IME-UFF

CONTROLABILIDADE LOCAL PARA UM SISTEMA N-DIMENSIONAL DE BOUSSINESQ COM N-1 CONTROLES ESCALARES

Miguel Roberto Nuñez Chávez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, IME-UFF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadores: Juan Limaco Ferrel D.Sc.
Luiz Alberto Viana D.Sc.

Niterói
Março de 2015

CONTROLABILIDADE LOCAL PARA UM SISTEMA N-DIMENSIONAL DE BOUSSINESQ COM N-1 CONTROLES ESCALARES

Miguel Roberto Nuñez Chávez

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE (IME-UFF) COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Juan Limaco Ferrel D.Sc.,
(Orientador)

Prof. Luiz Alberto Viana D.Sc.,
(Coorientador)

Prof. Enrique Fernandez - Cara, Ph.D.

Prof. Ademir Fernando Pazoto, D.Sc.

NITERÓI, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2015

Miguel Roberto Nuñez Chávez,

Controlabilidade Local para um sistema N-dimensional de Boussinesq com N-1 controles escalares

Aluno: Miguel Roberto Nuñez Chávez,

Niterói: IME-UFF, 2015.

IX, 88 p. $29,7$cm.

Orientadores: Juan Limaco Ferrel D.Sc.

Luiz Alberto Viana D.Sc.

Dissertação de mestrado – Equações Diferenciais Parciais – Programa de Pós-graduação em Matemática, IME-UFF, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 86 – 87.

1. Preliminares

2. Controlabilidade Local da Equação de Navier-Stokes

3. Controlabilidade Local para um sistema N-dimensional de Boussinesq com N-1 controles escalares

I. D.Sc., Juan Limaco Ferrel *et al.*

II. Universidade Federal Fluminense, IME, Programa de Pós-graduação em Matemática

III. Título.

À meus pais e irmãos

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter me dado forças para concluir o mestrado.

A meus pais e irmãos, que são minha força especial para seguir adiante.

Ao professor Juan pela orientação e dedicação desde que iniciei o mestrado, por resolver minhas dúvidas, por me fazer estudar mais e poder melhorar cada dia.

Ao professor Dr. Sebastião Firmo, pelo convite para ingressar no Programa de Mestrado da UFF.

A todos meus amigos do mestrado pelas conversas e momentos compartilhados nesses últimos dois anos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao IME-UFF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLABILIDADE LOCAL PARA UM SISTEMA N-DIMENSIONAL DE BOUSSINESQ COM N-1 CONTROLES ESCALARES

Miguel Roberto Nuñez Chávez

Março/2015

Orientadores: Juan Limaco Ferrel D.Sc., Luiz Alberto Viana D.Sc.

O objetivo principal desta dissertação é estabelecer a existência de $N-1$ controles escalares para o sistema $N-$ dimensional de Boussinesq, dado por

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}} + \theta e_N \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \text{div } y = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + (y.\nabla\theta) = h1_{\mathcal{O}} \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0, \; \theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0, \; \theta(0) = \theta_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

onde $T > 0$, Ω um aberto limitado conexo de $\mathbb{R}^N$, e $N = 2, 3$.

Abstract of Dissertation presented to IME-UFF as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

LOCAL CONTROLLABILITY FOR THE N-DIMENSIONAL BOUSSINESQ SYSTEM WITH N-1 SCALAR CONTROLS

Miguel Roberto Nuñez Chávez

March/2015

Advisors: Juan Limaco Ferrel D.Sc., Luiz Alberto Viana D.Sc.

The main goals of the dissertation is to establish existence of $N-1$ scalar controls for $N-$ dimensional Boussinesq system, given by

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}} + \theta e_N \ \text{ in } \Omega \times (0,T), \\ \text{div } y = 0 \ \text{ in } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + (y.\nabla\theta) = h1_{\mathcal{O}} \ \text{ in } \Omega \times (0,T), \\ y = 0, \ \theta = 0 \ \text{ on } \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0, \ \theta(0) = \theta_0 \ \text{ in } \Omega, \end{array} \right. \tag{2}$$

where $T > 0$, Ω an open connected limited to $\mathbb{R}^N$, and $N = 2, 3$.

Sumário

Introdução

As equações que descrevem o movimento de um fluido incompressível, que estão na atmosfera terrestre, nas correntes oceânicas e no fluxo ao redor de veículos são chamadas de equações de Navier - Stokes dadas por

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = f \quad \text{em } Q, \\ \text{div } y = 0 \quad \text{em } Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre } \ \Sigma, \\ y(0) = y_0 \quad \text{em } \ \Omega, \end{array}\right. \tag{3}$$

onde y é a velocidade do fluido, p é pressão do fluido, f é uma força externa que atua sob o fluido e y_0 é a velocidade inicial do fluido. A equação $div\ y = 0$ representa a incompressibilidade do fluido, ou seja, nos diz que o volume ocupado por um conjunto se desloca ao longo das trajetórias sem variar com o tempo. Estas equações são obtidas aplicando os princípios de conservação da mecânica e termodinâmica de um fluido.
É conhecido que o sistema de Navier-Stokes tem uma única solução fraca y quando $N = 2$. No entanto, quando $N = 3$, este sistema possui uma solução, mas a unicidade é uma questão em aberto.

As equações que modelam a transferência de calor num fluido incompressível, são chamadas as equações de Boussinesq. A seguir citaremos alguns fatos históricos: Rayleigh no ano 1916, utiliza um conjunto de simplificações feitas por Boussinesq (1903) para as equações de Navier-Stokes com condutividade térmica de um fluido incompressível, mas pelo prestígio de Rayleigh na Inglaterra, essas simplificações foram atribuídas a Boussinesq.

O sistema de Boussinesq é dado por

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y+(y.\nabla)y+\nabla p=f+\theta e_N \ \text{ em } Q,\\ divy=0 \ \text{ em } Q,\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}-\Delta\theta+y.\nabla\theta=0 \ \text{ em } Q,\\ y=0,\ \theta=0 \ \text{ sobre } \Sigma,\\ y(0)=y_0,\ \theta(0)=\theta_0 \ \text{ em } \Omega,\end{array}\right. \tag{4}$$

onde y, p, f, y_0 são interpretados como no sistema 3, θ é a temperatura do fluido, θ_0 é a temperatura inicial do fluido e a equação $\theta_t - \Delta\theta + y.\nabla\theta = 0$ nos diz como evolui a temperatura. Como o sistema de Boussinesq tem certa semelhança com o sistema de Navier-Stokes, sabemos que também tem solução fraca y quando $N = 2, 3$. No entanto a unicidade desta solução só é conhecida quando $N = 2$.

Os primeiros trabalhos usando desigualdade do tipo Carleman para a controlabilidade nula de uma equação parabólica, foram desenvolvidos por Fursikov e Imanuvilov [1], [2], [3], [4], [5] e logo por Enrique Fernandez-Cara e Sergio Guerrero [6], [7].
Para estudar a controlabilidade nula de problemas parabólicos não lineares costume-se usar técnicas envolvendo o Teorema do ponto fixo (de Kakutani) e ou Teorema da função inversa em dimensão infinita (Teorema de Liusternik).
Nosso trabalho é baseado em [8], bem como em [9], [10], [11], [6].

Esta dissertação é divida em 3 capítulos:
No primeiro capítulo, mencionaremos resultados e rudimentos básicos que precisamos nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo, desenvolveremos as notas de um curso ministrado pelo professor J. P. Puel sobre a controlabilidade local do sistema de Navier-Stokes, utilizando para isso a desigualdade de Carleman, a desigualdade de Observabilidade, o teorema de Lax-Milgram e o teorema de Liusternik. Isto será feito para entender um pouco mais acerca do tema principal da dissertação. Apesar de tratarmos neste capítulo do problema de controlabilidade para o sistema de Navier-Stokes os resultados obtidos são similares para o sistema de Boussinesq. Assim ficará mais claro para o leitor a ideia do trabalho.

No terceiro capítulo estudaremos o tema principal desta dissertação: a controlabilidade local para um sistema N-dimensional de Boussinesq com $N-1$ controles escalares. Para fazer isto aplicaremos técnicas clássicas. Primeiramente linearizaremos o sistema, em seguida, definiremos os pesos para a desigualdade de Carleman associada ao sistema adjunto relativo ao problema linear. Como consequência imediata deduziremos a desigualdade de Observabilidade. Com ajuda do teorema de Lax-Milgram obteremos um resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado e com alguns resultados de regularidade adicionais concluiremos a demonstração do resultado principal. Por ultimo, obteremos a controlabilidade nula local para o sistema de Boussinesq aplicando o teorema de Liusternik para uma aplicação $H : E \to F$, onde E e F são dois espaços de Banach adequados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados necessários para a compreensão dos capítulos seguintes.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

Definição 1.1.1. (**Convergência Fraca**) *Sejam E um espaço normado e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de E. Dizemos que x_n converge fracamente a x em E, e escrevemos $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\langle \varphi, x_n\rangle \to \langle \varphi, x\rangle$, para todo $\varphi \in E'$.*

Definição 1.1.2. (**Convergência Fraca Estrela**) *Sejam E um espaço normado, $x \in E'$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Dizemos que φ_n converge a φ em E' com respeito à topologia fraca estrela e escrevemos $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_n, x\rangle \to \langle \varphi, x\rangle$, para todo $x \in E$.*

Proposição 1.1.3. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in E'$;*

(ii) *Se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$;*

(iii) *$x_n \rightharpoonup x$ então $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$;*

(iv) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Definição 1.1.4. *Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ que é enumerável e denso.*

Definição 1.1.5. *Seja E um espaço normado e seja J a injeção canônica de E em E'', definido por $J(x)f := f(x)$ para todo $f \in E'$ e todo $x \in E$. Dizemos que E é reflexivo se $J(E) = E''$.*

Teorema 1.1.6. (**Teorema de Banach – Alaoglu – Bourbaki**) *Seja E um espaço normado. Então o conjunto*

$$B'_E = \{f \in E'; \|f\|'_E \leqslant 1\} \text{ é compacto com respeito à topologia fraca estrela.}$$

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Teorema 1.1.7. *Seja E um espaço de Banach separável. Então o conjunto*

$$B'_E = \{f \in E'; \|f\|'_E \leqslant 1\} \text{ é metrizável com respeito à topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se B'_E é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Corolário 1.1.8. *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente com respeito à topologia fraca estrela.*

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Teorema 1.1.9. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ seja uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge com respeito à topologia fraca.*

Demonstração. Ver Evans [13]. □

Teorema 1.1.10 (Lax-Milgram). *Sejam H um espaço de Hilbert e $b : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em H. Então para todo $\xi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$b(u, v) = \langle \xi, v\rangle_{H'\times H} \text{ para todo } v \in H.$$

Demonstração. Ver Evans [13]. □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O suporte de φ em Ω é definido por*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.2.2. *Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω, com suporte compacto em Ω.*

Definição 1.2.3. *Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) *Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que*

$$supp(\varphi) \subset K \text{ e } supp(\varphi_n) \subset K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente em K para todo multi-índice α.*

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência definida acima. Este espaço é denominado espaço das funções testes.

Definição 1.2.4. *Uma distribuição escalar sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ contínua com respeito à topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:*

(i) $T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi), \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(ii) *T é contínua, isto é, se uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ, então*

$$T(\varphi_n) \to T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Munimos o espaço vetorial das distribuições escalares com a seguinte noção de convergência:

Dizemos que a sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 1.2.5. *Dados uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, definimos a derivada distribuicional de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.
Notemos que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua, ou seja, se

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{n \to +\infty} D^\alpha T_n = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leqslant p < +\infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p < +\infty$, é um espaço de Banach a través da norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definição 1.3.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mensurável e existe } C > 0 \ \textit{ tal que } |f(x)| \leqslant C \textit{ q.s. em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x \in \Omega}{supess} |f(x)| = \inf \{C; |f(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Teorema 1.3.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p, q \in [1, +\infty]$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Teorema 1.3.4 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $p \in [1, +\infty]$ e $f, g \in L^p(\Omega)$. Então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Proposição 1.3.5. *Sejam $p, q \in [1, +\infty]$, com $p \leqslant q$, e suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Proposição 1.3.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto e $p \in [1, +\infty)$, Então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Medeiros [14]. □

Teorema 1.3.7 (Representação de Riesz-Fréchet). *Sejam $1 \leqslant p < +\infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle \phi, f \rangle_{(L^p(\Omega))' \times L^p(\Omega)} = \int_\Omega uf dx \text{ para todo } f \in L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Definição 1.3.8. *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Exemplo 1.3.9. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

Nestas condições, T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

Lema 1.3.10 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$, se e somente se, $u = 0$ q.s. em Ω.*

Demonstração. Ver Medeiros [14]. □

Observação 1.3.11. *A derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função em $L^1_{loc}(\Omega)$ (ver Medeiros [14]).*

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 1.4.1. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial dado por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leqslant m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < +\infty$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

e $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \underset{x \in \Omega}{supess} |D^\alpha u(x)|.$$

Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ já que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 1.4.2 (Imersões de Sobolev)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um aberto limitado de classe C^m, onde $m \geqslant 1$. Então temos as seguintes imersões compactas:*

(i) *Se $mp < N$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leqslant q \leqslant \frac{Np}{N-mp}$.*

(ii) *Se $mp = N$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leqslant q < +\infty$.*

(iii) *Se $mp > N$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$, onde k é inteiro e $0 \leqslant k < m - \frac{N}{p} \leqslant k + 1$.*

Demonstração. Ver Medeiros [14]. □

Definição 1.4.3. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso em que $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.4.4 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uma aberto limitado e $1 \leqslant p < +\infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver Brezis [12]. $\square$

Observação 1.4.5. *Em particular, a expressão* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *é uma norma no espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *equivalente à norma* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. *Em* $H_0^1(\Omega)$ *temos o produto interno*

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, *a qual é equivalente a norma* $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração. Ver Brezis [12]. $\square$

Definição 1.4.6. *Sejam* $1 \leqslant p < +\infty$ *e* q *o índice conjugado a* p. *Denotemos por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *e por* $H^{-m}(\Omega)$ *o dual topológico de* $H_0^m(\Omega)$.

Definição 1.4.7. *A norma em* $H^{-1}(\Omega)$ *é definida por*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = sup\{\langle f,u\rangle; u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1\} = \sup_{\|u\|=1} \frac{|\langle f,u\rangle|}{\|u\|}$$

para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Observação 1.4.8. *Temos a seguinte escala de Hilbert de imersões densas*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv [L^2(\Omega)]' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$

Sejam X um espaço de Banach e $T > 0$.

Definição 1.5.1. (i) *Uma função* $s : [0,T] \to X$ *é dita simples se*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i, \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

onde cada E_i *é um subconjunto Lebesgue mensurável de* $[0,T]$ *e* $u_i \in X$, $(i = 1, ..., m)$.

(ii) *Uma função* $f : [0,T] \to X$ *é fortemente mensurável se existir uma sequência de funções simples* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *de* $[0,T]$ *em* X, *tal que*

$$s_k(t) \to f(t), \text{ q.s. em } [0,T].$$

(iii) *Uma função* $f : [0,T] \to X$ *é fracamente mensurável se, para cada* $\varphi \in X'$, *a aplicação* $t \mapsto \langle \varphi, f(t) \rangle$ *é Lebesgue mensurável.*

Definição 1.5.2. **(i)** *Se* $s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i$ *é uma função simples, definimos*

$$\int_0^T s(t)dt = \sum_{i=1}^{m} |E_i| u_i.$$

(ii) *Dizemos que* $f : [0,T] \to X$ *é somável se existe uma sequência de* $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de funções simples, tal que*

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_X dt \to 0, \text{ quando } k \to +\infty.$$

Nesse caso, definimos

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{k \to +\infty} \int_0^T s_k(t)dt.$$

Teorema 1.5.3 (Bochner)**.** *Uma função fortemente mensurável* $f : [0,T] \to X$ *é somável se e somente se* $t \mapsto \|f(t)\|_X$ *é somável. Neste caso,*

(i)

$$\left\| \int_0^T f(t)dt \right\|_X \leqslant \int_0^T \|f(t)\|_X dt;$$

(ii)

$$\left\langle \xi, \int_0^T f(t)dt \right\rangle_{X' \times X} = \int_0^T \langle \xi, f(t) \rangle_{X' \times X} dt \text{ para cada } \xi \in X'.$$

Demonstração. Ver Evans [13]. □

Definição 1.5.4. *Denotamos por* $L^p(0,T;X)$, *com* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *o espaço vetorial das (classes de) funções* $u : (0,T) \to X$, *fortemente mensuráveis com valores em* X, *tais que:*

(a) *se* $1 \leqslant p < +\infty$, *a função* $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ *é integrável à Lebesgue em (0,T);*

(b) *se* $p = +\infty$, *a função* $t \mapsto \|u(t)\|_X$ *pertence à* $L^\infty(0,T)$.

O espaço $L^p(0,T;X)$, é um espaço de Banach com a norma definida por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p \right]^{1/p}, \text{ se } 1 \leqslant p < +\infty.$$

Quando $p = +\infty$, a norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{0<t<T}{\text{sup}ess}\|u(t)\|_X.$$

Quando $p = 2$, o espaço $L^2(0,T;X)$ é uma espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

Quando X é separável e $1 \leqslant p < +\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço separável.

Definição 1.5.5. *Denotaremos por $L^{p'}(0,T;X')$ o espaço dual topológico de $L^p(0,T;X)$, onde $1 < p < +\infty$ e p' é o índice conjugado a p. No caso em que $p = 1$, podemos identificar o dual topológico de $L^1(0,T;X)$ ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.*

Além disso, quando X é reflexivo e $1 < p < +\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle u,v\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_{X'\times X} dt.$$

Definição 1.5.6. *Dado $T > 0$, denotamos por $C^0([0,T];X)$, o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \underset{0\leqslant t\leqslant T}{max}\|u(t)\|_X.$$

Proposição 1.5.7. *Sejam V, H dois espaços de Hilbert. Se $u \in L^2(0,T;V)$ e $u' \in L^2(0,T;V')$, então u é quase sempre igual a uma função contínua de $[0,T]$ em H, e temos a seguinte igualdade no sentido das distribuições escalares em $(0,T)$*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u',u\rangle.$$

A igualdade acima faz sentido desde que as funções

$$t \mapsto |u(t)|^2 \text{ e } t \mapsto \langle u'(t),u(t)\rangle$$

são ambos integráveis em $[0,T]$:

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Proposição 1.5.8. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, com $X \hookrightarrow Y$ e consideremos $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$. Então $L^q(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$.*

Demonstração. Ver Brezis [12]. □

Teorema 1.5.9. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, com $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^p(0,T;X)$ e $u' \in L^p(0,T;Y)$, com $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ então*

$$u \in C^0([0,T];Y).$$

Demonstração. Ver Lions [16]. □

1.6 Distribuições Vetoriais

Sejam $T > 0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|.\|_X$.

Definição 1.6.1. *Uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X é uma aplicação $S : \mathcal{D}(0,T) \to X$ linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, e denotado por*

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

Definição 1.6.2. *Seja $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Observação 1.6.3. *Se $u \in L^p(0,T;X)$ com $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, então u define uma distribuição, que denotamos T_u, dada por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \ \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

com valores vetoriais em X. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, o que nos permite identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Demonstração. Ver Lions [16]. □

Observação 1.6.4. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Definimos o espaço*

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X); u^{(k)} \in L^p(0,T;X), k = 1,2,...,m\}$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)} & \text{se } 1 \leqslant p < +\infty \\ \underset{0<t<T}{supess} \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}(t)\|_X\right) & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

É conhecido que $W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach; quando $p = 2$ o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$; além disso, se X é um espaço de Hilbert, então $H^m(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=1}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)} \text{ para } u, v \in H^m(0,T;X).$$

Demonstração. Ver Adams [17]. □

Observação 1.6.5. *Denotamos por $W_0^{m,p}(0,T;X)$ o fecho de $\mathcal{D}(0,T;X)$ com respeito à norma de $W^{m,p}(0,T;X)$. Quando $p = 2$ o espaço $W_0^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H_0^m(0,T;X)$. Por $H^{-m}(0,T;X)$ denotamos o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$. Temos ainda que vale*

$$W_0^{m,p}(0,T;X) = \{u \in W^{m,p}(0,T;X); u(0) = 0 = u(T)\}.$$

Demonstração. Ver Adams [17]. □

Teorema 1.6.6. *Sejam X um espaço de Hilbert e $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único funcional $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X \text{ para todo } \theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ e } \xi \in X.$$

Baseados nisso, identificamos f com u'. Além disso, para cada $u \in L^2(0,T;X)$, diremos que $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

Demonstração. Ver Milla Miranda [18]. □

1.7 Resultados Principais

Nesta secção, enunciaremos os principais resultados que serão utilizados nos próximos capítulos.

Teorema 1.7.1 (Teorema do Traço). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, com fronteira Γ de classe C^{m+1} e ν o vetor unitário normal exterior à Γ. Então existe uma aplicação $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$ de $H^m(\Omega)$ em $(L^2(\Gamma))^m$ tal que*

(i) *Se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(u) = u|_\Gamma$, $\gamma_1(u) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$, ..., $\gamma_{m-1}(u) = \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right|_\Gamma$.*

(ii) *A imagem de γ é $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

(iii) *O núcleo de γ é $H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Medeiros [14]. $\square$

Teorema 1.7.2 (Teorema de Gauss). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira Γ de classe C^1 e $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_N)$ o vetor normal unitário exterior à Γ.*

(i) *Se $u \in H^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma u \nu_i d\Gamma.$$

(ii) *Se $u = (u_1, u_2, ..., u_N) \in (H^1(\Omega))^N$, então*

$$\int_\Omega div(u) dx = \int_\Gamma u.\nu d\Gamma.$$

Demonstração. Ver Kesavan [19]. $\square$

Definição 1.7.3. *Uma base Hilbertiana de um espaço de Hilbert H é uma sequência de vetores $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que satisfaz*

(i) *$(v_i, v_j)_X = \delta_{ij}$ para $i, j \in \mathbb{N}$;*

(ii) *o conjunto de todas combinações lineares (finitas) de $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é denso em X.*

Teorema 1.7.4 (Teorema Espectral). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Existe uma sequência de números reais $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...,$$

$$\lambda_m \to +\infty \text{ quando } m \to +\infty,$$

e existe uma base Hilbertiana $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, tais que, $v_m \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta v_j = \lambda_j v_j & \text{em } \Omega, \\ v_j = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

para $j = 1, 2, ...$ Dizemos que os números λ_m são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e que as v_m são as autofunções associadas. Se além disso Ω possuir fronteira Γ de classe C^2 então temos que $v_m \in H^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver Evans [13]. $\square$

Lema 1.7.5 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial)**.** *Se $\eta : [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e absolutamente continua.*

(i) *Se η satisfaz para t q.s. a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leqslant \psi(t) + \varphi(t)\eta(t),$$

onde, φ e ψ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $t \in [0, T]$.

(ii) *Em particular, se $\eta' \leqslant \varphi\eta$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, temos*

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Demonstração. Ver Evans [13]. $\square$

Lema 1.7.6 (Desigualdade de Gronwall - Forma Integral)**.** *Seja $\xi : [0, T] \to \mathbb{R}$ não negativa e integrável.*

(i) *Se ξ satisfaz a desigualdade integral*

$$\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2$$

para constantes C_1, $C_2 \geqslant 0$, então

$$\xi(t) \leqslant C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \text{ q.s. em } [0, T].$$

(ii) *Em particular, se*

$$\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)ds,$$

então $\xi \equiv 0$ q.s. em $[0, T]$.

Demonstração. Ver Evans [13]. $\square$

Lema 1.7.7 (Lema de Fursikov). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado. Dado* $\omega \subset\subset \Omega$, *então existe uma função* $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ *tal que* $\psi = 0$ *sobre* $\partial\Omega$, $\psi(x) > 0$ *em* Ω, $|\nabla\psi| > c_0 > 0$ *em* $\Omega\backslash\overline{\omega}$.

Demonstração. Ver Fursikov [3]. □

Teorema 1.7.8. *Seja* U *um espaço vetorial e* $J : U \to \mathbb{R}$ *uma aplicação estritamente convexa, diferenciável e coerciva. Então existe uma única solução em* U *do problema variacional*

$$\begin{cases} min\ J(v), \\ v \in U \end{cases}$$

tal que,

$$DJ(u)(v) = 0,\ \forall v \in U.$$

Demonstração. Ver Lions [16]. □

1.7.1 Existência e unicidade de soluções para o sistema de Navier-Stokes

Sejam $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e conexo com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular, $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$, $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ e $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Consideremos o sistema de Navier - Stokes em forma vetorial

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u.\nabla)u + \nabla p = f \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ \text{div } u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,T) \\ u(0) = u_0 \ \text{ em } \ \Omega \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Definamos

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N; \text{div } \varphi = 0\}$$
$$H = \overline{\mathcal{V}}^{[L^2(\Omega)]^N}, \quad V = \overline{\mathcal{V}}^{[L^2(\Omega)]^N}$$

Proposição 1.7.9. $H = \{y \in [L^2(\Omega)]^N; div\ y = 0, y.\nu = 0 \ sobre\ \Gamma\}$

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Proposição 1.7.10. $V = \{y \in [H_0^1(\Omega)]^N; div\ y = 0\}$

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Introduzimos as notações

$$a(v,w) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} . \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \nabla v . \nabla w dx, \ \forall v, w \in V$$

e

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx, \ \forall u, v, w \in V.$$

Definição 1.7.11. *Dizemos que* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ *é uma solução (fraca) do sistema de Navier - Stokes* 1.1 *quando para todo* $t \in (0,T)$ *temos*

$$\frac{d}{dt}(u(t),w) + a(u(t),w) + b(u(t),u(t),w) = \langle f(t), w \rangle, \ \forall w \in V$$

e

$$u(0) = u_0 \in H.$$

Teorema 1.7.12 (Existência e unicidade do sistema de Navier-Stokes, $N = 2$)**.** *Sejam* $N = 2$, $f \in L^2(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$. *Então existe uma única solução (fraca)* u *do sistema de Navier - Stokes* 1.1 *satisfazendo* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$.

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Teorema 1.7.13 (Existência do sistema de Navier-Stokes, $N = 3$)**.** *Sejam* $N = 3$, $f \in L^2(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$. *Então existe uma solução (fraca)* u *do sistema de Navier - Stokes* 1.1*, não necessariamente única, satisfazendo* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$.

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Temos casos mais particulares do sistema de Navier - Stokes, como

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = f \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ \text{div } u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,T) \\ u(0) = u_0 \ \text{ em } \ \Omega \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Definição 1.7.14. *Dizemos que* $u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ *é uma solução (fraca) do sistema de Navier-Stokes* 1.2 *quando para todo* $t \in (0,T)$ *temos*

$$\frac{d}{dt}(u(t),w) + a(u(t),w) = \langle f(t), w \rangle, \ \forall w \in V,$$

$$u(0) = u_0 \in H.$$

Teorema 1.7.15 (Existência e unicidade do sistema de Navier-Stokes 1.2). *Sejam* $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$ *e* $u_0 \in H$. *Então existe uma única solução (fraca)* u *do sistema de Navier-Stokes* 1.2 *satisfazendo* $u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$, *com* $u' \in L^2(0,T;V')$.

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Proposição 1.7.16. *Suponhamos que* Ω *seja um aberto de classe* C^2 *e* $u_0 \in V$. *Então o sistema* 1.2 *tem uma única solução (fraca)* u *que satisfaz*

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H),$$

com

$$p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N).$$

Demonstração. Ver Temam [15]. □

Lema 1.7.17. *Dados* $g = (g_{ij}) \in [L^2(Q)]^{N^2}$, $\overline{y} \in [L^\infty(Q)]^N$ *e* $y_0 \in H$, *consideremos, para cada* $v \in L^2(Q_\omega)^N$, *a solução* y *do seguinte sistema*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla.g + v1_\omega \ \ em\ Q, \\ div\ y = 0 \ \ em\ Q, \\ y = 0 \ \ sobre\ \Sigma, \\ y(0) = y_0 \ \ em\ \Omega. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

O sistema 1.3 *tem uma única solução* $z = z(v) \in C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V)$.

Demonstração. Para $\tilde{y} \in L^2(0,T;V)$, seja $f_0 = \nabla.g + v1_\omega - \nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y})$. Provaremos que $f_0 \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$. Com efeito,

$$\|\widetilde{y}\|^2_{L^2(Q)^N} = \int_0^T \|\tilde{y}\|^2_{L^2(\Omega)^N}\, dt$$

Da equivalência das normas $\|.\|_{H^1(\Omega)^N}$ e $\|.\|_V$, tem-se

$$\|\tilde{y}\|^2_{L^2(Q)^N} \leqslant C \int_0^T \|\tilde{y}(t)\|^2_V dt < \infty.$$

Por tanto $\tilde{y} \in L^2(Q)^N$ e como $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$, temos $\tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(Q)^{N^2}$ e $\bar{y} \otimes \tilde{y} \in L^2(Q)^{N^2}$. Agora seja $\tilde{f}_{ij} = (\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{z} \otimes \bar{y})_{ij} \in L^2(Q)^{N^2}$ para $i,j \in \{1,...,N\}$.

Assim $\left\langle \nabla.\tilde{f}(t), w \right\rangle = -\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{f}_{ij}(t), \frac{\partial w_i}{\partial x_j})_{L^2(\Omega)}$ para todo $w \in [H_0^1(\Omega)]^N$. Claramente $\nabla.\tilde{f}(t)$ é linear, vejamos que $\nabla.\tilde{f}(t)$ é continua, com efeito

$$\left|\left\langle \nabla.\tilde{f}(t), w \right\rangle\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} \left|\tilde{f}_{ij}(t)\right|_{L^2(\Omega)} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)}$$

$$\left|\left\langle \nabla.\tilde{f}(t), w \right\rangle\right| \leqslant C \left\|w\right\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^N}$$

e assim temos que $\nabla.\tilde{f}(t) \in [H^{-1}(\Omega)]^N$. Além disto, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|\left\langle \nabla.\tilde{f}(t), w \right\rangle\right|^2 dt &\leqslant \int_0^T C\left\|w\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left\|\tilde{f}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leqslant C\left\|w\right\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^N}^2 \int_0^T \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \left|\tilde{f}_{ij}(t)\right|^2 dxdt \\ &\leqslant C\left\|w\right\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^N}^2 \left\|\tilde{f}\right\|_{[L^2(\Omega)]^N} < \infty \end{aligned}$$

Por tanto $\nabla.\tilde{f} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$, isto é, $\nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$. Como $\nabla.g \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$ e $v1_w \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$ temos que $f_0 \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$.

Agora consideremos o seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f_0 - \nabla p \text{ em } Q, \\ \text{div } y = 0 \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Pelo teorema 1.7.15 existe uma única solução y de 1.4 com $y \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ e $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$. Isto nos diz que para cada $\tilde{y} \in L^2(0, T; V)$ existe solução de 1.3. Assim, podemos definir a aplicação

$$L_T : C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) \longrightarrow C([0, T], H) \cap L^2(0, T; V)$$
$$\tilde{y} \mapsto L_T(\tilde{y}) = y$$

Vamos a provar que L_T é uma contração para T muito pequeno.

Sejam $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2 \in \mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V)$ e consideremos $y_1 = L_T(\tilde{y}_1)$ e $y_2 = L_T(\tilde{y}_2)$. Como y_1 e y_2 são soluções fracas de 1.3 correspondentes a $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$, respetivamente, y_1 e y_2 satisfazem as seguintes equações:

$$\frac{d}{dt}(y_1(t), w) + a(y_1(t), w) = \left\langle f_0^1, w \right\rangle \text{ para todo } w \in V \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}(y_2(t),w)+a(y_2(t),w)=\left\langle f_0^2,w\right\rangle \quad \text{para todo } w\in V \tag{1.6}$$

De 1.5 e 1.6, deduzimos que y_1-y_2 satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt}(y_1(t)-y_2(t),w)+a(y_1(t)-y_2(t),w)=\left\langle f_0^1-f_0^2,w\right\rangle \quad \text{para todo } w\in V.$$

Em particular, tomando $w=(y_1-y_2)(t)\in V$ e lembrando que

$$f_0^1-f_0^2=-\nabla(\bar{y}\otimes(\tilde{z}_1-\tilde{y}_2)+(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\otimes\bar{y}),$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|(y_1-y_2)(t)\right\|_{L^2(\Omega)^N}^2+a\left((y_1-y_2)(t),(y_1-y_2)(t)\right)=\\ -\left\langle\nabla.\left(\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)+(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)\otimes\bar{y}\right),y_1-y_2\right\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|(y_1-y_2)(t)\right\|_{L^2(\Omega)^N}^2+\left\|(y_1-y_2)(t)\right\|_V^2=\\ \left(\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)+(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\otimes\bar{y},\nabla(y_1-y_2)\right)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}.\end{aligned}$$

Integrando de 0 ate t, temos

$$\begin{aligned}\left\|(y_1-y_2)(t)\right\|_{L^2(\Omega)^N}^2+\int_0^t\left\|(y_1-y_2)(s)\right\|_V^2ds\leqslant\\ \int_0^t\left(\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)+(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\otimes\bar{y},\nabla.(y_1-y_2)\right)_{L^2(\Omega)^{N^2}}\\ =\int_0^t\left(\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2),\nabla.(y_1-y_2)\right)ds\\ +\int_0^t\left((\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\otimes\bar{y},\nabla.(y_1-y_2)\right)ds\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}&\leqslant\int_0^t\left\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\right\|_{L^2}\left\|\nabla.(y_1-y_2)\right\|_{L^2}ds\\ &+\int_0^t\left\|(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\otimes\bar{y}\right\|_{L^2}\left\|\nabla.(y_1-y_2)\right\|_{L^2}\\ &=2\int_0^t\left\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\right\|_{L^2}\left\|\nabla.(y_1-y_2)\right\|_{L^2}ds\\ &\leqslant 2\int_0^t\left\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\right\|_{L^2}\left\|y_1-y_2\right\|_V ds\\ &\leqslant 2\int_0^t\left\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\right\|_{L^2}^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|y_1-y_2\right\|_V^2ds.\end{aligned}$$

Logo

$$\|(y_1-y_2)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_0^t \|y_1-y_2\|^2_V\, ds \leqslant 2\int_0^t \|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2}\, ds$$

Daí, temos

$$\|y_1-y_2\|_{\mathcal{C}(0,T,H)} \leqslant 4\int_0^T \|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2}\, ds \tag{1.7}$$

e

$$\int_0^T \|y_1-y_2\|^2_V\, ds \leqslant 4\int_0^T \|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2}\, ds \tag{1.8}$$

Agora, o nosso objetivo é estimar as integrais que aparecem no segundo membro das desigualdades 1.7 e 1.8. Com efeito, como

$$|\bar{y}_i(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j| \leqslant \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^{N^2}}\, |(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j| \text{ para } j=1,2,...,N\ ,$$

temos

$$\begin{aligned}\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2(\Omega)^N} &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega |\bar{y}_i|^2\, |(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j|^2\, dx \\ &\leqslant C\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega |(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j|^2\, dx\right) \\ &\leqslant C\,\|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}\, \|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{L^2(\Omega)^N}\, .\end{aligned}$$

Somando 1.7 e 1.8 e substituindo na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}\|y_1-y_2\|^2_{C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)} &\leqslant C\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\int_0^T \|(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)(s)\|^2_{L^2(\Omega)^N}\, ds \\ &\leqslant C\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\int_0^T \|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{\mathcal{C}(0,T,H)}\, ds \\ &\leqslant CT\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{\mathcal{C}(0,T,H)} \\ &\leqslant CT\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)}\, ,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|L_T(\tilde{y}_1)-L_T(\tilde{y}_2)\|_{C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)} \leqslant C\sqrt{T}\,\|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|_{C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)} \tag{1.9}$$

Tomando em 1.9 $T=T_0$ suficientemente pequeno, temos que L_{T_0} é uma contração e, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe um único $y\in C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)$ tal que $L_{T_0}(y)=y$.

Denotaremos por y^1 a solução de

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla.g + v1_\omega \text{ em } \Omega \times (0, T_0),\\ \text{div } y = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T_0),\\ y = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T_0),\\ y(0) = y_0 \text{ em } \Omega,\end{array}\right. \tag{1.10}$$

onde $y^1 \in C([0, T_0], H) \cap L^2(0, T_0; V)$ e $\dfrac{\partial y^1}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$. Da mesma maneira que obtivemos a solução do problema 1.10, podemos mostrar que existe solução para o problema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla.g + v1_\omega \text{ em } \Omega \times (0, T_0),\\ \text{div } y = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T_0),\\ y = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T_0),\\ y(0) = y^1(T_0) \text{ em } \Omega.\end{array}\right. \tag{1.11}$$

Denotamos a solução do problema 1.11 denotaremos por $\widehat{y}^2$, onde $\widehat{y}^2 \in C([0, T_0]; H) \cap L^2(0, T_0; V)$ e $\dfrac{\partial \widehat{y}^2}{\partial t} \in L^2(0, T_0; V')$. Agora, definamos y^2 por

$$y^2(x, t) = \begin{cases} y^1(x, t);\ (x, t) \in \Omega \times [0, T_0],\\ \widehat{y}^2(x, t - T_0);\ (x, t) \in \Omega \times [T_0, 2T_0].\end{cases}$$

Podemos verificar que $y^2 \in C([0, 2T_0]; H) \cap L^2(0, 2T_0; V)$, com $\dfrac{\partial y^2}{\partial t} \in L^2(0, 2T_0; V')$, e que y^2 é a única solução de 1.3 com $T = 2T_0$. Prosseguindo dessa maneira, podemos utilizar o Principio de Indução Matemática para provar que existe uma única solução de 1.3, com $T = nT_0$ sendo n qualquer numero natural.

Suponhamos que exista uma única solução y^n de 1.3 para $T = nT_0$, então consideremos o seguinte problema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla.g + v1_\omega \text{ em } \Omega \times (0, T_0),\\ \text{div } y = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T_0),\\ y = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T_0),\\ y(0) = y^n(nT_0) \text{ em } \Omega.\end{array}\right. \tag{1.12}$$

Da mesma maneira como provamos que 1.11 tem uma única solução, conseguimos obter uma única solução de 1.12, a qual denotaremos por $\widehat{y}^{n+1}$, onde

$$\widehat{y}^{n+1} \in C([0, T_0]; H) \cap L^2(0, T_0; V)$$

e

$$\frac{\partial \widehat{y}^{n+1}}{\partial t} \in L^2(0,T_0;V').$$

Assim, definimos y^{n+1} pondo

$$y^{n+1}(x,t) = \begin{cases} y^n(x,t);\ (x,t) \in \Omega \times [0,nT_0], \\ \\ \widehat{y}^{n+1}(x,t-nT_0);\ (x,t) \in \Omega \times [nT_0,(n+1)T_0], \end{cases}$$

que é solução de 1.3 quando $T = (n+1)T_0$. Portanto, pelo Principio de Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$, o problema 1.3 com $T = nT_0$ tem uma única solução $y^n \in C([0,nT_0];H) \cap L^2(0,nT_0;V)$ tal que $\dfrac{\partial y^n}{\partial t} \in L^2(0,nT_0;V')$.
Agora tomemos $\tilde{T} > 0$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitados, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0T_0 > \tilde{T}$. Então, pelo resultado acima sabemos que existe uma única solução y^{n_0} de 1.3, com $T = nT_0$. Devido a isto, tomando $y = y^{n_0}|_{\Omega\times\ [0,T]}$ temos que y é a única solução de 1.3 com $T = \tilde{T}$, e que cumpre $y \in C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;V')$
. □

1.7.2 Existência e unicidade de soluções para o sistema de Boussinesq

Sejam $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e conexo com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular, $y : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$, $\theta : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$, $g : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$, $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ e $\theta_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Consideremos o sistema de Boussinesq

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = f + \theta e_N \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \text{div } y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + (y.\nabla\theta) = g \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0,\ \theta = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0,\ \theta(0) = \theta_0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Introduzimos a notação

$$\tilde{a}(\psi,\phi) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}.\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \nabla\psi.\nabla\phi dx,\ \forall \psi,\phi \in [H_0^1(\Omega)]^N.$$

Definição 1.7.18. *Dizemos que* $(y, \theta) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$ *é uma solução (fraca) do sistema de Boussinesq* 1.13 *quando para todo* $t \in (0, T)$ *temos*

$$\frac{d}{dt}(y(t), w) + a(y(t), w) + b(y(t), y(t), w) = \langle f(t) + \theta(t)e_N, w\rangle, \ \forall w \in V,$$
$$\frac{d}{dt}(\theta(t), \phi) + \tilde{a}(\theta(t), \phi) + \langle y(t).\nabla\theta(t), \phi\rangle = \langle g(t), \phi\rangle, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$
$$u(0) = u_0 \in H$$

e

$$\theta(0) = \theta_0 \in L^2(\Omega)$$

Teorema 1.7.19 (Existência e unicidade do Sistema de Boussinesq, $N = 2$)**.** *Sejam* $N = 2$, $f, g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in H$ *e* $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. *Então existe uma única solução (fraca)* (y, θ) *do sistema de Boussinesq* 1.13 *satisfazendo* $y \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Teorema 1.7.20 (Existência do Sistema de Boussinesq, $N = 3$)**.** *Sejam* $N = 3$, $f, g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in H$ *e* $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. *Então existe uma solução (fraca)* (y, θ) *do sistema de Boussinesq* 1.13, *não necessariamente única satisfazendo* $y \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

1.7.3 Controlabilidade Exata por Trajetórias e Controlabilidade Nula Local

Consideremos o seguinte sistema de Navier-Stokes

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = f + v1_\omega \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ \text{div } y = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0, T), \\ y(0) = y_0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Definição 1.7.21. *Se* $\overline{y}_0 \in L^2(\Omega)^N$, *dizemos que* $(\overline{y}, \overline{p})$ *é uma trajetória do sistema de Navier-Stokes* 1.14 *se satisfaz*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial t} - \Delta \overline{y} + (\overline{y}.\nabla)\overline{y} + \nabla \overline{p} = \overline{f} \ \textit{em } \Omega \times (0, T), \\ \textit{div } \overline{y} = 0 \ \ \textit{em} \ \ \Omega \times (0, T), \\ \overline{y} = 0 \ \ \textit{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ \overline{y}(0) = \overline{y}_0 \ \ \textit{em } \Omega. \end{array}\right. \tag{1.15}$$

Definição 1.7.22. *Dizemos que o sistema de Navier-Stokes* 1.14 *é localmente exatamente controlável por trajetórias no tempo T, se para todo $y_0 \in L^2(\Omega)^N$ e para toda trajetória $(\overline{y}, \overline{p})$, existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $\|y_0 - \overline{y}_0\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \eta$, então existe um controle v tal que a solução $y = y_v$ de* 1.14 *satisfaz $y\,(T) = \overline{y}\,(T)$.*

Definição 1.7.23. *Dizemos que o sistema de Navier-Stokes* 1.14 *é localmente controlável a zero no tempo T, se para todo $y_0 \in L^2(\Omega)^N$, existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $\|y_0\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \eta$, então existe um controle v tal que a solução $y = y_v$ de* 1.14 *satisfaz $y(T) = 0$.*

Consideremos o seguinte sistema de Boussinesq

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}} + \theta e_N \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \text{div } y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + (y.\nabla\theta) = h1_{\mathcal{O}} \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0,\ \theta = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0,\ \theta(0) = \theta_0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}\right. \tag{1.16}$$

Definição 1.7.24. *Se $(\overline{y}_0, \overline{\theta}_0) \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$, dizemos que $\left(\overline{y}, \overline{p}, \overline{\theta}\right)$ é uma trajetória do sistema de Boussinesq* 1.16 *se satisfaz*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial t} - \Delta\overline{y} + (\overline{y}.\nabla)\overline{y} + \nabla\overline{p} = \overline{\theta} e_N \ \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \textit{div } \overline{y} = 0 \ \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} - \Delta\overline{\theta} + (\overline{y}.\nabla\overline{\theta}) = 0 \ \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \overline{y} = 0,\ \overline{\theta} = 0 \ \ \textit{sobre } \ \Gamma \times (0,T), \\ \overline{y}(0) = \overline{y}_0,\ \overline{\theta}(0) = \overline{\theta}_0 \ \textit{em } \Omega. \end{array}\right. \tag{1.17}$$

Definição 1.7.25. *Dizemos que o sistema de Boussinesq* 1.16 *é localmente exatamente controlável por trajetórias no tempo T, se para todo $(y_0, \theta_0) \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ e para toda trajetória $\left(\overline{y}, \overline{p}, \overline{\theta}\right)$, existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $\left\|(y_0, \theta_0) - (\overline{y}_0, \overline{\theta}_0)\right\|_{L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)} \leqslant \eta$, então existem controles v e h tais que a solução $(y, \theta) = (y_{v,h}, \theta_{v,h}$ de* 1.16 *satisfaz $y(T) = \overline{y}(T)$ e $\theta(T) = \overline{\theta}(T)$.*

Definição 1.7.26. *Dizemos que o sistema de Boussinesq* 1.16 *é localmente nulo controlável no tempo T, se para todo $(y_0, \theta_0) \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$, existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: se $\|(y_0, \theta_0)\|_{L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)} \leqslant \eta$, então existem controles v e h tais que a solução $(y, \theta) = (y_{v,h}, \theta_{v,h}$ de* 1.16 *satisfaz $y(T) = 0$ e $\theta(T) = 0$.*

Capítulo 2

Controlabilidade Local do Sistema de Navier-Stokes

Consideremos as seguintes notações:

Ω um conjunto aberto, conexo, limitado bem regular do $\mathbb{R}^N$, Γ a fronteira do Ω, $\nu = \nu(x)$ a normal exterior unitária no ponto $x \in \Gamma$.

Consideremos o sistema de Navier-Stokes em forma vetorial

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = f + v1_\omega \;\; \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \text{div } y = 0 \;\; \text{em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \quad \text{sobre } \; \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0 \quad \text{em } \; \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

no qual atua o controle v. Neste sistema,

$y : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ é o campo velocidade do fluido, $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ é a pressão do fluido, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ é uma força externa, $y_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ é o dado inicial, ω é um conjunto compactamente incluído em Ω ($\omega \subset\subset \Omega$).

Nosso problema consiste em provar que o sistema anterior é localmente exatamente controlável por trajetórias, nos moldes da definição 1.7.22; isto é, seja $(\overline{y}, \overline{p})$ uma trajetória do sistema 2.1 que é uma solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial t} - \Delta \overline{y} + (\overline{y}.\nabla)\overline{y} + \nabla \overline{p} = 0 \;\; \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div \overline{y} = 0 \;\; \text{em } \; \Omega \times (0,T) \\ \overline{y} = 0 \;\; \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \overline{y}(0) = \overline{y}_0 \;\; \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{2.2}$$

com $\overline{y}_0 \in X$, onde X é um espaço de Banach.
Para todo $y_0 \in X$, existe $\eta > 0$ tal que se $\|y_0 - \overline{y}_0\|_X \leqslant \eta$ podemos achar um controle v tal que $y(T) = \overline{y}(T)$.

2.1 Resultados e estratégias

Definamos os espaços

$$H = \left\{ y \in \left(L^2(\Omega)\right)^N, \text{ div } y = 0 \text{ em } \Omega, \ y.\nu = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \right\} \tag{2.1.3}$$

e

$$V = \left\{ y \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N, \ divy = 0 \text{ em } \Omega \right\}. \tag{2.1.4}$$

Denotaremos por Q e Q_ω os cilindros

$$Q = \Omega \times (0,T), \ Q_\omega = \omega \times (0,T)$$

e por Σ à fronteira cilíndrica

$$\Sigma = \Gamma \times (0,T).$$

Provaremos o resultado de controlabilidade local exata por trajetórias seguinte:

Teorema 2.1.1. *Sejam ω um subconjunto aberto não vazio de Ω e $T > 0$. Suponhamos que $\overline{y} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(Q)^N$ seja uma solução de* 2.2. *Então existe $\eta > 0$ tal que se $\|y_0 - \overline{y}_0\|_{L^4(\Omega)^N} \leqslant \eta$, podemos encontrar um controle $v \in L^2(Q_\omega)^N$ associado a uma solução y de* 2.1 *que satisfaz $y(T) = \overline{y}(T)$.*

Para provar o teorema acima, consideremos a seguinte mudança de variáveis:

$$z = y - \overline{y}, \ q = p - \overline{p} \text{ e } z_0 = y_0 - \overline{y}_0.$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \overline{y}}{\partial t},$$

$$\Delta z = \Delta y - \Delta \overline{y}$$

e

$$\nabla q = \nabla p - \nabla \overline{p}.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\nabla.(u \otimes v) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i v_j) \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j + u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j})e_i + \sum_{i=1}^{N} (u_i \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) e_i \\
&= (v.\nabla)u + (div\ v)u
\end{aligned}
$$

e como div $y = 0$, tem-se que:

$$\nabla.(y \otimes y) = (y.\nabla)y$$

e

$$\nabla.(\overline{y} \otimes \overline{y}) = (\overline{y}.\nabla)\overline{y}.$$

Dai:

$$
\begin{aligned}
(y.\nabla)y - (\overline{y}.\nabla)\overline{y} &= \nabla.(y \otimes y) - \nabla.(\overline{y} \otimes \overline{y}) \\
&= \nabla.(z + \overline{y} \otimes z + \overline{y}) - \nabla.(\overline{y} \otimes \overline{y}) \\
&= \nabla.(z \otimes z) + \nabla.(z \otimes \overline{y}) + \nabla.(\overline{y} \otimes z) + \nabla.(\overline{y} \otimes \overline{y}) - \nabla.(\overline{y} \otimes \overline{y}) \\
&= \nabla.(z \otimes z) + \nabla.(z \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z),
\end{aligned}
$$

ou seja, z satisfaz

$$
\left|
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla.(z \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z) + \nabla.(z \otimes z) + \nabla q = f + v1_\omega \quad \text{em } Q, \\
\text{div } z = 0 \quad \text{em } Q, \\
z = 0 \ \ \text{sobre } \Sigma, \\
z(0) = z_0 \quad \text{em } \Omega.
\end{array}
\right.
$$

Assim para demonstrar o teorema 2.1.1, devemos encontrar um controle v tal que:

$$z(T) = 0,$$

já que

$$z(T) = y(T) - \overline{y}(T)$$

Assim, nosso problema consiste em estudar a controlabilidade local nula do sistema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial t}-\Delta z+\nabla.(z\otimes\overline{y}+\overline{y}\otimes z)+\nabla.(z\otimes z)+\nabla q=\nabla.g+v1_\omega\quad \text{em } Q,\\ \text{div } z=0\quad \text{em } Q,\\ z=0\quad \text{sobre } \Sigma,\\ z(0)=z_0\quad \text{em } \Omega,\end{array}\right.$$

para um tensor g e um dado inicial z_0.

2.2 O problema de controle linearizado

Dados $g=(g_{ij})\in[L^2(Q)]^{N^2}$, $\overline{y}\in[L^\infty(Q)]^N$ e $z_0\in H$ consideremos para cada $v\in[L^2(Q_\omega)]^N$ a solucao $z=z_v$ do seguinte problema linear

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial t}-\Delta z+\nabla.(z\otimes\overline{y}+\overline{y}\otimes z)+\nabla q=\nabla.g+v1_\omega\quad \text{em } Q,\\ \text{div } z=0\quad \text{em } Q,\\ z=0\quad \text{sobre } \Sigma,\\ z(0)=z_0\quad \text{em } \Omega.\end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

Sabemos que $z=z(v)\in C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)$ (Lema 1.7.17).
Agora devemos encontrar um controle $v\in L^2(Q_\omega)^N$ tal que $z(T)=0$.

2.2.1 Método da penalização

Fixado $\epsilon>0$, queremos determinar

$$\underset{v\in[L^2(Q_\omega)]^N}{min} J_\epsilon(v),$$

onde $J_\epsilon:[L^2(Q_\omega)]^N\to\mathbb{R}$ é dado por

$$J_\epsilon(v)=\frac{1}{2\epsilon}|z_v(T)|_H^2+\frac{1}{2}\int_{Q_\omega}|v|^2dxdt. \tag{2.2.2}$$

Vejamos que J_ϵ é estritamente convexo. Com efeito, sejam $v_1,v_2\in L^2(Q_\omega)^N,\lambda\in(0,1)$. Assim,

$$J_\epsilon(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)=\frac{1}{2\epsilon}|z_{\lambda v_1+(1-\lambda)v_2}(T)|_H^2+\frac{1}{2}\int_{Q_\omega}|\lambda v_1+(1-\lambda)v_2|^2dxdt,$$

onde z_{v_1} e z_{v_2} são soluções dos sistemas

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z_{v_1}}{\partial t} - \Delta z_{v_1} + \nabla.(z_{v_1} \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z_{v_1}) + \nabla q = \nabla.g + v_1 1_\omega \quad \text{em } Q, \\ \text{div } z_{v_1} = 0 \ \text{ em } Q, \\ z_{v_1} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ z_{v_1}(0) = z_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.2.3}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z_{v_2}}{\partial t} - \Delta z_{v_2} + \nabla.(z_{v_2} \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z_{v_2}) + \nabla q = \nabla.g + v_2 1_\omega \ \text{ em } Q, \\ \text{div } z_{v_2} = 0 \quad \text{em } Q, \\ z_{v_2} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z_{v_2}(0) = z_0 \ \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.2.4}$$

respectivamente. Multiplicando o sistema em 2.2.3 por λ e o sistema 2.2.4 por $1-\lambda$, temos:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial(\lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2})}{\partial t} - \Delta\lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2} + \nabla.(\lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2} \otimes \overline{y} \\ +\overline{y} \otimes \lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2}) + \nabla q = \nabla.g + \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 1_\omega \quad \text{em } Q, \\ div z_{\lambda z_{v_1}+(1-\lambda)z_{v_2}} = 0 \ \text{ em } Q, \\ \lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ (\lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2})(0) = z_0 \ \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

logo pela unicidade da solução $z_{\lambda v_1+(1-\lambda)v_2} = \lambda z_{v_1} + (1-\lambda)z_{v_2}$

Logo

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) &= \frac{1}{2\epsilon}|z_{\lambda v_1+(1-\lambda)v_2}(T)|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2\epsilon}|\lambda z_{v_1}(T) + (1-\lambda)z_{v_2}(T)|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2|^2 dxdt \\ &\leqslant \frac{1}{2\epsilon}(\lambda|z_{v_1}(T)|_H + (1-\lambda)|z_{v_2}(T)|_H)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} (\lambda|v_1| + (1-\lambda)|v_2|)^2 dxdt \\ &< \frac{1}{2\epsilon}(\lambda|z_{v_1}(T)|_H^2 + (1-\lambda)|z_{v_2}(T)|_H^2) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} (\lambda|v_1|^2 + (1-\lambda)|v_2|^2) dxdt \\ &= \lambda(\frac{1}{2\epsilon}|z_{v_1}(T)|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |v_1|^2 dxdt) \\ &+ (1-\lambda)(\frac{1}{2\epsilon}|z_{v_2}(T)|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |v_2|^2 dxdt) \\ &= \lambda J_\epsilon(v_1) + (1-\lambda)J_\epsilon(v_2), \end{aligned}$$

provando que J_ϵ é estritamente convexo.

Agora, vejamos que J_ϵ é coercivo. Com efeito, seja $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$.

Como

$$|J_\epsilon(v)|^2 \geqslant \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |v|^2 dxdt,$$

concluímos que $\lim_{|v|\to\infty} J_\epsilon(v) = +\infty$.

Agora, mostremos que J_ϵ é diferenciável. Com efeito, para cada $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$, definamos $z_v = \widehat{z} + \overline{z}_v$ onde

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \widehat{z}}{\partial t} - \Delta \widehat{z} + \nabla.(\widehat{z} \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes \widehat{z}) + \nabla q = \nabla.g \quad \text{em } Q, \\ \text{div } \widehat{z} = 0 \quad \text{em } Q, \\ \widehat{z} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \widehat{z}(0) = z_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right.$$

e

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{z}_v}{\partial t} - \Delta \overline{z}_v + \nabla.(\overline{z}_v \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes \overline{z}_v) + \nabla q = v1_\omega \quad \text{em } Q, \\ \text{div } \overline{z}_v = 0 \quad \text{em } Q, \\ \overline{z}_v = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \overline{z}_v(0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{array}\right.$$

Agora, seja

$$S : [L^2(Q_\omega)]^N \to [L^2(\Omega)]^N$$
$$v \mapsto S(v) = \overline{z}_v(T).$$

Como S é linear, logo é diferenciável. Mais ainda, $z_v(T) = \widehat{z}(T) + S(v)$.

Assim, temos que $J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon}|\widehat{z}(T)+S(v)|_H^2 + \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(Q_\omega)}$ e, portanto, J_ϵ é diferenciável.

Como

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon}(\widehat{z}(T) + S(v), \widehat{z}(T) + S(v))_H + \frac{1}{2}(v,v)_{L^2(Q_\omega)},$$

dado $w \in [L^2(Q_\omega)]^N$, temos

$$\begin{aligned}
DJ_\epsilon(v)(w) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}(J_\epsilon(v+\lambda w))|_{\lambda=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{2\epsilon}(\widehat{z}(T)+S(v+\lambda w),\widehat{z}(T)\right. \\
&\left. +S(v+\lambda w))_H + \frac{1}{2}(v+\lambda w, v+\lambda w)_{L^2(Q_\omega)^N}\right)|_{\lambda=0} \\
&= \left[\frac{1}{2\epsilon}(2(S'(v+\lambda w)(w),\widehat{z}(T)+S(v+\lambda w))_H)\right. \\
&\left. +\frac{1}{2}(2(w,v+\lambda w)_{L^2(Q_\omega)^N})\right]|_{\lambda=0} \\
&= \left[\frac{1}{\epsilon}(S(w),\widehat{z}(T)+S(v+\lambda w))_H + (w,v+\lambda w)_{L^2(Q_\omega)^N}\right]\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{\epsilon}(S(w),\widehat{z}(T)+S(v))_H + (w,v)_{L^2(Q_\omega)^N}
\end{aligned}$$

Como J_ϵ é estritamente convexa, coerciva e diferenciável, pelo teorema 1.7.8, existe um único $v_\epsilon \in [L^2(Q_\omega)]^N$ satisfazendo

$$DJ_\epsilon(v_\epsilon)(w) = 0, \forall w \in L^2(Q_\omega)^N,$$

denotando $z_\epsilon = z_{v_\epsilon}$ temos

$$\frac{1}{\epsilon}(\overline{z}_w(T), z_\epsilon(T))_H + (w, v_\epsilon)_{L^2(Q_\omega)^N} = 0, \forall w \in L^2(Q_\omega)^N \tag{2.2.5}$$

Introduzimos o estado adjunto (φ, π), que satisfaz

$$\left|\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi - \overline{y}D\varphi + \nabla\pi = 0 \quad \text{em} \;\; Q, \\
\text{div}\;\varphi = 0 \quad \text{em} \;\; Q, \\
\varphi = 0 \quad \text{sobre} \;\; \Sigma, \\
\varphi(T) = \frac{1}{\epsilon}z_\epsilon(T) \quad \text{em} \;\; \Omega,
\end{array}\right. \tag{2.2.6}$$

onde $D\varphi = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{ij}$.
Multiplicando 2.2.6 por $\overline{z}_w$ e integrando sobre Ω de 0 até T, obtemos

$$-\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\overline{z}_w dxdt - \int_0^T\int_\Omega(\Delta\varphi)\overline{z}_w dxdt - \int_0^T\int_\Omega(\overline{y}D\varphi)\overline{z}_w dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega(\nabla\pi)\overline{z}_w dxdt = 0$$

$$\Longrightarrow -\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial t}\overline{z}_w dxdt - \int_0^T\int_\Omega \varphi(\Delta\overline{z}_w)dxdt - \int_0^T\int_\Omega(\overline{y}D\varphi)\overline{z}_w dxdt = 0$$

$$\Longrightarrow -\int_\Omega \left[\varphi(T)\overline{z}_w(T) - \varphi(0)\overline{z}_w(0) - \int_0^T \varphi\frac{\partial \overline{z}_w}{\partial t}dt\right]dx - \int_0^T\int_\Omega \varphi(\Delta\overline{z}_w)dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega \overline{y}D\varphi\overline{z}_w dxdt = 0$$
$$\Longrightarrow -(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi\frac{\partial \overline{z}_w}{\partial t}dxdt - \int_0^T\int_\Omega \varphi(\Delta\overline{z}_w)dxdt - \int_0^T\int_\Omega \overline{y}D\varphi\overline{z}_w dxdt = 0$$
$$\Longrightarrow -(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi\left[\frac{\partial \overline{z}_w}{\partial t} - (\Delta\overline{z}_w)\right]dxdt - \int_0^T\int_\Omega \overline{y}D\varphi\overline{z}_w dxdt = 0.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \overline{y}D\varphi\overline{z}_w dxdt &= -\sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \overline{y}_j(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i})\overline{z}_{w_i}dxdt \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \overline{y}_j(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\overline{z}_{w_i}dxdt - \sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \overline{y}_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i})\overline{z}_{w_i}dxdt \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \varphi_i(\frac{\partial\overline{y}_j\overline{z}_{w_i}}{\partial x_j}dxdt + \sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \varphi_j(\frac{\partial\overline{y}_j\overline{z}_{w_i}}{\partial x_i}dxdt \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \varphi_i(\frac{\partial\overline{z}_{w_i}\overline{y}_j}{\partial x_j}dxdt + \sum_{i,j=1}^N \int_0^T\int_\Omega \varphi_i(\frac{\partial\overline{y}_i\overline{z}_{w_j}}{\partial x_j}dxdt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \varphi[\nabla.(\overline{z}_w\otimes\overline{y})]dxdt + \int_0^T\int_\Omega \varphi[\nabla.(\overline{y}\otimes\overline{z}_w)]dxdt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \varphi[\nabla.(\overline{z}_w\otimes\overline{y} + \overline{y}\otimes\overline{z}_w)]dxdt,
\end{aligned}$$

temos

$$-(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi\left[\frac{\partial \overline{z}_w}{\partial t} - (\Delta\overline{z}_w)\right]dxdt + \int_0^T\int_\Omega \varphi[\nabla.(\overline{z}_w\otimes\overline{y} + \overline{y}\otimes\overline{z}_w)]dxdt = 0$$
$$\Longrightarrow -(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi\left[\frac{\partial \overline{z}_w}{\partial t} - (\Delta\overline{z}_w) + \nabla.(\overline{z}_w\otimes\overline{y} + \overline{y}\otimes\overline{z}_w)\right]dxdt = 0$$
$$\Longrightarrow -(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi[w1_\omega - \nabla q]dxdt = 0$$
$$\Longrightarrow -(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi[w1_\omega]dxdt - \int_0^T\int_\Omega \varphi\nabla q dxdt = 0$$
$$\Longrightarrow -(\varphi(T),\overline{z}_w(T))_H + \int_0^T\int_\Omega \varphi[w1_\omega]dxdt = 0$$

$$-\frac{1}{\epsilon}(z_\epsilon(T),\overline{z}_w(T))_H + (\varphi,w)_{L^2(\omega\times(0,T))^N} = 0,\ \forall w\in L^2(\omega\times(0,T))^N \qquad (2.2.7)$$

Somando 2.2.5 e 2.2.7, temos

$$(v_\epsilon + \varphi, w)_{L^2(\omega\times(0,T))^N} = 0, \forall w\in L^2(\omega\times(0,T))^N,$$

o que implica

$$v_\epsilon + \varphi = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \tag{2.2.8}$$

Agora multiplicando 2.2.6 por z_ϵ e integrando sobre Ω e de 0 até T, obtemos de maneira análoga

$$-(\varphi(T), z_\epsilon(T))_H + (\varphi(0), z_\epsilon(0))_H + \int_Q \varphi \left[\frac{\partial z_\epsilon}{\partial t} - (\Delta z_\epsilon) + \nabla.(z_\epsilon \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z_\epsilon)\right] dxdt = 0$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{\epsilon}|z_\epsilon(T)|_H^2 + (\varphi(0), z_0)_H + \int_Q \varphi[\nabla.g + v_\epsilon 1_\omega - \nabla q]dxdt = 0$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{\epsilon}|z_\epsilon(T)|_H^2 + (\varphi(0), z_0)_H + \int_Q \varphi(\nabla.g)dxdt + \int_{\omega\times(0,T)} \varphi v_\epsilon dxdt = 0.$$

Como

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(\nabla.g)dxdt = \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j}\varphi_i dxdt = -\sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} g_{ij} dxdt,$$

vem que

$$-\frac{1}{\epsilon}|z_\epsilon(T)|_H^2 + (\varphi(0), z_0)_H - \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} g_{ij} dxdt + \int_{\omega\times(0,T)} \varphi v_\epsilon dxdt = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\epsilon}|z_\epsilon(T)|_H^2 - \int_{\omega\times(0,T)} v_\epsilon \varphi dxdt = -\sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} g_{ij} dxdt + (\varphi(0), z_0)_H.$$

Na seção 2.2.2, provaremos que φ satisfaz a desigualdade de observabilidade

$$|\varphi(0)|_H^2 + \int_Q \rho^2 |\nabla\varphi|^2 dxdt \leqslant C \int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt. \tag{2.2.9}$$

Assumindo esta desigualdade e que g satisfaz $\int_Q \frac{1}{\rho^2}|g|^2 dxdt < +\infty$, obtemos a partir de 2.2.8 e 2.2.9 que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}|z_\epsilon(T)|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 dxdt &\leqslant |\varphi(0)|_H |z_0|_H - \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_\Omega \rho \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} g_{ij} dxdt \\
&\leqslant |\varphi(0)|_H |z_0|_H + \left(\int_Q \rho^2 |\nabla\varphi|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \frac{1}{\rho^2}|g|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (|\varphi(0)|_H^2 + \int_Q \rho^2 |\nabla\varphi|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} (|z_0|_H^2 + \int_Q \frac{1}{\rho^2}|g|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (C \int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} (|z_0|_H^2 + \int_Q \frac{1}{\rho^2}|g|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt + C(|z_0|_H^2 + \int_Q \frac{1}{\rho^2}|g|^2 dxdt).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{\epsilon}|z_\epsilon(T)|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{\omega\times(0,T)} |v_\epsilon|^2 dxdt \leqslant C \quad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$v_\epsilon \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\omega \times (0,T))^N$$

e

$$z_\epsilon = z(v_\epsilon) \rightharpoonup z = z(v) \text{ em } C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V)$$

Logo

$$z_\epsilon(T) \rightharpoonup z(T) \quad \text{em H},$$

também

$$z_\epsilon(T) \to 0 \quad \text{em H}.$$

Assim,

$$z(T) = 0.$$

2.2.2 Desigualdade de Observabilidade

A única maneira conhecida para obter tal desigualdade é usando a estimativa global de Carleman para o sistema de Stokes.

Consideremos o sistema de Stokes:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = h \quad \text{em} \;\; Q, \\ \text{div } z = 0 \quad \text{em} \;\; Q, \\ z = 0 \quad \text{sobre} \;\; \Sigma, \\ z(0) = z_0 \quad \text{em} \;\; \Omega, \end{array}\right. \tag{2.2.10}$$

com $z_0 \in V$ e $h \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$.

Pela proposição 1.7.16,este sistema 2.2.10 tem uma solução z satisfazendo

$$z \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N), \frac{\partial z}{\partial t} \in (L^2(Q))^N \text{ e } q \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

Definimos $w = rot\ z = \nabla \times z$. Assim temos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial (rot\ z)}{\partial t} = rot\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

$$
\begin{aligned}
rot(\Delta z) &= rot(\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3) \\
&= \left(\frac{\partial \Delta z_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Delta z_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \Delta z_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Delta z_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \Delta z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta z_1}{\partial x_2} \right) \\
&= \left(\Delta \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_2} \right) - \Delta \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_3} \right), \Delta \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_3} \right) - \Delta \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_1} \right), \Delta \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1} \right) - \Delta \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right) \right) \\
&= \left(\Delta \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2}{\partial x_3} \right), \Delta \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{\partial z_3}{\partial x_1} \right), \Delta \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right) \right) \\
&= \Delta(rot\ z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
rot(\nabla q) &= \nabla \times (\nabla q) = \nabla \times \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \frac{\partial q}{\partial x_3} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
rot(rot\ z) &= rot \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2}{\partial x_3}, \frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{\partial z_3}{\partial x_1}, \frac{\partial z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{\partial z_3}{\partial x_1} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2}{\partial x_3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right), \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{\partial z_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2}{\partial x_3} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_3} + \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 z_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z_3}{\partial x_2^2} \right).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\text{div } z = \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_3}{\partial x_3} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
rot(rot\ z) &= \left(-\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}, -\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2}, -\frac{\partial^2 z_3}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 z_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z_3}{\partial x_2^2} \right) \\
&= -\Delta z
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
rot\ h = rot \left(\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q \right) = \frac{\partial rot z}{\partial t} - \Delta rot\ z + rot \nabla q
$$

e assim obtemos o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = rot\ h \quad \text{em} \ \ Q, \\ -\Delta z(t) = rot(w(t)) \ \ \text{em} \ \ \Omega \ \ \text{quase sempre em} \ \ (0,T), \\ z(t) = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma \ \ \text{quase sempre em} \ \ (0,T). \end{array}\right. \tag{2.2.11}$$

Sobre Γ, como $z|_\Gamma = 0$, temos que $\nabla z = (\nabla z.\nu)\nu$. Logo $w|_\Gamma$ pode ser expressado em termos de $(\nabla z.\nu)$.

Agora definiremos alguns pesos convenientes.

Pelo lema (de Fursikov) 1.7.7, existe uma função $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\psi = 0$ sobre Γ, $\psi(x) > 0$ em Ω, $|\nabla \psi| > c_0 > 0$ em $\Omega \backslash \overline{\omega}$.

Definimos $l \in C^\infty([0,T])$ tal que:

$$l(t) = t \ \ \text{em} \ \ \left[0, \frac{T}{4}\right], l(t) = T - t \ \ \text{em} \ \ \left[\frac{3T}{4}, T\right] \ \text{e} \ l(t) \geqslant \frac{T}{4} \ \ \text{em} \ \ \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right].$$

Agora definimos

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x)+m_1)}}{l^4(t)}$$

e

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}$$

onde $\lambda \geqslant 1$ e $m_1 \leqslant m_2$. Nesse caso,

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| \leqslant C\xi^{\frac{5}{4}}, \ \left|\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right| \leqslant C\xi^{\frac{3}{2}}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| &= \left|\frac{-4(e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)})l'(t)}{l^5(t)}\right| \\ &\leqslant C\frac{(-e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} + e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)})}{l^5(t)} \\ &\leqslant C\left(\frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^5(t)}\right) \\ &\leqslant C\left(\frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2 + \frac{5}{4}(m_1 + \psi(x)))}}{l^5(t)}\right) \\ &\leqslant C\left(\frac{e^{\frac{5}{4}\lambda(m_1+\psi(x))}}{l^5(t)}\right) = C\xi^{\frac{5}{4}}(t). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right| &= \left|\frac{-4(e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2)})l''(t)}{l^5(t)} + \frac{20(e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2)})(l'(t))^2}{l^6(t)}\right| \\
&\leqslant C\frac{(-e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} + e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2)})}{l^6(t)} \\
&\leqslant C\left(\frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2)}}{l^6(t)}\right) \\
&\leqslant C\left(\frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2+\frac{3}{2}(m_1+\psi(x)))}}{l^6(t)}\right) \\
&\leqslant C\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\lambda(m_1+\psi(x))}}{l^6(t)}\right) = C\xi^{\frac{3}{2}}(t)
\end{aligned}$$

Consideremos o espaço

$$H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma) = H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\Gamma)) \cap L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

Vejamos alguns resultados que serão utilizados:

No próximo resultado, apresentaremos a estimativa global de Carleman para a equação parabólica não homogénea em 2.2.11.

Teorema 2.2.1. *Existem $\lambda_0 \geqslant 1$, $s_0 \geqslant 0$ e $C > 0$ tais que, para cada $\lambda \geqslant \lambda_0$ e cada $s \geqslant s_0$, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_Q \frac{e^{2s\alpha}}{\xi}|\nabla w|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q \xi e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt \leqslant C(s^{-\frac{1}{2}}\|\xi^{-\frac{1}{4}}e^{s\alpha}w\|^2_{H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)} \\
+ \int_Q e^{2s\alpha}|h|^2 dxdt + s\lambda^2\int_{Q_\omega} \xi e^{s\alpha}|w|^2 dxdt), \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

onde w é uma solução de 2.2.11.

Agora como z é solução da equação elíptica em 2.2.11, usaremos a estimativa para equações elípticas com o seguinte peso

$$\beta(x) = e^{\lambda(\xi(x)+m_1)}$$

Teorema 2.2.2. *Existem $\tau_0 \geqslant 0$, $\lambda_0 \geqslant 0$ e $C > 0$ tal que para cada $\tau \geqslant \tau_0$ e cada $\lambda \geqslant \lambda_0$ a função $z(t)$ satisfaz para quase sempre $t \in (0,T)$*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{2\tau\beta}\left(|\nabla z(t)|^2 + \tau^2\lambda^2\beta^2|z(t)|^2\right) dx \leqslant C\Bigg(\tau\int_\Omega \beta e^{2\tau\beta}|w(t)|^2 dx \\
+ \tau^2\lambda^2\int_{Q_\omega} \beta^2 e^{2\tau\beta}|z(t)|^2 dx\Bigg) \qquad (2.2.13)
\end{aligned}$$

onde z é uma solução da equação elíptica em 2.2.11.

Sendo $\tau = \frac{s}{l^4(t)}$ temos

$$\tau\beta = \frac{s}{l^4(t)}\beta = s\xi \Rightarrow \tau^2\beta^2 = s^2\xi^2,$$

Como

$$\alpha = \xi - \frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^4(t)},$$

então

$$e^{2s\alpha} = e^{2s\xi}e^{-2s\frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2)}}{l^4(t)}} = e^{2s\xi}e^{-2s\theta} = e^{2\tau\beta}e^{-2s\theta},$$

onde

$$\theta = \frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}.$$

Multiplicando a equação 2.2.13 por $\lambda^2 e^{-2s\theta}$ e integrando esta equação de 0 até T, temos

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\lambda^2|\nabla z|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|z|^2\right) \leqslant C(s\lambda^2\int_Q \xi e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + s^2\lambda^4\int_{Q_\omega}\xi^2 e^{2s\alpha}|z|^2 dxdt\Big) \tag{2.2.14}$$

Somando 2.2.12 e 2.2.14, obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi|w|^2 + \lambda^2|\nabla z|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|z|^2\right)dxdt \leqslant \\ C\left(s^{-\frac{1}{2}}\left\|\xi^{-\frac{1}{4}}e^{s\alpha}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)} + \int_Q e^{2s\alpha}|h|^2 dxdt\right) + \\ C\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(s\lambda^2\xi|w|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|z|^2)dxdt\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

A ideia agora é limitar o termo da fronteira com termos do primeiro membro. Para isso definimos

$$\breve{\alpha}(t) := \min_{x\in\Omega}\alpha(x,t) = \alpha|_\Gamma(t) = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}$$

e

$$\breve{\xi}(t) := \min_{x\in\Omega}\xi(x,t) = \xi|_\Gamma(t) = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^4(t)}$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$u(x,t) = \breve{\xi}(t)^{-\frac{1}{4}}e^{s\breve{\alpha}(t)}z(x,t)$$

e

$$r(x,t) = \breve{\xi}(t)^{-\frac{1}{4}}e^{s\breve{\alpha}(t)}q(x,t),$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{4}\breve{\xi}^{-\frac{5}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z + s\breve{\alpha}'\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z + \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\frac{\partial z}{\partial t}, \tag{2.2.16}$$

$$\Delta u = \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\Delta z, \tag{2.2.17}$$

$$\nabla r = \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\nabla q, \tag{2.2.18}$$

$$\text{div } u = \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\text{div } z = 0, \tag{2.2.19}$$

$$u|_\Sigma = \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}} z|_\Sigma = 0 \tag{2.2.20}$$

e

$$|u(0)| = |\lim_{t\to 0} u(t)| = |\lim_{t\to 0}\breve{\xi}(t)^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}(t)} z(t)| \leqslant C\lim_{t\to 0}|e^{s\breve{\alpha}(t)}||z(t)| = C|z_0|\lim_{t\to 0}|e^{s\breve{\alpha}(t)}| = 0. \tag{2.2.21}$$

Utilizando as relações (2.2.16) – (2.2.21) obtemos, a partir do sistema 2.2.10, o sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r = \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}} h + s\breve{\alpha}'\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z - \frac{1}{4}\breve{\xi}^{-\frac{5}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z \quad \text{em } \; Q, \\ \text{div } u = 0 \quad \text{em } \; Q, \\ u|_\Sigma = 0 \quad \text{em } \; \Sigma, \\ u(0) = 0 \quad \text{em } \; \Omega. \end{array}\right. \tag{2.2.22}$$

Sabemos que $z \in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N)$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} \in (L^2(Q))^N$ e $h \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)$. Utilizando estes fatos, mostraremos que $u \in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in (L^2(Q))^N$ e $u \in H^1(0,T;(L^2(\Omega))^N)$. De fato,

- $u \in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N)$; realmente,

$$\begin{aligned} \int_0^T |u(t)|^2_{H^2(\Omega)} dt = \int_0^T |\breve{\xi}(t)^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}(t)} z(t)|^2_{H^2(\Omega)} dt \leqslant C\int_0^T |z(t)|^2_{H^2(\Omega)} dt \\ \leqslant C|z(t)|^2_{L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N)} < +\infty. \end{aligned}$$

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in (L^2(Q))^N$; realmente,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt &= \int_0^T \left|-\frac{1}{4}\breve{\xi}^{-\frac{5}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z + s\breve{\alpha}'\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z + \breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leqslant \int_0^T \left(\left|-\frac{1}{4}\breve{\xi}^{-\frac{5}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z + s\breve{\alpha}'\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{L^2(\Omega)}\right)^2 dt \\ &\leqslant 2\int_0^T \left|-\frac{1}{4}\breve{\xi}^{-\frac{5}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z + s\breve{\alpha}'\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}}\breve{\xi}' e^{s\breve{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + 2\int_0^T \left|\breve{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\breve{\alpha}}\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Como

$$\check{\xi}' = -\frac{4\check{\xi}}{l} = -\frac{4e^{\lambda m_1}}{l^5},\ \check{\xi}^{-\frac{5}{4}} = l^5 e^{-\frac{5}{4}\lambda m_1}$$

e

$$|\alpha'| \leqslant C|\xi^{\frac{5}{4}}| \Rightarrow |\check{\alpha}'| \leqslant C|\check{\xi}^{\frac{5}{4}}|,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt &\leqslant 2\int_0^T \left|e^{-\frac{\lambda m_1}{4}} e^{s\check{\alpha}} z + sC\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + C\int_0^T \left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\int_0^T \left|e^{s\check{\alpha}} z + s\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + C\int_0^T \left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\int_0^T \left|s\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + C\int_0^T \left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\left(\int_0^T |z|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt\right) < +\infty
\end{aligned}$$

- $u \in H^1(0,T;(L^2(\Omega))^N)$: Como $u \in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N) \hookrightarrow L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in (L^2(Q))^N$, obtemos o resultado.

  Lembrando que

$$H^{1,2}(Q) = H^1(0,T;(L^2(\Omega))^N) \cap L^2(0,T;(H^2(\Omega))^N)$$

temos

$$u \in H^{1,2}(Q).$$

Seja

$$f = \check{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\check{\alpha}} h + s\check{\alpha}' \check{\xi}^{-\frac{1}{4}} \check{\xi}' e^{s\check{\alpha}} z - \frac{1}{4}\check{\xi}^{-\frac{5}{4}} \check{\xi}' e^{s\check{\alpha}} z$$

e vejamos que $f \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)$; de fato, como $h, z \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T |f|^2_{L^2(\Omega)} dt &\leqslant 2\int_0^T \left|e^{-\frac{\lambda m_1}{4}} e^{s\check{\alpha}} z + sC\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + 2\int_0^T \left|\check{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\int_0^T \left|e^{s\check{\alpha}} z + s\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + C\int_0^T \left|e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\int_0^T \left|s\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + C\int_0^T \left|e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\left(\int_0^T |z|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T |h|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt < +\infty
\end{aligned}$$

Da regularidade do sistema de Stokes temos

$$\|u\|^2_{H^{1,2}(Q)} \leqslant |u_0|^2_{C([0,T];V)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)} = \|f\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)}$$

do anterior resulta que

$$\|u\|^2_{H^{1,2}(Q)} \leqslant C(s^2 \left|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(Q)} + \left|e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(Q)})$$

Pelo teorema do traço (ver [20]), a aplicação

$$\gamma_1 : H^{1,2}(Q) \longrightarrow H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)$$
$$u \mapsto \gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

é contínua, isto é

$$\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|^2_{H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant C\|u\|^2_{H^{1,2}(Q)}$$

sabemos também que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \check{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial z}{\partial \nu}$$

obtemos assim

$$\|\check{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial z}{\partial \nu}\|^2_{H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant C(s^2 \left|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(Q)} + \left|e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(Q)}).$$

Logo,

$$s^{-\frac{1}{2}} \|\check{\xi}^{-\frac{1}{4}} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial z}{\partial \nu}\|^2_{H^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant C(s^{\frac{3}{2}} \left|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(Q)} + s^{-\frac{1}{2}} \left|e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(Q)}) \qquad (2.2.23)$$

De 2.2.15 e 2.2.23 temos o seguinte

$$\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla z|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |z|^2 \right) dxdt \leqslant C \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt$$
$$+ \ C \left(s^{\frac{3}{2}} \left|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} z\right|^2_{L^2(Q)} + s^{-\frac{1}{2}} \left|e^{s\check{\alpha}} h\right|^2_{L^2(Q)} \right) + C \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \left(s\lambda^2 \xi |w|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |z|^2 \right) dxdt$$
$$\leqslant C \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt + C \int_Q s^{\frac{3}{2}} \xi^2 e^{2s\alpha} |z|^2 dxdt + C \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\lambda^2 \xi |w|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |z|^2 dxdt.$$

Como

$$s \geqslant s_0 \geqslant C^2 \ \text{ e } \ \lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1 \ \Rightarrow \ C s^{\frac{3}{2}} \leqslant s^2 \lambda^4,$$

temos

$$\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla z|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |z|^2 \right) dxdt \leqslant$$
$$C \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt + C \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \left(s\lambda^2 \xi |w|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |z|^2 \right) dxdt \qquad (2.2.24)$$

Agora, a ideia é estimar o termo local $s\lambda^2 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\xi|w|^2 dxdt$ em termos das integrais do primeiro membro de (2.2.24).

Substituindo ω por $\omega_0 \neq \emptyset$, onde $\overline{\omega}_0 \subset \omega$, e tomando uma função

$$\theta \in C_0^\infty(\omega) \text{ satisfazendo } 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \text{ e } \theta = 1 \text{ em } \omega_0,$$

temos

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_{\omega_0\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|w|^2 dxdt \leqslant s\lambda^2 \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha}\xi|w|^2 dxdt = s\lambda^2 \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha}\xi(w, rot\ z)dxdt \\ = -s\lambda^2 \int_{Q_\omega} (rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w), z)dxdt \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w), z) &= (\nabla \times (\theta e^{2s\alpha}\xi w), z) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \theta e^{2s\alpha}\xi w_1 & \theta e^{2s\alpha}\xi w_2 & \theta e^{2s\alpha}\xi w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\theta e^{2s\alpha}\xi(w_2z_3 - w_3z_2)\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\theta e^{2s\alpha}\xi(w_1z_3 - w_3z_1)\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\theta e^{2s\alpha}\xi(w_1z_2 - w_2z_1)\right] \\ &= \theta e^{2s\alpha}\xi\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(w_2z_3 - w_3z_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(w_1z_3 - w_3z_1) + \frac{\partial}{\partial x_3}(w_1z_2 - w_2z_1)\right] \\ &\quad + e^{2s\alpha}\xi\left[(w_2z_3 - w_3z_2)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - (w_1z_3 - w_3z_1)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + (w_1z_2 - w_2z_1)\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right] \\ &\quad + \theta e^{2s\alpha}\left[(w_2z_3 - w_3z_2)\frac{\partial\xi}{\partial x_1} - (w_1z_3 - w_3z_1)\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + (w_1z_2 - w_2z_1)\frac{\partial\xi}{\partial x_3}\right] \\ &\quad + \theta e^{2s\alpha}\xi 2s\left[(w_2z_3 - w_3z_2)\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} - (w_1z_3 - w_3z_1)\frac{\partial\alpha}{\partial x_2} + (w_1z_2 - w_2z_1)\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}\right] \\ &= \theta e^{2s\alpha}\xi(rotw, z) + e^{2s\alpha}(w,z)[2s(D\alpha)\theta\xi + (D\theta)\xi + \theta(D\xi)] \end{aligned}$$

onde

$$D(.) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial(.)}{\partial x_3} & \frac{\partial(.)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(.)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial(.)}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial(.)}{\partial x_3} & \frac{\partial(.)}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix}.$$

Além disso,

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x)+m_1)}}{l^4(t)}, \quad \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x)+m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty+m_2)}}{l^4(t)},$$

$$\psi \in C^2(\overline{\Omega}), \quad l \in C^\infty(0,T),$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\xi \text{ e } \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\xi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Cs\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi|w|^2 dxdt \leqslant Cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha}\xi(rot\ w, z)dxdt \\
&+ Cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(w,z)[2s\lambda(D\psi)\theta\xi^2 + (D\theta)\xi + \lambda\theta(D\psi)\xi]dxdt \\
&= C\int_{Q_\omega} s\lambda^2\theta e^{2s\alpha}\xi(rot\ w,z)dxdt + C\int_{Q_\omega} 2s^2\lambda^3 e^{2s\alpha}(w,z)(D\psi)\theta\xi^2 dxdt \\
&+ C\int_{Q_\omega} s\lambda^2 e^{2s\alpha}(w,z)(D\theta)\xi dxdt + C\int_{Q_\omega} s\lambda^3 e^{2s\alpha}(w,z)(D\psi)\theta\xi dxdt \\
&\leqslant C\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}(rot\ w,z)dxdt + \int_{Q_\omega} s^2\lambda^3\xi^2 e^{2s\alpha}(w,z)dxdt\right) \\
&+ C\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}(w,z)dxdt + \int_{Q_\omega} s\lambda^3\xi e^{2s\alpha}(w,z)dxdt\right) \\
&\leqslant C\int_{Q_\omega}\left(\frac{e^{s\alpha}}{s^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}} rot\ w, s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}e^{s\alpha}z\right)dxdt \\
&+ C\int_{Q_\omega}\left(s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}e^{s\alpha}w, s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}e^{s\alpha}z\right)dxdt \\
&+ C\int_{Q_\omega}\left(s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}e^{s\alpha}w, s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}e^{s\alpha}z\right)dxdt \\
&+ C\int_{Q_\omega}\left(s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}e^{s\alpha}w, s^{\frac{1}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{1}{2}}e^{s\alpha}z\right)dxdt \\
&\leqslant C\left(\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}|rot\ w|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ C\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ C\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|z|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ C\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_\omega} s\lambda^4\xi e^{2s\alpha}|z|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde a última estimativa vem da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
|rot\ w|^2 &= \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)^2 \\
&\leqslant 2\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)^2 \\
&\leqslant C\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|^2 = C|\nabla w|^2
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy com *epsilon*, segue que

$$
\begin{aligned}
Cs\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi|w|^2dxdt \leqslant{}& \frac{1}{2}\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}|\nabla w|^2dxdt + C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt+\\
&+\frac{1}{6}\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt + C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt+\\
&+\frac{1}{6}\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt + C\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|z|^2dxdt+\\
&+\frac{1}{6}\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt + C\int_{Q_\omega} s\lambda^4\xi e^{2s\alpha}|z|^2dxdt+\\
\leqslant{}& \frac{1}{2}\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}|\nabla w|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt+\\
&+C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt + C\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|z|^2dxdt+\\
&+C\int_{Q_\omega} s\lambda^4\xi e^{2s\alpha}|z|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Como

$$s \geqslant s_0 \geqslant 1 \;\Rightarrow\; s \leqslant s^3$$

$$\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1 \;\Rightarrow\; \lambda^2 \leqslant \lambda^4$$

$$\xi = \frac{\xi^3}{\xi^2} \leqslant \frac{\xi^3}{\breve{\xi}^2} \leqslant C\xi^3$$

então

$$s\lambda^2\xi \leqslant Cs^3\lambda^4\xi^3 \;\text{ e }\; s\lambda^4\xi \leqslant Cs^3\lambda^4\xi^3.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Cs\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi|w|^2dxdt \leqslant{}& \frac{1}{2}\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}|\nabla w|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt+\\
&+C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt. \qquad (2.2.25)
\end{aligned}
$$

Por 2.2.25 e 2.2.24 obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi|w|^2 + \lambda^2|\nabla z|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|z|^2\right)dxdt \leqslant C\int_Q e^{2s\alpha}|h|^2dxdt+\\
&C\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda^4\xi^2|z|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}|\nabla w|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}|w|^2dxdt+\\
&+C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi|w|^2 + \lambda^2|\nabla z|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|z|^2\right)dxdt \leqslant\\
&C\int_Q e^{2s\alpha}|h|^2dxdt + C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}|z|^2dxdt \qquad (2.2.26)
\end{aligned}
$$

Como o sistema adjunto de 2.2.10 pode ser olhado com a mudança de variável $z(t) = \varphi(T-t)$ e $h = \bar{y}D(z)$, com $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$. Sabemos também que $w = rot\ z$.

Substituindo em 2.2.26 obtemos

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla rot\ \varphi|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi|rot\ \varphi|^2 + \lambda^2|\nabla\varphi|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|\varphi|^2\right)dxdt$$
$$\leqslant C\int_Q e^{2s\alpha}|\bar{y}D(z)|^2 dxdt + C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3 e^{2s\alpha}|\varphi|^2 dxdt.$$

Sabemos que

$$\int_Q e^{2s\alpha}|\bar{y}D(z)|^2 dxdt \leqslant C\int_Q e^{2s\alpha}|D(z)|^2 dxdt \leqslant C\int_Q e^{2s\alpha}|\nabla z|^2 dxdt$$
$$\leqslant C\int_Q e^{2s\alpha}|\nabla\varphi|^2 dxdt$$

e

$$\lambda_0 \geqslant \sqrt{2C} \Rightarrow \lambda_0^2 \geqslant 2C \Rightarrow \lambda^2 \geqslant 2C \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} \geqslant C.$$

Assim,

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla rot\ \varphi|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi|rot\ \varphi|^2 + \lambda^2|\nabla\varphi|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|\varphi|^2\right)dxdt$$
$$\leqslant C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3 e^{2s\alpha}|\varphi|^2 dxdt.$$

Agora fixamos $s \geqslant s_0$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$, e definimos

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right], \\ \alpha(\frac{T}{2}), & \text{se } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \end{cases}$$

e

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{cases} \xi(t), & \text{se } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right], \\ \xi(\frac{T}{2}), & \text{se } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \end{cases}$$

Usando as estimativas de energia para o sistema de Stokes, podemos obter a mesma desigualdade substituindo α e ξ por $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\xi}$, respectivamente, isto é

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\left(\frac{|\nabla rot\ \varphi|^2}{s\tilde{\xi}} + s\lambda^2\tilde{\xi}|rot\ \varphi|^2 + \lambda^2|\nabla\varphi|^2 + s^2\lambda^4\tilde{\xi}^2|\varphi|^2\right)dxdt$$
$$\leqslant C\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\tilde{\xi}^3 e^{2s\tilde{\alpha}}|\varphi|^2 dxdt$$

Em particular para $s = s_0$ e $\lambda = \lambda_0$, temos

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^2|\varphi|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla\varphi|^2 dxdt \leqslant C(s_0,\lambda_0)\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|\varphi|^2 dxdt \quad (2.2.27)$$

Consideremos $\eta = \min_{(x,t)\in\bar{\Omega}\times[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}]} e^{2s\tilde{\alpha}(x,t)}\tilde{\xi}^2(x,t) > 0$. Logo,

$$\eta\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\varphi|^2 dxdt \leqslant C(s,\lambda)\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|\varphi|^2 dxdt$$

$$\Longrightarrow \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\varphi|^2 dxdt \leqslant C\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|\varphi|^2 dxdt \quad (2.2.28)$$

Multiplicando 2.2.6 por φ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi - \overline{y}D\varphi + \nabla\pi\right)\varphi\ dx = 0$$

$$\Longrightarrow\ -\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi dx - \int_\Omega (\Delta\varphi)\varphi dx - \int_\Omega (\overline{y}D\varphi)\varphi dx + \int_\Omega (\nabla\pi)\varphi\ dx = 0$$

$$\Longrightarrow\ -\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi dx + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \int_\Omega (\overline{y}D\varphi)\varphi\ dx$$

$$\Longrightarrow\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\varphi|^2 dx + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx + C\int_\Omega |\varphi|^2 dx$$

$$\Longrightarrow\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\varphi|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx \leqslant C\int_\Omega |\varphi|^2 dx$$

$$\Longrightarrow\ -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\varphi|^2 dx - 2C\int_\Omega |\varphi|^2 dx \leqslant -\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx \leqslant 0$$

Multiplicando ambos os membros por e^{2Ct}, tem-se

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{2Ct}\int_\Omega |\varphi|^2 dx\right) \leqslant 0$$

Integrando de 0 até t tem-se

$$-e^{2Ct}\int_\Omega |\varphi(t)|^2 dx + \int_\Omega |\varphi(0)|^2 dx \leqslant 0,$$

isto é,

$$|\varphi(0)|_H^2 \leqslant e^{2Ct}\int_\Omega |\varphi(t)|^2 dx \leqslant e^{2CT}\int_\Omega |\varphi(t)|^2 dx.$$

Agora como

$$|\varphi(0)|_H^2 = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} |\varphi(0)|_H^2 dt,$$

temos que

$$|\varphi(0)|_H^2 \leqslant \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} e^{2CT}\int_\Omega |\varphi(t)|^2 dxdt \quad (2.2.29)$$

Por 2.2.28 e 2.2.29, obtemos

$$|\varphi(0)|_H^2 \leqslant C \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |\varphi|^2 dxdt. \tag{2.2.30}$$

Somando 2.2.27 e 2.2.30, obtemos a chamada desigualdade de observabilidade

$$|\varphi(0)|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^2 |\varphi|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |\nabla\varphi|^2 dxdt \leqslant C \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |\varphi|^2 dxdt \tag{2.2.31}$$

Assim obtemos o seguinte resultado de controlabilidade para o sistema linearizado de Navier-Stokes;

Teorema 2.2.3. *Se $z_0 \in H$ e g satisfaz $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |g|^2 dxdt < +\infty$, então existe $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ tal que a solução z de 2.2.1 satisfaz $z(T) = 0$.*

2.2.3 Decrescimento exponencial do controle e da solução

A ideia aqui é achar um controle v que seja exponencialmente decrescente quando $t \to T$ e tal que, não somente $z(T) = 0$, mas também z seja exponencialmente decrescente quando $t \to T$.
Definimos

$$X_0 := \{(z,q) \in C^\infty(\bar{Q})^{N+1};\ div\ z = 0 \ \text{ em } \ Q,\ z = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma,\ \int_\omega q(t)dx = 0$$
$$\text{quase sempre em } \ (0,T)\}.$$

Considerando

$$L^* z = -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - \overline{y} D(z)$$

com $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$, podemos definir sobre X_0 a forma bilinear

$$a : X_0 \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(z,q),(\tilde{z},\tilde{q}) \mapsto a((z,q),(\tilde{z},\tilde{q}))$$

onde

$$a((z,q),(\tilde{z},\tilde{q})) = \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} (L^* z + \nabla q)(L^* \tilde{z} + \nabla \tilde{q}) dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 z\tilde{z} dxdt.$$

Vejamos que $a(.,.)$ é um produto interno. Para isso basta verificar que

$$a((z,q),(z,q)) = 0 \ \Rightarrow \ (z,q) = (0,0).$$

Com efeito, se $a((z,q),(z,q)) = 0$, onde $(z,q) \in X_0$, temos

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|L^*z + \nabla q|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|z|^2 dxdt = 0$$

$$\Rightarrow \; e^{2s\tilde{\alpha}}|L^*z + \nabla q|^2 = 0 \; \text{ em } \; Q$$

$$\Rightarrow \; L^*z + \nabla q = 0 \; \text{ em } \; Q$$

Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - \overline{y}D(z) + \nabla q = 0 \;\text{ em }\; Q, \\ div\ z = 0 \;\text{ em }\; Q, \\ z = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma. \end{array}\right.$$

Pela desigualdade de observabilidade 2.2.31 temos

$$|z(0)|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^2|z|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla z|^2 dxdt \leqslant C\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|z|^2 dxdt \qquad (2.2.32)$$

Dos resultados anteriores em 2.2.32

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^2|z|^2 dxdt = 0$$

Assim,

$$z = 0 \;\text{ em }\; Q.$$

Isto quer dizer que

$$\nabla q = 0 \;\text{ em }\; Q,$$

ou seja, q não depende da variável x. Pela definição de X_0

$$\int_\omega q(t)dx = 0 \;\text{ quase sempre em }\; (0,T)$$

$$\Longrightarrow q(t)\int_\omega dx = 0$$
$$\Longrightarrow q(t) = 0$$

Assim, $(z,q) = (0,0)$. Agora, definamos X como sendo o completamento de X_0 com respeito ao produto interno $a(.,.)$. Desta maneira, X é um espaço de Hilbert com o produto interno $a(.,.)$ e temos, pela desigualdade de observabilidade 2.2.31, que

$$\begin{aligned} |z(0)|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^2|z|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla z|^2 dxdt &\leqslant C\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|z|^2 dxdt, \;\; \forall (z,q) \in X \\ &\leqslant Ca((z,q),(z,q)), \;\; \forall (z,q) \in X. \end{aligned}$$

Consideremos agora a forma linear

$$
\begin{aligned}
&l : X \longrightarrow \mathbb{R}\\
&(\tilde{z},\tilde{q}) \mapsto \langle l,(\tilde{z},\tilde{q})\rangle = (z_0,\tilde{z}(0))_H - \sum_{i,j=1}^{N}\int_Q g_{ij}\frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial x_j}dxdt.
\end{aligned}
$$

Se $z_0 \in H$ e $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|g|^2dxdt < +\infty$, vejamos que l é continua. Com efeito, se $(\tilde{z},\tilde{q}) \in X$, então

$$
\begin{aligned}
|\langle l,(\tilde{z},\tilde{q})\rangle| &\leqslant |(z_0,\tilde{z}(0))_H| + \left|\sum_{i,j=1}^{N}\int_Q g_{ij}\frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial x_j}dxdt\right|\\
&\leqslant |(z_0,\tilde{z}(0))_H| + \int_Q |(g,\nabla\tilde{z})|dxdt\\
&\leqslant |z_0|_H|\tilde{z}(0)|_H + \int_Q |g||\nabla\tilde{z}|dxdt\\
&= |z_0|_H|\tilde{z}(0)|_H + \int_Q e^{-s\tilde{\alpha}}|g|e^{s\tilde{\alpha}}|\nabla\tilde{z}|dxdt\\
&\leqslant |z_0|_H|\tilde{z}(0)|_H + \left(\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|g|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla\tilde{z}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
|\langle l,(\tilde{z},\tilde{q})\rangle|^2 &\leqslant \left[|z_0|_H|\tilde{z}(0)|_H + \left(\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|g|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla\tilde{z}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&\leqslant 2\left[|z_0|_H^2|\tilde{z}(0)|_H^2 + \left(\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|g|^2dxdt\right)\left(\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla\tilde{z}|^2dxdt\right)\right]\\
&\leqslant C\left(|\tilde{z}(0)|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla\tilde{z}|^2dxdt\right)\\
&\leqslant C\left(|\tilde{z}(0)|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}(|\nabla\tilde{z}|^2 + \tilde{\xi}^2|z|^2)dxdt\right)\\
&\leqslant C\ a((\tilde{z},\tilde{q}),(\tilde{z},\tilde{q}))\\
&\leqslant C\|(\tilde{z},\tilde{q})\|_X^2,
\end{aligned}
$$

o que prova que l é contínua.

Assim pelo teorema de Lax-Milgram, existe uma única solução $(z,q) \in X$ tal que

$$
a((z,q),(\tilde{z},\tilde{q})) = \langle l,(\tilde{z},\tilde{q})\rangle\ ,\quad \forall(\tilde{z},\tilde{q}) \in X,
$$

isto é

$$
\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}(L^*z+\nabla q)(L^*\tilde{z}+\nabla\tilde{q})dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3 z\tilde{z}dxdt = (z_0,\tilde{z}(0))_H - \sum_{i,j=1}^{N}\int_Q g_{ij}\frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial x_j}dxdt \tag{2.2.33}
$$

Agora, definimos

$$y = e^{2s\tilde{\alpha}}(L^*z + \nabla q) \ \text{ em } \ Q$$

e

$$v = -e^{2s\tilde{\alpha}}\xi^3 z|_\omega \ \text{ em } \ Q_\omega.$$

Como $(z, q) \in X$, temos

$$e^{s\tilde{\alpha}}(L^*z + \nabla q) \in L^2(Q)^N \ \Rightarrow \ y \in e^{2s\tilde{\alpha}}L^2(Q)^N \subset L^2(Q)^N$$

e

$$e^{s\tilde{\alpha}}\xi^{\frac{3}{2}}z|_\omega \in L^2(Q)^N \ \Rightarrow \ v \in e^{2s\tilde{\alpha}}\xi^{\frac{3}{2}}L^2(Q)^N \subset L^2(Q)^N.$$

Outra maneira de escrever 2.2.33 é

$$\int_Q y(L^*\tilde{z} + \nabla\tilde{q})dxdt = (z_0, \tilde{z}(0))_H - \sum_{i,j=1}^{N}\int_Q g_{ij}\frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial x_j}dxdt + \int_{Q_\omega} v\tilde{z}dxdt \ , \ \ \forall(\tilde{z}, \tilde{q}) \in X.$$

Assim, (y, p) é solução ultra-fraca (ou por transposição) do problema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla.g + v1_\omega \ \text{ em } Q, \\ div \ y = 0 \ \text{ em } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = z_0 \ \text{ em } \Omega \end{array}\right.$$

Mas, como $g \in [L^2(Q)]^{N^2}$ e $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$, este problema tem uma solução

$$y \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V).$$

Além disso,

$$\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|y|^2dxdt = \int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}e^{4s\tilde{\alpha}}|L^*z + \nabla q|^2dxdt = \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|L^*z + \nabla q|^2dxdt < +\infty$$

e

$$\int_{Q_\omega} e^{-2s\tilde{\alpha}}\xi^{-3}|v|^2dxdt = \int_{Q_\omega} e^{-2s\tilde{\alpha}}\xi^{-3}e^{4s\tilde{\alpha}}\xi^6|z|^2dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\xi^3|z|^2dxdt < +\infty.$$

Como $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|y|^2dxdt < +\infty$, obtemos que

$$\int_Q e^{-2s\check{\alpha}}|y|^2dxdt < +\infty$$

pondo $r(t) = \int_\Omega |y(t)|^2dx$, temos que

$$\int_0^T e^{-2s\check{\alpha}(t)}r(t)dt < +\infty.$$

Supondos que $d = r(T) > 0$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $r(t) > 0$ para todo $t \in (T-\epsilon, T)$.

Assim
$$\int_{T-\epsilon}^{T} e^{-2s\breve{\alpha}(t)} r(t)dt \to +\infty, \text{ quando } \epsilon \to 0,$$
contradizendo o fato de que
$$\int_{T-\epsilon}^{T} e^{-2s\breve{\alpha}(t)} r(t)dt < +\infty.$$
Logo $r(T) = 0$, isto é, $\int_\Omega |y(T)|^2 dx = 0$ o que implica
$$y(T) = 0.$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.4. *Se $z_0 \in H$ e g satisfaz $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|g|^2 dxdt < +\infty$, então existe um controle v e uma solução y de 2.2.1 tal que,*
$$\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|y|^2 dxdt < +\infty \quad e \quad \int_{Q_\omega} e^{-2s\tilde{\alpha}} \xi^{-3}|v|^2 dxdt < +\infty,$$
o que implica que $y(T) = 0$.

2.3 O problema não linear

2.3.1 Definição dos pesos especiais

Denotaremos simplesmente α e ξ quando nos referimos a $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\xi}$ respetivamente.

Definamos
$$\breve{\alpha}(t) = \min_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^4(t)} < 0,$$
$$\breve{\xi}(t) = \min_{x\in\bar{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^4(t)},$$
$$\hat{\alpha}(t) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)}}{l^4(t)} < 0,$$
$$\hat{\xi}(t) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_1)}}{l^4(t)}$$

Lema 2.3.1. *Existem constantes $m_1, m_2 > 0$, com $m_1 \leqslant m_2$, tais que, para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$ suficientemente grande, temos*
$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| \leqslant C\xi^{\frac{5}{4}}, \quad \left|\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right| \leqslant C\xi^{\frac{3}{2}} \quad e \quad \frac{3}{2}\hat{\alpha} \leqslant \breve{\alpha} \quad \left(ou \ -\breve{\alpha} \leqslant -\frac{3}{2}\hat{\alpha}\right).$$

Demonstração. Sejam

$$m_1 = (m_0 + 4)|\psi|_\infty \text{ e } \ m_2 = m_3|\psi|_\infty \text{ com } \ m_0 + 4 < m_3 < \frac{5}{4}m_0 + 4$$

Vejamos que $3\hat{\alpha} \leqslant 2\check{\alpha}$. Observemos que

$$\begin{aligned} 3\hat{\alpha} \leqslant 2\check{\alpha} &\Leftrightarrow \frac{3(e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_1)} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)})}{l^4(t)} \leqslant \frac{2(e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(|\psi|_\infty + m_2)})}{l^4(t)} \\ &\Leftrightarrow 3e^{\lambda(m_0+5)|\psi|_\infty} - 3e^{\lambda(m_3+1)|\psi|_\infty} \leqslant 2e^{\lambda(m_0+4)|\psi|_\infty} - 2e^{\lambda(m_3+1)|\psi|_\infty} \\ &\Leftrightarrow 3e^{\lambda(m_0+5)|\psi|_\infty} \leqslant 2e^{\lambda(m_0+4)|\psi|_\infty} + e^{\lambda(m_3+1)|\psi|_\infty}. \end{aligned}$$

Tomando λ_0 suficientemente grande e $\lambda \geqslant \lambda_0$, temos

$$\frac{log3}{\lambda|\psi|_\infty} \leqslant \frac{log3}{\lambda_0|\psi|_\infty} = C.$$

Como $m_0 + 4 + C \leqslant m_3$, temos $m_0 + 5 + C \leqslant m_3 + 1$. Logo,

$$e^{\lambda(m_0+5+C)|\psi|_\infty} \leqslant e^{\lambda(m_3+1)|\psi|_\infty}. \tag{2.3.1}$$

Mas, como

$$m_0 + 5 + \frac{log3}{\lambda|\psi|_\infty} \leqslant m_0 + 5 + C,$$

temos

$$\begin{aligned} &e^{\lambda(m_0+5+\frac{log3}{\lambda|\psi|_\infty})|\psi|_\infty} \leqslant e^{\lambda(m_0+5+C)|\psi|_\infty} \\ &e^{\lambda(\frac{log3}{\lambda|\psi|_\infty})|\psi|_\infty} e^{\lambda(m_0+5)|\psi|_\infty} \leqslant e^{\lambda(m_0+5+C)|\psi|_\infty} \\ &3e^{\lambda(m_0+5)|\psi|_\infty} \leqslant e^{\lambda(m_0+5+C)|\psi|_\infty} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

De 2.3.1 e 2.3.2, obtemos

$$3e^{\lambda(m_0+5)|\psi|_\infty} \leqslant e^{\lambda(m_3+1)|\psi|_\infty}.$$

Assim,

$$3e^{\lambda(m_0+5)|\psi|_\infty} \leqslant 2e^{\lambda(m_0+4)|\psi|_\infty} + e^{\lambda(m_3+1)|\psi|_\infty}$$

□

2.3.2 Classes funcionais e solução do problema não linear

Consideremos o problema não linear

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla.(z \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z) + \nabla(z \otimes z) + \nabla q = \nabla.g + v1_\omega \text{ em } Q, \\ div\ z = 0 \text{ em } Q, \\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ z(0) = z_0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

Desejamos encontrar um controle v e uma solução correspondente z tal que $z(T) = 0$. A ideia é definir "espaços adequados"com o objetivo de aplicar o teorema de Liusternik.

Definimos

$$Lz = \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla.(z \otimes \overline{y} + \overline{y} \otimes z)$$

e

$$\begin{aligned} E =&\{(z,v); e^{-s\alpha}z \in [L^2(Q)]^N, e^{-s\alpha}\xi^{-\frac{3}{2}}v \in [L^2(Q_\omega)]^N, e^{\frac{-3s\hat{\alpha}}{4}}z \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^N)\cap \\ &L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H), \exists q, \exists k, e^{-s\alpha}k \in L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2}), \\ &Lz + \nabla q - v1_\omega = \nabla.k, z(0) \in H \cap L^4(\Omega)^N\} \end{aligned}$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|(z,v)\|_E^2 = &\left|e^{-s\alpha}z\right|^2_{[L^2(Q)]^N} + \left|e^{-s\alpha}\xi^{-\frac{3}{2}}v\right|^2_{[L^2(Q_\omega)]^N} + \left|e^{\frac{-3s\hat{\alpha}}{4}}z\right|^2_{L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^N)} + \\ &\left|e^{\frac{-3s\hat{\alpha}}{4}}z\right|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} + \left|e^{-s\alpha}k\right|^2_{L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})} + |z(0)|^2_{L^4(\Omega)^N} \end{aligned}$$

Assim, $E \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in E$, também temos que E é sendo um espaço de Banach. Agora, definimos

$$G = \{(\nabla.r, z_0); e^{-s\alpha}r \in L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2}), z_0 \in H \cap L^4(\Omega)^N\}$$

munido com a norma

$$\|(\nabla.r, z_0)\|_G^2 = \left|e^{-s\alpha}r\right|^2_{L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})} + \|z_0\|^2_{L^4(\Omega)^N}.$$

Assim, $G \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in G$, também temos que G é sendo um espaço de Banach. Definimos o operador

$$\begin{aligned} A:\ & E \longrightarrow G \\ & (z,v) \mapsto A(z,v) = (Lz + \nabla.(z\otimes z) + \nabla p - v1_\omega, z(0)) \end{aligned}$$

onde p satisfaz pela definição de E e $Lz + \nabla p - v1_\omega = \nabla.k$,
com $e^{-s\alpha}k \in L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})$.
Da definição de E, temos que

$$z(0) \in H \cap L^4(\Omega)^N. \tag{2.3.3}$$

Vejamos que $e^{\frac{-3s\hat{\alpha}}{2}}(z \otimes z) \in L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\left|e^{\frac{-3s\hat{\alpha}}{2}}(z\otimes z)\right|^2_{L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})} = \int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}|(z\otimes z)(t)|^2_{L^6(\Omega)^{N^2}}dt \\
&= \int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}\left(\int_\Omega |(z\otimes z)(x,t)|^6 dx\right)^{\frac{2}{6}} dt \\
&\leqslant C\int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}\left(\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N |z_i z_j(x,t)|\right)^6 dx\right)^{\frac{2}{6}} dt \\
&\leqslant C\int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |z_i(x,t)|\right)^6 \left(\sum_{j=1}^N |z_j(x,t)|\right)^6 dx\right)^{\frac{2}{6}} dt \\
&\leqslant C\int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}\left(\int_\Omega |z(x,t)|^6|z(x,t)|^6 dx\right)^{\frac{2}{6}} dt \\
&\leqslant C\int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}\left(\int_\Omega |z(x,t)|^{12} dx\right)^{\frac{4}{12}} dt \\
&\leqslant C\int_0^T e^{-3s\hat{\alpha}(t)}|z(t)|^4_{L^{12}(\Omega)^N}dt \\
&\leqslant C\left|e^{-\frac{3s\hat{\alpha}}{4}}z\right|^4_{L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^N)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Com isso, $e^{-s\alpha}(z\otimes z) \in L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})$.

Com efeito, como $-\alpha \leqslant -\check{\alpha} \leqslant -\dfrac{3}{2}\hat{\alpha}$

tem-se

$$e^{-s\alpha(t)}\,|(z\otimes z)(t)|^2_{L^6(\Omega)^{N^2}} \leqslant e^{-\frac{3s\hat{\alpha}(t)}{2}}\,|(z\otimes z)(t)|^2_{L^6(\Omega)^{N^2}}\,,$$

o que implica

$$\left|e^{-s\alpha}(z\otimes z)\right|_{L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})} \leqslant \left|e^{-\frac{3s\hat{\alpha}}{2}}(z\otimes z)\right|_{L^2(0,T;L^6(\Omega)^{N^2})} < +\infty.$$

Assim,

$$Lz + \nabla p - v1_\omega + \nabla.(z\otimes z) = \nabla.k + \nabla.(z\otimes z) = \nabla.(k + z\otimes z,)$$

donde

$$e^{-s\alpha}(k + z\otimes z) = e^{-s\alpha}k + e^{-s\alpha}(z\otimes z) \in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2}). \qquad (2.3.4)$$

De 2.3.3 e 2.3.4, concluímos que $A(z,v) \in G$.

Vejamos que A é de classe C^1.

Com efeito, como a primeira componente de $A(z,v)$ tem uma parte linear $Lz+\nabla p-v1_\omega$ e uma parte quadrática $\nabla.(z\otimes z)$, que pode ser obtida de uma aplicação bilinear contínua de $E\times E$ em G, tem-se que A é de classe C^1 por ser soma de dos aplicações de classe C^1.

Agora calcularemos formalmente a derivada de A no ponto $(0,0)\in E$.

Para cada $(y,w)\in E$

$$
\begin{aligned}
A'(z,v)(y,w) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{A((z,v)+\lambda(y,w))-A(z,v)}{\lambda}\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}A((z,v)+\lambda(y,w))|_{\lambda=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}(L(z+\lambda y)+\nabla.((z+\lambda y)\otimes(z+\lambda y))+\nabla(p+\lambda q)\\
&- (v+\lambda w)1_\omega,(z+\lambda y)(0))|_{\lambda=0}\\
&= (L'(z+\lambda y)(y)+\nabla.(y\otimes(z+\lambda y))+\nabla.((z+\lambda y)\otimes y)+\nabla q\\
&- w1_\omega, y(0))|_{\lambda=0}\\
&= (Ly+\nabla.(y\otimes z+z\otimes y)+\nabla q-w1_\omega, y(0))
\end{aligned}
$$

Logo,

$$A'(0,0)(y,w)=(Ly+\nabla q-w1_\omega, y(0)).$$

Dado $(\nabla.h,y_0)\in G$, pelo Teorema 2.2.4, existe (y,w) tal que

$$
\left|\begin{array}{l}
Ly+\nabla q = w1_\omega+\nabla.h \text{ em } Q,\\
div\ y = 0 \text{ em } Q,\\
y=0 \text{ sobre } \Sigma,\\
y(0)=y_0 \text{ em } \Omega,
\end{array}\right.
$$

com $y(T)=0$ e $y\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$, $e^{-s\alpha}y\in[L^2(Q)]^N$ e $e^{-s\alpha}\xi^{-\frac{3}{2}}w\in[L^2(Q_\omega)]^N$.

Mostraremos que $(y,w)\in E$. Para isso, basta verificar que

$$e^{-\frac{3s\hat\alpha}{4}}y\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)\cap L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^N)$$

Definimos

$$\tilde y = e^{-\frac{3s\hat\alpha}{4}}y,\ \tilde p = e^{-\frac{3s\hat\alpha}{4}}p,\ \tilde h = e^{-\frac{3s\hat\alpha}{4}}h \text{ e } \tilde w = e^{-\frac{3s\hat\alpha}{4}}w.$$

Afirmamos que $\tilde h\in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})$

Com efeito, como

$$\hat\alpha=\max_{\overline\Omega}\alpha\geqslant\alpha\ \Rightarrow\ -\frac{3s\hat\alpha}{4}\leqslant-\frac{3s\alpha}{4}\leqslant-s\alpha\ \Rightarrow\ e^{-\frac{3s\hat\alpha}{4}}\leqslant e^{-s\alpha},$$

segue que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{h}|^2_{L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})} &= \int_0^T \left|e^{-\frac{3s\hat{\alpha}(t)}{4}} h(t)\right|^2_{[L^6(\Omega)]^{N^2}} dt \leqslant \int_0^T \left|e^{-s\alpha(t)} h(t)\right|^2_{[L^6(\Omega)]^{N^2}} dt \\
&= \left|e^{-s\alpha} h\right|^2_{L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $\tilde{w} \in L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)$.

Com efeito, como

$$
\hat{\alpha} = \max_{\overline{\Omega}} \alpha \geqslant \alpha \;\Rightarrow\; -\frac{3s\hat{\alpha}}{4} \leqslant -\frac{3s\alpha}{4} \;\Rightarrow\; e^{-\frac{3s\hat{\alpha}}{4}} \leqslant e^{-\frac{3s\alpha}{4}},
$$

temos

$$
\begin{aligned}
|\tilde{w}|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega)^N)} &= \int_0^T \left|e^{-\frac{3s\hat{\alpha}(t)}{4}} w(t)\right|^2_{[L^2(\omega)]^N} dt \leqslant \int_0^T \left|e^{-\frac{3s\alpha}{4}} w(t)\right|^2_{[L^2(\omega)]^N} dt \\
&\leqslant \int_0^T \left|e^{\frac{s\alpha(t)}{4}} \xi^{\frac{3}{2}}(t) e^{-s\alpha(t)} \xi^{-\frac{3}{2}}(t) w(t)\right|^2_{[L^2(\omega)]^N} dt. \qquad (2.3.5)
\end{aligned}
$$

Para $C_1, C_2 > 0$ e fazendo $m(t) = \dfrac{1}{l^4(t)}$, temos

$$
\lim_{t\to 0^+} e^{\frac{s\alpha(t)}{4}} \xi^{\frac{3}{2}}(t) = \lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{C_1}{l^4(t)}} \frac{C_2}{l^6(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{C_2\; m(t)^{\frac{3}{2}}}{e^{C_1 m(t)}} = 0.
$$

Isto quer dizer que

$$
e^{\frac{s\alpha}{4}} \xi^{\frac{3}{2}} \in L^\infty(0,T;[L^\infty(\Omega)]^N). \qquad (2.3.6)
$$

Logo de 2.3.5 e 2.3.6 segue que

$$
|\tilde{w}|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega)^N)} \leqslant C \int_0^T \left|e^{-s\alpha(t)} \xi^{-\frac{3}{2}}(t) w(t)\right|^2_{L^2(\omega)^N} = C \left|e^{-s\alpha} \xi^{-\frac{3}{2}} w\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega)^N)} < +\infty
$$

Uma vez que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y) = -\frac{3}{4}\hat{\alpha}' e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y + e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial t}, \\
\Delta \tilde{y} &= \Delta(e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y) = e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} \Delta y, \\
\nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) &= \nabla.(\bar{y} \otimes e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y + e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y \otimes \tilde{y}) = \nabla.(e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}}(\bar{y} \otimes y + y \otimes \bar{y})) \\
&= e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} \nabla.(\bar{y} \otimes y + y \otimes \bar{y}), \\
\nabla \tilde{p} &= \nabla(e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} p) = e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} \nabla p, \\
\nabla.\tilde{h} &= \nabla.(e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} h) = e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} \nabla.h, \\
\tilde{w} 1_\omega &= e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} w 1_\omega, \\
div \tilde{y} &= div\; e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\
\tilde{y} &= e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}} y = 0 \text{ sobre } \Omega \times (0,T) \\
\text{e} \;\; \tilde{y}(0) &= e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y(0) = e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 \text{ em } \Omega
\end{aligned}
$$

Temos o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \tilde{p} = \nabla.\tilde{h} + \tilde{w} 1_\omega - \frac{3}{4}\hat{\alpha}' \tilde{y} \text{ em } Q,\\ div\ \tilde{y} = 0 \text{ em } Q,\\ \tilde{y} = 0 \text{ sobre } \Sigma,\\ \tilde{y}(0) = e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 \text{ em } \Omega.\end{array}\right. \tag{2.3.7}$$

Como Ω é limitado, $L^6(\Omega)^{N^2} \hookrightarrow L^2(\Omega)^{N^2}$ o que implica $\tilde{h} \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})$.
Assim $\nabla.\tilde{h} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$.
Além disso, como $L^2(\Omega)^N \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)^N$, temos

$$\tilde{w} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$$

e

$$-\frac{3}{4}\hat{\alpha}'\tilde{y} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$$

Logo pelo teorema (de existência e unicidade para o sistema de Navier-Stokes) 1.7.13 resulta que para $N \leqslant 3$, que o sistema 2.3.7 tem uma solução

$$\tilde{y} \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H) \subset L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H).$$

Sabemos, pelo Teorema 1.4.2 (imersão de Sobolev), que ,se $N = 2,3$, então $V \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^N$ e $H_0^1(\Omega)^N \hookrightarrow L^6(\Omega)^N$. Logo segue que

$$\tilde{y} \in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^N)$$

e, como $\bar{y} \in [L^\infty(Q)]^N$ temos

$$\bar{y} \otimes \tilde{y} \in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})$$

$$\tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})$$

Isto nos diz que o termo $\nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y})$ pode ser absorvido por $\nabla.\tilde{h}$, e assim obtemos o novo sistema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla \tilde{p} = \nabla.\tilde{h} + \tilde{k} \text{ em } Q,\\ div\ \tilde{y} = 0 \text{ em } Q,\\ \tilde{y} = 0 \text{ sobre } \Sigma,\\ \tilde{y}(0) = e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 \text{ em } \Omega,\end{array}\right. \tag{2.3.8}$$

onde $\tilde{k} = \tilde{w}1_\omega - \frac{3}{4}\hat{\alpha}'\tilde{y} \in [L^2(Q)]^N$, $\tilde{h} \in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})$.
Usaremos os seguintes lemas para provar que $e^{-\frac{3s\hat{\alpha}}{4}} y \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^N)$.

Lema 2.3.2. *Se* $k \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^N)$*, então existe uma única solução* (z,q) *do sistema de Stokes*

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k \ \ em\ Q, \\ div\ z = 0 \ \ em\ Q, \\ z = 0 \ \ sobre\ \Sigma, \\ z(T) = 0 \ \ em\ \Omega, \end{array}\right. \tag{2.3.9}$$

com $z \in C([0,T];L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^N) \cap L^2(0,T;W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)^N)$

Assumiremos a demonstração do lema anterior.

Lema 2.3.3. *Suponhamos que* $y_0 \in H \cap [L^4(\Omega)]^N$*,* $\tilde{h} \in L^2(0,T;[L^6(\Omega)]^{N^2})$ *e* $\tilde{k} \in [L^2(Q)]^N$*. Então* $\tilde{y} \in L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^N)$

Demonstração. Seja $k \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^{\frac{12}{11}}(\Omega)^N)$. Então

$$\begin{aligned}
\int_Q \tilde{y}k dxdt &= \int_Q \tilde{y}(-\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q)dxdt \\
&= \int_Q \tilde{y}(-\frac{\partial z}{\partial t})dxdt - \int_Q \tilde{y}\Delta z dxdt + \int_Q \tilde{y}\nabla q dxdt \\
&= \int_\Omega z(0)\tilde{y}(0)dx - \int_\Omega z(T)\tilde{y}(T)dx + \int_Q \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} z dxdt - \int_Q \Delta\tilde{y} z dxdt \\
&= \int_\Omega e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 z(0)dx + \int_Q (\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta\tilde{y}) z dxdt \\
&= \int_\Omega e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 z(0)dx + \int_Q (\nabla.\tilde{h} + \tilde{k} - \nabla\tilde{p}) z dxdt \\
&= \int_\Omega e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 z(0)dx + \int_Q (\nabla.\tilde{h}) z dxdt + \int_Q \tilde{k} z dxdt - \int_Q (\nabla\tilde{p}) z dxdt \\
&= \int_\Omega e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} y_0 z(0)dx + \sum_{i,j=1}^N \int_Q \tilde{h}_{ij} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} dxdt + \int_Q \tilde{k} z dxdt
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.2 temos que, $z \in C([0,T];[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N) \cap L^2(0,T;[W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)]^N)$
Logo concluímos que

$$z(0) \in [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N,$$

$$y_0 \in [L^4(\Omega)]^N,$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \in L^2(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega)),$$

$$z \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N), \text{ pois pelo Teorema 1.4.2}, W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

$$\tilde{h}_{ij} \in L^2(0,T;L^6(\Omega)),$$

$$\tilde{k} \in [L^2(Q)]^N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_Q \tilde{y} k dxdt =& e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} \langle y_0, z(0) \rangle_{[L^4(\Omega)]^N \times L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^N} + \langle \tilde{k}, z \rangle_{[L^2(Q)]^N \times [L^2(Q)]^N} \\ & - \sum_{i,j=1}^{N} \langle \tilde{h}_{ij}, \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \rangle_{L^2(0,T;L^6(\Omega)) \times L^2(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))} < +\infty.\end{aligned}$$

Definimos o funcional

$$\begin{aligned} L : L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k \longmapsto \langle L, k \rangle &:= \int_Q \tilde{y} k dxdt \end{aligned}$$

Claramente, L é linear. Vejamos que L seja contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} |\langle L, k \rangle| &= \left| \int_Q \tilde{y} k dxdt \right| \\ &= \Bigg| e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} \langle y_0, z(0) \rangle_{[L^4(\Omega)]^N \times [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N} + \langle \tilde{k}, z \rangle_{[L^2(Q)]^N \times [L^2(Q)]^N} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{N} \left\langle \tilde{h}_{ij}, \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right\rangle_{L^2(0,T;L^6(\Omega)) \times L^2(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))} \Bigg| \\ &\leqslant e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} \left| \langle y_0, z(0) \rangle_{[L^4(\Omega)]^N \times [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N} \right| + \left| \langle \tilde{k}, z \rangle_{[L^2(Q)]^N \times [L^2(Q)]^N} \right| \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \left| \left\langle \tilde{h}_{ij}, \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right\rangle_{L^2(0,T;L^6(\Omega)) \times L^2(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))} \right| \\ &\leqslant e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}(0)} |y_0|_{[L^4(\Omega)]^N} |z(0)|_{[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N} + |\tilde{k}|_{[L^2(Q)]^N} |z|_{[L^2(Q)]^N} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} |\tilde{h}_{ij}|_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \left| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))} \\ &\leqslant C(|z(0)|_{[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)[^N} + |z|_{[L^2(Q)]^N} + \sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))}) \\ &\leqslant C(|z(0)|_{[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N} + |z|_{L^2(0,T;[W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)]^N)} + |\nabla z|_{L^2(0,T;[L^{\frac{6}{5}}(\Omega)]^N)}) \\ &\leqslant C(|z|_{C([0,T];[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^N)} + |z|_{L^2(0,T;[W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)]^N)}) \\ &\leqslant C|k|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^N)}. \end{aligned}$$

Logo $L \in (L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^N))' = L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^N)$. Mas pela unicidade do Teorema da representação de Riesz-Fréchet, tem-se que $L = \tilde{y}$.

Assim

$$\tilde{y} \in L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^N)$$

□

Isto é

$$e^{-\frac{3}{4}\hat{\alpha}}y \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^N)$$

Isto prova que $(y,w) \in E$, ou seja, $A'(0,0)$ é sobrejetora.

A seguir, lembraremos o enunciado do teorema de Liusternik:

Teorema 2.3.4. *Sejam E e G dois espaços de Banach, e suponhamos $A : E \to G$ satisfaz $A \in C^1(E,G)$. Suponhamos que $e_0 \in E$, $A(e_0) = h_0$ e $A'(e_0) : E \to G$ é sobrejetora. Então existe $\delta > 0$ tal que, para cada $h \in G$ satisfazendo $\|h - h_0\| < \delta$, existe $e \in E$ tal que $A(e) = h$.*

Tomando $e_0 = (0,0)$, então $A(e_0) = A(0,0) = (0,0) = h_0$. Como $A \in C^1(E,G)$ e $A'(0,0)$ é sobrejetora, pelo teorema anterior existe $\delta > 0$, tal que para $(0,z_0) \in G$ com $\|z_0\| < \delta$, existe $(z,v) \in E$ tal que $A(z,v) = (0,z_0)$. Isto significa que

$$\left| \begin{array}{l} Lz + \nabla(z \otimes z) + \nabla p = v1_\omega \ \text{ em } Q, \\ div\ z = 0 \ \text{ em } Q, \\ z = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(0) = z_0 \ \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

tem solução com $(z,v) \in E$ e $z(T) = 0$.

Capítulo 3

Controlabilidade Local para um sistema N-dimensional de Boussinesq com N-1 controles escalares

Denotaremos por C, C_1, C_2, ... as constantes positivas (usualmente, dependendo de Ω e $\mathcal{O}$).

Estudaremos o seguinte sistema de Boussinesq controlado

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}} + \theta e_N \ \ \text{em } Q, \\ div\ y = 0 \ \ \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + y.\nabla\theta = h1_{\mathcal{O}} \ \ \text{em } Q, \\ y = 0,\ \theta = 0 \ \ \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0,\ \theta(0) = \theta_0 \ \ \text{em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.0.1}$$

Mostraremos que o sistema N-dimensional 3.0.1, pode ser controlado com somente N-1 controles escalares em $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$, se assumirmos algumas condições geométricas. Em particular, o sistema de Boussinesq em dimensão 2 pode ser controlado por o controle que atua na equação da temperatura.

Definimos os espaços

$$H = \left\{ y \in \left(L^2(\Omega)\right)^N,\ div\ y = 0 \text{ em } \Omega,\ y.\nu = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\} \tag{3.0.2}$$

$$E = \begin{cases} H & \text{se } N = 2, \\ [L^4(\Omega)]^3 \cap H & \text{se } N = 3 \end{cases}$$

e

$$V = \left\{ y \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N, \ div\ y = 0 \text{ em } \Omega \right\}$$

Para o sistema de Boussinesq 3.0.1, assumiremos que $\mathcal{O}$ seja adjacente a $\partial\Omega$ perto de um ponto x_0 tal que $\nu_k(x_0) \neq 0$ para algum $k < N$, onde $\nu_k(x_0)$ é o vetor normal exterior no ponto x_0.

Estudaremos a controlabilidade local exata por trajetórias definida em 1.7.25. Lembramos que uma trajetória $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{\theta})$ para o sistema de Boussinesq 3.0.1 é uma solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\bar{y} + \nabla \bar{p} = \bar{\theta} e_N \ \text{ em } Q, \\ div\ \bar{y} = 0 \ \text{ em } Q, \\ \dfrac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} - \Delta \bar{\theta} + \bar{y}.\nabla \bar{\theta} = 0 \ \text{ em } Q, \\ \bar{y} = 0, \ \bar{\theta} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0, \ \bar{\theta}(0) = \bar{\theta}_0 \ \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.0.3}$$

Nossa meta é provar que existe $\delta > 0$ tal que, quando $(y_0, \theta_0) \in E \times L^2(\Omega)$ e

$$\|(y_0, \theta_0) - (\bar{y}_0, \bar{\theta}_0)\|_{E \times L^2} \leqslant \delta,$$

podemos encontrar controles v e h em L^2 com $v_k \equiv v_N \equiv 0$ e uma solução associada (y, p, θ) satisfazendo

$$y(T) = \bar{y}(T) \text{ e } \theta(T) = \bar{\theta} \text{ em } \Omega.$$

Em particular, quando $N = 2$, encontraremos um controle para o sistema 3.0.1, com só uma função escalar h.

Como mencionamos acima, algumas hipóteses serão assumidas com respeito ao domínio e à trajetória. Tais hipóteses sao:

$$\exists x_0 \in \partial\Omega \text{ e } \exists \epsilon > 0 \text{ tais que } B(x_0; \epsilon) \cap \partial\Omega \subset \overline{\mathcal{O}} \cap \partial\Omega, \tag{3.0.4}$$

onde $B(x_0; \epsilon)$ é a bola centrada em x_0 com raio ϵ;

$$\bar{y} \in L^\infty(Q)^N, \ \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^\sigma(\Omega)^N); \tag{3.0.5}$$

e

$$\bar{\theta} \in L^\infty(Q), \ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} \in L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)); \tag{3.0.6}$$

onde $\sigma > 1$, se $N = 2$, e $\sigma > \frac{6}{5}$ se $N = 3$. Agora enunciaremos o resultado principal desta dissertação.

Teorema 3.0.5. *Suponhamos que $\mathcal{O}$ satisfaz* 3.0.4 *com $\nu_k(x_0) \neq 0$ para algum $k < N$. Então, para cada $T > 0$, o sistema* 3.0.1 *é local e exatamente controlável em tempo T para a trajetória $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{\theta})$ satisfazendo* 3.0.5 *e* 3.0.6*, com controles v e h em L^2, tais que $v_k \equiv v_N \equiv 0$. Em particular, se $N = 2$, temos controlabilidade local exata por trajetórias com controles $v \equiv 0$ e $h \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$.*

Para provar este teorema, seguiremos um argumento clássico que consiste em fazer uma mudança de variável adequada,que converte o problema original em um problema de controlabilidade nula.

Fazendo $z = y - \bar{y}$, $q = p - \bar{p}$, $\vartheta = \theta - \bar{\theta}$ e subtraindo 3.0.1 com 3.0.3, obtemos o novo sistema de estudo

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + (z.\nabla)z + (\bar{y}.\nabla)z + (z.\nabla)\bar{y} + \nabla q = v1_{\mathcal{O}} + \vartheta e_N \ \text{ em } Q, \\ div\ z = 0 \ \text{ em } Q, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta + z.\nabla\vartheta + \bar{y}.\nabla\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} = h1_{\mathcal{O}} \ \text{ em } Q, \\ z = 0, \ \vartheta = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(0) = y_0 - \bar{y}_0, \ \vartheta(0) = \theta_0 - \bar{\theta}_0 \ \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.0.7}$$

Obteremos a controlabilidade nula do sistema 3.0.7. Para isso estudaremos a controlabilidade nula do sistema linearizado associado a 3.0.7, que é o seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + (\bar{y}.\nabla)z + (z.\nabla)\bar{y} + \nabla q = f + v1_{\mathcal{O}} + \vartheta e_N \ \text{ em } Q, \\ div\ z = 0 \ \text{ em } Q, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta + \bar{y}.\nabla\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} = k + h1_{\mathcal{O}} \ \text{ em } Q, \\ z = 0, \ \vartheta = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(0) = z_0, \ \vartheta(0) = \vartheta_0 \ \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.0.8}$$

com $z_0 = y_0 - \bar{y}_0$ e $\vartheta_0 = \theta_0 - \bar{\theta}_0$, e funções f e k suficientemente regulares.

3.1 Alguns resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos certas funções peso e a desigualdade de Carleman, que serão uma ferramenta necessária para obter a controlabilidade nula do sistema 3.0.8.
Definimos

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4},$$

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4},$$

$$\hat{\alpha}(t) = \min_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m+1)\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},$$

$$\alpha^*(t) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},$$

$$\hat{\xi}(t) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(m+1)\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},$$

$$\xi^*(t) = \min_{x\in\bar{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},$$

onde $m > 4$ é um numero real fixo, η^0 é uma função satisfazendo

$$\eta^0 \in C^2(\bar{\Omega}),\ |\nabla\eta^0| > 0 \text{ em } \Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}_0,\ \eta^0 > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \eta^0 \equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{3.1.1}$$

sendo $\mathcal{O}_0$ é um subconjunto aberto não vazio de $\mathcal{O}$. Para cada $\mathcal{O}_0$, existe uma função η^0 com as propriedades anteriores (Lema de Fursikov).
Agora consideremos o sistema adjunto de 3.0.8

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi + (D\varphi)\bar{y} + \nabla\pi = g + \bar{\theta}\nabla\psi \ \text{ em } Q, \\ div\ \varphi = 0 \ \text{ em } Q, \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi + \bar{y}.\nabla\psi = q + \varphi_N \ \text{ em } Q, \\ \varphi = 0,\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi_0,\ \psi(T) = \psi_0 \ \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.1.2}$$

onde $D\varphi = \nabla\varphi + \nabla\varphi^t$, $g \in [L^2(Q)]^N$, $q \in L^2(Q)$, $\varphi_0 \in H$ e $\psi_0 \in L^2(\Omega)$.

3.1.1 Desigualdade de Carleman para o sistema 3.1.2

Assumiremos que $N = 3$ e $\nu_1(x_0) \neq 0$, para demonstrarmos a estimativa da forma

$$K(\varphi,\psi) \leqslant C\left(\iint_Q \rho_3^2(|g|^2 + |q|^2)dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho_4^2(|\varphi_2|^2 + |\psi|^2)dxdt\right),$$

onde $K(\varphi,\psi) := I(\varphi) + I(\psi)$ e

$$
\begin{aligned}
I(.) :=& \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-12}(T-t)^{-12}|.|^2 dxdt \\
&+ \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-4}(T-t)^{-4}|\nabla(.)|^2 dxdt \\
&+ \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{4}(T-t)^{4}(|\Delta(.)|^2 + |\frac{\partial(.)}{\partial t}|^2) dxdt.
\end{aligned}
$$

Acima, $\bar{\alpha}$ é uma constante que depende somente de Ω, $\mathcal{O}$, T, $\bar{y}$ e $\bar{\theta}$, enquanto ρ_3 e ρ_4 são pesos adequados que decrescem exponencialmente quando $t \to T^-$.

Os resultados que usaremos serão os seguintes lemas

Lema 3.1.1. *Assumindo que* $N = 3$ *e* $\nu_1(x_0) \neq 0$. *Suponhamos também que* $\mathcal{O}$, $(\bar{y},\bar{\theta})$ *satisfazem* 3.0.4 - 3.0.6. *Então, existem uma constante positiva* C, *e duas constantes* $\bar{\alpha}$ *e* $\tilde{\alpha}$, *com* $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ *e* $16\tilde{\alpha} - 15\bar{\alpha} > 0$, *tais que, para cada* $g \in L^2(Q)^3$, $q \in L^2(Q)$, $\varphi_0 \in H$ *e* $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, *a solução* (φ,ψ) *associada a* 3.1.2 *satisfaz*

$$
\begin{aligned}
K(\varphi,\psi) \leqslant C \Bigg(& \iint_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-30}(T-t)^{-30}|g|^2 dxdt \\
&+ \iint_Q e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-252}(T-t)^{-252}|q|^2 dxdt \\
&+ \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\bar{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}|\varphi_2|^2 dxdt \\
&+ \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-268}(T-t)^{-268}|\psi|^2 dxdt \Bigg).
\end{aligned}
$$

Lema 3.1.2. *Sejam* N, ν_1, θ *e* $(\overline{y},\overline{\theta})$ *como no lema* 3.1.1. *Então, existem uma constante positiva* C, *r duas constantes* $\bar{\alpha}$ *e* $\tilde{\alpha}$, *com* $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ *e* $16\tilde{\alpha} - 15\bar{\alpha} > 0$, *tais que, para cada* $g \in L^2(Q)^3$, $q \in L^2(Q)$, $\varphi_0 \in H$ *e* $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, *a solução* (φ,ψ) *associada a* 3.1.2 *satisfaz*

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{l(t)^4}} (l(t)^{-12}(|\varphi|^2 + |\psi|^2) + l(t)^{-4}(|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2)) dxdt \\
&\quad \leqslant C \Bigg(\iint_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-30}|g|^2 dxdt \\
&\quad + \iint_Q e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-252}|q|^2 dxdt \\
&\quad + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-132}|\varphi_2|^2 dxdt \\
&\quad + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-268}|\psi|^2 dxdt \Bigg),
\end{aligned}
$$

onde a função l esta definida como

$$l(t) = \begin{cases} \dfrac{T^2}{4} & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}], \\ t(T-t) & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

Corolário 3.1.3. *Com as mesmas hipóteses e notações dos lemas anteriores, obtemos*

$$\begin{aligned} |\varphi(0)|^2 + |\psi(0)|^2 &+ \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-12}(|\varphi|^2 + |\psi|^2) + \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-4}(|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2) \\ &\leqslant C \left(\iint_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-30} |g|^2 dxdt + \iint_Q e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-252} |q|^2 dxdt \right. \\ &\left. + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-132} |\varphi_2|^2 dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-268} |\psi|^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

Resultados similares também são validos para $N = 2$.

Lema 3.1.4. *Suponhamos que $N = 2$ e $\nu_1(x_0) \neq 0$ e $\mathcal{O}$, $(\bar{y}, \bar{\theta})$ satisfazem* 3.0.4 - 3.0.6. *Então, existem uma constante positiva C, e duas constantes $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, com $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $16\tilde{\alpha} - 15\bar{\alpha} > 0$, tais que, para cada $g \in L^2(Q)^2$, $q \in L^2(Q)$, $\varphi_0 \in H$ e $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, a solução (φ, ψ) associada a* 3.1.2 *satisfaz*

$$\begin{aligned} \iint_Q & e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{l(t)^4}} (l(t)^{-12}(|\varphi|^2 + |\psi|^2) + l(t)^{-4}(|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2)) dxdt \\ &\leqslant C \left(\iint_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-30} |g|^2 dxdt \right. \\ &+ \iint_Q e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-252} |q|^2 dxdt \\ &\left. + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-268} |\psi|^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

Corolário 3.1.5. *Com as mesmas hipóteses do lema anterior, obtemos*

$$\begin{aligned} |\varphi(0)|^2 + |\psi(0)|^2 &+ \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{l(t)^4}} (l(t)^{-12}(|\varphi|^2 + |\psi|^2) + \iint_Q e^{\frac{-2\tilde{\alpha}}{l(t)^4}} (l(t)^{-4}(|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2) \\ &\leqslant C \left(\iint_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-30} |g|^2 dxdt + \iint_Q e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-252} |q|^2 dxdt \right. \\ &\left. + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\bar{\alpha}}{l(t)^4}} l(t)^{-268} |\psi|^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

Observação 3.1.6. *Nos resultados anteriores, como $\mathcal{O}$ satisfaz* 3.0.4, *obtemos que $\nu_k(x_0) \neq 0$ algum k inteiro, assumindo que $k = 1$ demonstramos que a primeira e terceira coordenadas do vetor φ se anulam, provando assim desigualdades de Carleman e Observabilidade que serão utilizadas acima.*

3.2 Controlabilidade nula do sistema 3.0.8

Estudaremos a controlabilidade nula do sistema linear

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial t}-\Delta z+(\bar{y}.\nabla)z+(z.\nabla)\bar{y}+\nabla q=f+v1_{\mathcal{O}}+\vartheta e_N \ \text{ em } Q,\\ div\ z=0 \ \text{ em } Q,\\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}-\Delta\vartheta+\bar{y}.\nabla\vartheta+z.\nabla\bar{\theta}=k+h1_{\mathcal{O}} \ \text{ em } Q,\\ z=0,\ \vartheta=0 \ \text{ sobre } \Sigma,\\ z(0)=z_0,\ \vartheta(0)=\vartheta_0 \ \text{ em } \Omega,\end{array}\right. \tag{3.2.1}$$

onde $\mathcal{O}$ satisfaz 3.0.4 e $(\bar{y},\bar{\theta})$ satisfazem 3.0.5 e 3.0.6, com $z_0=y_0-\bar{y}_0$, $\vartheta_0=\theta_0-\bar{\theta}_0$, e f e k funções suficientemente regulares.

Consideremos as funções peso

$$\beta_5(t)=e^{\frac{\bar{\alpha}}{l(t)^4}}l(t)^6,\ \beta_6(t)=e^{\frac{2\tilde{\alpha}-\bar{\alpha}}{l(t)^4}}l(t)^{15},$$
$$\beta_7(t)=e^{\frac{16\tilde{\alpha}-15\bar{\alpha}}{l(t)^4}}l(t)^{126},\ \beta_8(t)=e^{\frac{8\tilde{\alpha}-7\bar{\alpha}}{l(t)^4}}l(t)^{66},$$

e

$$\beta_9(t)=e^{\frac{16\tilde{\alpha}-15\bar{\alpha}}{l(t)^4}}l(t)^{134},$$

onde as constantes $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são dadas pelos lema 3.1.2 quando $N=3$ e lema 3.1.4 quando $N=2$ (observe que $0<\tilde{\alpha}<\bar{\alpha}$ e $16\tilde{\alpha}-15\bar{\alpha}>0$).

Sejam

$$Lz=\frac{\partial z}{\partial t}-\Delta z+(\bar{y}.\nabla)z+(z.\nabla)\bar{y}$$

e

$$P\vartheta=\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\Delta\vartheta+\bar{y}.\nabla\vartheta.$$

Consideremos também os espaços

$$\begin{aligned}E_2=&\{(z,q,\vartheta,v,h):(z,\vartheta,v,h)\in E_0\ ,\\ &l^{-4}\beta_5(Lz+\nabla q-v1_{\mathcal{O}})\in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^2),\\ &l^{-4}\beta_5(P\vartheta+z.\nabla\bar{\theta}-h1_{\mathcal{O}})\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}\ ,\end{aligned}$$

quando $N=2$, e

$$\begin{aligned}E_3=&\{(z,q,\vartheta,v,h):(z,\vartheta,v,h)\in E_0\ ,\\ &l^{-2}\beta_5^{1/2}z\in L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^3),\\ &l^{-4}\beta_5(Lz+\nabla q-v1_{\mathcal{O}})\in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3),\\ &l^{-4}\beta_5(P\vartheta+z.\nabla\bar{\theta}-h1_{\mathcal{O}})\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}\ ,\end{aligned}$$

quando $N = 3$, onde

$$\begin{aligned} E_0 = \Big\{ &(z,\vartheta,v,h) : (\beta_6 z)_i, \beta_7\vartheta, (\beta_8 v 1_{\mathcal{O}})_i, \beta_9 h 1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q), 1 \leqslant i \leqslant N\ , \\ &v_1 \equiv v_N \equiv 0, l^{-2}\beta_5^{1/2} z \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \\ &l^{-2}\beta_5^{1/2}\vartheta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \Big\}. \end{aligned}$$

Em E_0, E_2 e E_3 consideremos as normas

$$\begin{aligned} \|(z,\vartheta,v,h)\|_{E_0}^2 = &\|\beta_6 z\|_{L^2}^2 + \|\beta_7\vartheta\|_{L^2}^2 + \|\beta_8 v 1_{\mathcal{O}}\|_{L^2}^2 \\ &+ \|\beta_9 h 1_{\mathcal{O}}\|_{L^2}^2 + \|l^{-2}\beta_5^{1/2} z\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|l^{-2}\beta_5^{1/2} z\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \\ &+ \|l^{-2}\beta_5^{1/2}\vartheta\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|l^{-2}\beta_5^{1/2}\vartheta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(z,q,\vartheta,v,h)\|_{E_2}^2 = &\|(z,\vartheta,v,h)\|_{E_0}^2 + \|l^{-4}\beta_5(Lz + \nabla q - v 1_{\mathcal{O}})\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)}^2 \\ &+ \|l^{-4}\beta_5(P\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} - h 1_{\mathcal{O}})\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(z,q,\vartheta,v,h)\|_{E_3}^2 = &\|(z,\vartheta,v,h)\|_{E_0}^2 + \|l^{-2}\beta_5^{1/2} z\|_{L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)}^2 \\ &+ \|l^{-4}\beta_5(Lz + \nabla q - v 1_{\mathcal{O}})\|_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)}^2 \\ &+ \|l^{-4}\beta_5(P\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} - h 1_{\mathcal{O}})\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Dessa maneira, os espaços E_2 e E_3 são espaços de Banach.

Os resultados de que precisamos, serão enunciados na seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Suponhamos que $\nu_1(x_0) \neq 0$ e que $\mathcal{O}$ e $(\bar{y},\bar{\theta})$ satisfazem* 3.0.4 - 3.0.6. *Sejam $z_0 \in E$, $\vartheta_0 \in L^2(\Omega)$ e suponhamos que*

$$l^{-4}\beta_5(f,k) \in \begin{cases} L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^2) \times L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) & se\ N = 2, \\ L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3) \times L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) & se\ N = 3. \end{cases}$$

Então, existem controles v e h tais que a solução associada a 3.2.1 *satisfaz $(z,q,\vartheta,v,h) \in E_N$. Em particular, $v_1 \equiv v_N \equiv 0$ e $z(T) = \vartheta(T) = 0$.*

Demonstração. Faremos a prova para o caso $N = 3$. Para o caso em que $N = 2$, os argumentos são análogos.

Sejam

$$L^* z = -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - (Dz)\bar{y}$$

e

$$P^*\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi - \bar{y}.\nabla\phi$$

Definimos

$$X_0 = \left\{ (w,\psi,h) \in [C^2(Q)]^5; div\ w = 0, w = 0 \text{ e } \psi = 0 \text{ em } \Sigma, \int_{\mathcal{O}} h(x,t)dx = 0 \right\}$$

Consideremos a forma bilinear

$$\begin{aligned} a((z,\phi,q),(w,\psi,r)) = & \iint_Q \beta_6^{-2}(L^*z + \nabla q - \nabla\phi.\bar{\theta})(L^*w + \nabla r - \nabla\psi.\bar{\theta})\ dxdt \\ & + \iint_Q \beta_7^{-2}(P^*\phi - ze_3)(P^*\psi - we_3)\ dxdt \\ & + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^{-2} z_2 w_2\ dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^{-2}\phi\psi\ dxdt, \end{aligned}$$

onde (z,ϕ,q) e $(w,\psi,r) \in X_0$.

Sabemos que $a : X_0 \times X_0 \mapsto \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica sobre X_0. Vejamos que ela é definida positiva. Com efeito, se $a((z,\phi,q),(z,\phi,q)) = 0$, com $(z,\phi,q) \in X_0$, então

$$\begin{aligned} & \iint_Q \beta_6^{-2}|L^*z + \nabla q - \nabla\phi.\bar{\theta}|^2\ dxdt + \iint_Q \beta_7^{-2}|P^*\phi - ze_3|^2\ dxdt \\ & + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^{-2}|z_2|^2\ dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^{-2}|\phi|^2\ dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Assim,

$$\left| \begin{array}{l} L^*z + \nabla q = \nabla\phi.\bar{\theta} \text{ em } Q, \\ div\ z = 0 \text{ em } Q, \\ P^*\phi = ze_3 \text{ em } Q, \\ z = 0,\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ z(T) = z_T,\ \phi(T) = \psi_T \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.2.3}$$

Pelo Lema 3.1.2, aplicado à equação 3.2.3, e por 3.2.2 temos

$$\begin{aligned} & \iint_Q e^{\frac{-2\bar{\alpha}}{l(t)^4}}(l(t)^{-12}(|z|^2 + |\phi|^2) + l(t)^{-4}(|\nabla z|^2 + |\nabla\phi|^2))dxdt \\ & \leqslant C\left(\iint_Q \beta_6^{-2}|g|^2 dxdt + \iint_Q \beta_7^{-2}|q|^2 dxdt \right. \\ & \left. + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^{-2}|z_2|^2 dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^{-2}|\phi|^2 dxdt \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} z = 0 & \text{em } Q, \\ \phi = 0 & \text{em } Q. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Substituindo 3.2.4 em 3.2.3, tem-se

$$\nabla q = 0 \text{ em } Q$$

o que implica que

$$q(x,t) = s(t) \text{ em } Q.$$

Como $\int_\Omega q(x,t)dx = 0$, segue que $s(t) = 0$ para todo $t \in (0,T)$. Logo, $q = 0$ em Q. Isto significa que

$$(z, \phi, q) = (0, 0, 0).$$

Assim $a = a(.,.)$ define um produto interno sobre X_0. Denotamos por X ao completamento de X_0 com respeito ao produto interno $a(.,.)$.

Definimos o funcional linear $G : X \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}\langle G, (w, \psi, r)\rangle = &\int_\Omega z_0 w(0) + \int_\Omega \vartheta_0 \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt \\ &+ \int_0^T \langle k(t), \psi(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt,\end{aligned}$$

onde $(w, \psi, r) \in X$.

Vejamos que G está bem definido e é contínuo. Com efeito, dado $(w, \psi, r) \in X$, temos

$$
\begin{aligned}
|\langle G,(w,\psi,r)\rangle| &\leqslant \int_\Omega |z_0 w(0)| + \int_\Omega |\vartheta_0\psi(0)| + \int_0^T |\langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}|dt \\
&\quad + \int_0^T |\langle k(t),\psi(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}|dt \\
&\leqslant |z_0|_H|w(0)|_H + |\vartheta_0|_H|\psi(0)|_H \\
&\quad + \int_0^T |\langle l^{-4}(t)\beta_5(t)f(t), l^4(t)\beta_5^{-1}(t)w(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}|dt \\
&\quad + \int_0^T |\langle l^{-4}(t)\beta_5(t)k(t), l^4(t)\beta_5^{-1}(t)\psi(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}|dt \\
&\leqslant |z_0|_H|w(0)|_H + |\vartheta_0|_H|\psi(0)|_H \\
&\quad + C\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)f(t)|^2_{H^{-1}}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T |l^4(t)\beta_5^{-1}(t)w(t)|^2_{H_0^1}dt\right)^{1/2} \\
&\quad + C\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)k(t)|^2_{H^{-1}}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T |l^4(t)\beta_5^{-1}(t)\psi(t)|^2_{H_0^1}dt\right)^{1/2} \\
&\leqslant |z_0|_H|w(0)|_H + |\vartheta_0|_H|\psi(0)|_H \\
&\quad + C\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)f(t)|^2_{W^{-1,6}}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T |l^4(t)\beta_5^{-1}(t)\nabla w(t)|^2_{L^2}dt\right)^{1/2} \\
&\quad + C\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)k(t)|^2_{H^{-1}}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T |l^4(t)\beta_5^{-1}(t)\nabla\psi(t)|_{L^2}dt\right)^{1/2} \\
&\leqslant C\left(|z_0|^2_H + |\vartheta_0|^2_H + \int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)f(t)|^2_{W^{-1,6}}dt + \int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)k(t)|^2_{H^{-1}}dt\right)^{1/2} \\
&\cdot\left(|w(0)|^2_H + |\psi(0)|^2_H + \int_0^T l^8(t)\beta_5^{-2}(t)|\nabla w(t)|^2_{L^2}dt + \int_0^T l^8(t)\beta_5^{-2}(t)|\nabla\psi(t)|_{L^2}dt\right)^{1/2} \\
&\leqslant C\left(\iint_Q \beta_6^{-2}|L^*w + \nabla r - \nabla\psi.\bar\theta|^2\,dxdt + \iint_Q \beta_7^{-2}|P^*\psi - we_3|^2\,dxdt\right. \\
&\quad \left. + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^{-2}|w_2|^2\,dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^{-2}|\psi|^2\,dxdt\right)^{1/2} \\
&= C\ a(w,\psi,r),
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade e proveniente do Corolario 3.1.3.

Isto mostra que G está bem definida e é contínua.

Assim pelo teorema 1.1.10 (Lax-Milgram) , existe um único $(\hat{z},\hat{\phi},\hat{q}) \in X$ tal que $a((z,\phi,q),(w,\psi,r)) = \langle G,(w,\psi,r)\rangle,\ \forall (w,\psi,r)\in X.$ possui uma única solução que denotaremos por .

Isto equivale a dizer que

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q \beta_6^{-2}(L^*\hat{z} + \nabla\hat{q} - \nabla\hat{\phi}.\bar{\theta})(L^*w + \nabla r - \nabla\psi.\bar{\theta})\ dxdt \\
&\quad + \iint_Q \beta_7^{-2}(P^*\hat{\phi} - \hat{z}e_3)(P^*\psi - we_3)\ dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^{-2}\hat{z}_2 w_2\ dxdt \\
&\quad + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^{-2}\hat{\phi}\psi\ dxdt \\
&= \int_\Omega z_0 w(0) + \int_\Omega \vartheta_0\psi(0) \\
&\quad + \int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt + \int_0^T \langle k(t), \psi(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

Definimos

$$
\begin{cases}
\hat{y} = \beta_6^{-2}(L^*\hat{z} + \nabla\hat{q} - \nabla\hat{\phi}.\bar{\theta}),\ div\hat{z} = 0 & \text{em } Q, \\
\hat{\theta} = \beta_7^{-2}(P^*\hat{\phi} - \hat{z}e_3) & \text{em } Q, \\
\hat{v}_1 \equiv \hat{v}_3 \equiv 0,\ \hat{v}_2 = -\beta_8^{-2}\hat{z}_2 & \text{em } \mathcal{O}\times(0,T), \\
\hat{h} = -\beta_9^{-2}\hat{\phi} & \text{em } \mathcal{O}\times(0,T), \\
\hat{z} = 0 & \text{em } \Sigma.
\end{cases}
\tag{3.2.6}
$$

Substituindo 3.2.6 em 3.2.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q \hat{y}(L^*w + \nabla r - \nabla\psi.\bar{\theta})\ dxdt + \iint_Q \hat{\theta}(P^*\psi - we_3)\ dxdt \\
&\quad = \int_\Omega z_0 w(0) + \int_\Omega \vartheta_0\psi(0) + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{v}w\ dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{h}\psi\ dxdt \\
&\quad + \int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt + \int_0^T \langle k(t), \psi(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt
\end{aligned}
$$

isto é

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q \hat{y}b_1\ dxdt + \iint_Q \hat{\theta}b_2\ dxdt \\
&\quad = \int_\Omega z_0 w(0) + \int_\Omega \vartheta_0\psi(0) \\
&\quad + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{v}w\ dxdt + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{h}\psi\ dxdt \\
&\quad + \int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt + \int_0^T \langle k(t), \psi(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} dt,
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

onde (w, ψ, r) é solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} L^* w + \nabla r - \nabla \psi . \bar{\theta} = b_1 \text{ em } Q, \\ div\ w = 0 \text{ em } Q, \\ P^* \psi - w e_3 = b_2 \text{ em } Q, \\ w = 0,\ \psi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0,\ \psi(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right.$$

Assim, $(\hat{y}, \hat{\theta}, \hat{v}, \hat{q})$ é uma solução por transposição do problema

$$\left|\begin{array}{l} L\hat{y} + \nabla \hat{q} = f + \hat{v} 1_{\mathcal{O}} + \hat{\theta} e_3 \text{ em } Q, \\ div\ \hat{y} = 0 \text{ em } Q, \\ P\hat{\theta} + \hat{y}.\nabla \bar{\theta} = k + \hat{h} 1_{\mathcal{O}} \text{ em } Q, \\ \hat{y} = 0,\ \hat{\theta} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \hat{y}(0) = z_0,\ \hat{\theta}(0) = \vartheta_0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.2.8}$$

Como $(\hat{z}, \hat{\phi}, \hat{q}) \in X$, segue que

$$\begin{cases} \beta_6^{-1}(L^* \hat{z} + \nabla \hat{q} - \nabla \hat{\phi}.\bar{\theta}) \in L^2(Q)^3, \\ \beta_7^{-1}(P^* \hat{\phi} - \hat{z} e_3) \in L^2(Q). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \hat{y} \in \beta_6^{-1} L^2(Q)^3 \subset [L^2(Q)[^3, \\ \hat{\theta} \in \beta_7^{-1} L^2(Q) \subset L^2(Q). \end{cases}$$

Como f e k são suficientemente regulares, por hipótese, temos pelo Teorema 1.7.20 (de existência e unicidade do sistema de Boussinesq) que

$$\hat{y} \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H),\ \hat{\theta} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \iint_Q \beta_6^2 |\hat{y}|^2 dxdt &= \iint_Q \beta_6^2 \beta_6^{-4} |L^* \hat{z} + \nabla \hat{q} - \nabla \hat{\phi}.\bar{\theta}|^2 dxdt \\ &= \iint_Q \beta_6^{-2} |L^* \hat{z} + \nabla \hat{q} - \nabla \hat{\phi}.\bar{\theta}|^2 dxdt < +\infty, \end{aligned}$$

$$\iint_Q \beta_7^2 |\hat{\theta}|^2 dxdt = \iint_Q \beta_7^2 \beta_7^{-4} |P^* \hat{\phi} - \hat{z} e_3|^2 dxdt = \iint_Q \beta_7^{-2} |P^* \hat{\phi} - \hat{z} e_3|^2 dxdt < +\infty,$$

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^2 |\hat{v}_2|^2 = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^2 \beta_8^{-4} |\hat{z}_2|^2 dxdt = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_8^{-2} |\hat{z}_2|^2 dxdt < +\infty,$$

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^2|\hat{h}|^2 dxdt = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^2\beta_9^{-4}|\hat{\phi}|^2 dxdt = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_9^{-2}|\hat{\phi}|^2 dxdt < +\infty.$$

Agora, provaremos que $(\hat{y},\hat{q},\hat{\theta},\hat{v},\hat{h}) \in E_3$. Para isso, consideremos as mudanças de variáveis

$$y^* = l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{y}, \quad \theta^* = l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{\theta}, \quad q^* = l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{q},$$

$$v^* = l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{v} \text{ e } \ h^* = l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{h}.$$

Assim,

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} = (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{y} + l^{-2}\beta_5^{1/2}\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{\theta} + l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{\theta}_t$$

Logo o sistema 3.2.8 se transforma em

$$\left|\begin{array}{l} Ly^* + \nabla q^* = l^{-2}\beta_5^{1/2}f + v^*1_{\mathcal{O}} + \theta^* e_N - (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{y} \ \text{ em } Q, \\ div \ y^* = 0 \ \text{ em } Q, \\ P\theta^* + y^*.\nabla\bar{\theta} = l^{-2}\beta_5^{1/2}k + h^*1_{\mathcal{O}} - (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{\theta} \ \text{ em } Q, \\ y^* = 0, \ \theta^* = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y^*(0) = l^{-2}(0)\beta_5(0)^{1/2}z_0, \ \theta^*(0) = l^{-2}(0)\beta_5^{1/2}(0)\vartheta_0 \ \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.2.9}$$

Sabemos que

$$\hat{y} \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H), \ \hat{\theta} \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,L^2(\Omega)),$$

$$(\beta_6\hat{y})_i, \beta_7\hat{\theta}, (\beta_8\hat{v}1_{\mathcal{O}})_i, \beta_9\hat{h}1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)$$

e

$$l^4\beta_5 f \in L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3), \ l^4\beta_5 k \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Afirmamos que

$$\begin{cases} l^{-2}\beta_5^{1/2}f + v^*1_{\mathcal{O}} - (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{y} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^3) \\ l^{-2}\beta_5^{1/2}k + h^*1_{\mathcal{O}} - (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{\theta} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{cases}$$

Com efeito, temos

- $l^{-2}\beta_5^{1/2}f \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3)$: de fato,

$$
\begin{aligned}
|l^{-2}\beta_5^{1/2} f|^2_{L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3)} &= \int_0^T l^{-4}(t)\beta_5(t)|f(t)|^2_{[H^{-1}(\Omega)]^3}\ dt \\
&= \int_0^T l^{4}(t)\beta_5^{-1}(t) l^{-8}(t)\beta_5^2(t)|f(t)|^2_{[H^{-1}(\Omega)]^3}\ dt.
\end{aligned}
$$

Vejamos que $l^4\beta_5^{-1} \in L^\infty(0,T)$. Com efeito,

$$
l^4\beta_5^{-1} = \frac{l^4 e^{-\frac{\bar{\alpha}}{l^4}}}{l^6} = \frac{e^{-\frac{\bar{\alpha}}{l^4}}}{l^2}.
$$

Assim,

$$
\lim_{t\to 0^+} l^4(t)\beta_5^{-1}(t) = 0
$$

e

$$
\lim_{t\to T^-} l^4(t)\beta_5^{-1}(t) = 0.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|l^{-2}\beta_5^{1/2} f|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^3)} &\leqslant C\int_0^T l^{-8}(t)\beta_5^2(t)|f(t)|_{[H^{-1}(\Omega)^3]}{}^2\ dt \\
&= C|l^{-4}\beta_5 f|^2_{L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3)} \\
&\leqslant C|l^{-4}\beta_5 f|^2_{L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3)} < +\infty
\end{aligned}
$$

- $l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{v}1_{\mathcal{O}} \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$: de fato,

$$
\begin{aligned}
|l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{v}1_{\mathcal{O}}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &= \int_0^T l^{-4}(t)\beta_5(t)|\hat{v}|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3}\ dt \\
&= \int_0^T l^{-4}(t)\beta_5(t)\beta_8^{-2}(t)\beta_8^2(t)|\hat{v}(t)|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3}\ dt.
\end{aligned}
$$

Vejamos que $l^{-4}\beta_5\beta_8^{-2} \in L^\infty(0,T)$. Com efeito,

$$
l^{-4}\beta_5\beta_8^{-2} = \frac{l^{-4}e^{-\frac{\bar{\alpha}}{l^4}} l^6}{e^{\frac{8\hat{\alpha}-7\bar{\alpha}}{l^4}} l^{132}} = \frac{e^{-\frac{(16\hat{\alpha}-15\bar{\alpha})}{l^4}}}{l^{130}}.
$$

Assim,

$$
\lim_{t\to 0^+} l^{-4}(t)\beta_5(t)\beta_8^{-2}(t) = 0
$$

e

$$
\lim_{t\to T^-} l^{-4}(t)\beta_5(t)\beta_8^{-2}(t) = 0.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{v}1_{\mathcal{O}}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &\leqslant C\int_0^T \beta_8^2(t)|\hat{v}(t)|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3}\ dt \\
&= C|\beta_8\hat{v}|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3} < +\infty
\end{aligned}
$$

- $(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{y} \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$: de fato,

$$
\begin{aligned}
|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{y}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &= \int_0^T \left|(l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t))_t\right|^2 |\hat{y}|^2_{[L^2(\Omega)]^3}\, dt \\
&= \int_0^T \left|(l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t))_t\right|^2 \beta_6^{-2}(t)\beta_6^2(t)|\hat{y}(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^3}\, dt.
\end{aligned}
$$

Vejamos que $\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\right|^2 \beta_6^{-2} \in L^\infty(0,T)$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t &= (l^{-2}e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}l^3)_t = (le^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}})_t \\
&= l_t e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^3} l e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} = l_t e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^2} e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\beta_6^{-1}\right| &= \left|\frac{l_t e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^2}e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}}{e^{\frac{2\hat{\alpha}-\bar{\alpha}}{l^4}}l^{30}}\right| = \left|\left(\frac{l_t}{l^{30}}\right)e^{-\frac{4\hat{\alpha}-3\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^{32}}e^{-\frac{4\hat{\alpha}-3\bar{\alpha}}{2l^4}}\right| \\
&\leqslant \frac{T}{l^{30}}e^{-\frac{4\hat{\alpha}-3\bar{\alpha}}{2l^4}} + \frac{2\bar{\alpha}}{l^{32}}e^{-\frac{4\hat{\alpha}-3\bar{\alpha}}{2l^4}}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\lim_{t\to 0^+} \left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\right|^2 |\beta_6|^{-2} = 0
$$

e

$$
\lim_{t\to T^-} \left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\right|^2 |\beta_6|^{-2} = 0.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{y}\right|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &\leqslant C\int_0^T \beta_6^2(t)|\hat{y}(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^3}\, dt \\
&= C|\beta_6\hat{y}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} < +\infty.
\end{aligned}
$$

- $l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{h}1_{\mathcal{O}} \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$: de fato,

$$
\begin{aligned}
|l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{h}1_{\mathcal{O}}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &= \int_0^T l^{-4}(t)\beta_5(t)|\hat{h}|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3}\, dt \\
&= \int_0^T l^{-4}(t)\beta_5(t)\beta_9^{-2}(t)\beta_9^2(t)|\hat{h}(t)|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3}\, dt.
\end{aligned}
$$

Vejamos que $l^{-4}\beta_5\beta_9^{-2} \in L^\infty(0,T)$. Com efeito,

$$
l^{-4}\beta_5\beta_9^{-2} = \frac{l^{-4}e^{-\frac{\bar{\alpha}}{l^4}}l^6}{e^{\frac{16\hat{\alpha}-15\bar{\alpha}}{l^4}}l^{268}} = \frac{e^{-\frac{(32\hat{\alpha}-31\bar{\alpha})}{l^4}}}{l^{266}}.
$$

Assim,

$$
\lim_{t\to 0^+} l^{-4}(t)\beta_5(t)\beta_9^{-2}(t) = 0
$$

e

$$\lim_{t\to T^-} l^{-4}(t)\beta_5(t)\beta_9^{-2}(t) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|l^{-2}\beta_5^{1/2}\hat{h}1_{\mathcal{O}}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &\leqslant C\int_0^T \beta_9^2(t)|\hat{h}(t)|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3}\, dt\\ &= C|\beta_9\hat{h}|^2_{[L^2(\mathcal{O})]^3} < +\infty\end{aligned}$$

- $(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{\theta} \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$: de fato,

$$\begin{aligned}\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{\theta}\right|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &= \int_0^T \left|(l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t))_t\right|^2 |\hat{\theta}|^2_{[L^2(\Omega)]^3)}\, dt\\ &= \int_0^T \left|(l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t))_t\right|^2 \beta_7^{-2}(t)\beta_7^2(t)|\hat{\theta}(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^3}\, dt.\end{aligned}$$

Vejamos que $\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\right|^2 \beta_7^{-2} \in L^\infty(0,T)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t &= (l^{-2}e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}l^3)_t = (le^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}})_t\\ &= l_te^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^3}le^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} = l_te^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^2}e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\beta_7^{-1}| &= \left|\frac{l_te^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^2}e^{\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}}{e^{\frac{16\bar{\alpha}-15\bar{\alpha}}{l^4}}l^{126}}\right| = \left|\left(\frac{l_t}{l^{126}}\right)e^{-\frac{32\bar{\alpha}-31\bar{\alpha}}{2l^4}} - \frac{2\bar{\alpha}}{l^{128}}e^{-\frac{32\bar{\alpha}-31\bar{\alpha}}{2l^4}}\right|\\ &\leqslant \frac{T}{l^{126}}e^{-\frac{32\bar{\alpha}-31\bar{\alpha}}{2l^4}} + \frac{2\bar{\alpha}}{l^{128}}e^{-\frac{32\bar{\alpha}-31\bar{\alpha}}{2l^4}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0^+}\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\right|^2|\beta_7|^{-2} = 0$$

e

$$\lim_{t\to T^-}\left|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\right|^2|\beta_7|^{-2} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|(l^{-2}\beta_5^{1/2})_t\hat{\theta}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} &\leqslant C\int_0^T \beta_7^2(t)|\hat{\theta}(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^3}\, dt\\ &= C|\beta_7\hat{\theta}|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} < +\infty.\end{aligned}$$

Demonstrada a afirmação anterior, pelo Teorema 1.7.20 (de existência e unicidade do sistema de Boussinesq), obtemos

$$y^* \in L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H) \text{ e } \theta^* \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T,L^2(\Omega)).$$

Lema 3.2.2. *Se* $k \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^3)$*, então existe uma única solução* (w,r) *do sistema de Stokes*

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \nabla r = k \quad em\ Q, \\ div\ w = 0 \quad em\ Q, \\ w = 0 \quad sobre\ \Sigma, \\ w(T) = 0 \quad em\ \Omega, \end{array}\right. \tag{3.2.10}$$

com $w \in C([0,T];[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^3) \cap L^2(0,T;[W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)]^3)$.

Consideremos por

$$f^* = l^{-2}\beta_5^{1/2} f + v^* 1_{\mathcal{O}} - (l^{-2}\beta_5^{1/2})_t \hat{y} \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3)$$

Seja $k \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^3)$. Então

$$\begin{aligned}
\int_Q y^* k dxdt &= \int_Q y^* \left(-\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \nabla r\right) dxdt \\
&= \int_Q y^* \left(-\frac{\partial w}{\partial t}\right) dxdt - \int_Q y^* \Delta w dxdt + \int_Q y^* \nabla r dxdt \\
&= \int_\Omega w(0) y^*(0) dx - \int_\Omega w(T) y^*(T) dx + \int_Q \frac{\partial y^*}{\partial t} w dxdt - \int_Q \Delta y^* w dxdt \\
&= \int_\Omega l^{-2}(0)\beta_5(0) z_0 w(0) dx + \int_Q \left(\frac{\partial y^*}{\partial t} - \Delta y^*\right) w dxdt \\
&= \int_\Omega l^{-2}(0)\beta_5(0) z_0 w(0) dx \\
&\quad + \int_Q (f^* + \theta^* e_3 - (\bar{y}.\nabla) y^* - (y^*.\nabla)\bar{y} - \nabla q^*) w dxdt \\
&= \int_\Omega l^{-2}(0)\beta_5(0) z_0 w(0) dx + \int_Q (f^* + \theta^* e_3 - (\bar{y}.\nabla) y^* - (y^*.\nabla)\bar{y}) w dxdt.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.2, temos que $w \in C([0,T];[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^3) \cap L^2(0,T;[W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)]^3)$.
Logo, concluímos que

$$\begin{aligned}
& w(0) \in [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^3, \\
& z_0 \in [L^4(\Omega)]^3, \\
& f^* \in L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3), \\
& \theta^* e_3 \in L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^3) \hookrightarrow L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3), \\
& (\bar{y}.\nabla) y^* \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3) \hookrightarrow L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3), \\
& \text{e} \\
& (y^*.\nabla)\bar{y} \in L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^3) \hookrightarrow L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_Q y^* k dx dt = l^{-2}(0)\beta_5(0)\langle z_0, w(0)\rangle_{L^4 \times L^{\frac{4}{3}}}$$
$$+ \langle f^* + \theta^* e_3 - (\bar{y}.\nabla)y^* - (y^*.\nabla)\bar{y}, w\rangle_{L^2(0,T;W^{-1,6})\times L^2(0,T;W^{1,\frac{6}{5}})} < +\infty.$$

Definimos o funcional

$$\begin{aligned} L : L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longmapsto \langle L, k\rangle := \int_Q y^* k dx dt \end{aligned}$$

Claramente, L é linear. Vejamos que L seja contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} |\langle L, k\rangle| &= \left|\int_Q y^* k dx dt\right| \\ &= \Big| l^{-2}(0)\beta_5(0)\langle z_0, w(0)\rangle_{L^4 \times L^{\frac{4}{3}}} \\ &\quad + \langle f^* + \theta^* e_3 - (\bar{y}.\nabla)y^* - (y^*.\nabla)\bar{y}, w\rangle_{L^2(0,T;W^{-1,6})\times L^2(0,T;W^{1,\frac{6}{5}})}\Big| \\ &\leqslant l^{-2}(0)\beta_5(0)\left|\langle z_0, w(0)\rangle_{L^4 \times L^{\frac{4}{3}}}\right| \\ &\quad + \left|\langle f^* + \theta^* e_3 - (\bar{y}.\nabla)y^* - (y^*.\nabla)\bar{y}, w\rangle_{L^2(0,T;W^{-1,6})\times L^2(0,T;W^{1,\frac{6}{5}})}\right| \\ &\leqslant l^{-2}(0)\beta_5(0)|z_0|_{L^4}|w(0)|_{L^{\frac{4}{3}}} \\ &\quad + |f^* + \theta^* e_3 - (\bar{y}.\nabla)y^* - (y^*.\nabla)\bar{y}|_{L^2(0,T;W^{-1,6})}|w|_{L^2(0,T;W^{1,\frac{6}{5}})} \\ &\leqslant C\left(|w(0)|_{L^{\frac{4}{3}}} + |w|_{L^2(0,T;W^{1,\frac{6}{5}})}\right) \\ &\leqslant C\left(|w|_{C([0,T];[L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^3)} + |w|_{L^2(0,T;[W^{1,\frac{6}{5}}(\Omega)]^3)}\right) \\ &\leqslant C|k|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;[L^{\frac{12}{11}}(\Omega)]^3)} \end{aligned}$$

Logo $L \in (L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^{\frac{12}{11}}(\Omega)^3))' = L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)$. Pelo Teorema 1.3.7 (da representação de Riesz-Fréchet), tem-se que $L = y^*$.

Assim,

$$y^* \in L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^3),$$

o que significa que

$$(\hat{y}, \hat{q}, \hat{\theta}, \hat{v}, \hat{h}) \in E_3.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

3.3 Demonstração do teorema 3.0.5

Como a demonstracao do Teorema 3.0.5 consiste em aplicar o teorema de Liusternik, relembramos seu enunciado:

Teorema 3.3.1 (Teorema de Liusternik)**.** *Sejam B_1 e B_2 dois espaços de Banach e consideremos uma aplicação $\mathcal{A} : B_1 \mapsto B_2$ satisfazendo $\mathcal{A} \in C^1(B_1, B_2)$. Suponhamos que $b_0 \in B_1$, $\mathcal{A}(b_0) = d_0$ e também que $\mathcal{A}'(b_0) : B_1 \mapsto B_2$ seja sobrejetora. Então existe $\delta > 0$ tal que, para cada $d \in B_2$ satisfazendo $\|d - d_0\|_{B_2} < \delta$, existe $b \in B_1$ tal que*

$$\mathcal{A}(b) = d.$$

Lembremos o sistema de Boussinesq 3.0.7, dado por

$$\left|\begin{array}{l} Lz + (z.\nabla)z + \nabla q = v1_{\mathcal{O}} + \vartheta e_N \ \text{ em } Q, \\ div\ z = 0 \text{ em } Q \\ P\vartheta + z.\nabla\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} = h1_{\mathcal{O}} \ \text{ em } Q, \\ z = 0,\ \vartheta = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(0) = z_0,\ \vartheta(0) = \vartheta_0 \ \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.3.1}$$

onde $z_0 = y_0 - \bar{y}_0$ e $\vartheta_0 = \theta_0 - \bar{\theta}_0$.
Para mostrar a controlabilidade nula local do sistema 3.3.1, utilizaremos o Teorema 3.3.1.
Sejam $B_1 = E_N$ e

$$B_2 = \begin{cases} L^2(l^{-4}\beta_5; 0, T; [H^{-1}(\Omega)]^3) \times H^{-1}(\Omega) \times H \times L^2(\Omega) \text{ se } N = 2, \\ L^2(l^{-4}\beta_5; 0, T; [W^{-1,6}(\Omega)]^3) \times H^{-1}(\Omega) \times (L^4(\Omega)^3 \cap H) \times L^2(\Omega) \text{ se } N = 3, \end{cases}$$

e consideremos a aplicação

$$\mathcal{A}(z, q, \vartheta, v, h) = (\mathcal{A}_1(z, q, \vartheta, v, h), \mathcal{A}_2(z, q, \vartheta, v, h), z(0), \vartheta(0))$$

onde

$$\mathcal{A}_1(z, q, \vartheta, v, h) = Lz + (z.\nabla)z + \nabla q - v1_{\mathcal{O}} - \vartheta e_N$$

e

$$\mathcal{A}_2(z, q, \vartheta, v, h) = P\vartheta + z.\nabla\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} - h1_{\mathcal{O}}$$

para cada $(z,q,\vartheta,v,h)\in E_N$.

Vejamos que $\mathcal{A}_1$ está bem definida e que $\mathcal{A}_1\in C^1(B_1.B_2)$.

Com efeito, como $l^{-2}\beta_5\in L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^3)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T &\langle l^{-4}(t)\beta_5(t)(z(t).\nabla)z(t),\varphi(t)\rangle_{W^{-1,6}\times W_0^{1,6/5}}dt\\
&= \int_0^T \langle l^{-4}(t)\beta_5(t)\nabla.(z(t)\otimes z(t)),\varphi(t)\rangle_{W^{-1,6}\times W_0^{1,6/5}}dt\\
&= \int_0^T \langle l^{-4}(t)\beta_5(t)(z(t)\otimes z(t)),\nabla\varphi(t)\rangle_{W^{-1,6}\times W_0^{1,6/5}}\\
&\leqslant \left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)(z(t)\otimes z(t))|^2_{W^{-1,6}}dt\right)^{1/2}\\
&\quad\cdot\left(\int_0^T |\nabla\varphi(t)|^2_{W_0^{1,6/5}}dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)(z(t)\otimes z(t))|^2_{L^6}dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\left(\int_0^T |l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)z(t)|^4_{L^{12}}dt\right)^{1/2}\\
&= C|l^{-2}\beta_5^{1/2}z|^2_{L^4(0,T;[L^{12}(\Omega)]^3)}<+\infty,
\end{aligned}$$

para cada $\varphi\in[W_0^{1,6/5}(\Omega)]^3$.

Logo,

$$l^{-4}\beta_5(z.\nabla)z\in L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3)$$

e além disso, como $l^{-2}\beta_5^{1/2}\vartheta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que

$$l^{-4}\beta_5\vartheta e_N\in L^2(0,T;[W^{-1,6}(\Omega)]^3).$$

Assim, $\mathcal{A}_1$ está bem definida e é uma aplicação $C^1(B_1,B_2)$ pois é a soma de uma aplicação linear e uma aplicação quadrática proveniente de uma aplicação bilinear de classe $C^1(B_1,B_2)$.

Agora vejamos que $\mathcal{A}_2$ está bem definida e é de classe $C^1(B_1,B_2)$.

Com efeito, como $l^{-2}\beta_5^{1/2}\vartheta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\hookrightarrow L^4(0,T;L^3(\Omega))$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \langle l^{-4}(t)\beta_5(t)(z(t).\nabla)\vartheta(t),\varphi(t)\rangle_{W^{-1,12/5}\times W_0^{1,12/7}}dt=\\
&\quad=\int_0^T \langle l^{-4}(t)\beta_5(t)\nabla.(z(t)\vartheta(t)),\varphi(t)\rangle_{W^{-1,12/5}\times W_0^{1,12/7}}dt\\
&\quad=\int_0^T \langle l^{-4}(t)\beta_5(t)z(t)\vartheta(t),\nabla\varphi(t)\rangle_{W^{-1,12/5}\times W_0^{1,12/7}}\\
&\quad\leqslant\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)z(t)\vartheta(t)|^2_{W^{-1,12/5}}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T |\nabla\varphi(t)|^2_{W_0^{1,12/7}}dt\right)^{1/2}\\
&\quad\leqslant C\left(\int_0^T |l^{-4}(t)\beta_5(t)z(t)\vartheta(t)|^2_{L^{12/5}}dt\right)^{1/2}\\
&\quad\leqslant C\left(\int_0^T |l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)z(t)l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)\vartheta(t)|^2_{L^{12/5}}dt\right)^{1/2}\\
&\quad\leqslant C\left(\int_0^T |l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)z(t)|^2_{L^{12}}|l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)\vartheta(t)|^2_{L^{3}}dt\right)^{1/2}\\
&\quad\leqslant C\left(\int_0^T |l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)z(t)|^4_{L^{12}}dt\right)^{1/4}\left(\int_0^T |l^{-2}(t)\beta_5^{1/2}(t)\vartheta(t)|^4_{L^{3}}dt\right)^{1/4}\\
&\quad=C|l^{-2}\beta_5^{1/2}z|_{L^4(0,T;L^{12})}|l^{-2}\beta_5^{1/2}\vartheta|_{L^4(0,T;L^3)}<+\infty
\end{aligned}
$$

para cada $\varphi\in[W_0^{1,12/7}(\Omega)]^3$.

Logo,

$$l^{-4}\beta_5(z.\nabla)\vartheta\in L^2(0,T;W^{-1,12/5}(\Omega))\hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

ou seja,

$$l^{-4}\beta_5(z.\nabla)\vartheta\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Assim, $\mathcal{A}_2$ está bem definida e é uma aplicação $C^1(B_1,B_2)$, pois é a soma de uma aplicação linear e uma aplicação quadrática proveniente de uma aplicação bilinear de classe $C^1(B_1,B_2)$.

Calcularemos $\mathcal{A}'(0,0,0,0,0)$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1'(0,0,0,0,0)(z,q,\vartheta,v,h)&=\frac{\partial}{\partial\lambda}[\mathcal{A}_1(\lambda z,\lambda q,\lambda\vartheta,\lambda v)]|_{\lambda=0}\\
&=\frac{\partial}{\partial\lambda}[L\lambda z+(\lambda z.\nabla)\lambda z+\nabla\lambda q-\lambda v1_{\mathcal{O}}-\lambda\vartheta e_N]|_{\lambda=0}\\
&=[Lz+2\lambda(z.\nabla)z+\nabla q-v1_{\mathcal{O}}-\vartheta e_N]|_{\lambda=0}\\
&=Lz+\nabla q-v1_{\mathcal{O}}-\vartheta e_N
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2'(0,0,0,0,0)(z,q,\vartheta,v,h) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}[\mathcal{A}_2(\lambda z,\lambda\vartheta,\lambda h)]|_{\lambda=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}[P\lambda\vartheta + (\lambda z.\nabla)\lambda\vartheta + \lambda z.\nabla\bar{\theta} - \lambda h 1_{\mathcal{O}}]|_{\lambda=0} \\
&= [P\vartheta + 2\lambda(z.\nabla)\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} - h1_{\mathcal{O}}]|_{\lambda=0} \\
&= P\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} - h1_{\mathcal{O}}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\mathcal{A}'(0,0,0,0,0)(z,q,\vartheta,v,h) = (Lz + \nabla q - v1_{\mathcal{O}} - \vartheta e_N, P\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} - h1_{\mathcal{O}}, z(0), \vartheta(0)).
$$

Pela Proposição 3.2.1, a aplicação $\mathcal{A}'(0,0,0,0,0) : B_1 \mapsto B_2$ é sobrejetora.
Assim pelo Teorema 3.3.1, existe $\delta > 0$ tal que, se $(0,0,z_0,\vartheta_0) \in B_2$ e $\|(0,0,z_0,\vartheta_0)\|_{B_2} < \delta$, então a equação

$$
\mathcal{A}((z,q,\vartheta,v,h)) = (0,0,z_0,\vartheta_0)
$$

possui uma solução $(z,q,\vartheta,v,h) \in B_1$. Em outras palavras, o sistema

$$
\left|\begin{array}{l}
Lz + (z.\nabla)z + \nabla q = v1_{\mathcal{O}} + \vartheta e_N \ \text{ em } Q, \\
div\ z = 0 \ \text{ em } Q \\
P\vartheta + z.\nabla\vartheta + z.\nabla\bar{\theta} = h1_{\mathcal{O}} \ \text{ em } Q, \\
z = 0, \ \vartheta = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\
z(0) = z_0, \ \vartheta(0) = \vartheta_0 \ \text{ em } \Omega,
\end{array}\right. \tag{3.3.2}
$$

é localmente controlável a zero no tempo T, como queríamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

[1] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. On exact boundary zero-controllability of two-dimensional navier-stokes equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 37:67–76, 1994.

[2] A. V. Fursikov. Exact boundary zero controllability of three dimensional navier-stokes equations. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 1:325–350, 1995.

[3] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. Controllability of evolution equations. *Lecture Notes, Seoul National University, Korea*, 34, 1996.

[4] O. Yu. Imanuvilov. Boundary controllability of parabolic equations. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 186:109–132, 1995.

[5] O. Yu. Imanuvilov D. Chae and S. M. Kim. Exact controllability for semilinear parabolic equations with neumann boundary conditions. *RIM GARC Preprint, Seoul National University, Korea*, 95-76, 1995.

[6] E. Fernandez-Cara. Talk at the international conference on control and estimation of distributed parameter systems. *Vorau, Austria*, 2006.

[7] S. Guerrero. Local exact controllability to the trajetories of the boussinesq system. *Ann. I. H. Poincaré*, AN 23:29–61, 2006.

[8] O. Yu. Imanuvilov J.-P. Puel E. Fernandez-Cara, S. Guerrero. Some controllability results for the n-dimensional navier-stokes and boussinesq systems with $n-1$ scalar controls. *SIAM J. Control Optim.*, 45:146–173, 2006.

[9] O. Yu. Imanuvilov J.-P. Puel E. Fernandez-Cara, S. Guerrero. On the controllability of the n-dimensional navier-stokes and boussinesq systems with $n-1$ scalar controls. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 275–280, 2005.

[10] O. Yu. Imanuvilov J.-P. Puel E. Fernandez-Cara, S. Guerrero. Local exact controllability of the navier-stokes systems. *J. Math. Pures Appl. 83*, pages 1501–1542, 2004.

[11] O. Yu. Imanuvilov J.-P. Puel E. Fernandez-Cara, S. Guerrero. Remarks on exact controllability for stokes and navier-stokes systems. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 375–380, 2004.

[12] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial Differential Equations.* Springer. 2010.

[13] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* Springer, 1993.

[14] M. Medeiros, L. A. & Milla Miranda. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogéneos).* Instituto de Matemática - UFRJ, Río de Janeiro, 1999.

[15] R. Temam. *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis.* North-Holland, Amsterdam, 1997.

[16] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[17] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Graduate Texts in Mathematics. New York, Academic Press, 1975.

[18] M. Medeiros, L. A. & Milla Miranda. *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev.* 28° SBA, 1988.

[19] S. Kesavan. *Topic in Functional Analysis and Application.* John Willey and Sons, New Dheli, 1989.

[20] Magenes E. Lions, J. L. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Dunod, Paris, 1968.

[21] H. Brezis. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Editorial Alianza, 1980.