Mais precisamente, se $f, g : \mathbb{T} \circlearrowleft$ são dois mapas contínuos, então vale*

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

Demonstração. Sejam $F, G \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ levantamentos de f e g respectivamente. Então temos que

$$(\Pi \circ F) \circ G = f \circ (\Pi \circ G) = f \circ g \circ \Pi.$$

Portanto, temos que $F \circ G$ é um levantamento de $f \circ g$.

Por outro lado, pelo item $(b.)$ da Proposição 1.2.6 temos que

$$F \circ G(x+1) = F\big(G(x) + \deg(g)\big) = F \circ G(x) + \deg(g)\deg(f),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$. $\square$

O seguinte resultado caracteriza os mapas de $\mathbb{R}$ que são levantamentos de mapas do círculo:

Proposição 1.2.8 (Função deslocamento)**.** *Sejam $f \colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ um mapa contínuo e $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então a função contínua $\Delta_F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ dada por*

$$\Delta_F(x) := F(x) - \deg(f)x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é $\mathbb{Z}$-periódica.

Demonstração. Seja l um inteiro arbitrário. Então temos que

$$\begin{aligned}\Delta_F(x+l) &= F(x+l) - \deg(f)(x+l) \\ &= F(x) + l\deg(f) - \deg(f)x - \deg(f)l \\ &= F(x) - \deg(f)x = \Delta_F(x).\end{aligned}$$

Logo, $\Delta_F(x)$ é $\mathbb{Z}$-periódica. □

O seguinte resultado estabelece os possíveis valores do grau de homeomorfismos do círculo:

Proposição 1.2.9 (Grau de homeomorfismos)**.** *Se* $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ *é um homeomorfismo, então* $\deg(f) \in \{-1, 1\}$.

Demonstração. Inicialmente observemos que se $Id_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \circlearrowleft$ e $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \circlearrowleft$ são as aplicações identidade do círculo e da reta respectivamente, então a segunda é levantamento da primeira e temos que

$$x + 1 = Id_{\mathbb{R}}(x+1) = Id_{\mathbb{R}}(x) + \deg(Id_{\mathbb{R}}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto $\deg(Id_{\mathbb{T}}) = 1$. Logo, pela Proposição 1.2.7 segue que

$$1 = \deg(Id_{\mathbb{T}}) = \deg(f \circ f^{-1}) = \deg(f)\deg(f^{-1}).$$

e portanto $\deg(f) = \deg(f^{-1}) = \pm 1$. □

Desta forma o grupo de homeomorfismos do círculo divide-se em dois conjuntos que coincidem com as componentes conexas dadas pela topologia compacto-aberta:

$$\text{Homeo}(\mathbb{T}) = \text{Homeo}_+(\mathbb{T}) \sqcup \text{Homeo}_-(\mathbb{T}),$$

onde $\text{Homeo}_{\pm}(\mathbb{T}) := \{f \in \text{Homeo}(\mathbb{T}) : \deg(f) = \pm 1\}$.

Exemplo 1.2.10. As rotações $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \circlearrowleft$ pertencem a $\text{Homeo}_+(\mathbb{T})$, pois seu levantamento é dado por

$$\bar{\mathcal{R}_\alpha}(x) = x + \alpha + k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

satisfaz

$$\bar{\mathcal{R}_\alpha}(x+1) - \bar{\mathcal{R}_\alpha}(x) = (x + \alpha + k + 1) - (x + \alpha + k) = 1$$

A seguinte proposição estabelece uma relação entre a orientação do homeomorfismo e seu grau.

Proposição 1.2.11. *Seja* $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ *homeomorfismo, então* f *preserva orientação se e somente se* $deg(f) = 1$.

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R} \circlearrowleft$ levantamento, pela proposição 1.2.9 $deg(f) = \pm 1$. Suponha que $deg(f) = -1$, *i.e.* $F(x+1) - F(x) = -1$; como f preserva orientação, temos que F é crescente e por consequência, para $x < x + 1$ temos $F(x) < F(x+1)$, portanto $0 < F(x+1) - F(x) = -1$ o que é uma contradição. Reciprocamente, dado F levantamento de f, logo F é crescente pois $F(x+1) - F(x) = deg(f) > 0$ □

Exemplo 1.2.12. Os homeomorfismos $f_\alpha : \mathbb{T} \circlearrowleft$ definido por $f_\alpha([x]) = [-x+\alpha]$ invertem orientação.

Podemos definir então as noções fundamentais de equivalência entre sistemas dinâmicos do círculo:

Definição 2 (Conjugação e semi-conjugação topológica)**.** Diremos que dois mapas contínuos $f, g \colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ são *conjugados* quando existir $h \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Por outro lado, diremos que f e g são *semi-conjugados*, ou que f é uma *extensão topológica* de g, ou que g é um *fator topológico* de f, quando existe $h \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ com $\deg(h) = 1$ e tal que $h \circ f = g \circ h$.

Fechamos esta seção com o seguinte resultado sobre levantamentos de homeomorfismos do círculo que preservam orientação:

Proposição 1.2.13. *Se $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ e $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de f, então F é um homeomorfismo estritamente crescente.*

Demonstração. Dado que f é injetiva e Π é uma aplicação de recobrimento, sabemos que F é localmente estritamente monótona, i.e. para todo $x \in \mathbb{R}$ existe uma vizinhança de x onde F é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Suponha então que $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ não é estritamente crescente. Pela observação anterior podemos garantir que existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, com $x_0 < x_1$ e tais que $F(x_0) > F(x_1)$.

Por outro lado, dado que $\deg(f) = 1$, temos que

$$F(x+n) = F(x) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ convenientemente, teremos que $x_0 < x_1 < x_0 + n_0$, com $F(x_0 + n_0) > F(x_0) > F(x_1)$.

Desta forma, a função F restrita ao intervalo $[x_0, x_0 + n_0]$ terá seu ponto de mínimo absoluto no interior do intervalo, o que contradiz o fato de que F é localmente estritamente monótona.

□

1.3 Homeomorfismos do círculo: número de rotação

Nesta seção lembraremos vários resultados clássicos sobre a dinâmica de homeomorfismos do círculo. Para isso, introduziremos a noção de *número de rotação* devida a Henri Poincaré [Poi85].

Para começar observamos que $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ é um sub-grupo de índice 2 em $\mathrm{Homeo}(\mathbb{T})$, e portanto, a quase totalidade das questões dinâmicas sobre os homeomorfismos do círculo podem ser entendidas analisando a dinâmica dos homeomorfismos que preservam orientação, i.e. a dinâmica dos elementos de $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$.

O invariante dinâmico mais importante para estes sistemas é o chamado *número de rotação*, cuja definição se baseia no seguinte:

Teorema 1.3.1 (Existência do número de rotação)**.** *Seja $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ arbitrário e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então existe um número real $\rho = \rho(F)$ tal que*

$$\rho(F) = \lim_{n\to\pm\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e onde a convergência é uniforme em x.

Para demostrar este resultado precisaremos o seguinte resultado elementar:

Lema 1.3.2. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e $c \in \mathbb{R}$ uma constante real tal que*

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leqslant c \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Então o seguinte limite existe:

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Demonstração do Lema 1.3.2. Afirmamos que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica a seguinte estimativa:

$$|a_{mn} - ma_n| \leqslant (m-1)c, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Vamos mostrar esta desigualdade por indução em m e fixando n. Para $m = 1$, a desigualdade verifica-se trivialmente. Suponha que é válido para $m = k \in \mathbb{N}$, i.e. $|a_{kn} - ka_n| \leqslant (k-1)c$, e observe que

$$\begin{aligned} \left|a_{(k+1)n} - (k+1)a_n\right| &= |a_{kn} + a_{nm} - a_{nm} - a_n - ka_n| \\ &\leqslant |a_{kn} - a_{kn} - a_n| + |a_{kn} - ka_n| \\ &\leqslant c + (k-1)c = kc \end{aligned}$$

isto conclui a proba de (1.4).

Logo, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2c}{N} < \epsilon$. Para $n, m \geqslant N$, invocamos (1.4) para afirmar que

$$\left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n} \right| \leqslant \frac{(m-1)c}{mn} < \frac{c}{n} < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.5}$$

e

$$\left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n} \right| \leqslant \frac{(n-1)c}{mn} < \frac{c}{m} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Desta forma,

$$\left| \frac{a_m}{m} - \frac{a_n}{n} \right| \leqslant \left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n} \right| + \left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_m}{m} \right| < \epsilon.$$

e portanto a sequência $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, e portanto convergente. □

Demonstração do Teorema 1.3.1. Dividiremos a prova em três partes.

a. Primeiramente mostraremos que o limite

$$\lim_{n\to\pm\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n} \right)$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$ um ponto arbitrário, e consideremos as sequências $a_n := (F^n(x) - x)$ e $\alpha_n := \lfloor a_n \rfloor$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que vale,

$$\begin{aligned} |a_{m+n} - a_m - a_n| &= \left|(F^{m+n}(x) - x) - (F^m(x) - x) - (F^n(x) - x)\right| \\ &= \left|(F^m(F^n(x)) - F^m(x)) - (F^n(x) - x)\right|, \end{aligned}$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, e dado que $\alpha_n \leqslant a_n < \alpha_n + 1$, para todo n, isto implica que

$$\alpha_n \leqslant F^n(x) - x < \alpha_n + 1. \tag{1.7}$$

Logo, $x + \alpha_n \leqslant F^n(x) < x + \alpha_n + 1$. Aplicando F^m a esta cadeia de desigualdades, e levando em consideração a Proposição 1.2.13 que afirma que F é estritamente crescente, concluímos que

$$F^m(x + \alpha_n) \leqslant F^m(F^n(x)) < F^m(x + \alpha_n + 1), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.8}$$

e portanto, dado que f tem grau 1 e α_n é inteiro, concluímos que

$$F^m(x) + \alpha_n \leqslant F^m(F^n(x)) < F^m(x) + \alpha_n + 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Segue dai que

$$\alpha_n \leqslant F^m(F^n(x)) - F^m(x) < \alpha_n + 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

e das equações (1.7) e (1.8) obtemos

$$\left|(F^{m+n}(x) - F^m(x)) - (F^n(x) - x)\right| < |\alpha_n + 1 - \alpha_n| = 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{1.9}$$

Desta forma vemos que se verifica $|a_{m+n} - a_m - a_n| < 1$ e como consequência do Lema 1.3.2, o limite existe.

b. Mostraremos a continuação que o limite é independente do valor de x.

Do ponto anterior sabemos que este limite existe para cada ponto de $\mathbb{R}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existem $m, k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m \leqslant x < y \leqslant m + k. \tag{1.10}$$

Dado que F^n é crescente, temos que

$$F^n(m) \leqslant F^n(x) < F^n(y) \leqslant F^n(m+k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma,

$$|F^n(x) - F^n(y)| < |F^n(m+k) - F^n(m)|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, dado que k é inteiro, sabemos que $F^n(m+k) = F^n(m) + k$, e portanto

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leqslant |k|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Logo, de (1.10) e (1.11) tem-se

$$\left|\frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^n(y) - y}{n}\right| \leqslant \left|\frac{F^n(x) - F^n(y)}{n}\right| + \left|\frac{x - y}{n}\right| \leqslant \frac{2|k|}{n},$$

e tomando $n \to \pm\infty$, obtemos

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Portanto $\rho(F)$ é independente do ponto escolhido.

c. Mostremos agora que a convergência é uniforme. Para isso provaremos primeiro o seguinte:

Lema 1.3.3. *Seja* $f\colon \text{Homeo}_+(\mathbb{T})$, $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ *um levantamento de* f *e* $\Delta_F(x) := F(x) - x$. *Então tem-se*

$$Osc(\Delta_F) = \max_{x\in\mathbb{R}} \Delta_F(x) - \min_{x\in\mathbb{R}} \Delta_F(x) \leqslant 1.$$

Demonstração. Dado que Δ_F é $\mathbb{Z}$-periódica, existem $x_M, x_m \in \mathbb{R}$ tais que $\Delta_F(x_M) = \max_{x\in\mathbb{R}} \Delta_F(x)$, e $\Delta_F(x_m) = \min_{x\in\mathbb{R}} \Delta_F(x)$. Podemos supor que $x_M \leqslant x_m < x_M + 1$. Então temos

$$F(x_M) = x_M + \Delta_F(x_M) \leqslant F(x_m) = x_m + \Delta_F(x_m),$$

pois F é monótona. Portanto, $\Delta_F(x_M) - \Delta_F(x_m) \leqslant x_m - x_M \leqslant 1$. □

Pelo Lema anterior temos que

$$\max_{x\in\mathbb{R}} (F^n(x) - x - n\rho(F)) - \min_{x\in\mathbb{R}} (F^n(x) - x - n\rho(F)) \leqslant 1.$$

Dai segue que $|F^n - Id_{\mathbb{R}} - \rho(F)|_\infty \leqslant 1$, onde $|F|_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}} |F(x)|$. Assim temos que

$$\left| \frac{F^n - Id_{\mathbb{R}}}{n} - \rho(F) \right|_\infty \leqslant \frac{1}{n}.$$

Portanto, $\dfrac{F^n - Id_{\mathbb{R}}}{n}$ converge uniformemente para $\rho(F)$, quando $n \to \pm\infty$.

□

Observação 1.3.4.

i) Quando escolhemos $a_n = F^n(0)$ em (1.6) com $c = 1$ as expressões (1.4) e (1.5) para $n, m \geqslant N$ implicam:

$$\left| \frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

de aqui que, pelo lema 1.3.2, $(\frac{F^n(0)}{n})_n$ é de Cauchy e converge a $\rho(F)$, logo temos que $\left|\frac{F^m(0)}{m} - \rho(F)\right| \leqslant \frac{1}{m}$.

ii) Se F, G são levantamentos de f então $\rho(G) = \rho(F) + k$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

De fato, pela proposição 1.2.4 temos $G = F + k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim para $G(x) = F(x) + k$ com $x \in \mathbb{R}$,

$$G^2(x) = G(F(x) + k) = F(F(x) + k) + k = F^2(x) + 2k,$$

procedendo de maneira indutiva temos $G^n(x) = F^n(x) + nk$, dai que

$$\begin{aligned} \rho(G) &= \lim_{n\to\pm\infty} \left(\frac{G^n(x) - x}{n} \right) &&= \lim_{n\to\pm\infty} \left(\frac{F^n(x) + nk - x}{n} \right) \\ &= \lim_{n\to\pm\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n} + k \right) &&= \rho(F) + k. \end{aligned}$$

Isto nos permite definir o número de rotação de (um levantamento de) um homeomorfismo do círculo:

Definição 3 (Número de rotação)**.** Dado um $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ e um levantamento $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ de f, o número $\rho(F)$ dado pelo Teorema 1.3.1 é chamado *número de rotação de F.*

A classe de equivalência módulo $\mathbb{Z}$ de $\rho(F)$ independe da escolha do levantamento e portanto podemos definir o *número de rotação de f* como $\rho(f) := \Pi(\rho(F))$.

Exemplo 1.3.5. Seja $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \circlearrowleft$ uma rotação; seja $\bar{\mathcal{R}_\alpha} : \mathbb{R} \circlearrowleft$ dada por $\bar{\mathcal{R}_\alpha}(x) = x + \alpha + k$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$; como $\bar{\mathcal{R}_\alpha}^n(x) = x + n\alpha + k$, então temos:

$$\begin{aligned}
\rho(\bar{\mathcal{R}_\alpha}) &= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{\bar{\mathcal{R}_\alpha}^n(x) - x}{n} \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{x + n\alpha + k - x}{n} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

i.e. o número de rotação coincide com o angulo α.

Observação 1.3.6. Para mapas contínuos $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ com $deg(f) \neq 1$, o número de rotação não necessariamente existe; por exemplo para $F(x) = 2x$, e $x_0 \in \mathbb{R}$ temos $F^n(x_0) = 2^n x_0$ e assim:

$$\begin{aligned}
\rho(F) &= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n} \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{2^n x_0 - x_0}{n} \\
&= x_0 \left(\lim_{n\to\pm\infty} \frac{2^n - 1}{n} \right) \\
&= \pm\infty
\end{aligned}$$

O seguinte resultado estabelece algumas propriedades fundamentais do número de rotação:

Proposição 1.3.7. *O número de rotação satisfaz as seguintes propriedades:*

a. *A função* $\rho\colon \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$ *é contínua quando o espaço dos homeomorfismos é munido da topologia* C^0 *induzida pela norma* $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|$.

b. *Se* $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ *e* $\rho(f) = 0$, *então* f *tem um ponto fixo.*

c. *Se* F *e* G *são levantamentos de* f *e* g *respectivamente e* $F \circ G = G \circ F$, *então* $\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G)$.

Demonstração.

a. Provaremos a continuidade de numero de rotação, fixado f_0 dado $\epsilon > 0$ devemos provar que existe um $\delta > 0$ tal que se $\|f - f_0\|_\infty < \delta$ se cumpre $|\rho(f) - \rho(f_0)| < \epsilon$, onde $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$.

   Seja F_0 levantamento de f_0. Por outro lado temos que F_0 é a suma de a função identidade mais uma função contínua e periódica de período 1, logo

F_0 e uniformemente contínua. Assim F_0 admite uma função $\phi : \mathbb{R}^+ \circlearrowleft$ com $\phi(0) = 0$, para a qual

$$|F_0(x) - F_0(y)| \leqslant \phi(|x-y|). \tag{1.12}$$

De fato, suponha que F_0 é uniformemente contínua então basta definir

$$\phi(\delta) = \sup_{|x-y|<\delta} |F_0(x) - F_0(y)|$$

Por outro lado, para o levantamento F tem-se que a função $\Delta_F := F - Id_{\mathbb{R}}$ é periódica e

$$\sup_{x\in R} |F(x) - F_0(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |F(x) - F_0(x)|$$

Logo para cada inteiro k pela observação 1.3.4 tem-se

$$\left|\rho(F_0) - \frac{F_0^k(0)}{k}\right| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} |\rho(F) - \rho(F_0)| &< \left|\rho(F) - \tfrac{F^k(0)}{k}\right| + \left|\tfrac{F^k(0)}{k} - \tfrac{F_0^k(0)}{k}\right| + \left|\rho(F_0) - \tfrac{F_0^k(0)}{k}\right| \\ &< \tfrac{1}{k} + \left|\tfrac{F^k(0)}{k} - \tfrac{F_0^k(0)}{k}\right| + \tfrac{1}{k}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Agora para todo δ e todo levantamento F, para os quais cumpre-se

$$\sup_{x\in R} |F_0(x) - F(x)| < \delta$$

procuramos um inteiro k, de tal maneira que em (1.13) o segundo termino seja pequeno. Tendo (1.12), obtemos

$$\begin{aligned} \left|F_0^2(0) - F^2(0)\right| &= |F_0(F_0(0)) - F_0(F(0)) + F_0(F(0)) - F(F(0))| \\ &\leqslant |F_0(F_0(0)) - F_0(F(0))| + |F_0(F(0)) - F(F(0)| \\ &\leqslant \phi(|F_0(0) - F(0)|) + \delta \\ &\leqslant \delta + \phi(\delta) \end{aligned}$$

da mesma forma nós temos

$$\begin{aligned} \left|F_0^3(0) - F^3(0)\right| &\leqslant \left|F_0(F_0^2(0)) - F_0(F^2(0))\right| + \left|F_0(F^2(0)) - F(F^2(0)\right| \\ &\leqslant \phi(\left|F_0^2(0) - F^2(0)\right|) + \delta \\ &\leqslant \delta + \phi(\delta + \phi(\delta)) \\ &\ \ \vdots \\ \left|F_0^k(0) - F^k(0)\right| &\leqslant \left|F_0(F_0^{k-1}(0)) - F_0(F^{k-1}(0))\right| + \left|F_0(F^{k-1}(0)) - F(F^{k-1}(0)\right| \\ &\leqslant \phi(\left|F_0^{k-1}(0) - F^{k-1}(0)\right|) + \delta \\ &\leqslant \delta + \phi(\phi(...(\phi(\delta + \phi(\delta)))) \end{aligned}$$

Agora escolhamos um inteiro k para o qual $k > \frac{4}{\epsilon}$ e a seguir $\delta > 0$ pelo qual

$$\delta + \underbrace{\phi(\phi(...(\phi(}_{k}\delta + \phi(\delta)))) \leqslant \frac{k\epsilon}{2} \tag{1.14}$$

escolha resolvida em a continuidade de ϕ e a condição $\phi(0) = 0$. Finalmente, pela escolha de k, ao substituir (1.14) em (1.13) temos

$$|\rho(F) - \rho(F_0)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{k\epsilon}{2k} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

o que conclui a prova do primeiro item.

b. Suponha que f não possui pontos fixos, o qual significa que $f([x]) \neq [x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que quando F é um levantamento de f temos $\Pi(F(x)) \neq \Pi(x)$ se e somente se $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$, assim podemos supor $0 < F(x) - x < 1$. Consideramos a função $\psi(x) = F(x) - x$. Já sabemos que ψ é contínua e de período 1 pelo qual se tem $\psi([0,1]) = \psi(\mathbb{R}) \subset (0,1)$. Dado que ψ está definida no compacto $[0,1]$ então ela atinge o valor máximo e mínimo digamos $x_0, x_1 \in [0,1]$.

$$0 < \psi(x_0) \leqslant \psi(x_0) \leqslant \psi(x_1) < 1$$

para $\delta = \min\{\psi(x_0), 1 - \psi(x_1)\} > 0$, se tem

$$\delta \leqslant F(x) - x \leqslant 1 - \delta$$

é dizer

$$x + \delta \leqslant F(x) \leqslant x - \delta + 1 \tag{1.15}$$

Dado que F é crescente, e pela relação (1.15) que é verdade para tudo $x \in \mathbb{R}$, se tem

$$\begin{array}{rcl} \delta & \leqslant & F(0) \leqslant 1 - \delta \\ 2\delta & \leqslant & F^2(0) \leqslant F(1-\delta) \leqslant 1 - \delta + (1 - \delta) \\ & \vdots & \\ n\delta & \leqslant & F^n(0) \leqslant n(1-\delta) \end{array}$$

ao dividir entre n se tem

$$\delta \leqslant \frac{F^n(0)}{n} \leqslant 1 - \delta$$

e quando $n \to \pm\infty$ obtemos finalmente

$$\delta \leqslant \rho(F) \leqslant 1 - \delta \Rightarrow 0 < \rho(f) < 1.$$

o qual contradize o fato de que $\rho(f) = 0$.

c. Como $(F \circ G)(x) = (G \circ F)(x) \Rightarrow (F \circ G)^n = G^n \circ F^n = F^n \circ G^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$; por um processo análogo a observação 1.3.4 temos

$$\left|\rho(G) - \frac{G^n(x) - x}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

Trocando x por uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ se obtém

$$\left|\rho(G) - \frac{G^n(x_m) - x_m}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

fazendo $n \to \pm\infty$ segue que

$$\rho(G) = \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{G^n(x_m) - x_m}{n}\right)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\rho(F\circ G) - \rho(F) &= \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{(F\circ G)^n(x) - x}{n}\right) - \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{G^n(F^n(x)) - x}{n}\right) - \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{G^n(F^n(x)) - F^n(x)}{n}\right)\\
&= \rho(G)
\end{aligned}$$

□

Observação 1.3.8. Para $f, g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ com $f\circ g = g\circ f$ vale $\rho(f\circ g) = \rho(f) + \rho(g)$.

1.4 Número de rotação racional

Como já foi mencionado anteriormente, o número de rotação é o invariante dinâmico mais importante para o estudo dos homeomorfismos do círculo. Nesta seção estudaremos as consequências dinâmicas do fato de que este número seja racional. Mais precisamente, mostraremos que neste caso existem órbitas periódicas e tais órbitas são ordenadas igual que em uma rotação racional. Para isso vamos lembrar a definição de órbita, semi-órbita, ponto fixo e órbita periódica:

Definição 4. Seja $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ e $z_0 \in \mathbb{T}$. Definimos a *órbita* de z_0 como o conjunto

$$\mathcal{O}(z_0) = \{f^n(z_0) : n \in \mathbb{Z}\}$$

Além disso, a *semi-órbita positiva* e *negativa* de z_0 por f são os conjuntos

$$\mathcal{O}^+(z_0) = \{f^n(z_0) : n \in \mathbb{Z}^+\} \quad \mathcal{O}^-(z_0) = \{f^n(z_0) : n \in \mathbb{Z}^-\}$$

Definição 5. Seja $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ contínua e $z_0 \in \mathbb{T}$, dizemos que z_0 é *ponto fixo* se $f(z_0) = z_0$. Por outro lado, o ponto z_0 é dito *ponto periódico* de período q se $f^q(z_0) = z_0$ e $f^j(z_0) \neq z_0$ para todo $1 \leqslant j \leqslant q-1$. Além disso a órbita de um ponto periódico é uma *órbita periódica*.

O conjunto e pontos periódicos de f será denotado por $\mathrm{Per}(f)$.

O seguinte resultado estabelece a relação fundamental entre a propriedade aritmética do número de rotação e a existência de órbitas periódicas:

Teorema 1.4.1. *Seja* $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$. *Então* $\rho(f) \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ *se e somente se* f *possui algum ponto periódico (i.e.* $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$*).*

Demonstração. Seja $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f e lembremos que $\rho(f) = \Pi(\rho(F))$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$. Raciocinando por contradição, suponhamos que $F^q(x) \neq x + p, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Então temos que $F^q(x) > x + p, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ou $F^q(x) < x + p, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $F^q(x) > x + p$. Logo, dado que a função $\Delta_{F^q}(x) = F^q(x) - x$ é $\mathbb{Z}$-periódica, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\Delta_{F^q}(x) > p + \epsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, iterando obtemos

$$F^{nq}(x) > x + n(p+\epsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{F^{nq}(x) - x}{nq} \right) \geqslant \frac{p+\epsilon}{q} > \frac{p}{q}.$$

o que é uma contradição.

($\Leftarrow$) Seja z um ponto periódico para f e x um ponto arbitrário de $\Pi^{-1}(z)$. Então existem $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tais que $F^q(x) = x + p$. Iterando obtemos

$$F^{nq}(x) = x + np \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

e portanto,

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{F^{nq}(x) - x}{nq} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{np}{nq} \right) = \frac{p}{q}.$$

□

Da demonstração do Teorema 1.4.1 podemos obter o seguinte:

Corolário 1.4.2. *Seja* $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$, $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ *um levantamento de* f *e suponha que* $\rho(F) = p/q$, *com* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{N}$ *co-primos. Então* f *possui pontos periódicos e todos eles têm período* q.

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.1 sabemos que existe $z \in \mathrm{Per}(f)$. Seja x um ponto arbitrário de $\Pi^{-1}(z)$. Então sabemos que existem $q' \in \mathbb{N}$ e $p' \in \mathbb{Z}$ tais que

$$F^{q'}(x) = x + p'. \tag{1.16}$$

Iterando novamente obtemos:

$$\frac{p}{q} = \rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{nq'}(x) - x}{nq'} = \frac{p'}{q'}.$$

Assim existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $p' = pd$ e $q' = dq$.

Afirmamos que $F^q(x) = x + q$. De fato, se esse não for o caso, então teríamos $F^q(x) > x + p$ ou $F^q(x) < x + p$. Sem perdida de generalidade podemos supor que $F^q(x) > x + p$. Desta forma temos

$$F^{2q}(x) = F^q(F^q(x)) > F^q(x + p) > x + 2p,$$

e uma simples indução implica que

$$F^{q'}(x) = F^{dq}(x) > x + dp = x + p',$$

já que $p' = dp$ e $q' = dq$, o que contradiz (1.16).

Desta forma vemos que $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f^q) \neq \varnothing$, sempre que $\rho(F) = p/q$, com p e q co-primos. $\square$

Exemplo 1.4.3. Seja $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \circlearrowleft$ uma rotação, $\alpha \in \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ então cada $\mathcal{O}([x])$ é periódica. Em efeito, se $\alpha = \frac{p}{q}$ com $(p, q) = 1$, para $[x] \in \mathbb{T}$ com $\mathcal{R}_\alpha([x]) = [x + \alpha]$ obtemos:

$$\mathcal{R}^2_{\frac{p}{q}}([x]) = \mathcal{R}_{\frac{p}{q}}\left(\left[x + \frac{p}{q}\right]\right) = \left[x + \frac{2p}{q}\right],$$

procedendo de maneira indutiva, tem-se

$$\mathcal{R}^n_{\frac{p}{q}}([x]) = \left[x + \frac{np}{q}\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

Em particular temos

$$\mathcal{R}^q_{\frac{p}{q}}([x]) = \left[x + q\frac{p}{q}\right] = [x + p] = [x]$$

assim a órbita

$$\mathcal{O}^+([x]) = \left\{[x], \mathcal{R}_{\frac{p}{q}}([x]), ..., \mathcal{R}^{q-1}_{\frac{p}{q}}([x])\right\}$$

é q-periódica.

1.5 Número de rotação irracional

Nesta seção consideramos homeomorfismos com número de rotação irracional. Inicialmente mostraremos que as órbitas desses homeomorfismos são ordenadas como as órbitas da rotação R_ρ, onde ρ e o número de rotação.

Para começar precisaremos do seguinte

Lema 1.5.1. *Se $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de f com $\rho(F) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então para cada $z \in \mathbb{T}$ e $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $n < m$, cada órbita interseca ao intervalo $I = [f^m(z), f^n(z)]$.*

Demonstração. Seja $w \in \mathbb{T}$ um ponto arbitrário. Provaremos que existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{\ell}(w) \in I$. Para isso definimos o intervalo $I_k := f^{-k(n-m)}(I)$, para cada $k \in \mathbb{Z}$. É suficiente mostrar que

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k.$$

Para isso, notemos que se $k \in \mathbb{Z}$ então I_k e I_{k-1} têm um ponto final comum. Consequentemente, o conjunto

$$J := \mathbb{T} \backslash \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$$

é conexo. Por contradição, suponhamos que J é não vazio. Então ele é um ponto ou um intervalo. Por outro lado, temos que $f(J) = J$. Isto significa que os extremos de J são pontos fixos de f^2, o que contradiz o fato de que f não possui pontos periódicos já que $\rho(f) \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$. $\square$

A seguinte proposição tem alguma semelhança com o resultado na seção anterior de que as órbitas periódicas são ordenadas, como as da rotação correspondente. É mais forte porque se aplica a todas as órbitas, e não a um subconjunto naturalmente distinto. isso nos ajuda em nosso estudo do comportamento assimétrico das órbitas para homeomorfismos sem pontos periódicos.

Lema 1.5.2. *Seja $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$, $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f e suponha que $\rho = \rho(F) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Então para quaisquer $x \in \mathbb{R}$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, temos que $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$ se e somente se $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$.*

Demonstração.

($\Leftarrow$) Dado que F é estritamente crescente e comuta com qualquer translação inteira, então temos que

$$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2 \iff F^{n_1 - n_2}(x) + m_1 < x + m_2.$$

Portanto temos,

$$\begin{array}{rcl} F^{2(n_1 - n_2)}(x) & < & F^{n_1 - n_2}(F^{n_1 - n_2}(x)) \\ & < & F^{n_1 - n_2}(x - m_1 + m_2) \\ & = & F^{n_1 - n_2}(x) + (m_2 - m_1) \\ & < & x - m_1 + m_2 + (m_2 - m_1) \\ & = & x - 2(m_2 - m_1). \end{array}$$

Seguindo de maneira indutiva, temos que

$$F^{k(n_1 - n_2)}(x) < x - k(m_2 - m_1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Logo

$$\rho(F) = \lim_{k \to +\infty} \frac{F^{k(n_1 - n_2)}(x) - x}{k(n_1 - n_2)} \leqslant \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}$$

assim $\rho \leqslant \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}$. Dado que $\rho \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, então temos $\rho n_1 + m_1 < \rho n_2 + m_2$.

$(\Rightarrow)$ Agora provaremos que dados $x \in \mathbb{R}$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, vale

$$F^{n_1}(x) + m_1 \geqslant F^{n_2}(x) + m_2 \Rightarrow n_1\rho + m_1 \geqslant n_2\rho + m_2.$$

De fato, temos que

$$\begin{array}{rcl} F^{n_1}(x) + m_1 & \geqslant & F^{n_2}(x) + m_2 \\ F^{(n_1-n_2)}(x) & \geqslant & x + m_2 - m_1. \end{array}$$

Por indução temos

$$F^{k(n_1-n_2)}(x) \geqslant x + k(m_2 - m_1).$$

Se $(n_1 - n_2) \geqslant 0$, então

$$\begin{array}{rcl} \frac{F^{k(n_1-n_2)}(x)-x}{k(n_1-n_2)} & \geqslant & \frac{k(m_2-m_1)}{k(n_1-n_2)} \\ \rho = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{F^{k(n_1-n_2)}(x) - x}{k(n_1 - n_2)} & \geqslant & \frac{(m_2-m_1)}{(n_1-n_2)} \end{array}$$

$$\rho n_1 - \rho n_2 \geqslant m_2 - m_1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho n_1 + m_1 \geqslant \rho n_2 + m_2$$

Analogamente podem se mostrar o caso em que $(n_1 - n_2) < 0$, com o qual obtemos o resultado.

$\square$

Lembramos a continuação a noção de *transitividade* de sistemas dinâmicos:

Definição 6. Seja $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é *topologicamente transitiva* se existe $z \in \mathbb{T}$ tal que $\overline{\mathcal{O}(z)} = \mathbb{T}$, i.e. existe um ponto cuja órbita é densa em $\mathbb{T}$.

Exemplo 1.5.3. Se $\rho(F) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então para todo $z \in \mathbb{T}$ a órbita $\mathcal{O}(z) = \{\mathcal{R}_\rho^n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é densa em $\mathbb{T}$; em efeito, suponhamos que para algum $z_0 \in \mathbb{T}$ a órbita $\mathcal{O}(z_0) = \{\mathcal{R}_\rho(z_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ não é densa. Em tal caso o conjunto $\mathbb{T}\backslash\overline{\mathcal{O}(z_0)}$ é não vazio, aberto e consiste de intervalos disjuntos.

Seja $I \subset \mathbb{T}\backslash\overline{\mathcal{O}(z_0)}$ o maior de tais intervalos, como $\mathcal{R}_\rho$ preserva comprimento temos que, $\mathcal{R}_\rho(I)$ não se intersecam. Observe que os intervalos gerados não podem coincidir (pois, se $x \in I$ é tal que $x + k\rho + l_1 = x + l_2$ então $k\rho = l$; para algum $l \in \mathbb{Z}$, i.e. $\rho \in \mathbb{Q}$).

Assim, os intervalos $\mathcal{R}_\rho^n(I)$ são de igual comprimento e disjuntos o qual é impossível pois $\mathbb{T}$ tem comprimento finito.

O seguinte resultado devido a Poincaré [Poi85] estabelece que todo homeomorfismo do círculo com número de rotação irracional é uma extensão topológica da rotação irracional correspondente:

Teorema 1.5.4. *Seja $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ tal que $\rho(f) \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})/\mathbb{Z}$. Então temos*

a. Existe uma função $h : \mathbb{T} \circlearrowleft$ contínua, monótona, sobrejetiva de grau 1 tal que $h \circ f = R_\rho \circ h$.

b. *Se f é topologicamente transitivo, então f é topologicamente conjugado à rotação R_ρ.*

Para provar este teorema, antes precisamos do seguinte

Lema 1.5.5. *Se $\rho \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então o conjunto $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração do Lema 1.5.5. É fácil ver que $y \in B$ se e somente se $y + m \in B$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Portanto é suficiente mostrar que $B \cap [0,1]$ é denso em $[0,1]$. Claramente, o conjunto $B \cap [0,1]$ é infinito. Em outro caso, existem pares $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ em $\mathbb{Z}^2$ tais que

$$n_1\rho + m_1 = n_2\rho + m_2,$$

mas isso é impossível desde que ρ é irracional (se $n_1 = n_2$, então $m_1 = m_2$). Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B \cap [0,1]$ com infinitos valores. Desde que $[0,1]$ é compacto, podemos assumir que a sequência (x_n) é convergente. Assim dado $\epsilon > 0$ existe $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_n - x_m| < \epsilon$. Escrevendo

$$x_n = n_1\rho + m_1 \text{ e } x_m = n_2\rho + m_2,$$

obtemos

$$x_n - x_m = (n_1 - n_2)\rho + (m_1 - m_2) \in B.$$

Assim provamos que o conjunto $B \supset \{k(x_n - x_m) : k \in \mathbb{Z}\}$ é ϵ-denso em $\mathbb{R}$. Desde que ϵ é arbitrário concluímos que B é denso em $\mathbb{R}$. $\square$

Demonstração do Teorema 1.5.4. Dividiremos a prova em duas partes.

a. Mostremos que existe uma função $h : \mathbb{T} \circlearrowleft$ contínua, não-decrescente e sobrejetiva tal que $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$.

   Seja F levantamento de f e consideremos um $x \in \mathbb{R}$ fixado. Definamos os conjuntos

$$A = \{F^n(x) + m; \quad n, m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad B = \{n\rho + m; \quad n, m \in \mathbb{Z}\}, \tag{1.17}$$

   onde $\rho = \rho(F)$. Consideremos então a função $H\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ dada por

$$H(y) := \sup\{n\rho + m; F^n(x) + m \leqslant y\}. \tag{1.18}$$

   Do Lema 1.5.2 segue que H é não-decrescente. Mais ainda, H é constante em cada intervalo contido no complemento de $\bar{A}$. De fato, se $I = [a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\bar{A}$, então

$$F^n(x) + m \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad F^n(x) + m \leqslant b,$$

   para cada $n, m \in \mathbb{Z}$, e desta forma $H(a) = H(b)$.

   Dado que ρ é irracional, pelo Lema 1.5.2 temos que

$$H(F^n(x) + m) = n\rho + m. \tag{1.19}$$

   Isso implica que a função H não tem pulos. De fato, de (1.19) seque

$$H(\mathbb{R}) \supset H(A) = B,$$

e pelo Lema 1.5.5, o conjunto B é denso em $\mathbb{R}$. Disto segue que H também é contínua.

Agora consideremos o levantamento $G\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ de R_ρ dado por $G(x) = x + \rho$. Por (1.19) temos

$$(H \circ F)(F^n(x) + m) = H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\rho + m,$$

e também

$$(G \circ H)(F^n(x) + m) = G(n\rho + m) = (n+1)\rho + m.$$

Desta forma,

$$H \circ F = G \circ H \quad \text{em } A. \tag{1.20}$$

Dado que os mapas H, F e G são contínuos, a identidade (1.20) continua a valer em $\bar{A}$ e assim também em $\mathbb{R}$ (lembre que H é constante em cada intervalo contido no complemento de $\bar{A}$). Portanto, temos que

$$H \circ F = G \circ H \quad \text{em } \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} H(y+1) &= \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leqslant y + 1\} \\ &= \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m - 1 \leqslant y\} \\ &= \sup\{n\rho + m - 1 : F^n(x) + m - 1 \leqslant y\} \\ &= H(y) + 1. \end{aligned}$$

Além disso, a função H é sobrejetiva. De fato, dado que H é contínua, temos

$$H(\mathbb{R}) = H([0,1]) \supset \bar{B} = \mathbb{R}.$$

Desta forma, a função $h : \mathbb{T} \circlearrowleft$ definida por

$$h(y) = \Pi(H(\tilde{y})), \quad \forall y \in \mathbb{T},\ \forall \tilde{y} \in \Pi^{-1}(y),$$

é contínua, não-decrescente e sobrejetiva. Mas ainda pela propriedade (1.21), tem-se que $h \circ f = R_\rho \circ h$.

b. Mostremos agora que se f é topologicamente transitiva então existe $h\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ homeomorfismo que conjuga f com R_ρ, i.e. $h \circ f = R_\rho \circ h$.

Seja $z = \Pi(x) \in \mathbb{T}$ um ponto com órbita de f densa em $\mathbb{T}$. Agora consideramos a função $h\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ construída anteriormente no item $(a.)$, com este ponto x.

Desta forma, o conjunto A dado por (1.17) é denso em $\mathbb{R}$, e assim, a função H dada por e (1.18) é bijectiva (lembre que H é constante em cada intervalo contido em $\mathbb{R}\backslash\bar{A}$, que agora é este conjunto é vazio). Assim a função h é bijectiva. Resta mostrar que h é aberta. De fato, como h é contínua, mapeia conjuntos compactos em conjuntos compactos. Assim, dado U um conjunto aberto, a imagem $h(\mathbb{T}\backslash U) = \mathbb{T}\backslash h(U)$ é compacto e portanto, $h(U)$ é um conjunto aberto. Logo h é homeomorfismo.

□

Capítulo 2

ENDOMORFISMOS DO CÍRCULO

Neste capítulo começamos com material central desta dissertação, que visa estender a teoria de Poincaré do Capítulo 1 para aplicações contínuas do círculo de grau 1.

Como veremos, neste caso diferentes pontos podem possuir diferentes números de rotação e portanto, o número de rotação definido para homeomorfismos do círculo será substituído por um *conjunto ou intervalo de rotação*.

2.1 Intervalos de rotação

Nesta seção vamos definir e estudar as propriedades fundamentais do *intervalo de rotação* de um endomorfismo do círculo.

Definição 7. Diremos que $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ é um *endomorfismo do círculo* quando f é contínua e de grau 1. Denotamos por $\mathsf{End}(\mathbb{T})$ o conjunto de todos os endomorfismos do círculo, i.e.

$$\mathsf{End}(\mathbb{T}) = \{f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft \text{ tal que } f \text{ é contínua e } \deg(f) = 1\}.$$

Em forma análoga ao feito no capítulo anterior, dado $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, existe $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ levantamento tal que

$$F(x+1) = F(x) + 1 \quad \text{e} \quad \Pi \circ F = f \circ \Pi$$

onde $\Pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ é a projeção canônica.

Definição 8. Seja $f\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ um endomorfismo do círculo e seja $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos seu *número de rotação* por

$$\rho^+(F,x) = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right),$$

e o *conjunto de rotação* $\rho(F)$ como o fecho de $\{\rho^+(F,x) : x \in \mathbb{R}\}$, i.e.

$$\rho(F) = \overline{\{\rho^+(F,x) : x \in \mathbb{R}\}}.$$

Veremos que este conjunto de rotação é de fato conexo, e portanto também será chamado de *intervalo de rotação.*

Vamos provar que estas noções estão bem definidas:

Lema 2.1.1. *Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então, o número de rotação $\rho(F, x)$ é um número real bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Além disso, o conjunto $\rho(F)$ é compacto.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$ um ponto arbitrário. Basta mostrar que a sequência $((F^n(x) - x)/n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada. Como Δ_F é contínua e $\mathbb{Z}$-periódica temos que Δ_F é limitada. De fato,

$$\max_{x \in [0,1]} |\Delta_F(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\Delta_F(x)| = L < \infty.$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned} |F^n(x) - x| &= \left|F^n(x) - F^{n-1}(x) + F^{n-1}(x) - \cdots - F(x) + F(x) - x\right| \\ &\leqslant \left|F^n(x) - F^{n-1}(x)\right| + \cdots + |F(x) - x| \\ &= \left|F(F^{n-1})(x) - F^{n-1}(x)\right| + \cdots + |F(x) - x| \\ &\leqslant L + \cdots + L \\ &= nL. \end{aligned}$$

Logo,

$$-Ln \leqslant F^n(x) - x \leqslant Ln,$$

e portanto,

$$-L \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n} \right) \leqslant L.$$

Desta forma, $\rho(F) \in [-L, L]$. $\square$

Em seguida, vamos dar um exemplo que ilustra a definição anterior.

Exemplo 2.1.2. Seja $f : \mathbb{T} \circlearrowleft$ dada por $f([x]) = [x + k\sin(2\pi x)]$ com $k \in \mathbb{Z}$; é claro que $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, logo $F(x) = x + k\sin(2\pi x)$ é um levantamento pois verifica $f \circ \Pi(x) = \Pi \circ F(x)$, logo podemos considerar,

$$\Delta_F(x) = F(x) - x = k\sin(2\pi x)$$

Então como,

$$\begin{aligned} |F^n(x) - x| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_F(F^{i-1}(x))\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta_F(F^{i-1}(x))\right| \\ &\leqslant nk, \end{aligned}$$

assim $\rho(F) \subset [-k, k]$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} F\left(\tfrac{1}{4}\right) &= \tfrac{1}{4} + k \\ F^2\left(\tfrac{1}{4}\right) &= F\left(\tfrac{1}{4} + k\right) \\ &= \tfrac{1}{4} + k + k\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &= \tfrac{1}{4} + k + k \end{aligned}$$

indutivamente temos que $F^n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + nk$. Portanto,

$$\rho^+\left(F, \frac{1}{4}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{4} + nk - \frac{1}{4}}{n} = k$$

Analogamente $\rho^+\left(F, \frac{3}{4}\right) = -k$; deste modo $\rho(F) = [-k, k]$.

Além disso, mostraremos que a classe módulo $\mathbb{Z}$ desses números de rotação independem do levantamento escolhido, e portanto, como já foi feito no caso de homeomorfismos, podemos definir os números e o conjunto de rotação de um endomorfismo do círculo:

Proposição 2.1.3 (Dependência dos levantamentos)**.** *Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então temos:*

a. Se $F_1\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é outro levantamento de f, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\rho^+(F, x) = \rho^+(F_1, x) + k, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto, $\rho(F) = \rho(F_1) + k := \{\rho + k : \rho \in \rho(F_1)\}$.

b. Se $x, x' \in \mathbb{R}$ são dois pontos tais que $\Pi(x) = \Pi(x')$, então $\rho^+(F, x) = \rho^+(F, x')$.

Demonstração.

a. Pela Proposição 1.2.4 temos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(F - F_1)(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí segue, por indução, que

$$F^n(x) = F_1^n(x) + nk, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \rho^+(F_1, x) &= \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F_1^n(x) - x}{n}\right) \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n} + k\right) \\ &= \rho^+(F, x) + k \end{aligned}$$

Disto segue imediatamente que $\rho(F) = \rho(F_1) + k$.

b. Dado que $\Pi(x) = \Pi(x')$, temos que $k := x' - x \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho^+(F, x') &= \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x') - x'}{n}\right) = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x+k) - (x+k)}{n}\right) \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x) + k - x - k}{n}\right) = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right) \\ &= \rho^+(F, x). \end{aligned}$$

□

Desta forma vemos que, dados $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento arbitrário de f, pode-se definir o *número de rotação* de um ponto qualquer $z \in \mathbb{T}$ por:

$$\rho^+(f, z) := \Pi\big(\rho^+(F, x)\big), \quad \forall x \in \Pi^{-1}(z),$$

e

$$\rho(f) := \left\{\rho^+(f, z) : z \in \mathbb{T}\right\}.$$

2.2 O intervalo de rotação como invariante dinâmico

Nesta seção mostraremos que o conjunto de rotação é de fato um intervalo, que ele é um invariante dinâmico e que nele se concentra grande parte da informação dinâmica do endomorfismo correspondente.

Proposição 2.2.1. *Sejam $f, g \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e suponha que eles são semi-conjugados, i.e. existe $h\colon \mathbb{T} \circlearrowleft$ homeomorfismo de grau 1 tal que $h \circ g = f \circ h$. Então vale que*

$$\rho^{+}(f,z) = \rho^{+}(g,h(z)), \quad \forall z \in \mathbb{T},$$

e portanto, $\rho(f) = \rho(g)$.

Demonstração. Sejam $F, G\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ levantamentos de f e g, respectivamente. Então existe um único levantamento $H\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ de h tal que $H \circ G = F \circ H$. Observe que $\Delta_H := H - Id_{\mathbb{R}}$ é uma função $\mathbb{Z}$-periódica.

Dado um ponto arbitrário $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{F^n \circ H(x) - H(x)}{n} &= \frac{H \circ G^n(x) - H(x)}{n} \\
&= \frac{G^n(x) + \Delta_H(G^n(x)) - x - \Delta_H(x)}{n} \\
&= \frac{G^n(x) - x}{n} - \frac{\Delta_H(G^n(x)) - \Delta_H(x)}{n},
\end{aligned}$$

para todo $n > 0$. Lembrando que Δ_H é $\mathbb{Z}$-periódica e portanto limitada, concluímos que o último termo da equação de acima tende a zero quando $n \to +\infty$ e desta forma provamos que

$$\rho^{+}\big(F, H(x)\big) = \rho^{+}(G,x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto, $\rho(F) = \rho(G)$, que é o que queríamos demonstrar. □

No Lema 2.1.1 provamos que o número de rotação de um ponto dado sempre é bem definido, porém pontos diferentes podem ter número de rotação diferente. A continuação mostraremos que o conjunto de rotação é sempre conexo, e portanto ele é um intervalo, ou talvez um ponto.

Para isso precisamos primeiramente do seguinte:

Lema 2.2.2. *Sejam $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f, e p/q um número racional escrito em forma irredutível. Então, se*

$$\rho(F) \cap \Big(-\infty, \frac{p}{q}\Big) \neq \varnothing, \quad e \quad \rho(F) \cap \Big(\frac{p}{q}, +\infty\Big) \neq \varnothing,$$

existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x_0) = x_0 + p$, portanto $\Pi(x_0) \in \mathrm{Per}(f)$.

Demonstração. Raciocinando por contradição, suponhamos que um tal ponto x_0 não exista. Nesse caso teremos que $F^q(x) - x - p \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto teremos que,

$$F^q(x) - x < p \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad F^q(x) - x > p, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que,

$$F^q(x+1) - (x+1) = F^q(x) - 1 - x - 1 = F^q(x) - x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja, a função $\Delta_{F^q} := F^q - Id_{\mathbb{R}}$ é periódica de período 1. Então existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$F^q(x) - x < p - \epsilon, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad F^q(x) - x > p + \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

Daí segue que,

$$\rho(F) \subset \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leqslant \frac{p-\epsilon}{q} \right\} \quad \text{ou} \quad \rho(F) \subset \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geqslant \frac{p+\epsilon}{q} \right\},$$

o que contradiz a nossa hipótese. □

O Lema 2.2.2 nos permite provar o seguinte resultado que mostra que o conjunto de rotação é sempre conexo:

Teorema 2.2.3. *Se $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de f, então o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um ponto ou um intervalo fechado.*

Demonstração. No Lema 2.1.1 mostramos que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é de fato limitado. Desta forma podemos definir

$$\alpha := \inf \rho(F), \quad \text{e} \quad \beta := \sup \rho(F).$$

Se $\alpha = \beta$ então $\rho(F) = \{\alpha\}$ é um único ponto. Se $\alpha < \beta$ então como consequência do Lema 2.2.2 temos que

$$V = \{x \in \mathbb{Q} : x \in (\alpha, \beta)\} \subset \rho(F).$$

Como o conjunto de rotação é, por definição, fechado, então claramente teremos $\rho(F) = [\alpha, \beta]$. □

A continuação mostraremos que o intervalo de rotação varia continuamente com o endomorfismo correspondente. Mais precisamente, se $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de f e $\rho_1(F), \rho_2(F) \in \mathbb{R}$ são tais que $\rho(F) = [\rho_1(F), \rho_2(F)]$, então os números $\rho_1(F)$ e $\rho_2(F)$ variam continuamente com F.

Proposição 2.2.4. *Sejam $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f e $\epsilon > 0$ um número arbitrário. Então existe $\delta > 0$ tal que se $G \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de um $g \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ tal que*

$$|G(x) - F(x)| \leqslant \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

então vale

$$|\rho_i(F) - \rho_i(G)| \leqslant \epsilon, \quad \textit{para } i \in \{1, 2\}.$$

Demonstração. Vamos começar mostrando que dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta_0 > 0$ tal que se $G \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de um $g \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ tal $|F(x) - G(x)| \leqslant \delta_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então temos que $\rho_1(F) - \rho_1(G) < \epsilon$.

Para isso, seja p/q um número racional escrito em forma irredutível tal que,

$$\rho_1(F) - \epsilon < \frac{p}{q} < \rho_1(F).$$

Dado que,

$$\frac{p}{q} < \rho_1(F) \leqslant \rho^+(F, x) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

temos que,

$$F^q(x) - x > p, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

De fato, se este não for o caso, é claro que a desigualdade contrária não pode valer para todo $x \in \mathbb{R}$, e portanto, deveria existir um ponto $y \in \mathbb{R}$ com $F^q(y) - p = y$. Porém isto implicaria que $F^{nq}(y) - y = np$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e nesse caso teríamos que $p/q \in \rho(F)$, o que contradiz a nossa escolha de número p/q.

Portanto, dado que a propriedade (2.1) é aberta, segue que existe $\delta_0 > 0$ tal que se $G\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de um $g \in \mathrm{End}(\mathbb{T})$ satisfazendo $|F(x) - G(x)| \leqslant \delta_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então vale:

$$G^q(x) - p > x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Disto segue que,

$$\frac{G^{nq}(x) - x}{nq} > \frac{p}{q}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto $\rho_1(G) > p/q$. Logo,

$$\rho_1(F) - \rho_1(G) < \epsilon. \tag{2.2}$$

Em forma completamente análoga pode-se mostrar que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|F(x) - G(x)| \leqslant \delta_1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então temos:

$$-\epsilon < \rho_2(F) - \rho_2(G). \tag{2.3}$$

No caso particular de que $\rho_1(F) = \rho_2(F)$, ou seja, de que $\rho(F)$ se reduz a um ponto, as estimativas (2.2) e (2.3) claramente implicam que

$$|\rho_i(F) - \rho_i(G)| < \epsilon,$$

sempre que $|F(x) - G(x)| \leqslant \min\{\delta_0, \delta_1\}$, e o resultado estaria provado.

Portanto resta considerar o caso em que $\rho_1(F) < \rho_2(F)$.

Neste caso, sem perda de generalidade podemos supor que $\rho_1(F) < \rho_1(F) + \epsilon < \rho_2(F)$. Então podemos achar um número racional $p'/q' \in (\rho_1(F) + \epsilon, \rho_2(F)) \subset (\rho_1(F), \rho_2(F))$, com p' e q' co-primos e $q' > 0$.

Pelo Lema 2.2.2 sabemos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F^{q'}(x_0) - x_0 = p'$. Por outro lado, dado que $\rho_1(F) < p'/q' < \rho_2(F)$, sabemos que existem $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ tais que:

$$F^{q'}(x_-) - x_- < p', \quad \text{e} \quad F^{q'}(x_+) - x_+ > p'.$$

Neste caso, existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $|F(x) - G(x)| < \delta_2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então vale,

$$G^{q'}(x_-) - x_- < p', \quad \text{e} \quad G^{q'}(x_+) - x_+ > p'.$$

Para um tal G claramente existe $x_G \in \mathbb{R}$ tal que $G^{q'}(x_G) - x_G = p'$, e portanto, $p'/q' \in \rho(G)$. Logo,

$$\rho_1(F) - \rho_1(G) \geqslant \rho_1(F) - \frac{p'}{q'} > -\epsilon. \tag{2.4}$$

A outra estimativa necessária para $\rho_2(G)$ se prova em forma completamente análoga ao que acabamos de fazer.

Portanto, tomando $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ provamos o resultado desejado.

$\square$

A continuação introduzimos a noção *variedade instável* para um ponto periódico de um endomorfismo. No caso de homeomorfismos, esta define-se como o conjunto de pontos cujas semi-órbitas negativas convergem para a órbita periódica. É claro que esta definição precisa ser modificada no caso de endomorfismos já que a noção de semi-órbita negativa não faz sentido quando o sistema não é invertível:

Definição 9 (Variedade instável)**.** Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $z \in \mathbb{T}$ ponto periódico de f. Então definimos a *variedade instável* de z como o conjunto

$$W^u(z) = \bigcap_U \Big[\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^i(U) \Big]$$

onde U dentoa uma vizinhança arbitrária de z.

O seguinte mostra que todo número racional contido no intervalo de rotação é realizado por um ponto periódico, e pode ser considerado como uma extensão do Teorema 1.4.1:

Lema 2.2.5. *Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F : \mathbb{R} \circlearrowleft$ é um levantamento de f, então vale:*

a. Se $0 \in \rho(F)$, então F tem ponto fixo.

b. Se $p/q \in \rho(F)$, com p, q co-primos e $q > 0$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) = x + p$.

Demonstração.

a. Suponha por contradição que $F(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\Delta_F := F - Id_{\mathbb{R}}$ é continua e periódica, segue que $|\Delta_F(x)| \geqslant \delta$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por continuidade, ou $\Delta_F(x) \geqslant \delta$, $\forall x \in \mathbb{R}$; ou $\Delta_F(x) \leqslant \delta$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Desta forma, $\dfrac{1}{n}(F^n(x) - x) \geqslant \delta$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e por tanto, $\rho(F) \subset [\delta, +\infty)$, o que é contradiz o fato de que $0 \in \rho(F)$. Do modo análogo, se $\Delta_F(x) \leqslant \delta$, temos que $\rho(F) \subset (-\infty, \delta]$. Logo, F tem ponto fixo.

b. Se $p/q \in \rho(F)$ então pode se verificar facilmente que

$$\rho(F^q - p) = q\rho(F) - p = \{q\rho - p : \rho \in \rho(F)\}.$$

Dai segue que se $G := F^q - p$, então $0 \in \rho(G)$. Pelo ponto anterior, temos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = G(x) = F^q(x) - p.$$

□

O seguinte resultado estabelece uma propriedade fundamental sobre a variedade instável de certos pontos periódicos com número de rotação contido no interior do intervalo de rotação:

Proposição 2.2.6. *Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, $F : \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f, e suponha que $\frac{p}{q} \in (\rho_1(F), \rho_2(F))$. Então existe $z \in \mathbb{T}$ ponto periódico de f com número de rotação $\frac{p}{q}$ e tal que $W^u(z) = \mathbb{T}$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor $p/q = 0$ (se este não for o caso, pode-se substituir f por f^q e escolher um levantamento adequado). Pelo Lema 2.2.5 temos que f tem ponto fixo. Isto significa que o conjunto,

$$X := \{z \in \mathbb{T} : f(z) = z \text{ e } \rho(f,z) = 0\} \neq \emptyset,$$

e ele é claramente um conjunto fechado. Por tanto $\mathbb{T}\backslash X$ pode ser escrito como uma união disjunta de intervalos abertos. Além disso, dado que $\rho(F)$ é um intervalo não degenerado, sabemos que $\mathbb{T}\backslash X$ é não-vazio.

Seja então U uma componente conexa de $\mathbb{T}\backslash X$ e seja $\tilde{U} = (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ uma componente conexa do conjunto $\Pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$.

Desta forma teremos que então $\Delta_F := F - Id_{\mathbb{R}}$ é negativa ou positiva em $\tilde{U}$. De fato, suponha que $F(x) - x > 0$ e $F(y) - y < 0$ para algum $x, y \in \tilde{U}$. Então, pela continuidade, existe $x' \in \tilde{U}$ tal que $F(x') - x' = 0$, e portanto $\Pi(x') \in X$, o que contradiz o fato de que U é uma componente conexa do complementar de X.

Agora observemos que, se Δ_F é positivo em $\tilde{U}$, então temos $U \subset W^u(\Pi(x_1))$. De fato, se $\bar{V}$ é uma vizinhança qualquer de x_1, então existirá $x \in \bar{V} \cap \tilde{U}$. Para um tal x, o ponto $F(x)$ também pertencerá a $\tilde{U}$ e $F(x) > x$. Por indução, temos que $F^m(x) < F^n(x)$, se $0 \leqslant m < n$, e portanto $F^n(x)$ converge a um ponto fixo de F, quando $n \to +\infty$. Dado que não F não possui pontos fixos em $\tilde{U}$, concluímos que $F^n(x) \to x_2$, quando $n \to +\infty$, o que mostra que:

$$\tilde{U} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\bar{V}).$$

Dado que $\Pi(\tilde{U}) = U$ e $\bar{V}$ é uma vizinhança arbitrária de x_1, concluímos que,

$$U \subset W^u(\Pi(x_1)).$$

A continuação suponha que,

$$\bigcup_{n \geqslant 0} f^n(U) \neq \mathbb{T}.$$

Observando que $\tilde{U} \subset F(\tilde{U})$, desta última suposição segue que $F^n(\tilde{U}) \subset (x_1 - 1, x_2 + 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o qual implica que $F^n([0,1]) \subset [-1, 2]$, para todo $n \geqslant 0$. Isto claramente implica que $\rho(F) = \{0\}$, o que contradiz a nossa hipótese de que 0 pertence ao interior do conjunto de rotação.

Portanto, $\bigcup_{n \geqslant 0} f^n(U) = \mathbb{T}$ e $W^u(\Pi(x_1)) = \mathbb{T}$.

Em forma semelhante, se Δ_F for negativa em $\tilde{U}$, pode-se mostrar que $U \subset W^u(\Pi(x_2))$, e nesse caso $W^u(\Pi(x_2)) = \mathbb{T}$. □

2.3 Realização de números de rotação

Na seção 2.1 definimos o conjunto de rotação como o fecho da união dos números de rotação dos pontos diferentes pontos de $\mathbb{T}$. Por outro lado, no Lema 2.2.2 mostramos que todo número racional contido no interior do conjunto de rotação é realizado por uma órbita periódica.

O objetivo principal desta seção é mostrar um resultado devido a Ito [Ito81] que mostra que todo ponto do intervalo de rotação é de fato realizado por algum ponto do círculo.

Teorema 2.3.1 (R. Ito). *Seja $f \in \mathrm{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Se $\alpha \in \rho(F)$, então existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $\rho^+(F,x) = \{\alpha\}$, i.e.*

$$\rho(F) = \overline{\{\rho^+(F,x') : x' \in \mathbb{R}\}} = \{\rho^+(F,x') : x' \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração. Seja $\alpha \in \overline{\{\rho^+(F,x) : x \in \mathbb{R}\}} = \overline{\{\rho^+(F,x) : x \in [0,1]\}}$ um ponto arbitrário. Pelo Lema 2.2.2 podemos escolher uma sequência $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$;

(2) $q_{n+1} > q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{p_n}{q_n}\right) = \alpha$;

(4) existem duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $0 \leqslant x_n < 1$; $0 \leqslant y_n < 1$ e

$$F^{q_n}(x_n) = p_n - 1 + x_n, \quad \text{e} \quad F^{q_n}(y_n) = p_n + 1 + y_n.$$

Além disso, afirmamos que existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\max\{\max_{x\in[0,1]} |F(x)|, 1\} < M$$

De fato, como $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é contínua e

$$\max_{x\in[0,1]} |F(x) - x| = L,$$

temos que

$$||F(x)| - |x|| \leqslant |f(x) - x| \leqslant L, \quad \forall x \in [0,1].$$

Assim

$$|F(x)| \leqslant L + |x|, \quad \forall x \in [0,1].$$

Pela nossa escolha anterior, $M = L + 1$.

Por outro lado, nos podemos escolher uma sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos satisfazendo.

$$(5) \quad \text{e} \quad \begin{array}{lcl} \max\left\{\dfrac{k_n p_n + q_{n+1}M}{k_n q_n}, \dfrac{k_n p_n + q_{n+1}M}{k_n q_n + q_{n+1}}\right\} & < & \dfrac{p_n + 1}{q_n} \\ \min\left\{\dfrac{k_n p_n - q_{n+1}M}{k_n q_n}, \dfrac{k_n p_n - q_{n+1}M}{k_n q_n + q_{n+1}}\right\} & > & \dfrac{p_n - 1}{q_n}, \end{array}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

i. Dado que,

$$\begin{aligned} F^{q_1}(x_1) &= p_1 - 1 + x_1 \\ F^{q_1}(y_1) &= p_1 + 1 + y_1, \end{aligned}$$

temos que, $F^{q_1}([0,1]) \supset [p_1, p_1+1]$, pois como $F^{q_1}\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ é contínua e $x_1, y_1 \in [0,1]$, então $F^{q_1}(x_1), F^{q_1}(y_1) \in F^{q_1}([0,1])$. Portanto;

$$F^{q_1}([0,1]) \supset [p_1 - 1 + x_1, p_1 + 1 + y_1] \supset [p_1, p_1 + 1].$$

Seja $J(1,1) = [p_1, p_1 + 1]$. Então $J(1,1)$ é uma translação à direita de $[0,1]$ por p_1. De forma semelhante ao anterior temos,

$$F^{q_1}(J(1,1)) \supset [p_1 + p_1 - 1 + x_1, P_1 + p_1 1 + y_1] \supset [2p_1, 2p_1 + 1].$$

Procedendo indutivamente denotamos por $J(1, j_1) = [j_1 p_1, j_1 P_1 + 1]$ e pelo argumento feito acima temos o seguinte:

$$F^{q_1}(J(1, j_1)) \supset J(1, j_1 + 1)\ ,\ j_1 = 1, 2, ..., k_1 - 1.$$

Além disso temos,

$$\begin{array}{l} F^{q_1}([0,1]) \supset J(1,1) \\ F^{2q_1}([0,1]) \supset F^{q_1}(J(1,1))) \supset J(1,2) \\ F^{3q_1}([0,1]) \supset F^{2q_1}(J(1,1) \supset F^{q_1}(J(1,2) \supset J(1,3) \\ . \\ . \\ . \\ F^{k_1 q_1}([0,1]) \supset ... \supset J(1, k_1). \end{array}$$

ii. Por outro lado temos;

$$\begin{array}{rcl} F^{q_2}(x_2) & = & p_2 - 1 + x_1 \\ F^{q_2}(y_2) & = & p_2 + 1 + y_2 \end{array}$$

Como $F^{q_2} : \mathbb{R} \circlearrowleft$ é contínua, seguindo a ideia de $(i.)$ acima temos que:

$$F^{q_2}([0,1]) \supset [p_2 - 1 + x_2, p_2 + 1 + y_2] \supset [p_2, p_2 + 1].$$

Nós queremos construir uma sequência encaixada, por isso fazendo uma translação obtemos;

$$F^{q_2}(J(1, k_1)) = F^{q_2}([k_1 p_1, k_1 p_1]) \supset [k_1 p_1 + p_2, k_1 p_1 + p_2 + 1] = J(2,1).$$

Denotamos $J(2, j_2) = [k_1 p_1 + j_2 p_2, k_1 p_1 + j_2 p_2 + 1]$. Logo, de forma geral temos;

$$F^{q_2}(J(2, j_2)) \supset J(2, j_2 + 1),\ \text{para } j_2 = 1, 2, ..., k_2 - 1.$$

Além disso,

$$\begin{array}{l} F^{q_2}([0,1]) \supset J(2,1) \\ F^{2q_2}([0,1]) \supset F^{q_2}(J(2,1))) \supset J(2,2) \\ F^{3q_2}([0,1]) \supset F^{2q_2}(J(2,1) \supset F^{q_2}(J(2,2) \supset J(2,3) \\ . \\ . \\ . \\ F^{k_2 q_2}([0,1]) \supset ... \supset J(2, k_2). \end{array}$$

iii. Seguindo indutivamente, desde que,

$$\begin{array}{rcl} F^{q_n}(x_n) & = & p_n - 1 + x_n \\ F^{q_n}(y_n) & = & p_n + 1 + y_n, \end{array}$$

e como $F^{q_n} : \mathbb{R} \circlearrowleft$ é contínua, então temos;

$$\begin{aligned} & F^{q_n}(J(n, j_n)) \supset J(n, j_{n+1}) \text{ para } j_n = 1, 2, ..., k_n - 1. \\ \text{e} \quad & \\ & F^{q_{n+1}}(J(n, k_n)) \supset J(n+1, 1), \end{aligned}$$

onde,

$$J(n, j_n) = \left[\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j_n p_n, \sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j_n p_n + 1 \right] \text{ para } 1 \leqslant j_n \leqslant k_n \ ; n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, pela construção feita temos que:

$$F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}([0, 1]) \supset J(n, j_n)$$

Daí segue que,

$$\left(F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}\right)^{-1}(J(n, j_n)) \subset [0, 1]$$

Afirmação 1. Seja

$$I(n, j_n) = \left(F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}\right)^{-1}(J(n, j_n)) \cap [0, 1].$$

Então $I(n, j_n)$; $1 \leqslant j_n \leqslant k_n$ é fechado em $[0, 1]$ e, o conjunto $\{I(n, j_n) : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j_n \leqslant k_n\}$ tem a propriedade de interseção finita. De fato,

i. Como $J(n, j_n)$ é fechado e $F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n} : \mathbb{R} \circlearrowleft$ é contínua, então $\left(F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}\right)^{-1}(J(n, j_n))$ é fechado.

ii. Basta mostrar que, $I(n+1, j_{n+1}) \subset I(n, j_n) \subset \cdots$. De fato, seja $z \in I(n+1, j_{n+1})$. Então,

$$F^{k_n q_n + j_{n+1} q_{n+1}}\left(F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}(z)\right) = \left(F^{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j_{n+1} q_{n+1}}\right)(z) \in J(n+1, j_{n+1}).$$

Desde que,

$$\begin{aligned} & F^{q_{n+1}}(J(n, k_n)) \supset J(n+1, 1) \\ & F^{2q_{n+1}}(J(n, k_n)) \supset F^{q_{n+1}}(J(n+1, 1)) \supset J(n+1, 2) \\ & . \\ & . \\ & . \\ & F^{j_{n+1} q_{n+1}}(J(n, k_n)) \supset \cdots \supset J(n+1, j_{n+1}). \end{aligned}$$

Portanto, $J(n, k_n) \supset \left(F^{j_{n+1} q_{n+1}}\right)^{-1}(J(n+1, j_{n+1}))$. Logo temos que,

$$F^{k_n q_n}\left(F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}(z)\right) \in J(n, k_n).$$

Então, $F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}(z) \in \left(F^{k_n q_n}\right)^{-1}(J(j_n, k_n)) \subset J(n, j_n)$ de onde segue que,

$$z \in \left(F^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j_n q_n}\right)^{-1}(J(n, j_n)) = I(n, j_n).$$

Assim temos una sequência de intervalos encaixados. Portanto,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{1 \leqslant j_n \leqslant k_n} I(n, j_n) \neq \varnothing$$

O que prova a afirmação.

Agora vamos mostrar que; $\lim_{m \to +\infty} (1/m)(F^m(x) - x) = \alpha$ para algum $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \cap_{1 \leqslant j_n \leqslant k_n} I(n, j_n)$. Um inteiro m satisfazendo,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i q_i \leqslant m < \sum_{i=1}^{n+1} k_i q_i$$

pode ser escrito de uma forma única como:

$$m = \sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j q_{n+1} + l,$$

com $0 \leqslant j \leqslant k_n + 1$, $0 \leqslant l \leqslant q_{n+1} - 1$, e $n \to +\infty$ como $m \to +\infty$ nesta representação. Observe que se,

I. $F^{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j q_{n+1}}(x) \in J(n+1, j)$,

II. $\max\{\max_{y \in [0,1]} |F(y)|, 1\} \leqslant M$,

então,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - lM \leqslant F^{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j q_{n+1} + l}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + lM + 1. \quad (2.5)$$

De fato, basta mostrar que:

$$F^l(J(n+1, j)) \subset \left[\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - lM, \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + lM + 1\right], \quad (2.6)$$

onde $J(n+1, j) = \left[\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1}, \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + 1\right]$.

Mostremos isso para $l = 1$. Seja $z \in J(n+1, j)$ então temos a seguinte forma $z = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + y$, onde $y \in [0, 1]$. Logo,

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + F(y) \geqslant \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - M\,; \forall y \in [0, 1].$$

De forma similar se $z = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + 1 - y$ temos,

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + 1 - F(y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + 1 + M\,; \forall y \in [0, 1]$$

procedendo indutivamente obtemos (2.6).

Por outro lado, como $l \in [0, q_{n+1} - 1]$ e $j \in [0, k_{n+1} - 1]$, temos que $q_{n+1} \geqslant l + (1/M)$, o que implica que $q_{n+1}M \geqslant lM + x$, pois $x \in [0,1]$. Dai segue que $-q_{n+1}M \leqslant -lM - x$. Logo somando $\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1}$ a ambos lados, temos uma desigualdade para o lado esquerdo de (2.5). Logo é fácil ver que,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - q_{n+1}M \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - lM - x.$$

De forma similar, para o lado direito de (2.5) obtemos,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + lM + 1 - x \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + q_{n+1}M$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - q_{n+1}M \leqslant F^m(x) - x \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + q_{n+1}M. \tag{2.7}$$

Desde que $l \in [0, q_{n+1}]$ e $M \geqslant 1$, de (2.7) segue que;

$$\begin{aligned} \frac{F^m(x) - x}{m} &\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + q_{n+1}M}{m} \\ &\leqslant \max\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + q_{n+1}M}{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j q_{n+1}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + q_{n+1}M}{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + (j+1) q_{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{F^m(x) - x}{m} &\geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - q_{n+1}M}{m} \\ &\geqslant \min\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - q_{n+1}M}{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j q_{n+1}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} - q_{n+1}M}{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + (j+1) q_{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

Agora mostremos que os quatro termos convergem para α quando $n \to +\infty$.

Afirmação 2: Como $\frac{p_n}{q_n} \to \alpha$, então $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i} \to \alpha$, $\frac{j p_{n+1}}{j q_{n+1}} \to \alpha$ e $\frac{k_n p_n + q_{n+1}M}{k_n q_n} \to \alpha$. De fato,

i. Como $\frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ então temos que,

$$\frac{p_1}{q_2} \leqslant \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} \leqslant \frac{p_2}{q_2}.$$

e

$$\begin{aligned} \frac{p_m}{q_m} &= \min\{\tfrac{p_i}{q_i}; i \leqslant n+1\} \\ \frac{p_M}{q_M} &= \sup\{\tfrac{p_i}{q_i}; i \leqslant n+1\}. \end{aligned}$$

Então, temos que;

$$\frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i} \leqslant \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Logo, se $n \to +\infty$ então;

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i} \to \alpha,$$

pois $\frac{p_m}{q_m} \to \alpha$ e $\frac{p_M}{q_M} \to \alpha$.

ii. Temos que,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant q_n q_{n+1} M &\iff & k_n q_n p_n &\leqslant k_n p_n q_n + q_n q_{n+1} M \\ &\iff & \tfrac{p_n}{q_n} &\leqslant \tfrac{k_n p_n + q_{n+1} M}{k_n q_n} \end{aligned}$$

e pela condição (5) nós conseguimos,

$$\frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{k_n p_n + q_{n+1} M}{k_n q_n} \leqslant \frac{p_n + 1}{q_n} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n}.$$

Logo, tomando o limite quando $n \to +\infty$ obtemos;

$$\frac{k_n p_n + q_{n+1} M}{k_n q_n} \to \alpha.$$

iii. Que $\frac{j p_{n+1}}{j q_{n+1}} \to \alpha$ quando $n \to +\infty$, é evidente desde que $\frac{p_n}{q_n} \to \alpha$. O que prova a afirmação 2.

Portanto temos,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i + j p_{n+1} + q_{n+1} M}{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i + j q_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j p_{n+1} + (k_n p_n + q_{n+1} M)}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j q_{n+1} + k_n q_n}.$$

Por um argumento semelhante ao feito para a afirmação 2 temos que;

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i} \leqslant \frac{p_M}{q_M} \leqslant \frac{j p_{n+1}}{j q_{n+1}}.$$

Então, quando $n \to +\infty$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j p_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j q_{n+1}} \to \alpha$$

Por outro lado, como $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j p_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j q_{n+1}} \leqslant \frac{k_n p_n + q_{n+1} M}{k_n q_n}$, temos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j p_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j q_{n+1}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j p_{n+1} + (k_n p_n + q_{n+1} M)}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j q_{n+1} + k_n q_n} \leqslant \frac{k_n p_n + q_{n+1} M}{k_n q_n}$$

Assim, quando $n \to +\infty$, $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i p_i + j p_{n+1} + (k_n p_n + q_{n+1} M)}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i q_i + j q_{n+1} + k_n q_n} \to \alpha$. Um argumento similar mostra que os outros três termos convergem a α quando $n \to +\infty$, e por consequência,

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m}(F^m(x) - x) = \alpha.$$

$\square$

Capítulo 3

CONJUNTOS DE ROTAÇÃO PONTUAL DE ENDOMORFISMOS DO CÍRCULO

No Capítulo 2 definimos o número de rotação de um ponto como o limite superior dos deslocamentos médios, e o conjunto de rotação do endomorfismo como o (fecho do) conjunto dos números de rotação dos pontos do círculo.

Neste capítulo introduziremos o conceito de *conjunto de rotação de um ponto* para um endomorfismo do círculo.

3.1 Conjunto de rotação de um ponto

Nesta seção introduzimos a noção de *conjunto de rotação de um ponto* para um endomorfismo do círculo.

Definição 10. Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o *conjunto de rotação de* x por

$$\rho(F,x) := \left\{ \rho \in \mathbb{R} : \exists n_j \uparrow +\infty,\ \frac{F^{n_j}(x) - x}{n_j} \to \rho,\ \text{quando } n_j \to +\infty \right\}.$$

Em forma análoga ao feito anteriormente, dado $z \in \mathbb{T}$ podemos definir o *seu conjunto de rotação* por $\rho(f,z) := \Pi(\rho(F,x))$, onde x é um ponto qualquer de $\Pi^{-1}(z)$.

Observação 3.1.1.

i. Note que na Definição (8) definimos o conjunto de rotação do (levantamento do) endomorfismo. Na Definição (10) temos definido o conjunto de rotação de cada ponto.

ii. Observe que temos,

$$\rho(F,x) \subseteq \rho(F) = \overline{\{\rho^+(F,y) : y \in \mathbb{R}\}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fato, seja $\alpha \in \rho(f,z)$ um ponto arbitrário. Então existe uma subsequência $(\frac{F^{n_k}(x)-x}{n_k})_{n_k} = a_{n_k}$ tal que $a_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha$. Assim $\alpha \in \rho(F)$.

A continuação introduzimos a noção de *variedade local positiva instável* de um ponto fixo. Para isso, seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de F e notemos $z_0 := \Pi(x_0)$. Considere o seguinte conjunto:

$$\mathscr{A}^+ = \{z \in \mathbb{T} : F(x) > x, x \in \Pi^{-1}(z)\}$$

Definição 11 (Variedade local positiva instável)**.** Suponha que existe una componente conexa U de $\mathscr{A}^+ \subset \mathbb{T}$ e tal que o seu fecho $\bar{U}$ é igual ao intervalo $[z_0, z]$. Então definimos a *variedade local positiva instável* do ponto fixo z_0 como

$$W^{u+}_{loc}(z_0) = U \cup \{z_0\}.$$

Em caso contrário, isto é que uma tal componente conexa não exista, definimos simplesmente $W^{u+}_{loc}(z_0) = \{z_0\}$.

Definição 12 (Variedade instável positiva)**.** Sejam f, F, z_0 e x_0 como acima. Então definimos a *variedade instável positiva* de z_0 por

$$W^{u+}(z_0) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^i(W^{u+}_{loc}(z_0)).$$

Observação 3.1.2.

i. Note que quando f expande e inverte orientação perto de z_0 tem-se $W^{u+}_{loc}(z_0) = \{z_0\}$.

ii. Observe que as definições (9) e (12) são equivalentes quando a $W^{u+}_{loc}(z_0)$ não se reduz a um ponto.

Definição 13. Se f, F, z_0 e x_0 como acima, definimos $W^{u+}_{loc}(x_0)$ como o levantamento da *variedade local positiva instável* $W^{u+}_{loc}(z_0)$ que contem x_0. i.e.

$$W^{u+}_{loc}(x_0) = \mathrm{cc}\big(\Pi^{-1}(W^{u+}_{loc}(z_0)), x_0\big),$$

onde $\mathrm{cc}(\cdot)$ denota componente conexa que contem esse ponto.

Suponha agora que $z_0 \in \mathbb{T}$ é tal que $f^q(z_0) = z_0$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Seja $F^q \in \mathsf{End}(\mathbb{R})$ o único levantamento de f^q tal que $F^q(x) = x$, para todo $x \in \Pi^{-1}(z_0)$. Consideramos o seguinte conjunto:

$$\mathscr{A}^+_q = \{z \in \mathbb{T} : F^q(x) > x, x \in \Pi^{-1}(z)\}.$$

Podemos então definir a *variedade local positiva instável* e *variedade instável positiva* para um ponto periódico de forma completamente análoga ao feito acima.

Introduzimos agora a noção de *domínio fundamental de uma variedade instável:*

Definição 14 (Domínio fundamental em $W^{u+}_{loc}(z_0)$)**.** Escolha uma sequência de pontos $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contida no conjunto $W^{u+}_{loc}(z_0)$ tal que $f(d_{i+1}) = f(d_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Um *domínio fundamental* é um intervalo $D_i = [d_i, d_{i-1}]$ tal que $f([z_0, d_i]) \subset W^{u+}_{loc}(z_0)$.

Observação 3.1.3.

i. Na Definição (11) temos que $(d_i) \to z_0$. De fato, seja $z \in W^{u+}_{loc}(z_0)$ então

$$\begin{array}{rcl} d_0 & = & z \\ d_1 & = & \min_{a\in f^{-1}(d_0)} \left\{a \cap W^{u+}_{loc}(z_0)\right\} \\ d_2 & = & \min_{a\in f^{-1}(d_1)} \left\{a \cap W^{u+}_{loc}(z_0)\right\} \\ d_3 & = & \min_{a\in f^{-1}(d_2)} \left\{a \cap W^{u+}_{loc}(z_0)\right\} \\ & \vdots & \end{array}$$

Desta forma, pela própria construção, ela converge a z_0.

ii. Dado que f não é injetivo, então pode existir um $z \in D_{i+1}$ tal que $f(z) \notin D_i$.

Se $W^{u+}(z_0) = \mathbb{T}$ e se $D \subset W^{u+}(z_0)$ é um domínio fundamental, pode não seguir que, para alguns j, $f^j(D) = \mathbb{T}$. No entanto, vamos provar:

Proposição 3.1.4. *Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Seja $p/q \in$ $\mathrm{Int}(\rho(F))$ um ponto racional escrito em forma irredutível. Então existe $z \in \mathrm{Per}(f)$ tal que $\rho(F,x) = p/q$ para cada $x \in \Pi^{-1}(z)$, de período q e um domínio fundamental $D \subset W^{u+}(z)$ tal que $f^j(D) = \mathbb{T}$ para algum $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. É suficiente provar para o caso $p = 0$ e $q = 1$. Defina

$$C = \{z \in \mathbb{T} : f(z) = z \text{ e } \rho(F,x) = 0,\ \forall x \in \Pi^{-1}(z)\}.$$

Afirmamos que existe $z \in C$ e $x \in \Pi^{-1}(z)$ tais que,

$$F^{i_0}(W^{u+}_{loc}(x)) \supset [x, x+2], \tag{3.1}$$

para algum $i_0 \geqslant 1$. Suponhamos que a afirmação não é verdadeira. Neste caso mostraremos que essa suposição implica que $\rho^+(F,w) \leqslant 0$ para todo $w \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição. De fato, seja $y \in W^{u+}_{loc}(x)$. Dado que $\Pi(x) \in C$, temos que,

$$y \geqslant x \text{ e } F^n(y) < x+2 \leqslant y+2.$$

Logo $F^n(y) < y+2$, $\forall n \geqslant 1$. Portanto,

$$\rho^+(F,y) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{F^n(y)-y}{n} \leqslant 0,$$

onde $\Pi(y) \in W^{u+}_{loc}(z)$ e $z \in C$.

Observe que $\Pi(y) \in W^{u+}_{loc}(z)$, com $z \in C$, se e somente se $F(y) > y$ para cada $y \in W^{u+}_{loc}(x)$, onde $\Pi(x) = z$. Resta considerar o caso em que y é tal que $F(y) < y$. Neste caso há duas possibilidades:

i. $F^n(y) < y, \quad \forall n \geqslant 0$ ou,

ii. $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(\Pi(y)) \in W^{u+}_{loc}(z)$, para algum $z \in C$.

De fato, suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in C$ temos que $f^n(\Pi(y)) \in W^{u+}_{loc}(z)$. Então $\Pi(F^n(y)) \in W^{u+}_{loc}(z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in C$, o que implica que $F(F^n(y)) = F^{n+1}(y) > y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é claramente um absurdo.

Portanto se $(i.)$ é satisfeito, então temos que

$$\frac{F^n(y) - y}{n} < 0 \quad \forall n \geqslant 1.$$

Portanto, $\rho^+(F, y) \leqslant 0$. De forma semelhante, se $(ii.)$ é satisfeito, então temos que $\rho^+(F, y) \leqslant 0$.

Provamos que $\rho^+(F, y) \leqslant 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Então $\rho(F) = (-\infty, 0]$, o que implica que $0 \notin \text{Int}(\rho(F))$ e chegamos numa contradição.

Agora, se $x_0 \in \Pi^{-1}(z_0)$ e $i_0 \geqslant 1$ é como na afirmação de acima, então podemos escolher $y_0 \in W^{u+}_{loc}(x_0)$ tal que $F^{i_0}(y_0) = x_0 + 2$ e definir,

$$y_1 = \sup_{x_0 \leqslant y \leqslant y_0} \{y : F^{i_0}(y) = x_0 + 1\}.$$

Logo temos que $F^{i_0}(y) > x_0 + 1$ para todo $y \in (y_1, y_0]$, pois se não existir $\bar{y} \in (y_1, y_0]$ tal que $F^{i_0}(\bar{y}) \leqslant x_0 + 1$, teremos os seguintes dois casos possíveis:

i. $F^{i_0}(\bar{y}) = x_0 + 1$, e como $\bar{y} > y_1$, então y_1 não seria supremo, o qual é absurdo.

ii. $F^{i_0}(\bar{y}) < x_0 + 1$, podemos definir a função contínua $g \colon [\bar{y}, y_0] \to \mathbb{R}$ como sendo $g(y') = F^{i_0}(y') - (x_0 + 1)$. Como $g(\bar{y}) < 0$ e $g(y_0) = 1 > 0$, pelo teorema do valor intermediário existe $y_2 \in [\bar{y}, y_0]$ tal que $g(y_2) = 0$ (i.e. existe $y_2 > y_1$ tal que $F^{i_0}(y_2) = x_0 + 1$), o qual é um absurdo.

Assim se W é alguma vizinhança de $w = \Pi(y_1)$, então teremos que $f^{i_0}(W)$ cobre uma vizinhança de z_0, pois basta observar que $f^{i_0}(\Pi(y_1)) = z_0$. Portanto, é possível escolher $(d_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset W^{u+}_{loc}(z_0)$ com $f(d_{i+1}) = d_i$ e $w \in [d_2, d_1]$. Claramente se i for suficientemente grande, $D_i = [d_{i+1}, d_i]$ será um domínio fundamental. □

3.2 Itinerários, tempos de acompanhamento e salto

Nesta seção introduzimos a noção de *itinerário* de um ponto periódico $z \in \mathbb{T}$ com respeito de uma sequência dada. Para isso, aplicaremos a Proposição 3.1.4 para uma sequência de números racionais.Seja $f \in \mathsf{End}(\mathbb{T})$, $F \colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f tal que $\rho(F) = [a, b]$, com $a < b$.

Consideremos uma sequência $(\rho_i = p_i/q_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{Int}(\rho(f))$ de números racionais. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $z_i \in \mathbb{T}$ ponto periódico com número de rotação p_i/q_i e período q_i tal que $W^{u+}(z_i) = \mathbb{T}$. Seja D_i um domínio fundamental para $W^{u+}(z_i)$ tal que $f^{j_i}(D_i) = \mathbb{T}$ para alguns $j_i \in \mathbb{N}$.

Definição 15. Considere uma sequência $(n)_\nu = (n_1, n_2, ...)$ de inteiros positivos, finita ou infinita, tal que $n_i = r_i q_i$, com $r_i \in \mathbb{N}$, para cada i. Definimos para $i \in [1, \nu+1)$ o *tempo de acompanhamento* como

$$N_i = n_1 + j_i + ... + n_{i-1} + j_{i-1} + n_i$$

e o *tempo de salto* como sendo $J_i = N_i + j_i$, onde $J_0 = 0$.

Definição 16 (Itinerário)**.** Continuando com a notação de cima, dizemos que um ponto $z = \Pi(y) \in W^{u+}_{loc}(z_1)$ tem *itinerário* $(n)_\nu$ com respeito a (z_i, j_i), se para cada $i \in [1, \nu+1)$ existe $x_i \in \Pi^{-1}(z_i)$ tal que:

a. $F^{J_{i-1}+kq_i}(y) - kp_i \in W^{u+}_{loc}(x_i)$ para $k \in [0, r_i]$.

b. $f^{N_i}(z) \in D_i$.

Observação 3.2.1. i. A definição anterior não depende da escolha do levantamento y de z. De fato, seja $y' = y + \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{Z}$, um outro levantado de z. Então $\Pi(y') \in W^{u+}_{loc}(z_1)$ tem itinerário $(n)_\nu$ com respeito a (z_i, j_i) se para cada $i \in [1, \nu+1)$ existe $x_i \in \Pi^{-1}(z_i)$ tal que:

a. $F^{J_{i-1}+kq_i}(y') - kp_i \in W^{u+}_{loc}(x_i) = \Pi^{-1}(W^{u+}_{loc}(z_i))$
$\Leftrightarrow \quad \Pi(F^{J_{i-1}+kq_i}(y') - kp_i) \in W^{u+}_{loc}(z_i)$
$\Leftrightarrow \quad F((F^{J_{i-1}+kq_i}(y)) + \alpha - kp_i > (F^{J_{i-1}+kq_i}(y)) + \alpha - kp_i$
$\Leftrightarrow \quad (F^{J_{i-1}+kq_i}(y)) - kp_i \in W^{u+}_{loc}(x_i)$

b. $f^{N_i}(\Pi(y')) = f^{N_i}(\Pi(y+\alpha)) = \Pi(F^{N_i}(y) + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \Pi(F^{N_i}(y)) \in D_i$.

ii. Se z satisfaz o itinerário $(n)_\nu$, então a órbita de z é sucessivamente n_i iterada perto da órbita de z_i.

Lema 3.2.2. *Dada alguma sequência $(n)_\nu$ como acima, existe $z \in W^{u+}_{loc}(z_1)$ com itinerário $(n)_\nu$.*

Demonstração. Para cada $1 \leqslant i \leqslant \nu$ definimos.

$$A_i = \left\{ \begin{array}{c} z \in W^{u+}_{loc}(z_i) : f^{n_i}(z) \in D_i \text{ e } \exists y \in \Pi^{-1}(z), x_i \in \Pi^{-1}(z_i) \\ \text{tal que } F^{J_{i-1}+kq_i}(y) - kp_i \in W^{u+}_{loc}(x_i) \text{ para } k \in [0, r_i] \end{array} \right\}.$$

Observemos que $f^{n_i}(A_i) = D_i$, pois se $w \in f^{n_i}(A_i)$ então $w = f^{n_i}(a_i)$ para algum $a_i \in A_i$, o que implica que $a_i \in W^{u+}_{loc}(z_i)$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Assim $f^{n_i}(a_i) \in D_i$. Logo, A_i é fechado, e além disso, $A_i \neq \varnothing$ pois $W^{u+}_{loc}(z_i) \neq \varnothing$.

Seja $L_i = f^{-j_i}(A_{i+1}) \cap D_i$. Afirmamos que L_i é compacto e não vazio. De fato, como $f^{j_i}(D_i) = \mathbb{T}$ e A_{i+1} é fechado, segue que $f^{-j_i}(A_{i+1})$ é também fechado pois f^{j_i} é contínua. Por outro lado, como D_i é compacto, segue então que L_i também é compacto. Agora, considerando um $z \in f^{-j_i}(A_{i+1})$, teríamos que $f^{j_i}(z) \in A_{i+1}$ pelo qual $f^{j_i}(z) \in W^{u+}_{loc}(z_{i+1}) \subset \mathbb{T}$, e como $D_i = f^{-j_i}(\mathbb{T})$, então $z \in D_i$ e assim $L_i \neq \varnothing$. Então definimos:

$K_1 = A_1$ e se $i > 1$.

$K_i = \{z \in A_1 : f^{N_m}(z) \in L_m \text{ para } 1 \leqslant m < i\}$.

É fácil ver que K_i é compacto não vazio. Afirmamos que $(K_i)_{i\geqslant 1}$ é uma sequência de intervalos encaixados. De fato, seja $z \in K_{i+1}$ então $z \in A_1$ e $f^{N_m}(z) \in L_m$ para $1 \leqslant m \leqslant i+1$, logo $f^{N_m}(z) \in L_m$ para $1 \leqslant m \leqslant i < i+1$, em particular para $1 \leqslant m < i$ temos que $f^{N_m}(z) \in L_m$ e $z \in A_1$, então $z \in K_i$.

Assim $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$. Observe que se $z \in K_i$, então pela construção de K_i, z têm itinerário $(n)_i = (n_1, n_2, ..., n_i)$. Assim cada $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ tem o itinerário desejado. $\square$

Os seguintes resultados são de muita importância para nossos propósitos, eles dão estimativas para a sequência $(F^n(x) - x)/n$ para $x \in \mathbb{R}$.

Lema 3.2.3. *Dado $\epsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \geqslant 1$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ e todo $n \geqslant n_0$*

$$\left| \frac{F^{n+k}(y) - y}{n+k} - \frac{F^n(y) - y}{n} \right| < \epsilon \text{ para } 0 \leqslant k \leqslant q.$$

Demonstração. Como $\Delta_F(x) := F(x) - x$ é $\mathbb{Z}$-periódica então,

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\{\Delta_F(x)\} = \max_{x\in[0,1]}\{\Delta_F(x)\} = L < \infty$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|F^k(y) - y\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{k}(F^i(y) - F^{i-1}(y))\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left|F(F^{i-1}(y)) - F^{i-1}(y)\right| \\ &\leqslant kL\end{aligned}$$

Podemos definir $R = kL + 1$ e $S = L + 1$, desta forma, $\left|F^k(y) - y\right| < R$ se $0 \leqslant k \leqslant q$ e $\left|\frac{F^n(y)-y}{n}\right| < S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{F^{n+k}(y)-y}{n+k} - \frac{F^n(y)-y}{n}\right| &= \left|\frac{n(F^{n+k}(y)-y)-(n+k)(F^n(y)-y)}{(n+k)n}\right| \\ &= \frac{1}{n(n+k)}\left|n(F^k(F^n(y)) - F^n(y)) - k(F^n(y) - y)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+k)}\{\left|n(F^k(F^n(y)) - F^n(y))\right| - |k(F^n(y) - y)|\} \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+k)}(nR + kS) = \frac{R+kS}{n+k}\end{aligned}$$

Logo, é suficiente tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{R+kS}{n+k} < \epsilon$, para todo $n \geqslant n_0$ e $0 \leqslant k \leqslant q$. $\square$

Lema 3.2.4. *Dado $z \in \mathbb{T}$ ponto periódico com número de rotação p/q, $m \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geqslant 1$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$ e $x \in \Pi^{-1}(z)$. Se $n \geqslant n_0$ e*

$$\left|(F^{n+m}(y) - F^m(y)) - (F^n(x) - x)\right| \leqslant 2,$$

então,

$$\left|\frac{F^{n+m}(y) - y}{n+m} - \frac{p}{q}\right| < \epsilon.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.3, existe $R > 0$ tal que $|F^m(y) - y| < R, \forall y \in \mathbb{R}$. Podemos escolher $n_0 \geqslant 1$ tal que, se $\frac{2+R}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$, então

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{m+n} - \frac{p}{q} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.2}$$

para $n \geqslant n_0$. De fato, raciocinando por indução vemos que se $m = 0$ e $z = \Pi(x)$ é ponto periódico, então segue que (3.2) é satisfeita. Agora suponha que isto seja válido para $m = k$. Então,

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{n+k+1} - \frac{p}{q} \right| > \left| \frac{F^n(x) - x}{k+n} - \frac{p}{q} \right|,$$

o que implica que $1/(k+n+1) > 1/(k+n)$ e chegamos num absurdo. Logo (3.2) vale para $m = k+1$ e assim para todo $m \in \mathbb{N}$ a equação (3.2) é satisfeita. Além disso, n_0 não depende dos levantamento x de z, pois se $x' = x + k$, como $k \in \mathbb{Z}$ for um outro levantamento de z, então teríamos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^n(x')-x'}{m+n} - \frac{p}{q} \right| &= \left| \frac{F^n(x+k)-x-k}{m+n} - \frac{p}{q} \right| \\ &= \left| \frac{F^n(x)-x}{m+n} - \frac{p}{q} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

para $n \geqslant n_0$. Logo, se $n \geqslant n_0$ então temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{n+m}(y)-y}{n+m} - \frac{p}{q} \right| &= \left| \frac{F^{n+m}(y)-F^m(y)-(F^n(x)-x)+F^m(y)-y+F^n(x)-x}{m+n} - \frac{p}{q} \right| \\ &\leqslant \left| \frac{F^{n+m}(y)-F^m(y)-(F^n(x)-x)}{m+n} \right| + \left| \frac{F^m(y)-y}{m+n} \right| + \left| \frac{F^n(x)-x}{m+n} - \frac{p}{q} \right| \\ &\leqslant \frac{2}{m+n} + \frac{R}{m+n} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{2+R}{n+m} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

□

3.3 Teorema Principal

O teorema que enunciaremos e provaremos a continuação é a motivação principal deste trabalho. Este teorema dá uma descrição completa de todos os conjuntos de rotação pontuais $\rho(f, z)$ em função do intervalo de rotação $\rho(f)$.

Teorema 3.3.1. *Seja $f \in \mathrm{End}(\mathbb{T})$ e $F\colon \mathbb{R} \circlearrowleft$ um levantamento de f. Então temos:*

a. $\rho(F, x)$ é um subintervalo fechado de $\rho(F)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b. Dado $[\alpha, \beta] \subseteq \rho(F), \alpha \leqslant \beta$ então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(F, x) = [\alpha, \beta]$.

Vamos então iniciar a demostração do Teorema 3.3.1. Isto será feito através de uma sequência de lemas.

Lema 3.3.2. *Seja $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais limitada. Então o conjunto de pontos limite de a sequência $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i)_{n \geqslant 1}$ é um intervalo fechado.*

Demonstração. De fato, como o limite superior e inferior sempre existem, denotemos por

$$\begin{aligned} \alpha &= \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \beta &= \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i. \end{aligned}$$

Logo, claramente o conjunto de pontos limite está contido no intervalo $[\alpha,\beta]$. Mais ainda, pela Observação 3.3.3, ele contem a α e β. Então temos provado uma inclusão. Agora sem perdida de generalidade podemos escolher duas subsequências,

$$\alpha = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} a_i \text{ e } \beta = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{n_{j+1}}\sum_{i=1}^{n_{j+1}} a_i.$$

Seja $a \in [\alpha,\beta]$ e escolhemos n_j^a tal que $n_j \leqslant n_j^a \leqslant n_{j+1}$. Afirmamos que a sequência $(\frac{1}{n_j^a}\sum_{i=1}^{n_j^a} a_i)$ converge para a quando $j \to +\infty$. Para isso definimos

$$\begin{aligned} m_1 &= \min\{n_j^a \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{n_j^a}\textstyle\sum_{i=1}^{n_j^a} a_i > a\} \\ m_2 &= \min\{n_j^a > m_1 : \tfrac{1}{n_j^a}\textstyle\sum_{i=1}^{n_j^a} a_i < a\} \\ m_3 &= \min\{n_j^a > m_2 : \tfrac{1}{n_j^a}\textstyle\sum_{i=1}^{n_j^a} a_i > a\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, basta provar que $(m_i)_{i\geqslant 1}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, como $(a_i)_{i\mathbb{N}}$ é limitada, existe $C > 0$ tal que $|a_n| \leqslant C, \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{1}{m_{j+1}}\textstyle\sum_{i=1}^{m_{j+1}} a_i - \tfrac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{m_j} a_i\right| &= \left|(\tfrac{1}{m_j} - \tfrac{1}{m_{j+1}})\textstyle\sum_{i=1}^{m_j} a_i - \tfrac{1}{m_{j+1}} a_{m_{j+1}}\right| \\ &\leqslant \left|\tfrac{1}{m_j} - \tfrac{1}{m_{j+1}}\right| \left|\textstyle\sum_{i=1}^{m_j} a_i\right| + \left|\tfrac{1}{m_{j+1}} a_{m_{j+1}}\right| \\ &\leqslant \left|\tfrac{1}{m_j m_{j+1}}\right| (|a_1| + |a_2| + \dots + \left|a_{m_j}\right|) + \left|\tfrac{1}{m_{j+1}} a_{m_{j+1}}\right| \\ &\leqslant \tfrac{1}{m_j m_{j+1}} m_j C + \tfrac{1}{m_{j+1}} \left|a_{m_{j+1}}\right| \\ &\leqslant \tfrac{C}{m_{j+1}} + \tfrac{C}{m_{j+1}} = \tfrac{2C}{m_{j+1}} \to 0 \text{ quando } j \to +\infty. \end{aligned}$$

Portanto temos que $\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{n_j^a}\sum_{i=1}^{n_j^a} a_i = a$ como nós queríamos. □

Observação 3.3.3. Se$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais e $\alpha = \limsup_{n\to\infty}(a_n)$, então existe uma subsequencia $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de (a_n) tal que $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) = \alpha$.

Demostração do Teorema 3.3.1. A prova do teorema será feita em duas partes.

a. Desde que
$$\frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n F^i(x) - F^{i-1}(x)}{n},$$
denotemos por,
$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (F^i(x) - F^{i-1}(x))_{i\in\mathbb{N}} = (\Delta_F(F^{i-1}(x))_{i\in\mathbb{N}}$$
Provemos que a_i é uniformemente acotada. De fato, como $\Delta_F(x) := F(x) - x$ é $\mathbb{Z}$-periódica, segue que a imagem é compacta. Assim existe $C > 0$ tal que
$$|\Delta_F(x)| \leqslant C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

logo como $F^{i-1}(x) \in \mathbb{R}$ temos que

$$\left|\Delta_F(F^{i-1}(x))\right| \leqslant C, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pelo tanto, por o lema 3.3.2 aplicado a a_i temos que o conjunto de pontos limite de $(1/n)\sum_{i=1}^{n}\Delta_F(F^{i-1}(x))$ quando $n \to +\infty$, é um intervalo fechado. Assim $\rho(F,x)$ é um intervalo fechado.

b. Se $\rho(f) = \{p\}$ então o resultado é trivial.
Se $\rho(f)$ é um intervalo com comprimento positivo, então seja $[\alpha,\beta] \subset \rho(f)$ um subintervalo, escolha uma sequência $(\rho_i = p_i/q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha < \rho_i < \beta$ com $\lim_{i\to+\infty}\rho_{2i-1} = \alpha, \lim_{i\to+\infty}\rho_{2i} = \beta$. Pela proposição 3.1.4 para cada $i \geqslant 1$ existem:

   i. z_i pontos periódicos de f com numero de rotação ρ_i e período q_i.
   ii. D_i domínio fundamental para $W^{u+}(z_i)$ tal que $f^{j_i}(D_i) = \mathbb{T}$ para $j_i \in \mathbb{N}$.

Lema 3.3.4. *Seja $[\alpha,\beta] \subset \rho(F)$ um subintervalo. Escolhamos uma sequência $(\rho_i = p_i/q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha < \rho_i < \beta$. Seja $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sequência de números reais tal que $\alpha < \rho_i - \epsilon_i$ e $\rho_i + \epsilon_i < \beta$. Então para cada $i \geqslant 1$ existe $k_i \geqslant 1$ tal que*

$$\left|\frac{F^k(y) - y}{k} - \rho_i\right| < \epsilon_i$$

sempre que $k \geqslant k_i$; y e *$F^{k'q_i}(y) - k'p_i \in W^{u+}_{loc}(x_i)$ para algum $x_i \in \Pi^{-1}(z_i)$ onde $k = k'q_i + r$ com $0 \leqslant r < q_i$.*

Demonstração do lema 3.3.4. Observemos que $z_i \in \mathbb{T}$ é ponto periódico com número de rotação ρ_i e $x_i \in \Pi^{-1}(z_i)$ então

$$F^{k'q_i}(x_i) - x_i = k'p_i$$

para $k' \in \mathbb{N}$, logo temos que

$$\begin{aligned}\left|(F^{k'q_i}(y) - y) - (F^{k'q_i}(x_i) - x_i)\right| &= \left|F^{k'q_i}(y) - y - k'p_i\right| \\ &\leqslant 2\end{aligned} \tag{3.3}$$

.

Pois y e $F^{k'q_i}(y) - k'p_i$ pertencem a $W^{u+}_{loc}(x_i)$. Assim pelo lemma 3.2.4 como $m = 0$ e $n = k'q_i$ temos que, dado $\epsilon_i/2 > 0$ existe $k'_i \geqslant 1$ tal que $y \in \mathbb{R}$ e $x_i \in \Pi^{-1}(z_i)$, se $k'q_i \geqslant k'_i$ e (3.3) vale, então

$$\left|\frac{F^{k'q_i}(y) - y}{k'q_i} - \rho_i\right| < \frac{\epsilon_i}{2} \tag{3.4}$$

Por outro lado, pelo lema 3.2.3 com $n = k'q_i$ e $q = q_i$ temos que dado $\epsilon_i/2$ existe $k''_i \geqslant 1$ tal que para $y \in \mathbb{R}$ e para $k'q_i \geqslant k''_i$ temos

$$\left|\frac{F^{k'q_i+k}(y) - y}{k'q_i + k} - \frac{F^{k'q_i}(y) - y}{k'q_i}\right| < \frac{\epsilon_i}{2} \tag{3.5}$$

onde $0 \leqslant k \leqslant q_i$. Por tanto podemos escolher $k_i = \max\{k_i', k_i''\}$ e por as equações (3.4) e (3.5) temos que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F^{k'q_i+r}(y)-y}{k'q_i+r}-\rho_i\right| &= \left|\frac{F^{k'q_i+r}(y)-y}{k'q_i+r}-\frac{F^{k'q_i}(y)-y}{k'q_i}+\frac{F^{k'q_i}(y)-y}{k'q_i}-\rho_i\right| \\
&\leqslant \left|\frac{F^{k'q_i+r}(y)-y}{k'q_i+r}-\frac{F^{k'q_i}(y)-y}{k'q_i}\right|+\left|\frac{F^{k'q_i}(y)-y}{k'q_i}-\rho_i\right| \\
&\leqslant \epsilon_i
\end{aligned}$$

□

Agora por indução vamos construir um itinerário $(n)_\infty$ tal que um ponto $z \in \mathbb{T}$ com este itinerário respeito a (z_i, j_i) satisfaz $\rho(f,z) = [\alpha, \beta]$.

Lema 3.3.5. *Existe uma sequência $(n)_\infty = (n_1, n_2, \ldots)$ tal que se $z = \Pi(y)$ tem itinerário $(n)_\infty$ com respeito a (z_i, j_i). Então para $i \geqslant 1$ se cumpre:*

$$\left|\frac{F^{N_i+k}(y)-y}{N_i+k}-\rho_i\right| < \epsilon_i \tag{3.6}$$

para $0 \leqslant k \leqslant k_i + j_{i-1}$ onde $j_0 = 0$.

Demonstração do lema 3.3.5. A prova será feita por indução, como $z_1 \in \mathbb{T}$ é ponto periódico com número de rotação p_1/q_1 então existe $r_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $n_1 = r_1 q_1$ e

$$F^{r_1 q_1}(x_1) - x_1 = p_1 r_1$$

onde $x_1 \in \Pi^{-1}(z_1)$. Logo dado $z = \Pi(y)$ precisamos que:

$$|(F^{n_1}(y)-y)-(F^{n_1}(x_1)-x_1)| \leqslant 2,$$

então basta escolher $z = \Pi(y) \in W^{u+}_{loc}(z_1)$ e $F^{\tilde{k_1}q_1}(y) - \tilde{k_1}p_1 \in W^{u+}_{loc}(x_1)$ para $\tilde{k_1} \in [0, r_1]$, assim por o lema 3.2.4 como $m = 0$ temos,

$$\left|\frac{F^{n_1}(y)-y}{n_1}-\frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{\epsilon_1}{2} \tag{3.7}$$

Por outro lado, pelo lema 3.2.3 com $q = k_1$. Dado $\epsilon_1/2 > 0$ como no lema 3.3.4, temos

$$\left|\frac{F^{n_1+k}(y)-y}{n_1+k}-\frac{F^{n_1}(y)-y}{n_1}\right| < \frac{\epsilon_1}{2} \tag{3.8}$$

onde $0 \leqslant k \leqslant k_1$.

Daí que, de (3.7) e (3.8) segue que,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F^{n_1+k}(y)-y}{n_1+k}-\frac{p_1}{q_1}\right| &= \left|\frac{F^{n_1+k}(y)-y}{n_1+k}-\frac{F^{n_1}(y)-y}{n_1}+\frac{F^{n_1}(y)-y}{n_1}-\frac{p_1}{q_1}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{F^{n_1+k}(y)-y}{n_1+k}-\frac{F^{n_1}(y)-y}{n_1}\right|+\left|\frac{F^{n_1}(y)-y}{n_1}-\frac{p_1}{q_1}\right| \\
&< \epsilon_1
\end{aligned}$$

Concluímos que para $z = \Pi(y) \in W^{u+}_{loc}(x_1)$ temos que existe $x_1 \in \Pi^{-1}(z_1)$ tal que;

$$F^{\tilde{k_1} q_1}(y) - \tilde{k_1} p_1 \in W^{u+}_{loc}(x_1)$$

para $0 \leqslant k \leqslant r_1$ e

$$f^{n_1}(z) \in D_1.$$

Portanto a equação (3.6) é satisfeita com $i = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $z = \Pi(y)$ tem itinerário $(n_1) = (n)_1$.

Suponhamos que temos $(n_i) = (n_1, n_2, ..., n_i)$; $i \geqslant 1$, tal que todo $z = \Pi(y)$ com itinerário $(n)_i$ satisfaz a condição (3.6) para $1 \leqslant l \leqslant i$.

Mostraremos agora que isso é verdade para $i+1$. Como antes, dado que $z_{i+1} \in \mathbb{T}$ é periódico com número de rotação p_{i+1}/q_{i+1} temos que existe $r_{i+1} \in \mathbb{Z}$ tal que $n_{i+1} = r_{i+1}q_{i+1}$ e

$$F^{r_{i+1}q_{i+1}}(x_{i+1}) - x_{i+1} = r_{i+1}p_{i+1}$$

onde $x_{i+1} \in \Pi^{-1}(z_{i+1})$ e se,

$$\left|(F^{n_{i+1}+J_i}(y) - F^{J_i}(y) - (F^{n_{i+1}}(x_{i+1}) - x_{i+1})\right| \leqslant 2 \tag{3.9}$$

Então pelo lema 3.2.4 com $n = n_{i+1}$, $m = J_i$ e dado $\epsilon_{i+1}/2 > 0$ (como no lema 3.3.4) temos;

$$\left|\frac{F^{n_{i+1}+J_i}(y)-y}{n_{i+1}+J_i}-\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right| < \frac{\epsilon_{i+1}}{2} \tag{3.10}$$

Por outro lado, pelo lema 3.2.3 com $n = n_{i+1} + J_i$; $q = k_{i+1} + j_i$, dado $\epsilon_{i+1}/2 > 0$ como no lema anterior, obtemos;

$$\left|\frac{F^{n_{i+1}+J_i+k}(y)-y}{n_{i+1}+J_i+k}-\frac{F^{n_{i+1}+J_i}(y)-y}{n_{i+1}+J_i}\right| < \frac{\epsilon_{i+1}}{2} \tag{3.11}$$

onde $0 \leqslant k \leqslant k_{i+1} + j_i$. Denotemos por,

$$B = \left|\frac{F^{n_{i+1}+J_i+k}(y)-y}{n_{i+1}+J_i+k} - \rho_{i+1}\right|$$

Logo de (3.10) e (3.11) segue que

$$\begin{aligned}
B &= \left| \frac{F^{n_{i+1}+J_i+k}(y)-y}{n_{i+1}+J_i+k} - \frac{F^{n_{i+1}+J_i}(y)-y}{n_{i+1}+J_i} + \frac{F^{n_{i+1}+J_i}(y)-y}{n_{i+1}+J_i} - \rho_{i+1} \right| \\
&\leqslant \left| \frac{F^{n_{i+1}+J_i+k}(y)-y}{n_{i+1}+J_i+k} - \frac{F^{n_{i+1}+J_i}(y)-y}{n_{i+1}+J_i} \right| + \left| \frac{F^{n_{i+1}+J_i}(y)-y}{n_{i+1}+J_i} - \rho_{i+1} \right| \\
&< \frac{\epsilon_{i+1}}{2} + \frac{\epsilon_{i+1}}{2} = \epsilon_{i+1}
\end{aligned}$$

Observe que de (3.9) segue que $F^{J_i+\tilde{k}q_{i+1}}(y) - \tilde{k}p_{i+1} \in W^{u+}_{loc}(x_{i+1})$ para $\tilde{k} \in [0, r_{i+1}]$; por outro lado pela hipótese de indução temos que $f^{N_i}(z) \in D_i$ e como $f^{N_i+j_i+n_{i+1}}(z) = f^{j_i+n_{i+1}}(f^{N_i}(z))$ então, desde que $f^{j_i}(D_i) = \mathbb{T}$ temos que $f^{N_{i+1}}(z) \in D_{i+1}$. Logo como $N_{i+1} = n_{i+1} + J_i$, é claro que se $z = \Pi(y)$ tem itinerário $(n)_{i+1} = (n_1, ..., n_{i+1})$ então y satisfaz (3.6) para $1 \leqslant l \leqslant i+1$.

□

Assim se $z = \Pi(y)$ tem itinerário $(n)_\infty$ com respeito de (z_i, j_i), então y satisfaz a condição (3.6) para todo $i \geqslant 1$. Também temos,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{F^{N_{2k-1}}(y)-y}{N_{2k-1}} = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{F^{N_{2k}}(y)-y}{N_{2k}} = \beta$$

Finalmente, provemos que $\rho(f, z) = [\alpha, \beta]$. É suficiente provar que:

$$\alpha \leqslant \frac{F^n(y)-y}{n} \leqslant \beta, \quad \forall n \geqslant n_1$$

De fato; seja $n > n_1$, como $N_i \to +\infty$ quando $i \to +\infty$ e $N_{i+1} > N_i$ então existe $i \geqslant 1$ e $0 \leqslant k < n_i + j_{i-1}$ tal que $n = N_{i-1} + k$, pois é suficiente pegar $N_{i-1} < n < N_i$; por outro lado como $N_{i-1} < N_i$ então $0 < j_{i-1} + n_i$ e assim basta escolher $k \leqslant j_{i-1} + k_i$ com o que obtemos $n = N_{i-1} + k$.

Se $k_i + j_{i-1} < k < n_i + j_{i-1}$ nós temos,

$$\begin{aligned}
\frac{F^{N_{i-1}+k}(y)-y}{N_{i-1}+k} &= \left(\frac{F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)-y}{N_{i-1}+j_{i-1}} \right) \cdot (1-t) \\
&\quad + \left(\frac{F^{k-j_{i-1}}(F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)) - F^{N_{i-i}+j_{i-1}}(y)}{k-j_{i-1}} \right) \cdot t
\end{aligned}$$

Uma combinação convexa de dois números, onde $t = \frac{k-j_{i-1}}{N_{i-1}+k} \in [0,1]$. Claramente como $k_{i-1} \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande então pelo lema 3.3.5, com $0 \leqslant k = j_{i-1} \leqslant k_{i-1} + j_{i-2}$ em (3.6) temos;

$$\left| \frac{F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)-y}{N_{i-1}+j_{i-1}} - \rho_{i-1} \right| < \epsilon_{i-1} \tag{3.12}$$

Além disso observe que se $k = j_{i-1}$ então $t = 0$. De (3.12) segue que,

$$\left|\frac{F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)-y}{N_{i-1}+j_{i-1}}\right| \leqslant \epsilon_{i-1}+|\rho_{i-1}|$$

logo temos dois casos;

(i) $\dfrac{F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)-y}{N_{i-1}+j_{i-1}} < \epsilon_{i-1}+\rho_{i-1} \leqslant \beta$

(ii) $\dfrac{F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)-y}{N_{i-1}+j_{i-1}} > \rho_{i-1}-\epsilon_{i-1} \geqslant \alpha$

Portanto,

$$\frac{F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)-y}{N_{i-1}+j_{i-1}} \in [\alpha,\beta] \tag{3.13}$$

Por outro lado como $k_i < k - j_{i-1} < n_i$ então podemos aplicar o lemma 3.3.4 e obtemos

$$\left|\frac{F^{k-j_{i-1}}(F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)) - F^{N_{i-i}+j_{i-1}}(y)}{k-j_{i-1}} - \rho_i\right| < \epsilon_i \tag{3.14}$$

De forma similar a (3.12) obtemos para a desigualdade (3.14) o seguente:

$$\frac{F^{k-j_{i-1}}(F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)) - F^{N_{i-1}+j_{i-1}}(y)}{k-j_{i-1}} \in [\alpha,\beta] \tag{3.15}$$

Além disso observe que (3.15) também vale quando $N_{i-1}+j_{i-1}=0$, e assim vale quando $t=1$. Portanto de (3.13) e (3.15) segue que

$$\frac{F^{N_{i-1}+k}(y)-y}{N_{i-1}+k} \in [\alpha,\beta]$$

E assim se completa a prova.

$\square$

REFERÊNCIAS

[BMPF84] R. Bamon, I. P. Malta, M. J. Pacifico, and F.Taken, *Rotation intervals of endomorphisms of the circle*, Ergodic theory and dynamical systems **4** (1984), p. 493–498.

[BS02] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, 2002.

[Ito81] R. Ito, *Rotation sets are closed*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **89** (1981), p. 107–111.

[KH95] A. Katok and B. Hasselblat, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54, 1995.

[NPT83] S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S **57** (1983), p. 5–71.

[Poi85] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles (iii)*, Journal de mathématiques pures et appliquées 4ta série **tomo 1** (1885), p. 167–244.