UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Análise de Petri do Ideal de uma Curva Canônica

Jorge Luis Rojas Orbegoso

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Geometria Algébrica.

Orientador: Marco Pacini

Niterói

2013

Análise de Petri do Ideal de uma Curva Canônica

Jorge Luis Rojas Orbegoso

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Geometria Algébrica.

Banca Examinadora

Prof. Marco Pacini - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof.ª Luciane Quoos Conte - Membro
Doutora - Universidade Federal de Rio de Janeiro

Prof. Rodrigo Salomão - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Antonio Nigro - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói

2013

**Para meus pais Ana e Jorge,
meus irmãos Victor e Willan e
minha namorada Diana.**

Resumo

K. Petri ([3]) deu uma descrição detalhada do ideal de um curva canônica C no espaço projetivo. Ele escolheu g pontos em C em posição geral e procurou uma base das diferenciais holomorfas. Depois disso, ele escreveu uma base para o ideal da curva canônica C. Esta descrição é chamada de Análise de Petri do ideal de uma curva canônica. Neste trabalho faremos a Análise de Petri. Vamos acompanhar o resultado como realizado em [2].

Palavras Chave: Análise de Petri, curva canônica, diferencias holomorfas, Riemann-Roch, posição geral.

Preliminares

As definições e resultados que aprensentaremos nesta seção podem ser achados em [2] e [5].

Seja X uma superfície de Riemann compacta, chamada também curva algébrica de gênero g. Denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ e $\mathcal{M}^{(n)}(X)$ o conjunto de todas as funções meromorfas sobre X e o conjunto das n-formas meromorfas sobre X, respectivamente. Um divisor sobre X é uma função $D : X \to \mathbb{Z}$ tal que o conjuntos dos pontos $p \in X$ tal que $D(p) \neq 0$ é finito. Costuma-se escrever um divisor usando a notação aditiva

$$D = \sum_{p \in X} D(p)\ p.$$

Un divisor D sobre X é chamado efetivo, denotaremos $D \geq 0$, se $D(p) \geq 0$ para todo $p \in X$. O grau do divisor D, denotado $\deg D$, é

$$\sum_{p \in X} D(p).$$

Se D é um divisor efetivo, vemos que $\deg D \geq 0$.

Dada uma função meromorfa f e uma n-forma meromorfa ω sobre X, definimos os divisores associados

$$(f) = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f)\ p,$$

$$(\omega) = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p \omega\ p,$$

(f) é chamado divisor principal e tem grau igual a zero. Quando $n = 1$, (ω) é chamado divisor canônico e tem grau $2g - 2$.

O espaço das funções meromorfas com polos limitados por D, denotado $L(D)$, é o conjunto

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : (f) + D \geq 0\}.$$

Como todo divisor principal tem grau zero, se $\deg D < 0$, então $L(D) = 0$.

Analogamente, o espaço das n-formas meromorfas com polos limitados por D, denotado $L^{(n)}(D)$, é o conjunto

$$L^{(n)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(n)}(X) : (\omega) + D \geq 0\}.$$

Seja $K = (\omega)$ qualquer divisor canônico sobre X, e D, E divisores sobre X. Temos os isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} L(D+K) & \longmapsto & L^{(1)}(D) \\ f & \longrightarrow & f\omega, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L(D+nK) & \longmapsto & L^{(n)}(D) \\ f & \longrightarrow & f\omega^n, \end{array}$$

e o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} L(D) \otimes L(E) & \longmapsto & L(D+E) \\ \sum_i f_i \otimes g_i & \longrightarrow & \sum_i f_i g_i. \end{array}$$

Em particular, vemos que $L(nK)$ é isomorfo a $L^{(n)}(0)$ o conjunto das n-formas holomorfas sobre X. Logo temos que

$$\otimes^n L^{(1)}(0) \cong \otimes^n L(K) \cong L(nK) \cong L^{(n)}(0),$$

onde o isomorfismo é dado por

$$\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_n \longrightarrow w_1 \ldots w_n.$$

Dois divisor D_1 e D_2 sobre X são chamados linearmente equivalentes, se a diferença entre eles é um divisor principal. É imediato que dois divisores equivalente têm o mesmo grau. Temos também que quaisquer dois divisores canônicos são linearmente equivalentes.

Dado D um divisor sobre X, o sistema linear completo $|D|$ é definido como o conjunto de todos os divisores efetivos sobre X linearmente equivalentes a D. Podemos ver $|D|$ como a projetivização de um espaço linear de dimensão finita mediante a identificação,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(L(D)) & \longmapsto & |D| \\ [f] & \longrightarrow & (f)+D. \end{array}$$

Mais geralmente, com esta indentificação, todo subespaço linear de um sistema linear completo é chamado sistema linear.

Um sistema linear $\mathcal{D} = \mathbb{P}(V)$, onde V é um subespaço de $L(D)$ de dimensão $r+1$, é chamado uma g^r_d.

X é chamada hiperelíptica se tem uma g^1_2. Se $g = 2$, então X é hiperelíptica.

X é chamada trigonal se tem uma g^1_3, o qual é completo se $g \geq 2$.

O seguinte teorema é fundamental porque nos dá uma forma para computar a dimensão de $L(D)$. Ver [2] pág. 7 e [5] pág. 192.

Teorema de Riemann - Roch . *Dado D um divisor sobre X e K qualquer divisor canônico, temos*

$$\dim L(D) - \dim L(K-D) = \deg D - g + 1.$$

Uma função $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ é holomorfa se existem $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ não todas zero tal que $\phi(p) = [f_0(p) : \ldots : f_n(p)]$ para todo $p \in X$.

A cada função holomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ podemos associar um sistema linear, chamado sistema linear de ϕ e denotado $|\phi|$, como segue. Se escrevemos $\phi = [f_0 : \ldots : f_n]$ com $f_i \in \mathcal{M}(X)$. Seja D divisor de X definido como $D(p) = -\min\{\mathrm{ord}_p f_i\}$. Isto implica que $(f_i) + D \geq 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, daí cada $f_i \in L(D)$. Seja V_f o subespaço de $L(D)$ gerado pelos $f_i's$. Finalmente

$$|\phi| = \{(g) + D : g \in V_f\},$$

conjunto que não depende da escolha dos $f_i's$.

Um sistema linear Q sobre X é chamado livre de ponto base se não existe $p \in X$ tal que $E - p \geq 0$ para todo $E \in Q$. O sistema linear de cada função holomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ é livre de ponto base.

Seja $Q \subseteq |D|$ um sistema linear livre de ponto base de dimensão n sobre X. Então existe $\phi_Q : X \to \mathbb{P}^n$ holomorfa tal que $Q = |\phi_Q|$. Além disso, ϕ é único a menos da escolha de coordenadas em $\mathbb{P}^n$. Quando $Q = |D|$, denotaremos ϕ por ϕ_D. Se cumpre que todo sistema canônico $|K|$ para $g \geq 1$ é livre de ponto base, portanto temos o morfismo induzido

$$\phi_K : X \to \mathbb{P}^{g-1},$$

o qual é chamado morfismo canônico para X. Se $g \geq 3$, então ϕ_K é um mergulho se e somente se X é não hiperelíptico. Neste caso a imagem de ϕ_K em P^{g-1} é uma curva projetiva lisa chamada de curva canônica.

Seja C uma curva projetiva lisa contida em $\mathbb{P}^n$. Seja G um polinômio homogêneo que não é identicamente zero sobre C. Vamos definir o divisor (G) como segue: dado $p \in C$, escolhemos um polinômio homogêneo H de mesmo grau que G que não é zero em p. G/H é uma função meromorfa sobre C. Definimos $(G)(p) = \text{ord}_p G/H$. Este divisor não depende da escolha do H. O divisor (G) é chamado divisor de interseção de G sobre C. Dado um hiperplano H em $\mathbb{P}^n$ que intersecta C, o divisor hiperplano (H) é o divisor de interseção do polinômio homogêneo linear F sobre C, tal que $H = \{F = 0\}$. A definição de (H) não depende do polinômio F escolhido.

Os divisores hiperplano e os divisores canônicos positivos sobre uma curva canônica coincidem.

Para cada divisor D sobre uma curva canônica C, podemos definir $\overline{D}$, como a interseção de todos os hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ tal que $(H) \geq D$.

Com esta definição enunciamos, ver [2] pág. 12 e [5] pág. 208, 209.

Versão Geométrica del Teorema de Riemann - Roch . *Seja X uma curva hiperelíptica de gênero g, canonicamente mergulhada em $\mathbb{P}^{g-1}$. Fixamos um divisor efetivo D sobre X, considerado como divisor sobre a curva canônica. Então*

$$\dim |D| = \deg D - 1 - \dim \overline{D},$$

ou, equivalentemente,

$$\dim L(D) = \deg(D) - \dim \overline{D}.$$

Outro resultado util, ver [2] pág 109 e [5] pág. 225:

Teorema da Posição Geral . *Seja X uma curva projetiva lisa em $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, de grau d. Então um hiperplano geral intersecta C em d pontos, dos quais todo conjunto de n pontos é linearmente independente.*

Para cada divisor D sobre X podemos definir o feixe $\mathcal{O}(D)$ definido como

$$\Gamma(U, \mathcal{O}(D)) = \{f \in \mathcal{M}(U) : (f) + D|_U \geq 0\},$$

onde U é um aberto em X na topologia de Zariski.

Escreveremos $H^0(X, \mathcal{O}(D)) = \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$ e $h^0(X, \mathcal{O}(D)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$. Notemos que $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}(D))$. O feixe $\mathcal{O}(D)$ é um feixe invertível.

O feixe $\mathcal{O}(D)$ cumpre as regras

$$\mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D') \cong \mathcal{O}(D + D'), \mathcal{O}(D)^{-1} = \mathcal{O}(-D).$$

Enunciaremos um resultado que usaremos logo, ver [1] pág 162, 163 e [2] pág. 126.

Teorema Base-Point-Free Pencil Trick . *Sejam L, M dois feixes invertíveis sobre C, s_1, s_2 duas seções de L não tendo zeros em comun, e denotemos por V o espaço gerado por s_1, s_2 em $H^0(C, L)$. Então o núcleo do morfismo canônico*

$$H^0(C, M) \otimes V \to H^0(C, M \otimes L)$$

é isomorfo a $H^0(C, M \otimes L^{-1})$.

Denotaremos por K o feixe associado a algum divisor canônico, digamos (ω). Segue-se que $H^0(X,K)$ é isomorfo a $L^{(1)}(0)$, o conjunto das 1-formas holomorfas sobre X. Denotaremos $K(D)$ o feixe $\mathcal{O}((\omega)+D)$.

Logo

$$H^0(X,K^n) \cong \otimes^n H^0(X,K) \cong \otimes^n L^{(1)}(0) \cong L^n(0),$$

isto é, $H^0(X,K^n)$ é isomorfo ao conjunto das n-forma holomorfas sobre X.

Teorema de Max Noether . *Se C é uma curva não hiperelíptica, então o homomorfismo*

$$\mathrm{Sym}^n H^0(C,K) \to H^0(C,K^n)$$

é sobrejetivo para todo $n \geq 1$.

O teorema seguinte, é o passo central na prova de um teorema devido a Enriques (1919) e Babbage (1939). Ver [2] pág 124.

Teorema . *Se a interseção das quádricas contém uma curva canônica C com um ponto $p \notin C$, então C está contido na superfície de Veronese ($g = 6$) ou está contido em um scroll normal racional.*

Com as hipóteses do teorema anterior. Se C está contida na superfície de Veronese, prova-se que C é isomorfa a uma quíntica plana. Se C está contida em um scroll racional, prova-se que C é trigonal.

Em resumo temos que a menos de "exceções" toda curva canônica é a interseção de quádricas. Mais exatamente:

Teorema de Enriques - Babbage . *Se $C \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ é uma curva canônica de gênero g, então se cumpre uma e só uma das condições seguintes:*

1) C é a interseção de quádricas,

2) C é trigonal,

3) C é isomorfa a uma quíntica plana.

Análise de Petri

A análise mais precisa do ideal de uma curva canônica, chamada de análise de Petri, foi dada no trabalho de Petri (1922). O teorema principal é o Teorema de Petri, que diz que caso o ideal de uma curva canônica de gênero $g \geq 4$ não seja gerado só por formas quadráticas, então ele é gerado por formas quádraticas e formas cúbicas.

Vamos começar com a análise de Petri:

O primeiro passo é construir uma base para $H^0(C, K^n)$. Como $C \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ é uma curva canônica então C é não degenerada e não hiperelíptica, logo $g \geq 3$. Sejam $p_1, \ldots, p_g$ de C pontos em posição geral. Usando o teorema de Riemann-Roch e o teorema de Riemann-Roch geométrico temos que a dimensão de $H^0(C, K(-p_1 - \ldots - \widehat{p_i} - \ldots - p_g))$ é

$$\begin{aligned}
h^0(C, K(-p_1 - \ldots - \widehat{p_i} - \ldots - p_g)) &= h^0(C, \mathcal{O}(p_1 + \ldots + \widehat{p_i} + \ldots + p_g)) - (g-1) + g - 1 \\
&= -\dim \overline{\{p_1 + \ldots + \widehat{p_i} + \ldots + p_g\}} + g - 1 \\
&= -(g-2) + g - 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Seja ω_i um gerador de $H^0(C, K(-p_1 - \ldots - \widehat{p_i} - \ldots - p_g)$. Temos que ω_i é zero em todos os p_j com a única exceção de p_i. Os elementos $\omega_1, \ldots, \omega_g$ formam uma base para $H^0(C, K)$: de fato, a relação $\sum \lambda_i \omega_i = 0$ sendo avaliada em p_j dá $\lambda_j = 0$ e $h^0(C, K) = g$. Pelo teorema da posição geral podemos escolher os p_i's de tal forma que os (ω_i)'s consistem de $2g - 2$ pontos diferentes. Além disso, se

$$(\omega_i) = p_1 + \ldots + \widehat{p_i} + \ldots + p_g + D_i,$$

os D_i's têm suportes disjuntos dois a dois. Com efeito, se D_i e D_j tivessem pontos em comum para i, j diferentes, então (ω_i) e (ω_j) teriam $g - 1$ pontos em comun, logo teriam que ser iguais, contradição.

A inclusão $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ induz o morfismo linear

$$\psi_n : \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_g]_n = H^0(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(n)) \longrightarrow H^0(C, K^n).$$

No caso $n = 1$ temos que ψ_1 é isomorfismo. Escrevendo $x_i = \psi_1^{-1}(\omega_i)$, o conjunto $\{x_1, \ldots, x_g\}$ é base de $H^0(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1))$. Podemos fazer uma troca de coordenadas tal que $x_1, \ldots, x_g$ sejam as coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^{g-1}$. Dado um polinômio homogêneo

$$P = P(x_1, \ldots, x_g) \in H^0(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(n))$$

escrerevemos

$$\overline{P} = \psi_n(P).$$

ψ_n é o mesmo morfismo do Teorema de Max-Noether. Portanto ψ_n é sobrejetivo. Logo todo $\omega \in H^0(C, K^n)$ pode ser escrito da forma $\omega = \overline{P}$, onde $P \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_g]_n$.

Escreveremos $I = \bigoplus I_k$ o ideal homogêneo de C, e

$$R = R(C) = \frac{\bigoplus_n H^0(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(n))}{I}$$

o anel homogêneo coordenado de C.

Vamos determinar $\ker \psi_n$ para $n \geq 1$. Se $P \in I_n(C)$, temos que

$$P \in \ker \psi_n \iff \overline{P} = 0 \iff P(p) = \overline{P}(p) = 0 \ \forall p \in C \iff P \in I_n.$$

Isto implica $\ker \psi_n = I_n$.

Agora, seja $D = p_3 + \ldots + p_g$. Novamente pela independência linear de $\{p_3, \ldots, p_g\}$, usando o teorema de Riemman-Roch e o teorema de Riemann-Roch geométrico temos que a dimensão de $H^0(C, K(-D))$ é

$$\begin{aligned} h^0(C, K(-D)) &= h^0(C, \mathcal{O}(D)) - (\deg D - g + 1) \\ &= h^0(C, \mathcal{O}(D)) - \deg D + g - 1 \\ &= -\dim \overline{D} + g - 1 \\ &= -(g-3) + g - 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Logo temos que ω_1, ω_2 formam uma base para $H^0(C, K(-D))$. Como (ω_1) e (ω_2) não tem mais pontos em comum além dos pontos em D, temos que $|K(-D)|$ é um pencil livre de ponto base.

Agora consideremos a torre

$$H^0(C, K^n) \supseteq H^0(C, K^n(-D)) \supseteq \ldots \supseteq H^0(C, K^n((-n+1)D)), n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1}$$

Estudemos as dimensões dos espaços vetoriais dessa torre. Quando $n \geq s \geq 0$, $n \geq 2$, por Riemann-Roch temos

$$h^0(C, K^n(-sD)) - h^0(C, K^{1-n}(sD)) = \deg(K^n(-sD)) - g + 1.$$

Agora, $h^0(C, K^{1-n}(sD))$ é zero, já que

$$\begin{aligned} \deg(K^{1-n}(sD)) &= -(n-1)(2g-2) + s(g-2) \\ &\leq -(n-1)(2g-2) + n(g-2) \\ &\leq -ng + 2g - 2 \\ &\leq -2. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} h^0(C, K^n(-sD)) &= \deg(K^n(-sD)) - g + 1 \\ &= n(2g-2) - s(g-2) - g + 1 \\ &= (2n-1)(g-1) - s(g-2). \end{aligned} \tag{2}$$

Isto implica que as inclusões em (1) são de codimensão $g - 2$.

Definamos o morfismo

$$\phi_{n,s} : H^0(C, K^{n-1}((-s+1)D)) \otimes H^0(C, K(-D)) \to H^0(C, K^n(-sD)),$$

para $n - 1 \geq s \geq 0$, $n \geq 2$. Pelo base-point-free pencil trick tem-se

$$\begin{aligned} \ker \phi_{n,s} &\cong H^0(C, K^{n-1}((-s+1)D) \otimes (K(-D))^{-1})) \\ &\cong H^0(C, K^{n-2}((-s+2)D)) \end{aligned}$$

Lema A. *Seja* $n-1 \geq s \geq 1$. *Então* $\phi_{n,s}$ *é sobrejetiva exceto se* $(n,s)=(3,2)$. *Nesta exceção, se cumpre que* $\mathrm{Im}\phi_{3,2}$ *tem codimensão* 1 *em* $H^0(C, K^3(-2D))$.

Prova. Usando o teorema do núcleo e da imagem, Riemann-Roch e (2), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\phi_{2,1} &= h^0(C,K)h^0(C,K(-D)) - h^0(C,\mathcal{O}(D)) \\ &= 2g - (h^0(C,K(-D)) + \deg(D) - g + 1) \\ &= 2g-1 \\ &= h^0(C,K^2(-D)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\phi_{3,1} &= h^0(C,K^2)h^0(C,K(-D)) - h^0(C,K(D)) \\ &= 2(3g-3) - (h^0(C,\mathcal{O}(-D)) - \deg(-D) + g - 1) \\ &= 6g - 6 - (0 + g - 2 + g - 1) \\ &= 4g-3 \\ &= h^0(C,K^3(-D)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\phi_{3,2} &= h^0(C,K^2(-D))h^0(C,K(-D)) - h^0(C,K) \\ &= 2(2g-1) - g \\ &= 3g-2 \\ &= h^0(C,K^3(-2D)) - 1. \end{aligned}$$

Se $n \geq 4$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\phi_{n,s} &= h^0(C,K^{n-1}((-s+1)D))h^0(C,K(-D)) - h^0(C,K^{n-2}((-s+2)D)) \\ &= 2((2n-3)(g-1) - (s-1)(g-2)) - (2n-5)(g-1) - (s-2)(g-2) \\ &= (g-1)(4n-6-2n+5) - (2s-2-s+2)(g-2) \\ &= (2n-1)(g-1) - s(g-2) \\ &= h^0(C,K^n(-sD)). \end{aligned}$$

Isto termina a prova do lema.

Comecemos agora com a construção de Petri:

Base para $H^0(C,K^2)$**.** Consideremos o morfismo sobrejetor

$$\phi_{2,1} : H^0(C,K) \otimes H^0(C,K(-D)) \to H^0(C,K^2(-D)).$$

Tomando as bases $\{\omega_1,\ldots,\omega_g\}$ de $H^0(C,K)$ e $\{\omega_1,\omega_2\}$ de $H^0(C,K(-D))$, o conjunto

$$\{\omega_2\omega_i, \omega_1\omega_i : \ i=1,\ldots,g\} = \{\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2, \omega_1\omega_i, \omega_2\omega_i : \ i=3,\ldots,g\}$$

é gerador de $H^0(C,K^2(-D))$ com $2g-1$ elementos, portanto é uma base de $H^0(C,K^2(-D))$. Os elementos $\omega_3^2,\ldots,\omega_g^2$ são $g-2$ elementos linearmente independentes módulo $H^0(C,K^2(-D))$. Logo os $3(g-1)$ elementos

$$\{\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_1\omega_2, \omega_i^2, \omega_1\omega_i, \omega_2\omega_i : i=3,\ldots,g\}$$

formam uma base de $H^0(C,K^2)$. Escrevamos esta base obtida,

$$\left.\begin{array}{ll}\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2, & \\ \omega_1\omega_i & i=3,\ldots,g, \\ \omega_2\omega_i, & i=3,\ldots,g, \end{array}\right] \text{ base para } H^0(C,K^2(-D))$$
$$\left.\begin{array}{ll} \omega_i^2, & i=3,\ldots,g, \end{array}\right] \text{ base para } H^0(C,K^2)$$

Base para $H^0(C,K^3)$. Consideremos o morfismo

$$\phi_{3,2} : H^0(C,K^2(-D)) \otimes H^0(C,K(-D)) \to H^0(C,K^3(-2D)),$$

Seja $\overline{W} = \mathrm{Im}\phi_{3,2}$. Pelo lema A, $\overline{W}$ tem codimensão 1 em $H^0(C,K^3(-2D))$. Consideremos a filtração

$$H^0(C,K^3) \supset H^0(C,K^3(-D)) \supset H^0(C,K^3(-2D)) \supset \overline{W}.$$

Olhando para as bases de $H^0(C,K^2(-D))$ e $H^0(C,K(-D))$ temos um conjunto de geradores de $\overline{W}$

$$\{\omega_1^3, \omega_1^2\omega_2, \omega_1\omega_2^2, \omega_2^3, \omega_1^2\omega_i, \omega_2^2\omega_i, \omega_1\omega_2\omega_i : \ i=3,\ldots,g\},$$

com $\dim \overline{W} = 3g-2$ elementos, e portanto formam uma base para $\overline{W}$. Agora precisamos de um elemento não nulo de $H^0(C,K^3(-2D))$ que junto com a base de $\overline{W}$ gere $H^0(C,K^3(-2D))$. Para isso, como $|K(-D)|$ é um pencil livre de ponto base, existe um único divisor em $|K(-D)|$ tendo em p_i ordem maior que 1 e seja $\overline{\alpha_i}$ a diferencial deste divisor. Provemos que $\overline{\alpha_i}\omega_i^2 \in H^0(C,K^3(-2D))\backslash\overline{W}$. Como $(\overline{\alpha_i}) \geq D + p_i$ e $(\omega_i) \geq p_1 + \ldots + \widehat{p_i} + \ldots + p_g$, então

$$(\overline{\alpha_i}\omega_i^2) \geq 2p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + 2p_i + \ldots + 3p_g \geq 2D.$$

Assim $\overline{\alpha_i}\omega_i^2 \in H^0(C,K^3(-2D))$. Se $\overline{\alpha_i}\omega_i^2 \in \overline{W}$, escrevendo $\overline{\alpha_i}\omega_i^2$ na base de $\overline{W}$,

$$\overline{\alpha_i}\omega_i^2 = a\omega_1^3 + b\omega_1^2\omega_2 + c\omega_1\omega_2^2 + d\omega_2^3 + \sum_{j=3}^{g} a_j\omega_1^2\omega_j + \sum_{j=3}^{g} b_j\omega_1\omega_2\omega_j + \sum_{j=3}^{g} c_j\omega_2^2\omega_j$$

com $a,b,c,d,a_j,b_j,c_j \in \mathbb{C}$ para todo $j=3,\ldots,g$. Logo

$$\overline{\alpha_i}\omega_i^2 = \underbrace{\omega_1^2\left(a\omega_1 + b\omega^2 + \sum_{j=3}^{g} a_j\omega_j\right)}_{\psi} + \underbrace{\omega_1\omega_2\left(\sum_{j=3}^{g} b_j\omega_j\right)}_{\phi} + \underbrace{\omega_2^2\left(c\omega_1 + d\omega_2 + \sum_{j=3}^{g} c_j\omega_j\right)}_{\chi},$$

com $\psi,\phi,\chi \in H^0(C,K)$. Agora, escrevendo $\overline{\alpha_i} = \lambda_i\omega_1 + \mu_i\omega_2$ com $i=3,\ldots,g$, como $\mathrm{ord}_{p_i}\overline{\alpha_i} \geq 2$ e $\mathrm{ord}_{p_i}\omega_1 = \mathrm{ord}_{p_i}\omega_2 = 1$, então λ_i,μ_i são diferentes de zero para $i=3,\ldots,g$. Temos então que

$$\omega_1 = \frac{\overline{\alpha_i} - \mu_i\omega_2}{\lambda_i},$$

logo

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha_i}\omega_i^2 &= \left(\frac{\overline{\alpha_i}-\mu_i\omega_2}{\lambda_i}\right)\omega_1\psi + \left(\frac{\overline{\alpha_i}-\mu_i\omega_2}{\lambda_i}\right)\omega_2\phi + \omega_2^2\chi \\
&= \overline{\alpha_i}\omega_1\left(\frac{\psi}{\lambda_i}\right) + \omega_1\omega_2\left(-\frac{\mu_i\psi}{\lambda_i}\right) + \overline{\alpha_i}\omega_2\left(\frac{\phi}{\lambda_i}\right) + \omega_2^2\left(\chi - \frac{\mu_i\phi}{\lambda_i}\right) \\
&= \overline{\alpha_i}\omega_1\left(\frac{\psi}{\lambda_i}\right) + \omega_2\left(\frac{\overline{\alpha_i}-\mu_i\omega_2}{\lambda_i}\right)\left(-\frac{\mu_i\psi}{\lambda_i}\right) + \overline{\alpha_i}\omega_2\left(\frac{\phi}{\lambda_i}\right) + \omega_2^2\left(\chi - \frac{\mu_i\phi}{\lambda_i}\right) \\
&= \overline{\alpha_i}\omega_1\underbrace{\left(\frac{\psi}{\lambda_i}\right)}_{\psi'} + \overline{\alpha_i}\omega_2\underbrace{\left(-\frac{\mu_i\psi}{\lambda_i^2}+\frac{\phi}{\lambda_i}\right)}_{\phi'} + \omega_2^2\underbrace{\left(\chi - \frac{\mu_i\phi}{\lambda_i} + \frac{\mu_i^2\psi}{\lambda_i^2}\right)}_{\chi'},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

com $\psi', \phi', \chi' \in H^0(C, K)$.

Como $\mathrm{ord}_{p_i}\overline{\alpha_i} > 1$ e $\mathrm{ord}_{p_i}\omega_2 = 1$, $\overline{\alpha_i}, \omega_2$ geram $|K(-D)|$ (livre de ponto base). Escrevendo

$$(\overline{\alpha_i}) = p_3 + \ldots + 2p_i + \ldots + p_g + D_i',$$

devemos ter que D_i' e (ω_2) têm suporte disjuntos. Da relação (3)

$$\omega_2^2\chi' = \overline{\alpha_i}\psi'', \quad \psi'' \in H^0(C, K^2).$$

então

$$(\chi') = (\overline{\alpha_i}) + (\psi'') - 2(\omega_2) \geq D_i',$$

daí $(\chi') \in K(D_i')$. Usando Riemann-Roch e que $|K(-D)|$ é livre de ponto base,

$$
\begin{aligned}
h^0(C, K(-D_i)) &= h^0(C, p_3 + \ldots + 2p_i + \ldots + p_g) \\
&= h^0(C, D_i + p_i) \\
&= h^0(C, K(-D_i - p_i)) + \deg(D_i + p_i) - g + 1 \\
&= 1 + g - 1 - g + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Como $\overline{\alpha_i}, \chi' \in H^0(C, K(-D_i'))$, o qual é unidimensional, χ' é múltiplo escalar de $\overline{\alpha_i}$ (já que $\overline{\alpha_i} \neq 0$). Usando isso último e que ψ', ϕ' são gerados pelos ω_i's, a relação (3) se reduz a

$$\overline{\alpha_i}\omega_i^2 = \overline{\alpha_i}\sum_{j=1}^{g}\left(c_j\omega_1\omega_j + d_j\omega_2\omega_j\right),$$

logo

$$\omega_i^2 = \sum_{j=1}^{g}\left(c_j\omega_1\omega_j + d_j\omega_2\omega_j\right),$$

e olhando para a base de $H^0(C, K^2)$, vemos que o anterior é uma contradição, provando assim que para cada $i = 3, \ldots, g$ o diferencial $\overline{\alpha_i}\omega_i^2$ gera $H^0(C, K^3(-2D))$ módulo $\overline{W}$.

Trocando α_i por $c\alpha_i$ com c um escalar conveniente tal que

$$\overline{\alpha_i}\omega_i^2 = \overline{\eta} + \overline{\theta}_i, \quad \overline{\theta_i} \in \overline{W}, \quad i = 3, \ldots, g, \tag{4}$$

e $\overline{\eta}$ gera $H^0(C, K^3(-2D))$ módulo $\overline{W}$. Aumentando η à base de $\overline{W}$ temos assim uma base para $H^0(C, K^3(-2D))$.

Escolhemos $\overline{\beta_i}$ tal que $\{\overline{\alpha_i}, \overline{\beta_i}\}$ é uma base de $H^0(C, K(-D))$. Como $|K(-D)|$ é livre de ponto base e $\overline{\alpha_i}$ tem ordem maior que 1 em p_i, $\overline{\beta_i}$ deve ter ordem exatamente 1 em p_i. Segue-se que $\overline{\beta_i}\omega_i^2$ com $i = 3, \ldots, g$ são $g-2$ elementos em $H^0(C, K^3(-D)) \backslash H^0(C, K^3(-2D))$. Provemos que são linearmente independentes. Se $\sum_i \lambda_i \overline{\beta_i}\omega_i = 0$, e avaliamos en p_j, obtemos que $\lambda_j = 0$. Assim aumentando estes elementos à base de $H^0(C, K^3(-2D))$ obtemos uma base para $H^0(C, K^3(-D))$. É claro que aumentando $\omega_3^3, \ldots, \omega_g^3$ a base obtida para $H^0(C, K^3(-D))$, obtemos uma base para $H^0(C, K^3)$ Escrevamos esta base obtida,

$$\begin{array}{lll}
\omega_1^3, \omega_1^2\omega_2, \omega_1\omega_2^2, \omega_2^3 & & \\
\omega_1^2\omega_i & i = 3, \ldots, g, & \\
\omega_1\omega_2\omega_i, & i = 3, \ldots, g, & \\
\omega_2^2\omega_i, & i = 3, \ldots, g, & \text{base para } \overline{W} \\
\overline{\eta} & & \text{base para } H^0(C, K^3(-2D)) \\
\overline{\beta_i}\omega_i^2, & i = 3, \ldots, g, & \text{base para } H^0(C, K^3(-D)) \\
\omega_i^3, & i = 3, \ldots, g, & \text{base para } H^0(C, K^3)
\end{array}$$

Base para $H^0(C, K^n)$ para $n \geq 4$. Provaremos por indução (baseando no caso $n = 3$) que

$$\begin{array}{lll}
\omega_1^l\omega_2^m, & l + m = n, & \\
\omega_1^s\omega_2^t\omega_i & s + t = n - 1, i = 3, \ldots, g, & \\
\omega_1^h\omega_2^k\overline{\eta}, & h + k = n - 3 & \text{base para } H^0(C, K^n((-n+1)D)) \\
\overline{\beta_i}^{n-2}\omega_i^2, & i = 3, \ldots, g, & \text{base para } H^0(C, K^n((-n+2)D)) \\
\vdots & & \\
\overline{\beta_i}\omega_i^{n-1}, & i = 3, \ldots, g, & \text{base para } H^0(C, K^n(-D)) \\
\omega_i^n, & i = 3, \ldots, g, & \text{base para } H^0(C, K^n)
\end{array}$$

Provemos isto por indução. O caso $n = 3$ foi provado. Suponhamos válido para $n - 1 \geq 3$. Mediante o morfismo sobrejetor

$$\phi_{n,n-1} : H^0(C, K^{n-1}(-nD)) \otimes H^0(C, K(-D)) \to H^0(C, K^n((-n+1)D)),$$

obtemos o conjunto gerador

$$\{\omega_1^l\omega_2^m, \omega_1^s\omega_2^t\omega_i, \omega_1^h\omega_2^k\overline{\eta}, \quad l + m = n, \quad s + t = n - 1, \quad h + k = n - 3, \quad i = 3, \ldots, g\}$$

de $H^0(C, K^n((-n+1)D))$ com $ng-1 = h^0(C, K^n((-n+1)D))$ elementos. Assim temos uma base para $H^0(C, K^n((-n+1)D))$.

Para cada $s = 1, \ldots, n-2$, os elementos $\beta_3^s \omega_3^{n-s}, \ldots, \beta_g^s \omega_g^{n-s} \in H^0(C, K^n(-sD))$ são linearmente independentes módulo $H^0(C, K^n((-s-1)D))$. Sabemos também que a codimensão de $H^0(C, K^n((-s-1)D))$ em $H^0(C, K^n(-sD))$ é $g-2$. Finalmente, os elementos $\omega_3^n, \ldots, \omega_g^n \in H^0(C, K^n)$ são linearmente independentes módulos $H^0(C, K^n(-D))$ e também $H^0(C, K^n(-D))$ é de codimensão $g-2$ em $H^0(C, K^n)$. Isto termina a prova por indução.

O próximo passo no análise de Petri é construir uma quadrática e uma cúbica geradoras do ideal homogêneo de C. Olhemos primeiro para o jeito de escrever a diferencial quadrática $\omega_i \omega_k$ com $3 \le i, k \le g$ e $i \ne k$. Na base de $H^0(C, K^2(-D))$ temos

$$\omega_i \omega_k = \sum_{s=3}^{g} \overline{a_{sik}} \omega_s + b_{ik} \omega_1 \omega_2 + m_{ik} \omega_1^2 + n_{ik} \omega_2^2,$$

com $\overline{a_{sik}} = \lambda_{sik} \omega_1 + \mu_{sik} \omega_2$ e $\lambda_{sik}, \mu_{sik}, b_{ik}, m_{ik}, n_{ik} \in \mathbb{C}$. Avaliando em p_1 e p_2 obtemos que m_{ik} e n_{ik} são nulos. Logo

$$\omega_i \omega_k = \sum_{s=3}^{g} \overline{a_{sik}} \omega_s + b_{ik} \omega_1 \omega_2.$$

Segue que os polinômios quadráticos

$$f_{ik} = X_i X_k - \sum_{s=3}^{g} a_{sik} X_s - b_{ik} X_1 X_2, \quad 3 \le i, k \le g, i \ne k, \tag{5}$$

zeram em C.

Notemos que $f_{ik} = f_{ki}$. Provemos que os f_{ik}'s com $i < k$ são linearmente independentes. De fato, se

$$\sum_{\substack{i,k=3 \\ i<k}}^{g} m_{ik} f_{ik} = 0, \quad m_{ik} \in \mathbb{C},$$

logo

$$\sum_{\substack{i,k=3 \\ i<k}}^{g} m_{ik} X_i X_k + \sum_{\substack{i,k=3 \\ i<k}}^{g} m_{ik} (f_{ik} - X_i X_k) = 0.$$

O termo $f_{ik} - X_i X_k$ sempre tem o termo X_1 ou X_2 no seus monômios, isto implica que

$$\sum_{\substack{i,k=3 \\ i<k}}^{g} m_{ik} X_i X_k = 0.$$

Então temos que os m_{ik}'s são todos zeros. Portanto, os f_{ik}'s são $(g-2)(g-3)/2$ quadráticas linearmente independentes em I_2. No caso $n = 2$, já vimos em (2) que $h^0(C, K^2) = 3g-3$. Como $\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_g]_2 = g(g+1)/2$ e $\ker \psi_n = I_n$ com $n \ge 1$, pelo teorema do núcleo e imagem que

$$\dim I_2 = \dim \ker \psi_2 = g(g+1)/2 - (3g-3) = (g-2)(g-3)/2.$$

Portanto os f_{ik}'s formam uma base para I_2.

Agora consideremos relações cúbicas. Olhando para (4) definimos os polinômios homogêneos cúbicos

$$G_{kl} = \alpha_k X_k^2 - \alpha_l X_l^2 + \theta_l - \theta_k \quad 3 \leq k, l \leq g, k \neq l.$$

Estes polinômios satisfazem as relações claramente

$$\begin{cases} G_{kl} + G_{lk} = 0, \\ G_{kl} + G_{lm} = G_{km}. \end{cases}$$

Teorema de Petri . *Seja C uma curva canônica de gênero $g \geq 4$. Então o ideal de C é gerado pelos f_{ik}'s, exceto se C seja trigonal ou isomorfa a uma quíntica plana lisa, e nesses casos é gerado pelo f_{ik}'s e G_{kl}'s.*

Prova. Para provar o teorema de Petri mostraremos primeiro que os f_{ik}'s e G_{ik}'s geram I. Se $R \in I_3$, como o espaço vetorial gerado por α_i, β_i e X_1, X_2 são iguais e cada termo $X_i X_k$ com $i, k = 3, \ldots, g$ diferentes podem ser expressos em termos de $f_{ik}, X_i X_1, X_i X_2, X_1 X_2$ com $i = 3, \ldots, g$, então

$$R = \sum_{i=3}^{g} \gamma_i X_i^3 + \sum_{i=3}^{g} (\mu_i \alpha_i + \nu_i \beta_i) X_i^2 + \sum P_{ij} f_{ij} + w,$$

onde w está no espaço W gerado pelos elementos X_1^3, $X_1^2 X_2$, $X_1 X_2^2$, X_2^3, $X_1^2 X_i$, $X_2^2 X_i$, $X_1 X_2 X_i$ com $i = 3, \ldots, g$. Avaliando em ψ_3 e lembrando (4), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=3} \gamma_i \omega_i^3 + \sum_{i=3} (\mu_i \overline{\alpha_i} \omega_i^2 + \nu_i \overline{\beta_i} \omega_i^2) + \overline{w} \\ &= \sum_{i=3} \gamma_i \omega_i^3 + \left(\sum_{i=3} \mu_i \right) \overline{\eta} + \sum_{i=3} \nu_i \overline{\beta_i} \omega_i^2 + \sum_{i=3} \mu_i \overline{\theta_i} + \overline{w} \end{aligned}$$

olhando para a base de $H^0(C, K^3)$ obtemos que $\gamma_i = 0$, $\sum_{i=3}^{g} \mu_i = 0$, $\nu_i = 0$. Logo

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=3}^{g} \mu_i \alpha_i X_i^2 + \sum P_{ij} f_{ij} + w \\ &= \sum_{i=3}^{g} \mu_i (G_{i3} + \alpha_3 X_3^2 + \theta_i - \theta_3) + \sum P_{ij} f_{ij} + w \\ &= \left(\sum_{i=3}^{g} \mu_i \right) \alpha_3 X_3^2 + \sum_{i=3} \mu_i G_{i3} + \sum P_{ij} f_{ij} + \sum_{i=3}^{g} \mu_i (\theta_i - \theta_3) + w \\ &= \sum_{i=3} \mu_i G_{i3} + \sum P_{ij} f_{ij} + w', \quad w' \in W \end{aligned}$$

Avaliando novamente em ψ_3, temos que $\overline{\omega'} = 0$. O que implica que $\omega' = 0$ (notemos que a restrição do morfismo induzido ψ_3 a W é um isomorfismo sobre $\overline{W}$). Isto também prova que

$I \cap W = \{0\}$. Assim provamos que I_3 é gerado pelos f_{ik}'s e G_{kl}'s. Da mesma forma segue o caso geral para $n \geq 4$. Isto termina a primeira parte da prova.

Para provar a segunda metade do teorema de Petri, lembremos que $g \geq 5$.

Dados $i, l, k \geq 3$ distintos (isto é possível já que $g \geq 5$), lembremos dos $\overline{a_{lik}}$'s que aparecem em (5). Como $\overline{a_{lik}} \in H^0(C, K(-D))$ temos que $\mathrm{ord}_{p_l}\overline{a_{lik}} \geq 1$ e $(\overline{a_{lik}}) \in |K(-D)|$. Provemos que $\mathrm{ord}_{p_l}\overline{a_{ilk}} > 1$. Suponhamos que $\mathrm{ord}_{p_l}\overline{a_{ilk}}$ é exatamente 1. Lembrando a relação

$$\omega_i\omega_k = \sum_{s=3}^{g} \overline{a_{sik}}\omega_s + b_{ik}\omega_1\omega_2,$$

já que $\mathrm{ord}_{p_l}\overline{a_{sik}}\omega_s \geq 2$ para $s \neq l$, $\mathrm{ord}_{p_l}\overline{a_{lik}}\omega_l = 1$ e $\mathrm{ord}_{p_l}\omega_1\omega_2 = 2$ temos que $\mathrm{ord}_{p_l}\omega_i\omega_k = 1$, que é uma contradição. Daí, $\overline{a_{lik}}$ tem ordem maior que 1 em p_l.

Lembremos que $\overline{\alpha_l}$ é o diferencial tal que $(\overline{\alpha_l})$ é o único divisor em $|K(-D)|$ tendo ordem maior que 1 em p_l. Segue-se que existem $\rho_{ikl} \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{a_{lik}} = \rho_{ikl}\overline{\alpha_l}$.

Dados i, k, l distintos tal que $3 \leq i, k, l \leq g$, podemos escrever $f_{ik}X_l - f_{il}X_k \in I$ como

$$\begin{aligned}
f_{ik}X_l - f_{il}X_k &= \left(X_iX_k - \sum_{s=3}^{g} a_{sik}X_s - b_{ik}X_1X_2\right)X_l - \left(X_iX_l - \sum_{s=3}^{g} a_{sil}X_s - b_{il}X_1X_2\right)X_k \\
&= \sum_{\substack{s=3\\ s\neq k}}^{g} a_{sil}X_sX_k - \sum_{\substack{s=3\\ s\neq l}}^{g} a_{sik}X_sX_l + a_{kil}X_k^2 - a_{lik}X_l^2 + w, \quad w \in W \\
&= \sum_{\substack{s=3\\ s\neq k}}^{g} \left(a_{sil}\left(f_{sk} + \sum_{t=3}^{g} a_{tsk}X_t - b_{sk}X_1X_2\right)\right) \\
&\qquad - \sum_{\substack{s=3\\ s\neq l}}^{g} \left(a_{sik}\left(f_{sl} + \sum_{t=3}^{g} a_{tsl}X_t - b_{sl}X_1X_2\right)\right) + a_{kil}X_k^2 - a_{lik}X_l^2 + w \\
&= \sum_{s=3}^{g} (a_{sil}f_{sk} - a_{sik}f_{sl}) + \rho_{ilk}\alpha_kX_k^2 - \rho_{ikl}\alpha_lX_l^2 + w, \quad f_{kk} = f_{ll} = 0,
\end{aligned}$$

Avaliando em ψ_3 obtemos a relação

$$\rho_{lik}\overline{\alpha_k}\omega_k^2 - \rho_{ikl}\overline{\alpha_l}\omega_l^2 + \overline{w} = 0,$$

daí, pela relação (4),

$$(\rho_{lik} - \rho_{ikl})\,\overline{\eta} + \underbrace{\rho_{lik}\overline{\theta_k} - \rho_{ikl}\overline{\theta_l} + \overline{w}}_{\in W} = 0.$$

Olhando para a base de $H^0(C, K^3)$ obtemos $\rho_{ilk} = \rho_{ikl}$. Usando isto temos

$$f_{ik}X_l - f_{il}X_k = \sum_{s=3}^{g} (a_{sil}f_{sk} - a_{sik}f_{sl}) + \rho_{ikl}(\underbrace{\alpha_kX_k^2 - \alpha_lX_l^2 + \theta_l - \theta_k}_{=G_{kl}}) + \underbrace{w - \rho_{ikl}(\theta_l - \theta_k)}_{\in W}$$

e lembrando que $I \cap W = \{0\}$, obtemos

$$f_{ik}X_l - f_{il}X_k = \sum_{s=3}^{g} (a_{sil}f_{sk} - a_{sik}f_{sl}) + \rho_{ikl}G_{kl}. \tag{6}$$

Para provar o teorema Petri procedemos da seguinte maneira. Fixemos k, $3 \leq k \leq g$, e definamos a variedade V_k definida pelas equações

$$\{f_{ik} = 0\}, \quad i = 3, \ldots, g, \quad i \neq k.$$

Podemos escrever estas equações da seguinte forma

$$\sum_{\substack{s=3 \\ s\neq k}}^{g} (\delta_{is} X_k - a_{sik}) X_s = a_{kik} X_k + b_{ik} X_1 X_2.$$

Seja Δ_k o determinante da matriz $(g-3) \times (g-3)$ dada por

$$M_k = (\delta_{is} X_k - a_{sik})$$

e seja Δ_k^s o determinante da matriz obtida trocando a s-ésima coluna de M_k pela coluna $(a_{kik} X_k + b_{ik} X_1 X_2)^t$, $i = 3, \ldots, g$, $i \neq k$. Δ_k e Δ_k^s são polinômios homogêneos em X_1, X_2, X_k. Pela regra de Cramer temos quê V_k é definida pelas equações

$$\Delta_k X_s = \Delta_k^s, \quad s = 3, \ldots, g, \quad s \neq k. \tag{7}$$

Consideremos a superfície (racional) F_k cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} X_1 = X_1 \\ X_2 = X_1 \\ X_k = X_k \\ X_s = \dfrac{\Delta_k^s}{\Delta_k} \quad s = 3, \ldots, g, \quad s \neq k. \end{cases} \tag{8}$$

Notemos $V_k \backslash \{\Delta_k = 0\} \subseteq F_k$. De fato, dado $p \in V_k \backslash \{\Delta_k = 0\}$. Como $p \in V_k$, p satisfaz as equações (7); como $\Delta_k(p) \neq 0$ temos que $(X_1(p), X_2(p), X_k(p)) \neq (0,0,0)$ já que Δ_k é um polinômio não nulo nas variáveis X_1, X_2, X_k. Estes dois fatos provam que p cumpre com as relações (8). Portanto $p \in F_k$.

Logo, seja V componente V_k não contida em $\{\Delta_k = 0\}$, temos que o aberto não vazío $V \backslash \{\Delta_k = 0\}$ de V cumpre

$$V \backslash \{\Delta_k = 0\} \subseteq V_k \backslash \{\Delta_k = 0\} \subseteq F_k,$$

tomando o fecho temos

$$V = \overline{V \backslash \{\Delta_k = 0\}} \subseteq \overline{F_k} = F_k.$$

Como F_k é um fechado irredutível contido em V_k, devemos ter que $V = F_k$ e portanto F_k é única componente de V_k não contida na hipersuperfície $\{\Delta_k = 0\}$.

Como os f_{ik}'s que definem V_k, eles estão contidos em $I(C)$, logo C está contida em V_k. Afirmamos que o polinômio homogêneo Δ_k não zera em p_k. De fato, devido a que $\overline{a_{sik}}$ é gerado por ω_1, ω_2 temos que $a_{sik}(p_k) = 0$ e assim

$$\begin{aligned}\Delta_k(p_k) &= \det(\delta_{is}\omega_k(p_k) - a_{sik}(p_k)) \\ &= \det(\delta_{is}\omega_k(p_k)) \\ &= (\omega_k(p_k))^{g-3} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Em consequencia, C é curva irredutível contida em V_k e não contida em $\{\Delta_k = 0\}$, assim F_k é a única componente de V_k contendo C.

Lema B. *Para $3 \leq k, l \leq g$, $k \neq l$, a superfície F_k coincide com a superfície F_l se e somente se $\rho_{ikl} = 0$ para todo $i = 3, \ldots, g$, $i \neq k$, $i \neq l$.*

Antes de provar o lema, mostremos como segue o teorema de Petri a partir deste lema. Suponhamos primeiro que todos os ρ_{ikl}'s são zero. Do lema segue que $F_3 = \ldots = F_g$, que escreveremos eles como F. Como $C \subseteq F$, todas as quádricas contendo C devem conter F e usando o teorema de Enrique-Babbage podemos concluir que C é ou trigonal ou isomorfa a uma quíntica plana. Isto mostra que para algum i, s, t temos $\rho_{ist} \neq 0$. Provemos que o ideal I é gerado pelos f_{ik}'s. Suponhamos o contrário. Seja J o ideal gerado pelos f_{ik}'s. Desde que I é gerado pelos f_{ik}'s e G_{kl}'s, devemos ter que existem k, l diferentes tal que $G_{kl} \notin J$. Olhando para a equação (6), temos que $\rho_{ikl} = 0$ para $i = 3, \ldots, g$, já que no caso contrário

$$G_{kl} = \rho_{ikl}^{-1}\left(f_{ik}X_l - f_{il}X_k - \sum_{s=3}^{g}(a_{sil}f_{sk} - a_{sik}f_{sl})\right) \in J,$$

e pelo lema temos $F_k = F_l$. Agora, dado j tal que $j \neq k, j \neq l$, $3 \leq j \leq g$, temos $G_{kj} + G_{jl} = G_{kl} \notin J$. Assim $G_{kj} \notin J$ ou $G_{jl} \notin J$. Argumentando como antes, temos que $F_k = F_j$ ou $F_j = F_l$. Desde que $F_k = F_l$, obtemos que $F_3 = \ldots = F_g$. Em particular $F_s = F_t$ e o lema implica que $\rho_{ist} = 0$, contradizendo a nossa hipótese.

Prova do lema B. Suponhamos que $\rho_{ikl} = 0$ para todo i diferente de k, l. Lembremos que $F_k \subseteq V_k$, assim $f_{ik} \equiv 0 \mod F_k$. Então a relação (6) restrito a F_k com $i \neq k, i \neq l$ temos

$$\begin{aligned}0 \mod F_k &\equiv -(f_{ik}X_l - f_{il}X_k) + \sum_{s=3}^{g}(a_{sil}f_{sk} - a_{sik}f_{sl}) + \rho_{ikl}G_{kl} \\ 0 \mod F_k &\equiv f_{il}X_k - \sum_{\substack{s=3 \\ s\neq k, s\neq l}}^{g} a_{sik}f_{sl} \\ 0 \mod F_k &\equiv \sum_{\substack{s=3 \\ s\neq k, s\neq l}}^{g} (\delta_{is}X_k - a_{sik})f_{sl}.\end{aligned}$$

Seja Δ_{lk} o determinante da matriz da ordem $(g-4) \times (g-4)$

$$(\delta_{is}X_s - a_{sik}), \quad i, s = 3, \ldots, g, \quad i \neq l, k, \quad s \neq l, k.$$

Pela regra de Cramer

$$\Delta_{lk}f_{il} \equiv 0 \mod F_k, \quad i = 3, \ldots, g, \quad i \neq l, \quad i \neq k.$$

Como Δ_{lk} é um subdeterminante da matriz com determinante Δ_k, temos que $\Delta_{lk}(p_k) \neq 0$. Como F_k é irredutível,

$$f_{il} \equiv 0 \mod F_k, \quad i = 3, \ldots, g, \quad i \neq l, \quad i \neq k.$$

Lembremos também que $f_{lk} = f_{kl} \equiv 0 \mod F_k$, então F_k está contido em V_k. Mas, F_l é a única componente de V_l contendo a curva C, portanto $F_l = F_k$, provando a assim a primeira parte do lema. Reciprocamente, suponhamos que $F_K = F_l$ e que $\rho_{ikl} \neq 0$ para algum i. Segue-se que

$$f_{is} \equiv 0 \mod F_k, \quad s = 3, \ldots, g,$$

então na relação (6), temos que $G_{kl} \equiv 0 \mod F_k$, isto é, G_{kl} zera sobre $F_k = F_l$. Por outro lado, podemos escrever G_{kl} da forma

$$G_{kl} = \alpha_k X_k^2 - \alpha_l X_l^2 + F(X_i X_1^2, X_i X_1 X_2, X_i X_2^2) + \lambda X_k X_1^2 + \mu X_k X_1 X_2 + \nu X_k X_2^2,$$

onde F é uma combinação linear dos monômios $X_i X_1^2, X_i X_1 X_2, X_i X_2^2$ com $i = 3, \ldots, g$, $i \neq k$. Multiplicando por $(\Delta_k)^2$

$$(\Delta_k)^2 G_{kl} = \alpha_k (\Delta_k)^2 X_k^2 - \alpha_l (\Delta_k)^2 X_l^2 + \Delta_k F(\Delta_k X_i X_1^2, \Delta_k X_i X_1 X_2, \Delta_k X_i X_2^2)$$
$$+\lambda (\Delta_k)^2 X_k X_1^2 + \mu (\Delta_k)^2 X_k X_1 X_2 + \nu (\Delta_k)^2 X_k X_2^2,$$

restringindo a F_k e usando (8)

$$(\Delta_k)^2 G_{kl}|_{F_k} = \alpha_k (\Delta_k)^2 X_k^2 - \alpha_l (\Delta_k^l)^2 + \Delta_k F(\Delta_k^i X_1^2, \Delta_k^i X_1 X_2, \Delta_k^i X_2^2)$$
$$+\lambda (\Delta_k)^2 X_k X_1^2 + \mu (\Delta_k)^2 X_k X_1 X_2 + \nu (\Delta_k)^2 X_k X_2^2,$$

desde que G_{kl} zera em F_k,

$$0 = \alpha_k (\Delta_k)^2 X_k^2 - \alpha_l (\Delta_k^l)^2 + \Delta_k F(\Delta_k^i X_1^2, \Delta_k^i X_1 X_2, \Delta_k^i X_2^2)$$
$$+\lambda (\Delta_k)^2 X_k X_1^2 + \mu (\Delta_k)^2 X_k X_1 X_2 + \nu (\Delta_k)^2 X_k X_2^2,$$

então

$$0 = \alpha_k X_k^{2g-4} + \text{termos de grau menor em } X_k,$$

(o termo $\alpha_k X_k^{2g-4}$ vem de $\alpha_k (\Delta_k)^2 X_k^2$). Isto implica que α_k tem que ser zero, o que é uma contradição. Isto conclui o teorema de Petri.

Referências

[1] B. Saint-Donat. *'On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve'*. Math. Ann. 206, 157-175 (1973).

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris: *'Geometry of Algebraic Curves vol. 1'*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 267, Springer-Verlag, New York (1985).

[3] K. Petri. *'Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen'*. Math. Ann. 88, 242-289 (1922).

[4] P. Griffiths: *'Introduction to Algebraic Curves'* Translations of Mathematical Monographs vol. 76, American Mathematical Society (1989).

[5] R. Miranda: *'Algebraic Curves and Riemann Surfaces'* Graduate Studies in Mathematics vol. 5, American Mathematical Society (1995)

[6] R. Hartshorne: *'Algebraic Geometry'*. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York (1977).