A ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR PARA HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Juan Pablo Alcon Apaza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, IME-UFF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Xu Cheng

Niterói
Agosto de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da UFF

Bibliotecário responsável pela unidade: Carlos R. S. de Lima – CRB7 5531

A354 Alcon Apaza, Juan Pablo

A Estimativa do primeiro autovalor para hipersuperfícies mínimas e algumas aplicações / Juan Pablo Alcon Apaza. – Niterói, RJ: [s.n.], 2016.

35 f.

Orientador: Profª. Drª. Xu Cheng

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense, 2016.

1. Hipersuperfície. 2. Autovalor. 3. Fórmula de Reilly. I. Título.

CDD 516.362

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da Dissertação de Mestrado apresentada por Juan Pablo Alcon Apaza

Aos vinte e quatro dias do mês de agosto de dois mil e dezesseis, reuniram-se na sala 407 do quarto andar da Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense, os membros da Comissão Examinadora constituída pelos Professores Xu Cheng (Universidade Federal Fluminense), Leonardo Tadeu Silvares Martins (Universidade Federal Fluminense), Detang Zhou (Universidade Federal Fluminense) e Matheus Brioschi Herkenhoff Vieira (Universidade Federal do Espírito Santo), sob a presidência do primeiro, para prova pública de defesa da Dissertação intitulada **"A estimativa do primeiro autovalor para hipersuperfícies mínimas e algumas aplicações"**, apresentada pelo mestrando Juan Pablo Alcon Apaza. A defesa da Dissertação atende às exigências contidas no Regulamento Específico do Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense. A Dissertação foi elaborada sob a orientação da Professora Xu Cheng. O Mestrando Juan Pablo Alcon Apaza fez a exposição de seu trabalho durante 50 minutos, iniciando às 14h e concluindo às 14h50. A seguir respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora. Terminada a arguição, realizou-se a reunião da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido da aprovação do Mestrando Juan Pablo Alcon Apaza, considerando-se o trabalho apresentado e a forma com que se houve na apresentação na defesa da mesma. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pela Secretária Administrativa da Coordenação de Pós-Graduação em Matemática, pelos membros da Banca Examinadora e pelo mestrando.

Niterói, 24 de agosto de 2016.

Profª.: Xu Cheng
(Orientadora)

Prof.: Leonardo Tadeu Silvares Martins

Prof.: Detang Zhou

Prof.: Matheus Brioschi Herkenhoff Vieira

Juan Pablo Alcon Apaza
(Mestrando)

Jacqueline Garcez Tavolaro
(Secretária)

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por todo amor e dedicação.

À professora Xu Cheng pela orientação deste trabalho.

Aos membros da banca por terem aceito o convite e pelas importantes sugestões e observações.

Aos meus amigos Igor, Miguel Angel e Saul pelos momentos bons que compartilhamos durante o mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho, faremos uma exposição do artigo **A first eigenvalue estimate for minimal hypérsurfaces** de Hyeong In Choi e Ai-Nung Wang [4]. Neste artigo, obtém-se um limite inferior para o primeiro autovalor de uma hipersuperfície orientável e fechada mergulhada minimamente em uma variedade Riemanniana orientável e fechada com curvatura de Ricci positiva. Combinando este resultado com o resultado de P. Yang e S. T. Yau [17] obtém-se um limite superior para a área de uma superfície mínima mergulhada em S^3 em termos de seu gênero.

Abstract

In the present work we do an exhibition of article **A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces** of Hyeong In Choi e Ai-Nung Wang [4]. In this paper we obtain a lower bound for the first eigenvalue of a closed orientable hypersurface embedded minimally in a closed orientable manifold with positive Ricci curvature. Combining this result with the result of P. Yang e S. T. Yau [17] we obtain an upper bound for the area of an embedded minimal surface of S^3 solely in terms of its genus.

Sumário

Introdução **i**

1 Preliminares **1**
1.1 Variedades Riemannianas 1
1.2 Conexões afins 2
1.3 Conexão Riemanniana 3
1.4 Curvatura 3
1.5 Curvatura de Ricci 5
1.6 Gradiente, Divergência, Hessiano, Laplaciano 5
1.6.1 Gradiente de uma função 5
1.6.2 Divergência de um campo 6
1.6.3 Hessiano de uma função 6
1.6.4 Laplaciano de uma função 6
1.7 Operador Laplaciano-Hodge $\widehat{\Delta}$ 7
1.7.1 Tensores covariantes 7
1.7.2 Tensores alternados 8
1.7.3 Formas diferenciais 9

2 Imersões Isométricas **14**
2.1 A segunda forma fundamental 14
2.2 Exemplos de subvariedades mínimas 18
2.2.1 No Espaço Euclidiano. 18
2.2.2 Na esfera 19

3 A estimativa do primeiro autovalor para hipersuperfícies mínimas **22**
3.1 Fórmula de Reilly 22
3.2 Teorema principal 26
3.2.1 Aplicações 28

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar os resultados sobre superfícies mínimas do artigo A First eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces [4]. Apresentamos também, brevemente, uma estimativa de Yang e Yau de autovalores.

Dada uma variedade Riemanniana compacta (M , ds^2), o espectro de seu Laplaciano é um importante invariante analítico. Existe uma quantidade considerável de trabalhos dedicados a estimar o primeiro autovalor λ_1 em termos de outras quantidades geométricas associadas à (M , ds^2). Recordamos a conhecida estimativa para variedades Riemannianas em geral: A comparação de autovalores de Cheng [3] dá um limite superior fortemente computável em termos do diâmetro e o limite inferior da curvatura de Ricci, enquanto Yau [18] dá um limite inferior computável em termos do diâmetro, volume e o limite inferior da curvatura de Ricci. No caso especial quando M tem dimensão dois, Hersch [7] ampliou o método de Szegö para obter um limite superior de λ_1 para uma métrica arbitrária no S^2 simplesmente em termos da sua área.

No primeiro capítulo, introduziremos definições e conceitos básicos que serão utilizados ao longo da dissertação. No segundo capítulo, faremos uma exposição de um material introdutório da teoria de subvariedades mínimas, começamos com a noção da Segunda forma fundamental, depois definimos o vetor curvatura média H e damos alguns exemplos em $\mathbb{R}^n$ e S^n. No terceiro capítulo, provamos o teorema principal deste trabalho. Para este fim usamos a fórmula de Reilly, que é, na verdade, uma versão integrada da fórmula de Bochner. Deve-se mencionar que a ideia de integrar a formula de Bochner foi usado antes por Lichnerowicz [9]. Além disso, faremos uma exposição da demonstração de um resultado do artigo Eigenvalue of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds [17] : Se M é uma superfície de Riemann orientável de gênero g e área A, então $\lambda_1 A \leq 8\pi(g + 1)$. Combinando este resultado e o teorema principal, obtemos um limite superior para a área de uma superfície mínima mergulhada em S^3 em termos de seu gênero.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos da Geometria Riemanniana que serão utilizados neste trabalho.

1.1 Variedades Riemannianas

Denotamos por M uma variedade diferenciável de dimensão n, onde *diferencial* significa de classe C^∞. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos na variedade M e por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções de classe C^∞ de M em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana sobre M é uma aplicação* $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ *tal que, para todo* X, Y *e* $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e para toda* $f \in C^\infty(M)$*, tem-se:*

i) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

ii) $g(X+Y,Z) = g(X,Z) + g(Y,Z)$ *e* $g(fX,Y) = fg(X,Y)$,

iii) $g(X,X) \geq 0$ *em* M*. Se* $g(X,X)(p) = 0$, $p \in M$*, então* $X_p = 0$.

O par (M,g) *é chamado Variedade Riemanniana.*

De agora em diante denota-se $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle$.

Definição 1.2. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo* $f : M \to N$ *(isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M \text{ e } u, v \in T_pM.$$

Definição 1.3. *Se M e N são variedades diferenciáveis, uma aplicação diferenciável* $f : M \to N$ *é dita uma imersão se* $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$*. Se além disto f é um homomorfismo sobre* $f(M) \subset N$*, onde* $f(M)$ *tem a topologia induzida por N, diz-se que f é um mergulho. Se* $M \subset N$ *e a aplicação inclusão* $i : M \to N$ *é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N.*

1.2 Conexões afins

Definição 1.4. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ *e que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ *,*

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ *,*

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ *,*

onde ***X*** *,* ***Y*** *,* ***Z*** $\in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Proposição 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\dfrac{DV}{dt}$ *ao longo de c , denominado covariante de V ao longo de c , tal que :*

i) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$,

ii) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$,

onde V *e* W *são campos de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

iii) Se V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *, i.e. ,* $V(t) = Y(c(t))$ *, então* $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Definição 1.5. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *. Um campo vetorial V ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado paralelo quando* $\dfrac{DV}{dt} = 0$*, para todo* $t \in I$

Proposição 1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Seja* $c : I \to M$ *uma curva diferenciável em M e* V_0 *um vetor tangente a M em* $c(t_0)$, $t_0 \in I$ *(i.e.* $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ *). Então existe um único campo de vetores paralelo a V ao longo de c, tal que* $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ *é chamado de transporte paralelo de* $V(t_0)$ *ao longo de c.*

1.3 Conexão Riemanniana

Definição 1.6. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle,\rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle,\rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e Q ao longo de c , tivermos $\langle P, Q\rangle = constante$.*

Proposição 1.3. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle,\ t \in I.$$

Corolário 1.4. *Um conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\ ,\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 1.7. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Teorema 1.5. *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

i) ∇ *é simétrica.*

ii) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita ou Riemanniana de M.

1.4 Curvatura

Definição 1.8. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por:*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z\ ,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.6. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ *, isto é:*

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)\,, \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)\,, \end{aligned}$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$ *e* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *.*

ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *, o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é linear , isto é:*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

onde $f \in C^\infty(M)$ *e* $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ *.*

Proposição 1.7. *(Primeira identidade de Bianchi)*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

De agora em diante, escreveremos por conveniência : $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X,Y,Z,T)$.

Proposição 1.8. *a)* $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$

b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$

c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$

d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$ *.*

Agora escreveremos o que foi visto acima utilizando o sistema de coordenadas (U,x). Indicaremos $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ e $R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l$.

Se $X = \sum_i u_i X_i$, $Y = \sum_j v_j X_j$ e $Z = \sum_k w_k X_k$, obteremos pela linearidade de R:

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} u_i v_j w_k X_l.$$

A equação acima mostra que o valor de $R(X,Y)Z$ no ponto p depende unicamente dos valores de X, Y, Z em p e dos valores das funções R^l_{ijk} em p.

1.5 Curvatura de Ricci

Para definir a curvatura de Ricci, descreve-se uma forma bilinear simétrica Q em T_pM, as vezes chamada o tensor de Ricci:

$$Q(x,y) = \textbf{\textit{traço}} \begin{pmatrix} T_pM & \to & T_pM \\ v & \mapsto & R(x,v)y \end{pmatrix}$$

Q é obviamente bilinear. Escolhendo uma base ortonormal $\{z_1, ..., z_{n-1}, z_n\}$ para T_pM, temos:

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(x,z_i)y, z_i \rangle = \sum_{i}^{n} \langle R(y,z_i)x, z_i \rangle = Q(y,x)$$

isto é, Q é simétrica.

Definição 1.9. *A curvatura de Ricci de M em p na direção de um vetor unitário $x \in T_pM$ é dada por $Ric_p(x) = Q(x,x)$.*

Seja $z_n = x$, onde $x \in T_pM$ é um vetor unitário; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x. Temos:

$$Ric_p(x) = Ric_p(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(z_n, z_i)z_n, z_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x,z_i)x, z_i \rangle.$$

1.6 Gradiente, Divergência, Hessiano, Laplaciano

1.6.1 Gradiente de uma função

Definição 1.10. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O gradiente de f é o campo vetorial ∇f em M definido por*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v),\ p \in M,\ v \in T_pM.$$

Lema 1.9. *(ver [11, pág. 25]).* $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.10. *Sejam $f, h \in C^\infty(M)$. Temos:*

i) $\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h$,

ii) $\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f$.

Se $\{e_1, ..., e_n\}$, $n = dim(M)$, é uma base local ortonormal. Temos:

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f))e_i(p)$$

1.6.2 Divergência de um campo

Definição 1.11. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$divX(p) = \textbf{\textit{traço}} \begin{pmatrix} T_pM & \to & T_pM \\ v & \mapsto & \nabla_v X \end{pmatrix}.$$

Se $\{E_1, ..., E_n\}$, $n = dim(M)$, é um referencial geodésico em p, isto é:

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij} \ , \ \nabla_{E_i} E_j(p) = 0.$$

Temos:

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p), \text{ onde } X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i.$$

Lema 1.11. *O operador divergência tem as seguintes propriedades:*

1. $divX \in C^\infty(M)$ *, para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $div(X + Y) = div(X) + div(Y)$ *para todo* X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.
3. *Se* $f \in C^\infty(M)$ *e* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *, então* $div(fX) = \langle \nabla f, X \rangle + f div(X) = X(f) + f div(X)$.

1.6.3 Hessiano de uma função

Definição 1.12. *Seja $f \in C^\infty(M)$, o Hessiano de f é definido como:*

$$\begin{array}{rccc} \nabla^2 f : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & C^\infty(M) \\ & (X, Y) & \mapsto & \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \end{array}$$

Utilizando o fato que a conexão é Riemanniana temos:

$$(\nabla^2 f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f), \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

1.6.4 Laplaciano de uma função

Definição 1.13. *O laplaciano de f é definido como:*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Corolário 1.12. $\Delta f =$ ***traço***$(\nabla^2 f) \in C^\infty(M)$.

Como $\nabla^2 f$ é uma forma bilinear simétrica, seu *traço* é independente da base ortonormal escolhida. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$ (sendo $U \subset M$ aberto), então *traço*$(\nabla^2 f)\,|_U = \Sigma_i (\nabla^2 f)(e_i, e_i) = \Sigma_i \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = div(\nabla f)\,|_U$.

O operador laplaciano tem as seguintes propriedades:

$$\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h,$$

$$\Delta(fg) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle.$$

1.7 Operador Laplaciano-Hodge $\widehat{\Delta}$

1.7.1 Tensores covariantes

O conteúdo dessa seção pode ser encontrada com mais detalhes em [1] ou [8]:

Definição 1.14. *Sejam $p+1$ espaços vetoriais $E_1, ..., E_p$ e G sobre um corpo Γ. Uma aplicação $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to G$ é p-linear se, $\forall i, 1 \leq i \leq p$,*

$$f(x_1, ..., x_i + \lambda y_i, ..., x_p) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_p) + \lambda f(y_1, ..., y_i, ..., y_p),$$

para todo $x_i, y_i \in E_i$, e todo $\lambda \in \Gamma$.

Definição 1.15. *Sejam $p+1$ espaços vetoriais $E_1, ..., E_p$ e T e*

$$\otimes : E_1 \times \cdots \times E_p \to T$$

uma aplicação p-linear. Dizemos que $\otimes$ tem a propriedade universal se satisfaz:

1) *Os vetores $\otimes(x_1, ..., x_p)$ geram T.*
2) *Se $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p$ é uma aplicação p-linear, então existe uma aplicação linear $f : T \to H$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & H \\ T \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Daqui em diante denotaremos $\otimes(x_1, ..., x_p)$ por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$.

Temos existência e unicidade das aplicações p-lineares com a propriedade universal:

Proposição 1.13. *Sejam $E_1, ..., E_p$ espaços vetoriais. Existe um espaço vetorial T e uma aplicação p-linear $\otimes : E_1 \times \cdots \times E_p \to T$ tais que $\otimes$ tem a propriedade universal.*

Proposição 1.14. *Suponha $\otimes_1 : E_1 \times \cdots \times E_p \to T_1$ e $\otimes_2 : E_1 \times \cdots \times E_p \to T_2$ são aplicações p-lineares com propriedade universal. Então existe um isomorfismo linear $f : T_1 \to T_2$ tal que*

$$f(x_1 \otimes_1 \cdots \otimes_1 x_p) = x_1 \otimes_2 \cdots \otimes_2 x_p$$

para todo $x_1, ..., x_p \in E$.

Definição 1.16. *O produto tensorial de p espaços vetoriais $E_1, ..., E_p$ é uma par $(T,\otimes)$ onde $\otimes : E_1 \times \cdots \times E_p \to T$ é uma aplicação p-linear com a propriedade universal. O espaço T determinado por os espaços E_i é chamado de produto tensorial de E_i e denotado por $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$. Os elementos de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$ são chamados de tensores.*

Definição 1.17. *Seja E um espaço vetorial, E^* seu espaço vetorial dual e $k \geq 2$. Os elementos de*

$$\bigotimes^k(E) = \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{k}$$

são chamados de tensores covariantes de grau k sobre E.

Estendemos a definição para os casos $p = 0$ e $p = 1$ colocando $\bigotimes^0(E) = \Gamma$ e $\bigotimes^1(E) = E^*$.

Definição 1.18. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Para cada $k \geq 1$, denotamos por $T^k(E)$ o espaço das funções k-lineares*

$$f : E \times \cdots \times E \to \Gamma.$$

Estendemos a definição para $k = 0$ colocando $T^0(E) = \Gamma$.

Definição 1.19. *O produto de uma função p-linear $f \in T^p(E)$ por uma função q-linear $g \in T^q(E)$ é a função $(p + q)$-linear dada por*

$$(f \odot g)(x_1, ..., x_{p+q}) = f(x_1, ..., x_p)g(x_{p+1}, ..., x_{p+q})$$

Proposição 1.15. *Os espaços $T^k(E)$ e $\bigotimes^k(E)$ são isomorfos.*

A ideia para provar a Proposição acima é provar que

$$\varphi : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{k} \to T^k(E)$$

dada por

$$\varphi(f_1, ..., f_k) = f_1 \odot \cdots \odot f_k,$$

onde $f_i \in E^*$, tem a propriedade universal.

1.7.2 Tensores alternados

Definição 1.20. *Seja E um espaço vetorial e $f \in \bigotimes^k(E)$ (conjunto de tensores covariantes de grau k sobre E). O tensor é dito alternado se:*

$$f(x_1, ..., x_k) = 0$$

quando $x_i = x_j$, para algum par (i , j), i, j = 1, ... ,k.

Indicaremos o subespaço de $\bigotimes^k(E)$ dos tensores k-lineares alternados por $\bigwedge^k(E)$.

No Lema 1.9.12. de [1] podemos ver que se $f \in \bigotimes^k(E)$ então $\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sig(\sigma)\sigma f \in \bigwedge^k(E)$, onde S_k é o conjunto das permutações de $\{1, ...k\}$. Então podemos definir uma função $alt : \bigotimes^k(E) \to \bigwedge^k(E)$ por:

$$alt(f) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sig(\sigma)\sigma f.$$

Definição 1.21. *Seja $f \in \bigwedge^k(E)$ e $g \in \bigwedge^l(E)$. Definimos $f \wedge g \in \bigwedge^{k+l}(E)$, o produto exterior de f e g, por:*

$$f \wedge g = \frac{(k+l)!}{k!l!} alt(f \otimes g).$$

O coeficiente acima é motivado pela simplicidade na fórmula seguinte.

Lema 1.16. *Seja E um espaço vetorial de dimensão n e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de E^*. Para quaisquer índices múltiplos $I = (i_1, ..., i_k)$ e $J = (j_1, ..., j_l)$ com entradas em $\{1, ..., n\}$, temos:*

$$e^I \wedge e^J = e^{IJ},$$

onde $IJ = (i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l)$.

1.7.3 Formas diferenciais

Definição 1.22. *Seja M uma variedade diferenciável. Definimos o fibrado k-tensorial covariante de M como a união disjunta :*

$$\bigotimes^k M = \bigsqcup_{p\in M} \bigotimes^k (T_pM).$$

Proposição 1.17. *(ver [1, pág. 70]). Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. O fibrado k-tensorial covariante $\bigotimes^k M$ admite uma topologia e uma estrutura diferenciável natural com as quais este torna-se uma variedade diferenciável de dimensão $n + n^k$. Além disso, com tal estrutura a projeção natural $\pi : \bigotimes^k M \to M$ ($\pi(p, \tau) = p$) é diferenciável.*

Uma seção de $\bigotimes^k M$ é uma seção da projeção $\pi : \bigotimes^k M \to M$, isto é, uma função contínua $Y : M \to \bigotimes^k M$ que satisfaz:

$$\pi \circ Y = id_M.$$

Uma seção de $\bigotimes^k M$ é diferenciável se $Y : M \to \bigotimes^k M$ é diferenciável.

Definição 1.23. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma seção de* $\bigotimes^k M$ *é chamada de campo de* k*-tensores (covariantes) em M. Um campo de k-tensores (covariantes) diferenciável em M é uma seção diferenciável de* $\bigotimes^k M$.

Denotaremos o espaço vetorial de todos os campos de k-tensores diferenciáveis em M por $\mathcal{T}(M)$

Definição 1.24. *Seja M uma variedade diferenciável. Denotaremos o subconjunto de* $\bigotimes^k M$ *dos* k*-tensores covariantes alternados por:*

$$\bigwedge^k M = \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge^k (T_pM).$$

De maneira análoga, como no caso $\bigotimes^k M$, temos que $\bigwedge^k M$ tem uma estrutura natural de variedade diferenciável, com a qual $\pi : \bigwedge^k M \to M$ dada por $\pi(p,\tau) = p$ é diferenciável.

Uma seção de $\bigwedge^k M$ é uma seção da projeção $\pi : \bigwedge^k M \to M$.

Definição 1.25. *Uma seção de* $\bigwedge^k M$ *é chamada de* k*-forma M. Uma* k*-forma diferenciável em M é uma seção diferenciável de* $\bigwedge^k M$.

Usaremos a notação $w \in \bigwedge^k M$. Denotaremos o espaço vetorial das k-formas diferenciáveis em M por $\mathcal{A}^k(M)$.

A partir de agora, nesta seção, M é uma variedade Riemanniana fechada e orientada, além disso, a notação e os resultados vão ser obtidos de [8] e [12].

Observação: Uma variedade compacta e sem bordo é chamada uma variedade fechada.

Definamos $\theta : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{A}^1(M)$ por:

$$\theta(X)(Y) = \langle X, Y\rangle \text{ para } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Temos que é bijetiva. Em efeito: se $\theta(X) = 0$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $\theta(X)(X) = \langle X, X\rangle = 0$, logo $X = 0$. Além disso se $w \in \mathcal{A}^1(M)$ e $p \in M$ então existe um único $X_p \in T_pM$ tal que $w_p(V) = \langle X_p, V\rangle$ para todo $V \in T_pM$. Precisamos provar que o campo de vetores $X : M \to TM$, definido por $X(p) = X_p$, pertence a $\mathfrak{X}(M)$.

Seja $(U\ , x)$ um sistema de coordenadas em p, temos:

$$\left[w_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)\right]_{n\times 1} = [g_{ij}(p)]_{n\times n}[b_i(p)]_{n\times 1},$$

onde $X_p = \sum_{i=1}^{n} b_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. Logo $[b_i(p)]_{n\times 1} = [g^{ij}(p)]_{n\times n}\left[w_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)\right]_{n\times 1}$.

Concluímos que $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Usamos a notação $w^{\#}$ para $\theta^{-1}(w)$. Definimos uma função $B : \mathcal{A}^k(M) \times \mathcal{A}^k(M) \to C^{\infty}(M)$ por :

$$B(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k, z_1 \wedge z_2 \wedge \cdots \wedge z_k)(p) = det([\langle w_i^{\#}(p), z_j^{\#}(p)\rangle]).$$

Para cada $k = 0, ..., n$ definimos $* : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{n-k}(M)$ por:

$$(w \wedge *z)(p) = B(w, z)(p)dv(p) \text{ para todo } w, z \in \mathcal{A}^k(M) \text{ e } p \in M.$$

Este função é chamada operador estrela de Hodge.

Temos as seguintes propriedades:

i) $* : \mathcal{A}^0(M) \to \mathcal{A}^n(M)$ é dado por $*f = fdv$.

ii) $* * w = (-1)^{k(n-k)}w$.

Para $k = 1, ..., n$ definimos $\delta : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$ por:

$$\delta w = (-1)^{n(k-1)+1} * d * w$$

Onde d é dado pelo teorema seguinte:

Teorema 1.18. *(ver [1, pág. 75]). Seja M uma variedade diferenciável. Então, para cada $k \geq 0$, há um único operador linear*

$$d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$$

satisfazendo:

i) Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave (uma 0-forma), então df é a diferencial de f, definida por:

$$df(X) = X(f),$$

ii) Se $w \in \mathcal{A}^k(M)$ e $\eta \in \mathcal{A}^l$, então:

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta,$$

iii) $d \circ d = 0$.

Estendemos a definição de δ para 0-formas, $w \in \mathcal{A}^0(M)$, por:

$$\delta w = 0.$$

Temos as seguintes propriedades:

i) $\delta \circ \delta = 0$

ii) $\displaystyle\int_M B(\delta w, z)dv = \int_M B(w, dz)dv$, para $w \in \mathcal{A}^k(M)$ e $z \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$.

Agora definimos o operador Laplaciano-Hodge $\widehat{\Delta} : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^k(M)$ por:

$$\widehat{\Delta} w = d\delta w + \delta dw.$$

Uma forma $w \in \mathcal{A}^k(M)$ será dita harmônica se $\widehat{\Delta} w = 0$. Temos que para todo $w \in \mathcal{A}^k(M)$, são equivalentes:

i) w é harmônica.

ii) $dw = 0$ e $\delta w = 0$.

Observação: Para uma função $f \in C^\infty(M)$ temos: $\Delta f = div\nabla f = -\delta df = -\widehat{\Delta} f$.

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [12].

Definimos o k-ésimo grupo de cohomologia de De Rham:

$$H^k(M) = \frac{Ker\left\{d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)\right\}}{Im\left\{d : \mathcal{A}^{k-1}(M) \to \mathcal{A}^k(M)\right\}}$$

Introduzimos a cohomologia de Hodge:

$$\mathcal{H}^k(M) = \{w \in \mathcal{A}^k(M) : \widehat{\Delta} w = 0\}$$

Teorema 1.19. *(Hodge, 1935) $\mathcal{H}^k(M)$ é isométrico a $H^k(M)$.*

Proposição 1.20. *Seja M uma variedade Riemmaniana fechada e orientada. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta_X = \langle X, \cdot \rangle$ então*

$$divX = -\delta\theta_X.$$

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{A}^0(M)$:

$$\int_M B(df, \theta_X)dv = \int_M B(f, \delta\theta_X)dv = \int_M f\delta\theta_X dv$$

Além disso:

$$\begin{aligned} B(df,\theta_X)+fdivX &= \langle df^{\#},\theta_X^{\#}\rangle + fdivX \\ &= \langle \nabla f, X\rangle + fdivX = div(fX) \end{aligned}$$

Logo

$$0=\int_M div(fX)dv=\int_M \langle df^{\#},\theta_X^{\#}\rangle dv+\int_M fdivXdv=\int_M f(\delta\theta_X+divX)dv$$

Portanto:

$$divX=-\delta\theta_X$$

□

Proposição 1.21. *(ver [12, pág. 207]) Seja $X\in\mathfrak{X}(M)$ tal que ∇X é simétrica (i.e θ_X é uma forma fechada) então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|X|^2)=|\nabla X|^2+X(div(X))+Ric(X).$$

Teorema 1.22. *Se $w\in\mathcal{A}^1(M)$ é uma forma harmônica e existe $k\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ tal que $Ric(X)\geq k|X|^2$ para todo $X\in\mathfrak{X}(M)$, então $w=0$.*

Demonstração.

Se $X=w^{\#}$ temos $divX=-\delta w=0$ (já que $\widehat{\Delta}w=0$), de onde

$$\frac{1}{2}\Delta(|X|^2)=|\nabla X|^2+Ric(X)$$

Logo:

$$0=\frac{1}{2}\int_M \Delta(|X|^2)dv=\int_M |\nabla X|^2+Ric(X)dv\geq\int_M k|X|^2dv\geq 0$$

Então $\int_M |X|^2dv=0$, portanto $X=0$. Concluímos que $w=0$

□

Capítulo 2

Imersões Isométricas

Este capítulo é um material introdutório à teoria de subvariedades mínimas. Nós começamos com a noção da segunda forma fundamental.

2.1 A segunda forma fundamental

Na teoria clássica de superfícies em $\mathbb{R}^3$ temos a primeira e segunda forma fundamental. Sabemos que um plano e um cilindro circular em $\mathbb{R}^3$ são localmente isométricos. Mas as suas estruturas são diferentes, desde que eles tenham segundas formas fundamentais diferentes. Os invariantes determinados só pela primeira forma fundamental são intrínsecos; outros são os invariantes extrínsecos que não só dependem da primeira forma fundamental, mas também da segunda forma fundamental. A estrutura de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ é influenciado pela segunda forma fundamental.

Para o contexto geral, podemos generalizar esta noção. Este é o objetivo desta seção.

Vamos considerar a seguinte situação: Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão igual a $k = n+m$. A métrica Riemanniana $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M: se $u, v \in T_pM$, define-se $\langle u, v\rangle = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle$. Diremos que f é uma imersão isométrica.

Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V de $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se ve facilmente usado o difeomorfismo φ. Nesta situação, $f\,|_U : U \to f(U)$ é uma isometria.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$

Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^{\top M} + v^{\perp M}, \text{ onde } v^{\top M} \in T_pM \text{ e } v^{\perp M} \in (T_pM)^{\perp}.$$

ou

$$v = v^{\top} + v^{\perp}$$

quando o contexto for claro.

Denominamos $v^{\top M}$ a componente tangencial de v e $v^{\perp M}$ a componente normal de v.

Definição 2.1. *Se $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$, definimos:*

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \mapsto & \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top} \end{array}$$

Onde $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são as extensões locais a $\overline{M}$ de X, Y.

Proposição 2.1. *∇ é a conexão riemanniana de M.*

Demonstração

Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, no ponto $p \in M$ temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle &= \langle (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}, Z\rangle + \langle Y, (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\top}\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\rangle \\ &= \overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle \\ &= X\langle Y, Z\rangle \end{aligned}$$

Assim, a conexão ∇ é compatível com a métrica de M. Só falta provar que ∇ é simétrica.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top} - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^{\top} - [X,Y] \\ &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top} - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^{\top} - [\overline{X},\overline{Y}]^{\top} \\ &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - [\overline{X},\overline{Y}])^{\top} = 0 \end{aligned}$$

□

Agora vamos a definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \to \overline{M}$

Se X, Y são campos locais em M definimos:

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

$B(X,Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M e não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{X}_1$ é uma outra extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y}$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M; além disto, se $\overline{Y}_1$ é uma outra extensão de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X.

Portanto $B(X,Y)$ está bem definida.

No que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em $U \subset M$ de vetores normais a $f(U) \approx U$

Proposição 2.2. *Se X, Y* $\in \mathfrak{X}(U)$ *, a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) & \to & \mathfrak{X}(U)^{\perp} \\ & (X,Y) & \mapsto & (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp} = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \end{array}$$

é bilinear e simétrica.

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação dada por:

$$\begin{array}{rccc} H_\eta: & T_pM \times T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \langle B(u,v), \eta \rangle \end{array}$$

é, pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.2. *A aplicação definida por:*

$$\begin{array}{rccc} II_\eta: & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & H_\eta(u,u) \end{array}$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η *(*II_η *é uma forma quadrática).*

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$:

$$\langle S_\eta(u), v\rangle = H_\eta(u,v) = \langle B(u,v), \eta\rangle$$

Proposição 2.3. *Seja $p \in M$, $u \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(u) = -(\overline{\nabla}_u N)^\top$$

Demonstração.

Sejam $v \in T_pM$ e X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$ extensões locais de u, v respectivamente. Então $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(u), v\rangle &= \langle B(X,Y)(p), \eta\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_{\overline{X}} N\rangle(p) = \langle -(\overline{\nabla}_u N)(p)^\top, v\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $v \in T_pM$.

□

Definição 2.3. *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que traço$(S_\eta) = 0$.*

Escolhendo uma base local ortonormal $\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$ de $\mathfrak{X}(U)^\perp$, ponhamos:

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \textit{traço}(S_{\eta_i}))\eta_i$$

Se $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ é outra base local ortonormal de $\mathfrak{X}(U)^\perp$, temos

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\langle S_{\eta_i}(f_j), f_j\rangle\right)\sum_{k=1}^{m}\langle \eta_i, f_k\rangle f_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\langle B(f_j, f_j), \eta_i\rangle\right)\sum_{k=1}^{m}\langle \eta_i, f_k\rangle f_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k,j=1}^{m}\left\langle \sum_{i=1}^{m}\langle B(f_j, f_j), \eta_i\rangle \eta_i, f_k\right\rangle f_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k,j=1}^{m}\langle B(f_j, f_j), f_k\rangle f_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\langle S_{f_k}(f_j), f_j\rangle\right) f_k
\end{aligned}$$

Logo:

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\textit{\textbf{traço}}(S_{f_i}))f_i$$

Portanto H não depende da base e_i. O vetor H é chamado o vetor curvatura média de f. É claro que f é mínima se e só se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

Além, se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base local ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$, temos:

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida. Mais precisamente, se $M \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mínima e $D \subset M$ um domínio suficientemente pequeno de M com bordo ∂D regular, então o volume de D na métrica induzida é menor ou igual ao volume de qualquer outra subvariedade de M como o mesmo bordo.

2.2 Exemplos de subvariedades mínimas

2.2.1 No Espaço Euclidiano.

Proposição 2.4. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^k$ uma imersão isométrica com o vetor curvatura média H, então:*

$$\Delta\psi = mH,$$

onde $k = m + n$ e $\Delta\psi = (\Delta\psi_1, ..., \Delta\psi_k)$.

Demonstração.

Escolhemos uma vizinhança $U \subset M$ de $p \in M$ tal que $\psi(U) \subset \mathbb{R}^k$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^k$ e escolhemos uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^k$ de $\psi(p) \in \mathbb{R}^k$ tal que $X \in \mathfrak{X}(U)$ estende-se a $\overline{X} \in \mathfrak{X}(W)$. Além disso, escolhemos uma base local ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathfrak{X}(U)$. Utilizando a identificação $d\psi(X) \approx X$, $X \in \mathfrak{X}(U)$ temos $X(p)(\psi_i) = \overline{X}(\psi(p))(x_i)$, onde $p \in M$ e $x_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é a i-ésima projeção canônica. Então:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_i &= \sum_{j=1}^{n} e_j e_j \psi_i - (\nabla_{e_j} e_j)\psi_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\overline{\nabla}^2 x_i)(\overline{e}_j, \overline{e}_j) + (\overline{\nabla}_{\overline{e}_j}\overline{e}_j)^{\perp} x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{\overline{e}_j}\overline{\nabla} x_i, \overline{e}_j\rangle + \big\langle B(e_j, e_j), \overline{\nabla} x_i \big\rangle
\end{aligned}$$

Tem-se que $\overline{\nabla} x_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e que $\overline{\nabla}$ é a conexão euclidiana, logo $\overline{\nabla}_{\overline{e}_j}(\partial/\partial x_i) = 0$. Então:

$$\Delta\psi_i = \left\langle mH, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle$$

Logo:

$$\Delta\psi = (\Delta\psi_k, ..., \Delta\psi_k) = mH$$

□

Corolário 2.5. *Uma imersão isométrica $\psi : M \to \mathbb{R}^n$ é mínima se e somente se cada componente de ψ é uma função harmônica.*

Demonstração.

O resultado é consequência de : $\Delta\psi_i = \delta d\psi_i = \triangle\psi_i$

□

Corolário 2.6. *Não existe uma subvariedade mínima compacta no espaço euclidiano.*

Demonstração.

O resultado é consequência do principio do máximo de Hopf: Toda função harmônica sobre uma variedade Riemanniana é constante se tem um máximo local em um ponto interior.

□

2.2.2 Na esfera

Teorema 2.7. *Uma imersão isométrica $\psi : M^n \to S^k$ é mínima se e somente se*

$$\Delta\psi = -n\psi$$

Demonstração.

Denotamos por ∇, $\overline{\nabla}$ e $\overline{\overline{\nabla}}$ as conexões Riemannianas de M, S^k e $\mathbb{R}^{k+1}$ respectivamente. Além disso, denotamos por H a curvatura média de ψ e por $\overline{H}$ curvatura média de $i \circ \psi : M \to \mathbb{R}^{k+1}$, $i : S^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ é a função inclusão.

Se $U \subset M$ e uma vizinhança de $p \in M$ tal que $\psi(U) \subset S^k$ é uma subvariedade de S^k escolhemos uma base local ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathfrak{X}(U)$, temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{\overline{e}_i}\overline{e}_i\right)^{\perp M} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{\overline{\nabla}}_{\overline{\overline{e}}_i}\overline{\overline{e}}_i\right)^{\top S^k}\right)^{\perp M} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{\overline{\nabla}}_{\overline{\overline{e}}_i}\overline{\overline{e}}_i\right)^{\perp M}\right)^{\top S^k} = ((m+1)/m)\overline{H}^{\top S^k}\ ,\ k = n+m. \end{aligned}$$

Do teorema anterior temos $\Delta\psi = (m+1)\overline{H}$, logo $(\Delta\psi)^{\top S^k} = (m+1)\overline{H}^{\top S^k} = mH$. Então ψ é mínima se e somente se $\Delta\psi(p)$ é paralelo a $\psi(p)$ para todo $p \in M$, isto é: existe $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta\psi = \lambda\psi$.

[$\Rightarrow$] Temos:

$$0 = \Delta(|\psi|^2) = 2\langle\psi, \Delta\psi\rangle + 2\sum_{i=1}^{k+1}|\nabla\psi_i|^2 = 2\lambda + 2\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}(e_j(\psi_i))^2,$$

$$-\lambda = \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}(e_j(\psi_i))^2 = \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}(d\psi_i(e_j))^2 = \sum_{j=1}^{n}|d\psi(e_j)|^2 = \sum_{j=1}^{n}|e_j|^2 = n.$$

$\square$

Teorema 2.8. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{k+1}$ é uma imersão isométrica e existe $\lambda : M \to \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\Delta\psi = -\lambda\psi$, então:*

i) $\lambda > 0$;

ii) $\psi(M) \subset S^k(r)$, *onde* $r^2 = \dfrac{n}{\lambda}$;

iii) $\psi : M \to S^k(r)$ *é mínima.*

Demonstração.

Seja $\overline{H}$ a curvatura média de $\psi : M \to \mathbb{R}^{k+1}$. Temos $\Delta\psi = (m+1)\overline{H} = -\lambda\psi$, $k+1 = (m+1)+n$, o que implica que $\psi(p)$ é um vetor normal a M para todo $p \in M$. Logo, para qualquer vetor $V \in T_pM$, $p \in M$:

$$V(\langle\psi, \psi\rangle) = 2\langle d\psi_p(V), \psi(p)\rangle = 0$$

Então:

$$|\psi| = r = constante$$

Além:

$$0 = \Delta(|\psi|^2) = 2\langle \psi, \Delta\psi \rangle + 2\sum_{i=1}^{k+1} |\nabla \psi_i|^2 = -2\lambda r^2 + 2n;$$

$$\lambda = \frac{n}{r^2} > 0$$

Isto prova $i)$ e $ii)$. Se H é a curvatura média de $\psi : M \to S^k(r)$, temos:

$$H = ((m+1)/m)\overline{H}^{\top S^k(r)} = -(\lambda/m)(\psi)^{\top S^k(r)} = 0$$

$\square$

Capítulo 3

A estimativa do primeiro autovalor para hipersuperfícies mínimas

Neste capítulo obtemos um limite inferior para o primeiro autovalor de uma hipersuperfície orientável e fechada mergulhada minimamente em uma variedade Riemanniana orientável e fechada com curvatura de Ricci positiva. A prova do resultado principal deste capítulo utiliza a formula de Reilly que é na verdade uma versão integrada da fórmula de Bochner, como fica claro na prova do Teorema 3.4.

Combinando o Teorema 3.6 como o resultado de Yang and Yau [17] obtemos um limite superior para a área de uma superfície mínima mergulhada em S^3 em termos de seu gênero.

3.1 Fórmula de Reilly

Neste seção M vai ser uma variedade Riemanniana compacta, orientável e com bordo ∂M. Nos cálculos locais $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ vai denotar um referencial ortonormal local tal que em $q \in \partial M$: $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ são tangentes a ∂M, e e_n é o vetor normal apontando para fora de M.

Para desenvolver a Fórmula de Reilly vamos a precisar os seguintes teoremas:

Teorema 3.1. *(Teorema de divergência) Seja M uma variedade Riemanniana orientável com bordo. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ com suporte compacto se verifica:*

$$\int_M (divX)dv_g = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle dv_{\widehat{g}}\,,$$

onde N é o campo normal unitário ao longo de ∂M apontando para fora de M e $\widehat{g}$ é a métrica induzida sobre ∂M.

Teorema 3.2. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, orientável e com bordo, além de isso sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$:*

$$\int_M \langle \nabla f, X\rangle dv_g = \int_{\partial M} f\langle X, N\rangle dv_{\widehat{g}} - \int_M f div X dv_g \,,$$

onde N é o campo normal unitário ao longo de ∂M apontando para fora de M e $\widehat{g}$ é a métrica induzida sobre ∂M.

Para uma forma bilinear A nós escrevemos : $|A|^2 = tr(AA^t)$

Teorema 3.3. *(fórmula de Bochner). Seja $f \in C^3(M)$, temos:*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f)$$

Demonstração.

Fixando um ponto $p \in M$. Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial geodésico em p, isto é:

$$\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij} \;,\; \nabla_{E_i} E_j(p) = 0.$$

Fazendo as contas em p, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i E_i(E_i(\langle \nabla f, \nabla f\rangle)) \\
&= \sum_i E_i(\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle) \\
&= \sum_i E_i((\nabla^2 f)(E_i, \nabla f)) \\
&= \sum_i E_i((\nabla^2 f)(\nabla f, E_i)) \text{ (simetria do } \nabla^2 f \text{)} \\
&= \sum_i E_i\langle \nabla_{\nabla f}(\nabla f), E_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{\nabla f}(\nabla f), E_i\rangle + \langle \nabla_{\nabla f}(\nabla f), \nabla_{E_i}E_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{\nabla f}(\nabla f), E_i\rangle \text{ (} \nabla_{E_i}E_j = 0 \text{ no ponto } p \text{)} \\
&= -\sum_i \langle R(E_i, \nabla f)\nabla f, E_i\rangle + \sum_i \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \\
&+ \sum_i \langle \nabla_{[E_i, \nabla f]}\nabla f, E_i\rangle
\end{aligned}$$

O primeiro termo é por definição $Ric(\nabla f, \nabla f)$; o segundo termo (em p) é

$$\begin{aligned}
\sum_i (\nabla f)\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}E_i\rangle &= (\nabla f)\sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle - 0 \\
&= (\nabla f)\Delta f = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle
\end{aligned}$$

E o terceiro termo é

$$\begin{aligned}
\sum_i (\nabla^2 f)([E_i, \nabla f], E_i) &= \sum_i (\nabla^2 f)(\nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{\nabla f} E_i, E_i) \\
&= \sum_i (\nabla^2 f)(\nabla_{E_i}\nabla f, E_i) - (\nabla^2 f)(\nabla_{\nabla f} E_i, E_i) \\
&= \sum_i (\nabla^2 f)(\nabla_{E_i}\nabla f, E_i) - 0 \text{ (em p)} \\
&= \sum_i (\nabla^2 f)(E_i, \nabla_{E_i}\nabla f) \text{ (simetria do } \nabla^2 f \text{)} \\
&= \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle = |\nabla^2 f|^2
\end{aligned}$$

□

Agora passamos a provar a Fórmula de Reilly:

Teorema 3.4.

$$\begin{aligned}
\int_M (\overline{\Delta} f)^2 - |\overline{\nabla}^2 f|^2 dv_g &= \int_M Ric\left(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\right) dv_g + \\
&+ \int_{\partial M} \left[(\Delta(f|_{\partial M}) - \langle H, e_n\rangle e_n(f))\, e_n(f) - \right. \\
&- \langle \nabla(f|_{\partial M}), \nabla(e_n(f)|_{\partial M})\rangle - \\
&\left. - II_{e_n}\left(\nabla(f|_{\partial M}), \nabla(f|_{\partial M})\right)\right] dv_{\widehat{g}}.
\end{aligned}$$

Demonstração.

Integrando a fórmula de Bochner :

$$\int_M \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 - \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle dv_g = \int_M |\overline{\nabla}^2 f|^2 + Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) dv_g$$

Pelos teoremas 3.1 e 3.2 temos:

$$\begin{aligned}
&\int_M \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 - \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle dv_g = \int_{\partial M} \frac{1}{2}\langle \overline{\nabla}|\overline{\nabla} f|^2, e_n\rangle dv_{\widehat{g}} - \\
&- \left(\int_{\partial M} (\overline{\Delta} f)\langle \overline{\nabla} f, e_n\rangle dv_{\widehat{g}} - \int_M (\overline{\Delta} f)^2 dv_g \right) \\
&= \int_{\partial M} \frac{1}{2} e_n(\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle) dv_{\widehat{g}} - \int_{\partial M} (\overline{\Delta} f) e_n(f) dv_{\widehat{g}} + \int_M (\overline{\Delta} f)^2 dv_g
\end{aligned}$$

Para o primeiro termo temos :

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla(f|_{\partial M}),\nabla(e_n(f)|_{\partial M})\rangle + II_{e_n}(\nabla(f|_{\partial M}),\nabla(f|_{\partial M})) = \\
&= \langle(\overline{\nabla}f)^{\top},\overline{\nabla}(e_n(f))^{\top}\rangle + \langle\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}f-\langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle e_n}(\overline{\nabla}f-\langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle e_n),e_n\rangle \\
&= \left\langle\overline{\nabla}f,\left(\overline{\nabla}(e_n(f))-\langle\overline{\nabla}(e_n(f)),e_n\rangle e_n\right)\right\rangle + \{\langle\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}f-\langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle e_n}\overline{\nabla}f,e_n\rangle - \\
&- \left(\overline{\nabla}f-\langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle e_n\right)(e_n(f))\} \\
&= \{\langle\overline{\nabla}f,\overline{\nabla}(e_n(f))\rangle - \langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle\langle\overline{\nabla}(e_n(f)),e_n\rangle\} + \\
&+ \{\left\langle\overline{\nabla}_{e_n}\overline{\nabla}f,\left(\overline{\nabla}f-\langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle e_n(f)\right)\right\rangle - \\
&- \left((\overline{\nabla}f)(e_n(f))-e_n(f)e_n(e_n(f))\right)\} \\
&= \{(\overline{\nabla}f)(e_n(f))-e_n(f)e_n(e_n(f))\} + \{\left\langle\overline{\nabla}_{e_n}\overline{\nabla}f,\left(\overline{\nabla}f-\langle\overline{\nabla}f,e_n\rangle e_n(f)\right)\right\rangle - \\
&- \left((\overline{\nabla}f)(e_n(f))-e_n(f)e_n(e_n(f))\right)\} \\
&= \frac{1}{2}e_n(\langle\overline{\nabla}f,\overline{\nabla}f\rangle) - \langle\overline{\nabla}_{e_n}\overline{\nabla}f,e_n(f)e_n\rangle
\end{aligned}$$

Para o segundo termo:

$$\begin{aligned}
&e_n(f)(\overline{\Delta}f) - \langle\overline{\nabla}_{e_n}\overline{\nabla}f,e_n(f)e_n\rangle = \\
&= e_n(f)\sum_{i=1}^{n}(\overline{\nabla}^2 f)(e_i,e_i) - e_n(f)\langle\overline{\nabla}_{e_n}\overline{\nabla}f,e_n\rangle \\
&= e_n(f)\sum_{i=1}^{n-1}(\overline{\nabla}^2 f)(e_i,e_i) = e_n(f)\sum_{i=1}^{n-1}\left(e_i(e_i(f))-\overline{\nabla}_{e_i}e_i(f)\right)
\end{aligned}$$

Para $p \in \partial M$:

$$\begin{aligned}
&= e_n(f)|_{\partial M}\sum_{i=1}^{n-1}(e_i(e_i(f|_{\partial M}))-\nabla_{e_i}e_i(f|_{\partial M})) - (\overline{\nabla}_{e_i}e_i-\nabla_{e_i}e_i)(f) \\
&= e_n(f)|_{\partial M}\left(\Delta(f|_{\partial M}) - \sum_{i=1}^{n-1}\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_i-\nabla_{e_i}e_i,e_n\rangle e_n(f)\right) \\
&= (\Delta(f|_{\partial M}) - \langle H,e_n\rangle e_n(f)|_{\partial M})\, e_n(f)|_{\partial M}
\end{aligned}$$

Concluímos :

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla}f|^2 &- \langle\overline{\nabla}f,\overline{\nabla}(\overline{\Delta}f)\rangle dv_g = \int_{\partial M}\langle\nabla(f|_{\partial M}),\nabla(e_n(f)|_{\partial M})\rangle + \\
&+ II_{e_n}(\nabla(f|_{\partial M}),\nabla(f|_{\partial M})) - \\
&- [\Delta(f|_{\partial M}) - \langle H,e_n\rangle e_n(f)|_{\partial M}]\, e_n(f)|_{\partial M} dv_{\widehat{g}} + \\
&+ \int_M(\overline{\Delta}f)^2 dv_g
\end{aligned}$$

□

3.2 Teorema principal

Seja M uma variedade Riemanniana fechada conexa. Denotamos por $L^2(M)$ ao espaço de funções mensuráveis f em M tal que:

$$\int_M |f|^2 dv < +\infty.$$

Em $L^2(M)$ temos o produto interno habitual e a norma induzida dado por:

$$(f,h) = \int_M fh\ dv \quad ,$$
$$||f||^2 = (f,f),$$

onde f, $h \in L^2(M)$. Com este produto interno, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert.

Problema fechado de valores próprios. O interesse deste problema é encontrar todos os números reais λ para os quais existe uma solução não trivial $\sigma \in C^2(M)$ de:

$$\Delta\sigma + \lambda\sigma = 0\ (*).$$

Teorema 3.5. *(ver [2, pág. 8]). Para o problema acima temos que o conjunto de autovalores consiste da sequência:*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \longrightarrow \infty$$

*e cada autoespaço associado é dimensão finita. Além disso, cada autofunção é C^∞ em **M**.*

Denotamos por $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor não trivial de $(*)$.

Agora vamos provar o teorema principal:

Teorema 3.6. *Seja M uma hipersuperfície mínima orientável e fechada mergulhada em uma variedade Riemanniana N fechada e orientável . Suponhamos que existe $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $Ric(X) \geq k|X|^2$ para todo $X \in \mathfrak{X}(N)$. **Então** $\lambda_1(M) \geq k/2$.*

Demonstração.

Sendo que a curvatura de Ricci de N é estritamente positiva, o Teorema 1.22. implica que não existe nenhuma 1-forma harmônica não-trivial na variedade compacta N. Pelo Teorema 1.19, o primeiro numero de Betti $\beta_1 = dimH^1(N) = dim\mathcal{H}^1(N) = 0$, onde $\mathcal{H}^1(N)$ e $H^1(N)$ denotam o grupo de 1-formas harmônica em N e o grupo de cohomologia de De Rham de ordem 1 respectivamente. Combinando isto com o fato de que M e N são orientáveis, pela teoria de topologia algebraica, tem-se que M divide a N em dois componentes Ω_1 e Ω_2 tal que $\partial\Omega_1 = M = \partial\Omega_2$.

Seja z a primeira autofunção de M, i.e., $\Delta z + \lambda_1 z = 0$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(M)$. Seja f a solução do problema de Dirichlet:

$$\overline{\Delta} f = 0, \text{ em } \Omega_1 \text{ e } f|_{\partial\Omega_1} = z.$$

Da desigualdade $(\overline{\Delta} f)^2 \leq n|\overline{\nabla}^2 f|^2$ e do teorema 3.4 :

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega_1} \frac{n-1}{n}(\overline{\Delta} f)^2 dv_g &\geq \int_{\Omega_1} (\overline{\Delta} f)^2 - |\overline{\nabla}^2 f|^2 dv_g \\
&= \int_{\Omega_1} Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) dv_g + \int_{\partial\Omega_1} (\Delta(z)) e_n(z) - \\
&\quad -\langle \nabla z, \nabla(e_n(z))\rangle - II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}} \\
&\geq \int_{\Omega_1} k|\overline{\nabla} f|^2 dv_g + \int_{\partial\Omega_1} -\lambda_1 z e_n(z) - \langle \nabla z, \nabla(e_n(z))\rangle - \\
&\quad -II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}}
\end{aligned}$$

Para o terceiro termo:

$$div(e_n(z)\nabla z) = e_n(z) div(\nabla z) + \langle \nabla(e_n(z)), \nabla z\rangle$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle \nabla z, \nabla(e_n(z))\rangle &= div(e_n(z)\nabla z) - e_n(z) div(\nabla z) \\
&= div(e_n(z)\nabla z) - e_n(z)\Delta z
\end{aligned}$$

Temos também $\int_{\partial\Omega_1} div(e_n(z)\nabla z) dv_{\widehat{g}} = 0$. Então :

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{\Omega_1} k|\overline{\nabla} f|^2 dv_g + \int_{\partial\Omega_1} -\lambda_1 z e_n(z) - (div(e_n(z)\nabla z) - e_n(z)\Delta z) - \\
&\quad -II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}} \\
&\geq \int_{\Omega_1} k|\overline{\nabla} f|^2 dv_g + \int_{\partial\Omega_1} -2\lambda_1 z e_n(z) - II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}}
\end{aligned}$$

Do Teorema de divergência e $\overline{div}(f\overline{\nabla} f) = f\overline{div}(\overline{\nabla} f) + |\overline{\nabla} f|^2$:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_1} (z e_n(z)) dv_{\widehat{g}} &= \int_{\partial\Omega_1} \langle f\overline{\nabla} f, e_n\rangle dv_{\widehat{g}} \\
&= \int_{\Omega_1} f\overline{div}(\overline{\nabla} f) + |\overline{\nabla} f|^2 dv_g \\
&= \int_{\Omega_1} f\overline{\Delta} f + |\overline{\nabla} f|^2 dv_g = \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 dv_g
\end{aligned}$$

Portanto:

$$0 \geq (k - 2\lambda_1)\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 dv_g - \int_{\partial\Omega_1} II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}}$$

Temos que $\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 dV_g > 0$ (f não é uma função constante).

Se $\int_{\partial\Omega_1} II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}} \leq 0$:

$$0 \geq (k - 2\lambda_1) \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 dv_g$$

e

$$0 \geq (k - 2\lambda_1)$$

Se $\int_{\partial\Omega_1} II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}} > 0$ consideramos Ω_2 em vez de Ω_1. Neste caso o vetor normal unitário apontando para fora do bordo $\partial\Omega_2 = M$ é $v = -e_n$. Então:

$$\int_{\partial\Omega_2} II_v(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}_0} = \int_{\partial\Omega_1} -II_{e_n}(\nabla z, \nabla z) dv_{\widehat{g}} < 0$$

onde $g_0 = g$ é a métrica Riemanniana de Ω_2 e $\widehat{g}_0$ é a métrica induzida sobre $\partial\Omega_2 = M = -\partial\Omega_1$, estamos também considerando o fato $dv_{\widehat{g}} = -dv_{\widehat{g}_0}$.

Então podemos proceder como fizemos para no caso anterior.

□

Corolário 3.7. *Se M uma hipersuperfície mínima orientável e fechada mergulhada em S^n, a esfera redonda. Então $\lambda_1(M) \geq (n-1)/2$*

Este resultado está intimamente relacionado com a conjectura de Yau [19]. É bem conhecido que as funções coordenadas são funções próprias de uma hipersuperfícies mínima M de S^n com autovalor $n-1$. Yau conjectura que o primeiro autovalor de M é igual a $n-1$. Nosso resultado pode ser considerado como alguma evidência de que a conjectura de Yau pode ser verdadeira.

3.2.1 Aplicações

Agora vamos combinar o Teorema 3.6 com o resultado de Yang e Yau [17]: Se M é uma superfície de Riemann orientável de gênero g e área A, então $\lambda_1 A \leq 8\pi(g+1)$. Desta forma teremos o Corolário 3.9. A sequência de ideias apresentadas para provar o resultado mencionado de Yang e Yau são obtidas de [5] (ver pág. 239).

Proposição 3.8. *Seja M uma superfície mínima orientável e fechada mergulhada em uma variedade Riemanniana N orientável e fechada de dimensão 3. Suponhamos que existe $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $Ric(X) \geq k|X|^2$ para todo $X \in \mathfrak{X}(N)$. Então área$(M) \leq 8\pi(g+1)/k$.*

Corolário 3.9. *Se M uma superfície mínima orientável e fechada mergulhada em S^3. Então área$(M) \leq 8\pi(g+1)$.*

Esta proposição é uma consequência imediata dos seguintes resultados:

Teorema 3.10. *(Hersch) Se M é homeomorfa a S^2 com uma métrica Riemanniana, então*

$$\lambda_1 \text{\textbf{\textit{área}}}(M) \leq \lambda_1(S^2)\text{\textbf{\textit{área}}}(S^2) = 8\pi$$

a igualdade acontece se e somente se a métrica é redonda.

Seja M uma superfície de Riemann e $\phi : M^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma aplicação conforme ramificada não constante, do análise complexa temos que existe um conjunto finito $\{p_1, ..., p_n\} \subset S^2$ tal que $\phi : M - \phi^{-1}(\{p_1, ..., p_n\}) \to S^2 - \{p_1, ...p_n\}$ é uma aplicação de recobrimento com $r = grau(\phi)$ folhas.

Para um ponto quaisquer $p \in S^2_- = S^2 - \{p_1, ...p_n\}$ temos que existe uma vizinhança U de p e abertos U_i, $i = 1, ..., r$, tal que $\phi_i = \phi|_{U_i} : U_i \to U$ é um difeomorfismo. Logo definimos para p uma métrica g_* conforme em S^2_-:

$$\langle u, v\rangle_*(p) = \sum_{i=1}^{r} \langle u, v\rangle_{*i}(p), \text{ onde } \langle u, v\rangle_{*i}(p) = \left\langle d(\phi_i^{-1})_p(u), d(\phi_i^{-1})_p(v)\right\rangle (\phi_i^{-1}(p)).$$

Lema 3.11. *(Ver [17]). Seja $f \in C^1(S^2)$, e seja dv (resp. dv_*) o elemento de volume de g (resp. g_*) sobre M (resp. S^2_-), temos:*

i) $\displaystyle\int_{S^2} f dv_* = \int_M (f \circ \phi) dv.$

ii) Se $\langle\ ,\ \rangle_0$ é outra métrica conforme sobre S^2, então

$$r \int_{S^2} |\nabla_0 f|^2 dv_0 = r \int_{S^2} |\nabla_* f|^2_* dv_* = \int_M |\nabla(f \circ \phi)|^2 dv.$$

Demonstração

i) Em U_j podemos supor a existência de um sistema de coordenadas (z_j , U_j), $z_j = x_j + iy_j$, e de uma função $G \in C^\infty(M)$ tal que $\langle a, b\rangle(q) = G_j(q)(dx_j(a)dx_j(b) + dy_j(a)dy_j(b))$, onde $q \in U_j$ e a, $b \in T_qM$. Então, em U, em termos da parametrização $z = z_j \circ \phi_j^{-1} = x + iy$ temos:

$$\langle u, v\rangle_{*j} = G_j(\phi_j^{-1}) \left|\frac{dz_j}{dz}\right|^2 (dx(u)dx(v) + dy(u)dy(v)),$$

onde u, $v \in T_pS^2$, $p \in U$. Denotando $H_j = G_j(\phi_j^{-1}) \left|\dfrac{dz_j}{dz}\right|^2$ obtemos:

$$\langle u,v\rangle_*(p) = \left(\sum_{j=1}^{r} H_j(p)\right)(dx(u)dx(v)+dy(u)dy(v)),$$

onde u, $v \in T_pM$, $p \in U$.

Então:

$$g_{*11} = g_{*22} = \sum_{i=1}^{r} H_i,\ g_{*12} = 0,\ dv_* = \left(\sum_{i=1}^{r} H_i\right) dx \wedge dy = \sum_{i=1}^{r} dv_{*i}$$

e

$$\phi_i^*(dv_{*i}) = dv,\ i = 1,...,r.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_U f dv_* &= \int_U f \sum_{i=1}^{r} dv_{*i} = \sum_{i=1}^{r} \int_{U_i} \phi_i^*(f dv_{*i})\\ &= \sum_{i=1}^{r} \int_{U_i} (f\circ\phi_i)\phi_i^*(dv_{*i})\\ &= \int_{\phi^{-1}(U)} (f\circ\phi)dv.\end{aligned}$$

ii) Para a primeira igualdade temos:

Sejam g e h métricas conformes sobre M, logo existe uma função $d : M \to \mathbb{R} \in C^\infty(M)$ tal que $g = e^d h$

Utilizando o sistema de coordenadas (W , φ) em M:

$$\nabla_g k = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{2} e^{-d}h^{ij}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = e^{-d}\nabla_h k\ ;$$

$$|\nabla_g k|_g^2 dv_g = |\nabla_g k|_g^2\sqrt{det[g_{ij}]}dx_1\wedge dx_2 = e^d|e^{-d}\nabla_h k|_h^2\sqrt{e^{2d}det[h_{ij}]}dx_1\wedge dx_2 =$$
$$|\nabla_h k|_h^2\sqrt{det[h_{ij}]}dx_1\wedge dx_2 = |\nabla_h k|_h^2 dv_h.$$

Para a segunda igualdade:

Sejam u, $v \in T_pS^2$, $p \in U$. Se $j \in \{1, ..., r\}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_*(p) &= \left(\sum_{i=1}^{r} H_i/H_j\right)(p)\langle u, v\rangle_{*j}(p)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} H_i/H_j\right)(p)\left\langle d(\phi_j^{-1})_p(u), d(\phi_j^{-1})_p(v)\right\rangle(\phi_j^{-1}(p)).\end{aligned}$$

Logo, se a, $b \in T_qM$, $q \in U_j$, e denotamos $\beta = \sum_{i=1}^{r} H_i/H_j$, temos:

$$\begin{aligned}\langle d\phi_q(a), d\phi_q(b)\rangle_*(\phi(q)) &= \beta(\phi_j(q))\langle d(\phi_j)_q(a), d(\phi_j)_q(b)\rangle_{*j}(\phi_j(q))\\ &= \beta(\phi(q))\langle a, b\rangle(q).\end{aligned}$$

Então:

$$\phi_j^*(dv_*) = \beta dv.$$

Além disso, se $v \in T_pS^2$ onde $p = \phi(q)$, $q \in U_j$:

$$\begin{aligned}\langle d\phi_q(\nabla(f \circ \phi)(q)), v\rangle_{*j}(p) &= \langle \nabla(f \circ \phi)(q), d(\phi_j^{-1})_p(v)\rangle(q)\\ &= d(f \circ \phi)_q(d(\phi_j^{-1})_p(v))\\ &= \langle \nabla_* f, v\rangle_*(p)\\ &= \beta(p)\langle \nabla_* f, v\rangle_{*j}(p).\end{aligned}$$

$$d\phi(\nabla(f \circ \phi)) = \beta\nabla_* f,$$

$$|\nabla_* f|_*^2 = \beta^{-2}|d\phi(\nabla(f \circ \phi))|_*^2 = \beta^{-1}|\nabla(f \circ \phi)|^2.$$

Logo:

$$\int_U |\nabla_* f|_*^2 dv_* = \int_{U_j} \phi_j^*\left(|\nabla_* f|_*^2 dv_*\right) = \int_{U_j} (|\nabla_* f|_*^2(\phi))\phi_j^*(dv_*) = \int_{U_j} |\nabla(f \circ \phi)|^2 dv.$$

Portanto

$$r\int_{S_-^2} |\nabla f|_*^2 dv_* = \int_{M-\phi^{-1}(\{p_1,...,p_n\})} |\nabla(f \circ \phi)|^2 dv.$$

Considerando que $\phi^{-1}(\{p_1, ..., p_n\})$ é um conjunto finito:

$$r\int_{S^2}|\nabla_0 f|^2 dv_0 = r\int_{S^2}|\nabla f|_*^2 dv_* = \int_M |\nabla(f\circ\phi)|^2 dv$$

□

Teorema 3.12. *Suponha que M é uma superfície com uma métrica Riemanniana e $\phi : M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação conforme ramificada com $grau(\phi) > 0$, então:*

$$\lambda_1(M)\textbf{\textit{área}}(M) \leq grau(\phi)\lambda_1(S^2)\textbf{\textit{área}}(S^2) = 8\pi grau(\phi)$$

a igualdade acontece se e somente se M é isométrica a uma esfera redonda.

Demonstração.

Para $i = 1, 2, 3$, escrevemos: $\phi_i = x_i \circ \phi$, onde $x_i : S^2 \to \mathbb{R}$ é a projecção na i-ésima coordenada. Pelo argumento dado na prova do teorema Hersch (veja [5] Pág. 241, Teo 7.7) e já que ϕ não é constante, podemos assumir:

$$\int_M \phi_i dv = 0$$

Segue-se a partir da habitual descrição variacional do primeiro autovalor que para cada i tem-se:

$$\int_M |\nabla\phi_i|^2 dv \geq \lambda_1(M)\int_M \phi_i^2 dv$$

Além disso, usando o fato de que $\phi(M) \subset S^2$ (assim $\sum_{i=1}^{3}\phi_i^2 = 1$), temos:

$$\sum_{i=1}^{3}\int_M |\nabla\phi_i|^2 dv \geq \lambda_1(M)\textbf{\textit{área}}(M)$$

Do lema anterior:

$$\int_M |\nabla\phi_i|^2 dv = grau(\phi)\int_{S^2}|\nabla x_i|^2 dw = grau(\phi)\lambda_1(S^2)\int_{S^2} x_i^2 dw$$

Então:

$$\lambda_1(M)\textbf{\textit{área}}(M) \leq grau(\phi)\lambda_1(S^2)\sum_{i=1}^{3}\int_{S^2} x_i^2 dw = grau(\phi)\lambda_1(S^2)\textbf{\textit{área}}(S^2)$$

□

Teorema 3.13. *Seja M uma variedade fechada com gênero g. Existe uma aplicação conforme ramificada $\phi : M \to S^2$ com grau no máximo:*

$$\rho(g) \leq \begin{cases} g/2+1 & \textit{se } \ g \textit{ é par}, \\ g/2+3/2 & \textit{se } \ g \textit{ é ímpar}. \end{cases}$$

Combinando os Teoremas 3.12 e 3.13:

Teorema 3.14. *Seja M é uma superfície com uma métrica Riemanniana e gênero g, então*

$$\lambda_1(M)\textbf{\textit{área}}(M) \leq 4\pi(g+5/2-(-1)^g/2) \leq 8\pi(g+1)$$

*a igualdade acontece se e somente se **M** é isométrica a uma esfera redonda.*

Em [15] pode-se observar que o teorema acima não pode ser generalizado diretamente, isso é,

$$\lambda_1(M)\textbf{\textit{área}}(M)^{2/n} \leq c(n)$$

em geral não é verdade, $c(n)$ depende de outros valores geométricos (ver a Seção 8 do Capitulo 3 de [13]).

Referências Bibliográficas

[1] Francisco Carlos Caramello Junior, *Tensores, Teorema de Stokes e Cohomologia de De Rham*, Trabalho de conclusão de curso de bacharelado em Matemática, 2011.

[2] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc, 1984.

[3] S. Y. Cheng, *Eigenvalues comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z., 143 (1975), pp. 289-297

[4] Hyeong In Choi and Ai-Nung Wang, *A First eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces*, J. Differential Geom. 18 (1983) 559-562.

[5] Tobias Holck Colding and William P. Minicozzi II, *A Course in Minimal Surfaces*, American Mathematical Society, 2011

[6] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Quinta Edição, Rio de Janeiro: IMPA , 2011.

[7] J. Hersch, *Quatre properiétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 270 (1970), pp. 1645-1648

[8] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, First Edition, New York: Springer-Verlag, 2002.

[9] A. Lichnerowicz, *Géometrie des groupes de transformation* , Dunod, Paris, 1958

[10] E. Lima, *Curso de Análise vol 2*, Projeto Euclides, Impa, 2009.

[11] Joaquín Pérez Muñoz, *Geometría Riemanniana*, Granada: 2012

[12] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, Second Edition, Springer.

[13] Richard Schoen and Shing-Tung Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press of Boston, Incorporated (June 1, 1994).

[14] Valeriya Talovikova, *Riemann-Roch Theorem*, VIGRE/REUPapers 2009.

[15] Urakawa, *On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds*, J. Math. Soc. Japan, Volume 31, Number 1 (1979), 209-226.

[16] Yuanlong Xin, *Minimal submanifolds and related topics*, World Scientific, 2004.

[17] P. Yang and S. T. Yau, *Eigenvalue of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa 7(1980)55-63.

[18] S. T. Yau, *Isoperimetric constants and first eigenvalue of a compact Riemannian manifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 8 (1975), pp. 487-507.

[19] S. T. Yau, *Seminar on differential geometry*, Annals of Math. Studies, No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.,1982.