

IME-UFF

RELACIONANDO PERFEITAMENTE OS NÚMEROS DE DOMINAÇÃO,
DOMINAÇÃO TOTAL, E DOMINAÇÃO EMPARELHADO DE UM GRAFO

José Diego Alvarado Morales

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, IME-UFF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Simone Dantas de Souza

Niterói

Março de 2015

RELACIONANDO PERFEITAMENTE OS NÚMEROS DE DOMINAÇÃO,
DOMINAÇÃO TOTAL, E DOMINAÇÃO EMPARELHADO DE UM GRAFO

José Diego Alvarado Morales

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, IME-UFF, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em matemática.

Examinada por:

Prof.^a. Simone Dantas de Souza, D.Sc.
(Universidade Federal Fluminense)

Prof. Dieter, Rautenbach, Ph.D.
(Universidade de Ulm)

Prof.^a. Celia Picinin de Mello, D.Sc.
(Universidade Estadual de Campinas)

NITERÓI, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2015

Alvarado Morales, José Diego

Relacionando Perfeitamente os Números de Dominação, Dominação Total, e Dominação Emparelhado de um Grafo/José Diego Alvarado Morales. – Niterói: IME-UFF, 2015.

VIII, 44 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Simone Dantas de Souza

Dissertação de mestrado – Combinatória – Programa de Pós-graduação em Matemática, IME-UFF, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 42 – 44.

1. Dominação total. 2. Dominação emparelhada. 3. Número domático. 4. Número domático total. I. Dantas de Souza, Simone. II. Universidade Federal Fluminense, IME, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

*Dedico a Deus, a meus pais e a
minha orientadora*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, sem o qual nada seria possível.

Agradeço a meus pais pelo apoio incondicional que sempre me brindaram, e a minha família por seu carinho para mim.

Em especial, agradeço a minha orientadora Simone Dantas de Souza e ao professor Dieter Rautenbach pela amabilidade, paciência e apoio.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo e de Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo suporte financeiro que possibilitou meus estudos durante o mestrado, e estendo meu agradecimento a todo o pessoal e membros da faculdade por seu apoio durante estes anos.

Por fim, agradeço os meus amigos e colegas que me possibilitaram de alguma forma chegar até aqui. Em particular, aos amigos Poly Hannah, Deiwison Sousa, Thiago Meneses, Aimée Reis e em especial a Vitor Costa pelas inúmeras vezes que me apoiou como colega e amigo.

Resumo da Dissertação apresentada ao IME-UFF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

RELACIONANDO PERFEITAMENTE OS NÚMEROS DE DOMINAÇÃO,
DOMINAÇÃO TOTAL, E DOMINAÇÃO EMPARELHADO DE UM GRAFO

José Diego Alvarado Morales

Março/2015

Orientador: Simone Dantas de Souza

O número de dominação $\gamma(G)$, o número de dominação total $\gamma_t(G)$, o número de dominação emparelhado $\gamma_p(G)$, o número domático $d(G)$, e o número domático total $d_t(G)$ de um grafo G sem vértices isolados estão relacionados pelas desigualdades triviais $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_p(G) \leq 2\gamma(G)$ e $d_t(G) \leq d(G)$. No entanto, muito pouco se sabe sobre os grafos que satisfazem uma dessas desigualdades com igualdade. Portanto, estudamos classes de grafos definidas exigindo-se igualdade em uma das desigualdades anteriores para todo subgrafo induzido que não tenha vértices isolados e cujo número de dominação não seja demasiadamente pequeno. Nossos resultados são caracterizações de várias dessas classes em termos de um número finito de subgrafos induzidos proibidos minimais. Além disso, provamos alguns resultados de complexidade, que sugerem que os grafos extremais para algumas das desigualdades acima não têm uma estrutura simples.

Abstract of Dissertation presented to IME-UFF as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

PERFECTLY RELATING THE DOMINATION, TOTAL DOMINATION, AND
PAIRED DOMINATION NUMBERS OF A GRAPH

José Diego Alvarado Morales

March/2015

Advisor: Simone Dantas de Souza

The domination number $\gamma(G)$, the total domination number $\gamma_t(G)$, the paired domination number $\gamma_p(G)$, the domatic number $d(G)$, and the total domatic number $d_t(G)$ of a graph G without isolated vertices are related by trivial inequalities $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_p(G) \leq 2\gamma(G)$ and $d_t(G) \leq d(G)$. Very little is known about the graphs that satisfy one of these inequalities with equality. We study classes of graphs defined by requiring equality in one of the above inequalities for all induced subgraphs that have no isolated vertices and whose domination number is not too small. Our results are characterizations of several such classes in terms of their minimal forbidden induced subgraphs. Furthermore, we prove some hardness results, which suggest that the extremal graphs for some of the above inequalities do not have a simple structure.

Sumário

Lista de Figuras	1
1 Introdução	2
1.1 Motivação	2
2 Preliminares	5
2.1 Teoria dos Grafos	5
2.2 Complexidade	7
2.3 Dominação em Grafos	8
3 Nossos Resultados	12
3.1 Classe $\mathcal{G}_k(\nu, \tau)$	12
3.2 Complexidade	15
3.3 Provas	15
4 Conclusões	40
Referências Bibliográficas	42

Lista de Figuras

3.1	Grafos C_5 , P_5 e N	12
3.2	Grafos G_1 e G_2 com $\delta(G_i) \geq 1$, $\gamma(G_i) \geq 2$, e $d(G_i) > d_t(G_i)$, $i \in \{1, 2\}$	13
3.3	Grafo $K_2 \circ K_1 \cup K_2 \circ K_1$, elemento de \mathcal{T}_4	14
3.4	Grafo $K_1 \circ K_1 \cup P_3 \circ K_1$, elemento de $\mathcal{T}_4(\gamma, \gamma_t)$	14
3.5	Grafo $P_3 \circ K_1 \cup K_2 \circ K_1$, elemento de $\mathcal{T}_5(\gamma, \gamma_p)$	14
3.6	u' não é adjacente a v' nem a w' (Teor. 1)	17
3.7	Grafo $G(x_i)$ criado para a variável x_i	37

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Dominação em grafos é uma área em teoria dos grafos com uma extensa atividade de investigação. Somente em 1998, o livro [29] sobre dominação publicou uma lista de 1222 artigos em essa área. Historicamente a dominação tem origem com um problema de xadrez. Consideremos um tabuleiro de xadrez e uma rainha. Queremos encontrar o número mínimo de rainhas de modo que todo quadrado ou é ocupado ou pode ser atacado por uma rainha. O modelo para este problema é o seguinte: cada quadrado representa um vértice, e existe uma aresta entre dois vértices se e somente se os quadrados correspondentes aos vértices são separados por um número de quadrados horizontais, verticais ou diagonais. Assim, no modelo, um tal conjunto de rainhas representa, de fato, um conjunto dominante.

Para outra motivação do conceito, consideremos um grafo bipartido, onde uma parte representa pessoas, a outra parte representa empregos e as arestas representam as habilidades de cada pessoa, podendo cada pessoa ter mais de um emprego. Algo muito interessante seria conhecer o número mínimo de pessoas que são necessárias para cobrir todos os empregos.

O conceito de dominação aparece em variadas situações. Os exemplos anteriores são só algumas das tantas situações onde um problema admite uma modelagem na Teoria de Dominação. Uma grande fonte de inspiração é, por exemplo, a Ciência da Comunicação por Redes (*Network Problems*). A comunicação em redes inclui

um conjunto de nós, e dois nós se comunicam sempre que tiverem uma conexão. Com o finalidade de enviar uma mensagem desde um conjunto de nós para todos os demais, necessitamos escolher um conjunto de nós tais que cada um dos outros nós se conectem com um nó do conjunto escolhido. Esse conjunto é um conjunto dominante do grafo que representa a *Network*.

Grande parte das motivações neste campo se baseiam na variedade de conceitos de dominação existentes. Em [29] são mostrados 75 tipos diferentes de dominação. Essas variações são feitas pela imposição de condições sobre os conjuntos dominantes e o conjunto de vértices de um grafo.

Sempre que dois parâmetros, ν e τ , estão relacionados por uma desigualdade simples $\nu(G) \leq \tau(G)$ para todo grafo G (no domínio comum de ν e τ), e no entanto os grafos que satisfazem a igualdade não tem uma estrutura simples, faz sentido estudar a classe dos chamados *grafos perfeitos* $\mathcal{G}(\nu, \tau)$, ou seja, grafos para os quais qualquer subgrafo induzido H (no domínio comum de ν e τ) satisfaz $\nu(H) = \tau(H)$.

Na literatura são conhecidos dois exemplos famosos dessa abordagem: os grafos perfeitos [20], onde os dois parâmetros são o número clique e o número cromático; e os grafos perfeitos de dominação [31], onde os dois parâmetros são o número de dominação e o número de dominação independente.

Sejam $\gamma(G)$ e $\iota(G)$ o número de dominação e o número de dominação independente de um grafo G , respetivamente. Um grafo G é chamado *perfeito de dominação* se $\gamma(H) = \iota(H)$, para todo subgrafo induzido H de G .

Em [31], Igor E. Zverovich e Vadim E. Zverovich nos mostram uma caracterização completa da classe dos grafos perfeitos de dominação mediante um número finito de subgrafos induzidos. A lista de subgrafos proibidos nesta caracterização consiste de 17 grafos imperfeitos de dominação minimais. Além disso, mostram que o problema do conjunto dominante e o problema do conjunto dominante independente é NP-completo para algumas classes especiais de grafos chamados L_k , onde k é um inteiro positivo. Concretamente, L_k é formada pelos grafos planares, bipartidos, com grau máximo 3, e cintura pelo menos k .

O conceito de grafos perfeitos de dominação, como tal, foi introduzido pela pri-

meira vez por Sumner e Moore em [28]. Mas antes disso, já haviam sido realizadas pesquisas nesta área, por exemplo Allan e Laskar [1] mostraram que se G é $K_{1,3}$ -livre, então $\gamma(G) = \iota(G)$.

Um fato interessante, é que antes do artigo de Zverovich [31] o matemático Sumner conjecturou em [27] que era impossível caracterizar os grafos perfeitos de dominação com um número finito de grafos proibidos.

O resultado mais importante de [31] é o Teorema 11 da seção 3 página 378: G é um grafo perfeito de dominação se e somente se G é $\{G_1, \dots, G_{17}\}$ -livre, onde os grafos G_1, \dots, G_{17} são mostrados na Figura 3 na página 379 do mesmo artigo.

Neste trabalho consideramos, essencialmente, classes de grafos perfeitos com relação a ν e τ , onde ν e τ são parâmetros de dominação bem conhecidos [29]:

- Número de Dominação,
- Número de Dominação Total,
- Número de Dominação Emparelhado,
- Número Domático, e
- Número Domático Total.

Nossos resultados são enunciados no Capítulo 3 e são divididos em dois grupos. O primeiro grupo é constituído por caracterizações totais e parciais dos grafos perfeitos, mediante conjuntos finitos de grafos proibidos. O segundo grupo é constituído por resultados de complexidade sobre os grafos extremais (de dominação), que justificam nossos estudos em grafos perfeitos. Estes resultados foram apresentados no 9th International colloquium on graph theory and combinatorics (ICGT 2014) e aceitos para publicação em [4].

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos as definições básicas, e os conceitos de complexidade. Depois, no Capítulo 3, enunciaremos todos nossos resultados sistematicamente, e posteriormente passamos a sua demonstração. Para finalizar, no Capítulo 4, falamos das conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

Nestas primeiras seções apresentaremos algumas definições e notações da teoria dos grafos e de complexidade. Os conceitos específicos da teoria de Dominação serão descritos na última seção.

2.1 Teoria dos Grafos

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$. Denotemos por $n = |V(G)|$ a ordem de G .

Um grafo G é chamado completo se dois vértices quaisquer de G são adjacentes. Um grafo completo de ordem n é representado por K_n .

Dado um grafo G , o grau de um vértice $v \in V(G)$ é o número de vértices adjacentes a v , representado por $d_G(v)$. O grau mínimo de um grafo é representado por $\delta(G)$. Um vértice v é isolado se e somente se $d_G(v) = 0$.

Representemos por $N_G(v)$ ao conjunto de vizinhos de um vértice v , e seja $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ a vizinhança fechada de v em G .

Um caminho é uma sequência finita não vazia de vértices $P = v_1, \dots, v_\ell$ tal que v_i e v_{i+1} são adjacentes para $i \in [\ell - 1]$. Representaremos por P_ℓ os caminhos de ordem ℓ .

Um ciclo é uma sequência finita não vazia de vértices $C = v_1, \dots, v_\ell$ tal que v_i e v_{i+1} são adjacentes para $i \in [\ell - 1]$ e, v_1 e v_ℓ são os únicos vértices da sequência que

são iguais. Representaremos por C_ℓ os ciclos de ordem ℓ .

Um grafo é conexo se e somente se para cada par de vértices u e v , existe um caminho no grafo que conecta u e v . Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos.

Se G é conexo, então a distância entre dois vértices u e v é o comprimento de um caminho mínimo que conecta u e v em G , representado por $\text{dist}_G(u, v)$. Também precisaremos da noção de distância de um vértice a um conjunto de vértices. Seja $v \in V(G)$ e $X \subseteq V(G)$, definimos $\text{dist}_G(v, X) = \min\{\text{dist}_G(v, x) : x \in X\}$.

Um grafo H de G é chamado subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Diremos que um subgrafo H de G é gerador de G se $V(H) = V(G)$.

Agora introduzimos o importante conceito de subgrafo induzido. Seja $X = \{x_1, \dots, x_s\} \subseteq V(G)$, o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G que tem ambos extremos em X , é chamado o subgrafo de G induzido por X e é representado por $G[X] = G[x_1, \dots, x_s]$. Por outro lado, se $H_1, \dots, H_{\ell-1}$ e H_ℓ não são subgrafos induzidos de G , diremos que G é livre de $H_1, \dots, H_{\ell-1}$ e H_ℓ .

Dado um grafo G , que não é árvore, definimos a cintura de G como o comprimento mínimo dos ciclos induzidos de G .

Um grafo multipartito completo de G é um grafo tal que existe uma partição de $V(G)$ em V_1, \dots, V_ℓ tal que $G[V_i]$ é um grafo trivial para $i \in [\ell]$, e para cada $v_i \in V_i$ e $v_j \in V_j$, com $i \neq j$, temos que v_i e v_j são adjacentes.

Um grafo G é chamado *split* se existe uma partição de seus vértices V_1 e V_2 tal que $G[V_1]$ é completo e $G[V_2]$ é trivial.

Para finalizar, enunciaremos um conhecido Teorema devido a Dirac [10]. Para isso, precisamos definir o conceito de ciclo, ciclo hamiltoniano e grafo hamiltoniano.

Um ciclo hamiltoniano C de um grafo conexo G é um ciclo gerador de G . Um grafo é chamado hamiltoniano se contém um ciclo hamiltoniano.

Teorema de Dirac [10]. *Se G é um grafo conexo com $n(G) \geq 3$ e $\delta(G) \geq \frac{n(G)}{2}$, então G é hamiltoniano.*

2.2 Complexidade

Um *problema algorítmico* $\Pi = \Pi(I, Q)$ é constituído de um conjunto I de todas as possíveis entradas para o problema, chamado o conjunto de instâncias, e de uma questão Q sobre essas instâncias. Resolver um destes problemas consiste em desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta à questão do problema.

Há diferentes classes de problemas algorítmicos, dependendo da natureza da questão. Nos estamos interessados nos *problemas de decisão*, onde as únicas respostas possíveis à questão são SIM ou NÃO.

Um algoritmo é polinomial quando o número de operações que efetua está limitada por uma função polinomial $f = f(n)$ no comprimento de sua entrada. Neste caso dizemos que o algoritmo tem complexidade $O(f(n))$. Os problemas de decisão para os quais existe um algoritmo polinomial constituem a classe P , e são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é não-determinístico polinomial quando qualquer instância com resposta SIM possui um *certificado* (comprovação de correção) verificável em tempo polinomial no comprimento da instância. Estes problemas de decisão constituem a classe NP . Claramente $P \subseteq NP$. No entanto, a recíproca não é nada evidente. Atualmente este é um dos principais problemas em aberto na teoria da computação.

Uma definição essencial na Teoria de Complexidade é a definição de uma classe de problemas chamada NP-completo. O estudo dessa classe foi iniciado por Cook em 1971 [8]. Nesse trabalho Cook mostrou que o problema SAT é NP-completo, em um resultado que leva seu nome. Primeiro Karp [18], e tempo depois Garey e Johnson [22], apresentaram largas listas de problemas NP-completos no campo da combinatória, lógica, teoria dos conjuntos, teoria de grafos e outras áreas da matemática discreta e combinatória.

Sejam $\Pi_1 = \Pi(I_1, Q_1)$ e $\Pi_2 = \Pi(I_2, Q_2)$ dois problemas de decisão. Uma *redução* (transformação polinomial) de Π_1 em Π_2 é uma função $T : I_1 \rightarrow I_2$ que satisfaz as seguintes condições:

- T pode ser computado em tempo polinomial (no comprimento da instância).
- Para toda instância $D_1 \in I_1$, D_1 produz uma resposta SIM para Π_1 se e somente se $D_2 = T(D_1)$ produz uma resposta SIM para Π_2 .

Um problema de decisão Π pertence à classe NP-completo (NPC) quando satisfaz as seguintes condições:

- $\Pi \in NP$.
- Para cada problema $\Pi' \in NP$ existe uma redução de Π' em Π .

Dizemos que um problema Π é *NP-difícil* se se satisfaz a segunda condição.

A técnica padrão para mostrar que um problema Π é NP-completo é a seguinte: primeiro mostramos que é NP, depois escolhemos um problema apropriado Π_0 que já sabemos que é NP-completo para construir uma redução de Π_0 em Π . Se só mostramos esta última parte, temos provado que o problema Π é NP-difícil. Surge da definição de NP-completo, que o problema aberto $P = NP$ é equivalente ao problema de decidir se existe algum problema NP-completo e polinomial.

2.3 Dominação em Grafos

Nesta seção definiremos os parâmetros de dominação com os que trabalharemos nesta dissertação, junto com as relações que nos interessam.

Seja D um conjunto de vértices de algum grafo G .

- O conjunto D é um *conjunto dominante de G* se todo vértice de G que não pertence a D , tem um vizinho em D .
- O conjunto D é um *conjunto dominante total de G* se é um conjunto dominante e o grafo $G[D]$ não tem vértices isolados.
- O conjunto D é um *conjunto dominante emparelhado de G* se é dominante e o grafo $G[D]$ tem um emparelhamento perfeito.

O número de dominação $\gamma(G)$ [29], o número de dominação total $\gamma_t(G)$ [7, 16], e o número de dominação emparelhado $\gamma_p(G)$ [13, 23] de G são as cardinalidades mínimas de um conjunto dominante, dominante total, e dominante emparelhado de G , respetivamente.

Por Exemplo: $\gamma(C_5) = 2$, $\gamma_t(C_5) = 3$ e $\gamma_p(C_5) = 4$.

Das definições dadas, inferimos imediatamente as seguintes relações [5, 13, 29]

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_p(G)$$

para todo grafo G para o qual $\gamma_p(G)$ é bem definido (grafos sem vértices isolados).

Além disso, para um conjunto D de vértices de um grafo G e um vértice u em D , definimos:

$$P_G(D, u) = \{v \in V(G) \setminus D : N_G(v) \cap D = \{u\}\}$$

Os vértices de $P_G(D, u)$ são chamados os *vizinhos privados externos de u (em G com respeito a D)*.

Uma vez que qualquer grafo G sem vértices isolados tem um conjunto dominante mínimo D tal que, para todo vértice u em D , o conjunto $P_G(D, u)$ é não vazio, adicionando a D , para cada vértice u em D , um vizinho privado externo de u , resulta num conjunto dominante emparelhado de G , o qual implica

$$\gamma_p(G) \leq 2\gamma(G).$$

Muito pouco é conhecido sobre os grafos que satisfazem com igualdades as desigualdades anteriores.

No entanto, foram caracterizadas de forma construtiva as árvores T que satisfazem as igualdades:

- $\gamma(T) = \gamma_t(T)$ [21].
- $\gamma_t(T) = \gamma_p(T)$ [11, 15].
- $2\gamma(T) = \gamma_t(T)$ [14].

- $2\gamma(T) = \gamma_p(T)$ [16].

No entanto, para o caso geral, exemplos em [9] mostram que mesmo restrições estruturais muito fortes não permitem fortalecer a desigualdade $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$.

Por outro lado, a relação entre o número de dominação total e o número de dominação emparelhado bem como os conjuntos dominantes emparelhados de uma estrutura especial foram estudados em [6, 13, 25, 26].

As desigualdades anteriores são refletidas em desigualdades semelhantes relacionando seus números domáticos correspondentes. Seja G um grafo:

- O *número domático* $d(G)$ de G [7, 30] é o maior inteiro k tal que o conjunto de vértices $V(G)$ de G pode ser particionado em k conjuntos dominantes.
- O *número domático total* $d_t(G)$ de G [12] é o maior inteiro k tal que o conjunto de vértices $V(G)$ de G pode ser particionado em k conjuntos dominantes totais.
- O *número domático emparelhado* $d_p(G)$ de G [13] é o maior inteiro k tal que o conjunto de vértices $V(G)$ de G pode ser particionado em k conjuntos dominantes emparelhados.

Novamente das definições dadas, inferimos as seguintes relações [30]

$$d_p(G) \leq d_t(G) \leq d(G)$$

para todo grafo G sem vértices isolados.

Além disso, já que a união de dois conjuntos dominantes é um conjunto dominante total [30], temos que

$$d_t(G) \geq \left\lceil \frac{d(G)}{2} \right\rceil$$

para todo grafo G sem vértices isolados.

Também note que, da definição de $d(G)$, temos que $\gamma(G)d(G) \leq n(G)$, portanto a seguinte desigualdade é satisfeita

$$d(G) \leq \left\lceil \frac{n(G)}{\gamma(G)} \right\rceil$$

Tendo coletado as principais desigualdades, vamos considerar algumas classes de “grafos perfeitos”.

Seja ν e τ dois parâmetros de grafos com $\nu(G) \leq \tau(G)$ para cada grafo G no domínio comum de ν e τ , e seja \mathcal{F} uma subclasse de grafos. Definimos

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\nu, \tau) = \{G : \forall H \subseteq_{\text{ind}} G (H \in \text{Dom}(\nu) \cap \text{Dom}(\tau) \text{ e } H \in \mathcal{F}) \Rightarrow \nu(H) = \tau(H)\}$$

onde $H \subseteq_{\text{ind}} G$ indica que H é um subgrafo induzido de G .

Para facilitar a escrita, quando \mathcal{F} é a classe dos grafos, simplesmente escreveremos $\mathcal{G}(\nu, \tau)$.

Capítulo 3

Nossos Resultados

A seguir apresentamos os resultados principais da dissertação. Para benefício e clareza do leitor apresentamos as provas na seção 3.3.

3.1 Classe $\mathcal{G}_k(\nu, \tau)$

Conforme enunciado na seção anterior, os grafos do conjunto $\mathcal{G}_k(\nu, \tau)$ representam a classe dos “grafos perfeitos” com relação aos parâmetros ν e τ . A seguir apresentamos uma caracterização para cada classe de grafos quando consideramos ν e τ entre os parâmetros γ , 2γ , γ_t , γ_p , d e d_t .

Primeiramente ilustramos na Figura 3.1 os três grafos especiais no Teorema 1. Como é costume, para um inteiro positivo n , representamos o grafo completo, o ciclo, e o caminho de ordem n por K_n , C_n , e P_n , respectivamente.

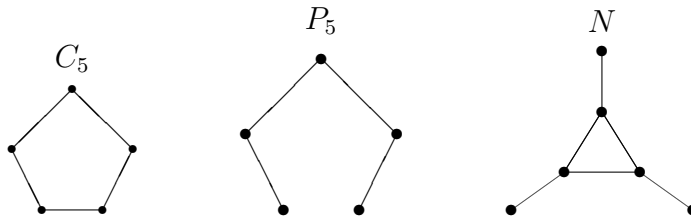


Figura 3.1: Grafos C_5 , P_5 e N .

Teorema 1. *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}(\gamma_t, \gamma_p)$ se e somente se G é livre de $\{C_5, P_5, N\}$.*

Teorema 2. *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}(\gamma_t, 2\gamma)$ se e somente se G pertence a $\mathcal{G}(\gamma_p, 2\gamma)$ se e somente se G é livre de $\{C_4, P_4\}$.*

Já que K_2 é um subgrafo induzido proibido dos grafos em $\mathcal{G}(\gamma, \gamma_t)$, $\mathcal{G}(d, d_t)$, e $\mathcal{G}(\gamma, \gamma_p)$, essas classes só contem grafos triviais (sem arestas), e perdem todo interesse teórico. Em vista dessas observações há sentido restringir o domínio comum daqueles parâmetros. Portanto, para cada inteiro positivo k , consideramos a subclasse

$$\mathcal{F}_k = \{H : \gamma(H) \geq k\}$$

e definimos

$$\mathcal{G}_k(\nu, \tau) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}_k}(\nu, \tau)$$

Notar que $\mathcal{G}_1(\nu, \tau)$ coincide com $\mathcal{G}(\nu, \tau)$.

Para $k = 2$, temos os seguintes resultados.

Teorema 3. *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_t)$ se e somente se G é livre de $\{C_5, 2K_2\}$.*

Nos referimos a Figura 3.2 para uma ilustração dos grafos especiais G_1 e G_2 do teorema a seguir.



Figura 3.2: Grafos G_1 e G_2 com $\delta(G_i) \geq 1$, $\gamma(G_i) \geq 2$, e $d(G_i) > d_t(G_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Teorema 4. *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(d, d_t)$ se e somente se G é livre de $\{P_4, 2K_2, G_1, G_2\}$.*

Teorema 5. *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p)$ se e somente se G é livre de $\{C_5, 2K_2, N\}$.*

Para valores arbitrários de k , obtemos resultados sujeitos a condições de cintura. Primeiramente introduzimos algumas notações.

O grafo $G \circ K_1$ é construído a partir do grafo G , adicionando-se a cada vértice u de G um novo vértice u' junto com a nova aresta uu' . Assim, definimos os seguintes conjuntos de florestas especiais:

- \mathcal{T}_k é o conjunto que contém todas as florestas da forma $\bigcup_{i=1}^{\ell} (T_{i,0} \circ K_1)$ onde ℓ é um inteiro positivo, e $T_{1,0}, \dots, T_{\ell,0}$ são árvores não vazias com $k = \sum_{i=1}^{\ell} n(T_{i,0})$.

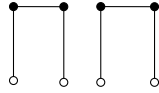


Figura 3.3: Grafo $K_2 \circ K_1 \cup K_2 \circ K_1$, elemento de \mathcal{T}_4 .

- $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$ é o conjunto que contém todas as florestas T em \mathcal{T}_k no qual uma das árvores $T_{i,0}$ é K_1 , ou seja, $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$ é o conjunto de florestas em \mathcal{T}_k que tem um K_2 como uma componente.

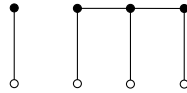


Figura 3.4: Grafo $K_1 \circ K_1 \cup P_3 \circ K_1$, elemento de $\mathcal{T}_4(\gamma, \gamma_t)$.

- $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_p)$ é o conjunto que contém todas as florestas T em \mathcal{T}_k no qual uma das árvores $T_{i,0}$ não tem um emparelhamento perfeito.

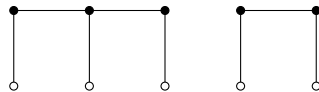


Figura 3.5: Grafo $P_3 \circ K_1 \cup K_2 \circ K_1$, elemento de $\mathcal{T}_5(\gamma, \gamma_p)$.

Nossos resultados são os seguintes.

Teorema 6. *Para cada inteiro positivo k , um grafo G de cintura pelo menos $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$ pertence a $\mathcal{G}_k(\gamma, \gamma_t)$ se e somente se G é livre de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$.*

Teorema 7. *Para cada inteiro positivo k , um grafo G de cintura pelo menos $\lceil \frac{5k}{2} \rceil$ pertence a $\mathcal{G}_k(d, d_t)$ se e somente se G é livre de \mathcal{T}_k .*

Teorema 8. *Para cada inteiro positivo k , um grafo G de cintura pelo menos $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$ pertence a $\mathcal{G}_k(\gamma, \gamma_p)$ se e somente se G é livre de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_p)$.*

3.2 Complexidade

Finalmente, estabelecemos alguns resultados de complexidade, que motivam ainda mais o estudo das classes apresentadas anteriormente.

Nosso primeiro resultado de complexidade implica que, mesmo em classes de grafos muito restritas, exigindo igualdade do número de dominação é o número de dominação emparelhado (logo também com o número de dominação total) não torna o problema do conjunto dominante fácil.

Teorema 9. *Dado um grafo split G com $\gamma(G) = \gamma_t(G) = \gamma_p(G)$ e um inteiro positivo k , decidir se $\gamma(G) \leq k$, é NP-completo.*

Os dois resultados seguintes de complexidade implicam que os grafos G com $\gamma(G) = \gamma_t(G)$ ou $2\gamma(G) = \gamma_p(G)$ provavelmente não tem uma descrição simples.

Teorema 10. *Dado um grafo G , decidir se $\gamma(G) = \gamma_t(G)$, é NP-difícil.*

Teorema 11. *Dado um grafo G , decidir se $2\gamma(G) = \gamma_p(G)$, é NP-difícil.*

A Seção 3.3 é dedicada as provas de cada um dos resultados apresentados.

3.3 Provas

Inicialmente provaremos um resultado simples, que nos permite garantir a existência dos vizinhos privados externos.

Proposição 12. *Seja G um grafo com $\delta(G) \geq 1$. Seja D_t um conjunto dominante total mínimo de G e $u \in D_t$. Se $\delta(G[D_t] - u) \geq 1$ então $P_G(D_t, u)$ é não vazio.*

Prova: Provaremos por absurdo. Suponhamos que $P_G(D_t, u)$ é vazio. Portanto, junto com o fato que D_t é um conjunto dominante total, inferimos que $D_t \setminus \{u\}$ é um conjunto dominante. Além disso, como $\delta(G[D_t] - u) \geq 1$, temos que $D_t \setminus \{u\}$ é um conjunto dominante total, o que contradiz a minimalidade de D_t . \square

Por conveniência rescrevemos os resultados. Claramente em todos os resultados desta seção os grafos proibidos minimais não tem vértices isolados, portanto consideraremos essa propriedade ($\delta(G) \geq 1$) como tácita.

Teorema 1 *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}(\gamma_t, \gamma_p)$ se e somente se G é livre de $\{C_5, P_5, N\}$.*

Prova: Como o número de dominação total γ_t e o número de dominação emparelhado γ_p dos grafos C_5, P_5 e N são 3 e 4 respectivamente, temos que C_5, P_5 e N são subgrafos induzidos proibidos (minimais) para $\mathcal{G}(\gamma_t, \gamma_p)$, o que prova a necessidade. Para mostrar a suficiência basta mostrar que qualquer grafo G livre de $\{C_5, P_5, N\}$ tal que $\delta(G) \geq 1$, satisfaz $\gamma_t(G) = \gamma_p(G)$. Para isso vamos proceder por absurdo, suponhamos que $\gamma_t(G) < \gamma_p(G)$.

Seja D_t um conjunto dominante total mínimo de G . Passamos a estudar as componentes do grafo $G[D_t]$.

Primeiramente, suponhamos que exista alguma componente K de $G[D_t]$ que não é um subgrafo completo. Vamos mostrar que neste caso, P_5 ou C_5 são subgrafos induzidos de G , o que é uma contradição. Seja $P : u_0 \dots u_\ell$ um caminho induzido de comprimento máximo em K . Utilizando P , vamos gerar um P_5 ou um C_5 . Já que K não é completo, temos que $\ell \geq 2$. Além disso, pela escolha de P , $\delta(K - u) \geq 1$ para $u \in \{u_0, u_\ell\}$. Caso contrário, existiria um outro caminho induzido de comprimento $\ell + 1$ em K , o que contradiz a escolha de P . Para obter este caminho de comprimento $\ell + 1$, no caso de u_0 , bastaria encontrar $u'_0 \in V(K)$ tal que $N_K(u'_0) = \{u_0\}$, e pegar o caminho $u'_0 P$ (analogamente para u_ℓ). Logo, como K é uma componente de $G[D_t]$, temos que $\delta(G[D_t] - u) \geq 1$ para $u \in \{u_0, u_\ell\}$. Pela Proposição 12, isso implica que $P_G(D_t, u_0)$ contém pelo menos um vértice v_0 e $P_G(D_t, u_\ell)$ contém pelo menos um vértice v_ℓ . Se $\ell = 2$, então $G[\{v_0, u_0, u_1, u_2, v_2\}]$ é P_5 ou C_5 , e portanto uma contradição. Agora, se $\ell \geq 3$ o subgrafo induzido $G[\{v_0, u_0, u_1, u_2, u_3\}]$ é um

P_5 , e logo, novamente, uma contradição. Consequentemente assumimos que toda componente de $G[D_t]$ é completa.

Agora usaremos o fato que $G[D_t]$ não tem um emparelhamento perfeito. Assim, como D_t não é um conjunto dominante emparelhado, alguma componente (completa) L de $G[D_t]$ tem ordem ímpar pelo menos 3. Seja u, v , e w três vértices de L . A partir deles vamos construir N ou P_5 . Uma vez que L é completo, temos que $\delta(G[D_t] - z) \geq \delta(L - z) \geq 1$ para $z = u, v, w$. Da Proposição 12, inferimos que os três conjuntos $P_G(D_t, u)$, $P_G(D_t, v)$, e $P_G(D_t, w)$ são não vazios. Fixemos um vértice u' em $P_G(D_t, u)$.

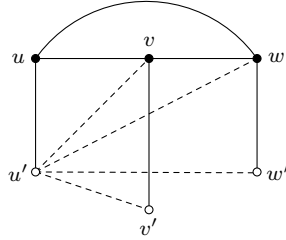


Figura 3.6: u' não é adjacente a v' nem a w' (Teor. 1)

Afirmamos que existe pelo menos um vértice em $P_G(D_t, z)$ não adjacente a u' , para $z = v, w$. De fato, para $z = v$, se u' é adjacente a todos os vértices em $P_G(D_t, v)$, então $D'_t = (D_t \setminus \{v\}) \cup \{u'\}$ é um conjunto dominante total mínimo de G . E já que u' e w não são adjacentes mas pertencem a uma mesma componente de $G[D'_t]$, então $G[D'_t]$ contém uma componente que não é completa, voltando ao caso anterior (analogamente para $z = w$). Portanto, assumimos que existem v' em $P_G(D_t, v)$ e w' em $P_G(D_t, w)$ tal que u' não é adjacente a nenhum deles. Finalmente, se v' e w' não são adjacentes, $G[\{u, v, w, u', v', w'\}]$ é o grafo N . E se v' e w' são adjacentes, $G[\{u', u, v, v', w'\}]$ é P_5 . Em qualquer caso temos uma contradição. Isso completa a prova. \square

Teorema 2 *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}(\gamma_t, 2\gamma)$ se e somente se G pertence a $\mathcal{G}(\gamma_p, 2\gamma)$ se e somente se G é livre de $\{C_4, P_4\}$.*

Prova: Uma vez que $\gamma_t(G) \leq \gamma_p(G) \leq 2\gamma(G)$ para todo grafo G sem vértices isolados, $\mathcal{G}(\gamma_t, 2\gamma)$ é um subconjunto de $\mathcal{G}(\gamma_p, 2\gamma)$. Além disso, como o número de dominação

γ e o número de dominação emparelhado γ_p dos grafos C_4 e P_4 são ambos 2, temos que C_4 e P_4 são subgrafos induzidos proibidos (minimais) para $\mathcal{G}(\gamma_p, 2\gamma)$, todo grafo em $\mathcal{G}(\gamma_p, 2\gamma)$ é livre de $\{C_4, P_4\}$.

Para completar a prova, é suficiente mostrar que todo grafo G conexo e livre de $\{C_4, P_4\}$ com $\delta(G) \geq 1$ satisfaz $\gamma_t(G) = 2\gamma(G)$. Note que para um grafo não conexo basta olhar para as componentes conexas do grafo. Vamos proceder por contradição. Suponhamos que $\gamma_t(G) < 2\gamma(G)$.

Já que G é livre de P_4 e conexo (sem vértices isolados), pela conhecida propriedade dos cografos, o conjunto de vértices de G tem uma partição em dois conjuntos (não vazios) V_1 e V_2 tal que cada vértice em V_1 é adjacente a cada vértice de V_2 . Claramente, pegando um vértice de V_1 e um vértice de V_2 construímos um conjunto dominante total de G , logo $\gamma_t(G) = 2$. Assim, de $\gamma_t(G) < 2\gamma(G)$ resulta $\gamma(G) > 1$. Portanto cada V_i contém dois vértices não adjacentes u_i e v_i , para $i = 1, 2$. Finalmente, $G[\{u_1, v_1, u_2, v_2\}]$ é C_4 , uma contradição. Isso completa a prova. \square

Teorema 3 *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_t)$ se e somente se G é livre de $\{C_5, 2K_2\}$.*

Prova: Desde que o número de dominação γ e o número de dominação total γ_t dos grafos C_5 e $2K_2$ são 2 e 3, e 2 e 4 respectivamente, temos que C_5 e $2K_2$ são subgrafos induzidos proibidos (minimais) para $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_t)$, o que prova a necessidade.

Para mostrar a suficiência basta mostrar que qualquer grafo G livre de $\{C_5, 2K_2\}$ com $\delta(G) \geq 1$ e $\gamma(G) \geq 2$ satisfaz $\gamma(G) = \gamma_t(G)$. Para isso vamos proceder por absurdo. Suponhamos que $\gamma(G) < \gamma_t(G)$. Note que G é um grafo conexo, pois caso contrario tomando-se duas componentes conexas e um K_2 em cada uma (existem pois $\delta(G) \geq 1$), geraríamos o subgrafo induzido $2K_2$ em G , uma contradição.

Agora escolhemos um conjunto dominante mínimo D de G tal que a distância média entre seus elementos seja mínima, em outras palavras, tal que $f(D) = \sum_{u \in D} \text{dist}_G(u, D \setminus \{u\})$ seja mínima. Note que $0 < f(D) < \infty$, pois $|D| \geq 2$ e G é conexo.

Seja u um vértice de D que fica mais distante dos outros vértices de D em G , e seja v um outro vértice de D mais próximo a u em G . Em outras palavras, seja

$u \in D$ tal que $\text{dist}_G(u, D \setminus \{u\})$ é máxima, e seja $v \in D \setminus \{u\}$ tal que $\text{dist}_G(u, v) = \text{dist}_G(u, D \setminus \{u\})$.

Nosso objetivo é construir os subgrafos induzidos C_5 e $2K_2$ a partir de um caminho mínimo entre u e v . Para isso, primeiramente analisamos as possíveis estruturas desse caminho. Já que D não é um conjunto dominante total de G , inferimos que $\text{dist}_G(u, v) \geq 2$. Por outro lado, se $\text{dist}_G(u, v) \geq 4$ então um vértice que dista 2 de u sobre um caminho mínimo entre u e v teria um vizinho em D , logo $\text{dist}_G(u, v) = \text{dist}_G(u, D \setminus \{u\}) \leq 3$, uma contradição. Portanto temos que $\text{dist}_G(u, v) \in \{2, 3\}$. Agora analisamos por casos:

(1) $\text{dist}_G(u, v) = 2$

Seja x um vizinho comum de u e v (ele existe pois $\text{dist}_G(u, v) = 2$). Vamos mostrar que existem vizinhos u' de u , $u' \neq x$, e v' de v , $v' \neq x$, tal que u' não é adjacente nem a x nem a v . Analogamente para v' . Assim é claro que se u' não é adjacente a v' , $G[\{u, u', v, v'\}]$ é um $2K_2$, ou é um C_5 , se u' é adjacente a v' , uma contradição.

Afirmamos que existe um vizinho u' de u , $u' \neq x$, tal que u' não é adjacente nem a x nem a v . Para isso, seja $D' = (D \setminus \{u\}) \cup \{x\}$. Notar que $|D'| = |D|$. Analisemos por casos:

– D' não é dominante.

Nesse caso algum elemento de $N_G(u)$ não é vizinho a nenhum vértice de D' . Em particular, existe um vértice $u' \neq x$ vizinho de u tal que não é adjacente nem a x nem a v .

– D' é dominante.

Neste caso usaremos fortemente a minimalidade de $f(D)$. Note que é necessário existir $w \in D \setminus \{u, v\}$ tal que $\text{dist}_G(w, D' \setminus \{w\}) > \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$. Caso contrario, para cada $w \in D \setminus \{u, v\}$

$$\text{dist}_G(w, D' \setminus \{w\}) \leq \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$$

Mas como

$$\text{dist}_G(x, D' \setminus \{x\}) = 1 < 2 = \text{dist}_G(u, D \setminus \{u\})$$

$$\text{dist}_G(v, D' \setminus \{v\}) = 1 \leq \text{dist}_G(v, D \setminus \{v\})$$

Conclui-se que $f(D') < f(D)$, uma contradição.

Agora, seja $w' \in D \setminus \{w\}$ tal que $\text{dist}_G(w, w') = \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$, então $w' = u$. Caso contrario $w' \in D' \setminus \{w\}$ em consequência $\text{dist}_G(w, D' \setminus \{w\}) \leq \text{dist}_G(w, w') = \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$, uma contradição.

Assim, seja u' um vértice de G tal que $P : w \dots u'u$ é um caminho mínimo entre w e u . Vamos mostrar que u' é o vértice procurado. Por absurdo, suponhamos que exista $z \in \{x, v\}$ tal que u' é adjacente a z . Seja $Q = P - u'u + u'z$ um caminho entre w e z . Por definição $\ell(Q) = \ell(P) = \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$, mas $\text{dist}_G(w, D' \setminus \{w\}) \leq \ell(Q)$, assim $\text{dist}_G(w, D' \setminus \{w\}) \leq \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$, uma contradição.

Finalmente, por simetria, também existe um vizinho $v' \neq x$ de v tal que v' não é adjacente nem a x nem a u .

$$(2) \quad \text{dist}_G(u, v) = 3.$$

Seja $uxyv$ um caminho de G . Afirmamos que existe $z \in \{u, v\}$ com um vizinho $z' \neq x, y$ tal que z' não é adjacente nem a x nem a y .

Desta forma, para simplificar a escrita, seja $\bar{z} \in \{u, v\} \setminus \{z\}$. Assim é claro que $G[\{x, y, z, z', \bar{z}\}]$ é P_5 se z' não é adjacente a \bar{z} , ou C_5 se z' é adjacente a \bar{z} . Em qualquer caso, como $2K_2$ é um subgrafo induzido de P_5 , temos a contradição desejada.

Finalmente passamos a mostrar a afirmação. Para isso, seja $D'' = (D \setminus \{u, v\}) \cup \{x, y\}$. Notar que $|D''| = |D|$. Analisando como no Caso 1, pela escolha de D , obtemos que D'' não é um conjunto dominante de G ou existe um $w \in D \setminus \{u, v\}$ tal que $\text{dist}_G(w, D'' \setminus \{w\}) > \text{dist}_G(w, D \setminus \{w\})$. Em qualquer caso, existe $z \in \{u, v\}$ com um vizinho $z' \neq x, y$ tal que z' não é adjacente nem a x nem a y . Isso completa a prova. \square

Teorema 4 *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(d, d_t)$ se e somente se G é livre de $\{P_4, 2K_2, G_1, G_2\}$.*

Prova: Já que $d(G) \leq \lfloor \frac{n(G)}{\gamma(G)} \rfloor$, podemos concluir que o número domático d e o número domático total d_t dos grafos P_4 e $2K_2$ são 2 e 1 respectivamente. Além disso, como G_1 e G_2 tem um vértice de grau 2, então não é difícil concluir que $d = 3$ e $d_t = 2$ em ambos casos. Daí que $P_4, 2K_2, G_1$ e G_2 são subgrafos induzidos proibidos (minimais) para $\mathcal{G}_2(d, d_t)$, o que prova a necessidade.

Para mostrar a suficiência basta mostrar que qualquer grafo G livre de $\{P_4, 2K_2, G_1, G_2\}$ com $\delta(G) \geq 1$ e $\gamma(G) \geq 2$ satisfaz $d(G) = d_t(G)$. Para isso vamos proceder por absurdo, suponhamos que $d(G) > d_t(G)$. Note que, nessas condições, G é um grafo conexo, como no Teorema 3.

A ideia é usar a conhecida caracterização dos cografos para partir o grafo G convenientemente de tal maneira que, junto com $(*)d(G) > d_t(G)$, deduziremos propriedades estruturais de G que nos permitam negar $(*)$ e/ou construir os subgrafos induzidos G_1 e G_2 .

Seja k o máximo inteiro positivo tal que existe uma partição dos vértices $V(G)$ em k conjuntos não vazios V_1, \dots, V_{k-1} , e $V_{\geq k}$ com as seguintes propriedades:

- (i) G tem um subgrafo multipartido completo gerador H_k com conjuntos particionados V_1, \dots, V_{k-1} , e $V_{\geq k}$.
- (ii) $|V_{<k}| < |V_{\geq k}|$ onde $V_{<k} = \bigcup_{i=1}^{k-1} V_i$.

Note que k é bem definido, pois para $k = 1$ tal partição é dada por $V_{\geq 1} = V(G)$.

Note também que todo vértice em $V_{<k}$ tem grau pelo menos $n(G)/2$ em H_k , pois pelo item (i) todo vértice em $V_{<k}$ é adjacente a todos os vértices em $V_{\geq k}$, e pelo item (ii) temos que $|V_{\geq k}| > \frac{n(G)}{2}$. Seja $G_{\geq k} = G[V_{\geq k}]$. Analisaremos a conexidade de $G_{\geq k}$ por casos:

- (1) $G_{\geq k}$ é conexo.

Aqui usaremos a maximalidade de k para mostrar que nesse suposto $d(G) = d_t(G)$, uma contradição. Já que $G_{\geq k}$ é livre de P_4 , o conjunto $V_{\geq k}$ (com pelo

menos 2 vértices) tem uma partição em dois conjuntos V_k e $V_{\geq k+1}$ tal que $|V_k| \leq |V_{\geq k+1}|$, e todo vértice em V_k é adjacente a todo vértice em $V_{\geq k+1}$. Note que G tem um subgrafo multipartido completo gerador H_{k+1} com conjuntos particionados não vazios V_1, \dots, V_k , e $V_{\geq k+1}$, satisfazendo assim o item (i). Logo, pela maximalidade de k temos que $|V_{<k+1}| \geq |V_{\geq k+1}|$.

Afirmamos que H_{k+1} é um subgrafo gerador de G com grau mínimo pelo menos $\frac{n(G)}{2}$. Para mostrar a afirmação, note que os graus dos vértices em V_k respeito a H_{k+1} tem sempre o mesmo valor, especificamente $\delta_k = |V_{<k}| + |V_{\geq k+1}|$. De forma análoga, seja $\delta_{\geq k+1} = |V_{<k+1}|$ o grau dos vértices em $V_{\geq k+1}$ respeito a H_{k+1} . Como $|V_{<k+1}| \geq |V_{\geq k+1}|$, claramente $|V_{<k+1}| \geq \frac{n(G)}{2}$, portanto $\delta_{\geq k+1} \geq \frac{n(G)}{2}$. Além disso, já que $|V_k| \leq |V_{\geq k+1}|$ resulta

$$\begin{aligned} \delta_k &= |V_{<k}| + |V_{\geq k+1}| \\ &\geq |V_{<k}| + |V_k| \\ &= |V_{<k+1}| = \delta_{\geq k+1} \geq \frac{n(G)}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, como H_k é um subgrafo (gerador) de H_{k+1} , todo vértice em $V_{<k}$ tem grau pelo menos $n(G)/2$ em H_{k+1} . Em conclusão H_{k+1} é um subgrafo gerador de G de grau mínimo pelo menos $\frac{n(G)}{2}$.

Assim por um conhecido teorema devido a Dirac [10], o grafo H_{k+1} tem um ciclo Hamiltoniano C . Isso implica que $\lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor \leq d_t(G)$.

De fato, seja P um subcaminho de C de comprimento 1 ou 2, então $V(P)$ é um conjunto dominante total de G , pois dois vértices adjacentes de P pertencem a diferentes elementos de $\{V_i\}_{1 \leq i \leq k} \cup \{V_{\geq k+1}\}$, em particular $V(P)$ é um conjunto dominante total, tendo assim a desigualdade desejada.

Por outro lado, já que $\gamma(G) \geq 2$, resulta que $d(G) \leq \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$. Daí segue-se que $d(G) = d_t(G) = \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$, uma contradição.

- (2) $G_{\geq k}$ não é conexo.

Neste caso, nosso objetivo é construir os subgrafos induzidos G_1 e G_2 , e com isso obter a contradição desejada. Para ter uma ideia de como construir aqueles grafos, devemos redefinir G_1 e G_2 de um modo mais esperto, usando a operação *soma* $+$. Lembremos, sejam A e B dois grafos disjuntos, o grafo $A+B$ é obtido do grafo $A \cup B$ acrescentando as arestas ab para cada vértice a de A e para cada vértice b de B . Assim os grafos G_1 e G_2 podem ser redefinidos como os grafos $A + (B \cup C)$, onde $A = 2K_1$, $B = K_1$ e $C = P_3$ ou K_3 , respectivamente. Note que precisamos que G_1 e G_2 sejam subgrafos induzidos de G , portanto é suficiente que

- (a) A é um subgrafo induzido de $G[V_{<k}]$.
- (b) $B \cup C$ é um subgrafo induzido de $G_{\geq k}$, com duas componentes conexas B e C .

Obter (a) é imediato do fato que $\gamma(G) \geq 2$, pois se $A = 2K_1$ não é induzido em $G[V_{<k}]$, então $G[V_{<k}]$ é completo assim, dado um vértice v em $V_{<k}$, o conjunto $\{v\}$ é um conjunto dominante de G e $\gamma(G) = 1$, uma contradição.

Para obter (b) estudaremos com maiores detalhes o grafo $G_{\geq k}$. Uma vez que G é um grafo livre de $2K_2$, o grafo $G_{\geq k}$ consiste de um conjunto não vazio I de vértices isolados, e de no máximo uma componente não trivial K (pode ser vazio). Afirmamos que K de fato não é vazio, além disso $|V(K)| \geq 3$. Assim tomando B o grafo trivial com um único vértice $x \in I$ e C um subgrafo induzido K_3 ou P_3 de K , sempre que K for completo ou não, temos o pedido.

Para mostrar a afirmação vamos a estudar a relação entre uma partição máxima em conjuntos dominantes $D_1, \dots, D_{d(G)}$ de $V(G)$ e a partição $V_{<k}, V_{\geq k}$ de $V(G)$.

Primeiro vamos mostrar que existe um único D_i que não intercepta $V_{<k}$.

Para mostrar a existência, note que $|V_{<k}| \leq d_t(G)$, isso é consequência de que $|V_{<k}| < |V_{\geq k}|$ e das propriedades de H_k . Assim um vértice de $V_{<k}$ junto com um vértice de $V_{\geq k}$ formam um conjunto dominante total, logo escolhendo convenientemente os vértices de $V_{\geq k}$, concluímos que $|V_{<k}| \leq d_t(G)$. Portanto

se supomos que todo D_i intercepta $V_{<k}$ então é claro que $d(G) \leq |V_{<k}|$. Assim temos que $d(G) = d_t(G) = |V_{<k}|$, uma contradição.

Resta mostrar a unicidade, mas ela é imediata do fato de que I é não vazio, pois qualquer D_i que não intercepte $V_{<k}$ contém necessariamente I , logo dois tais diferentes teriam elementos em comum, uma contradição. Reordenando, se precisar, seja $D_{d(G)}$ quem não intercepta $V_{<k}$.

Agora afirmamos que de fato todo D_i com $i \in [d(G) - 1]$ tem exatamente um elemento de $V_{<k}$. Por absurdo, suponhamos que algum D_i tem pelo menos dois elementos de $V_{<k}$, pelo anterior sabemos que todo D_i com $i \in [d(G) - 1]$ tem pelo menos um elemento de $V_{<k}$, daí inferimos que $|V_{<k}| > d(G) - 1$, logo $|V_{<k}| \geq d(G)$. Obtendo a contradição como na afirmação anterior.

Finalmente, pelo item (a) sabemos que $G[V_{<k}]$ contém dos vértices não adjacentes u_1 e u_2 . Reordenando novamente se precisar, seja $u_i \in D_i$ para $i \in [2]$. Se $v_i \in D_i \setminus \{u_i\}$ para $i \in [2]$ ($\gamma(G) \geq 2$), então das afirmações anteriores temos que $v_i \in V_{\geq k}$. Além disso, como $I \subseteq D_{d(G)}$ então $v_i \in K$ para $i \in [2]$. Na verdade $|V(K)| \geq 3$. Caso contrario $K = K_2$, o que implicaria que $D_{d(G)} = I$, pois D_1, D_2 e $D_{d(G)}$ são disjuntos e $D_{d(G)}$ não intercepta $V_{<k}$, mas I não é um conjunto dominante de G .

Isso completa a prova. \square

Teorema 5 *Um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p)$ se e somente se G é livre de $\{C_5, 2K_2, N\}$.*

Prova: É uma consequência imediata da afirmação de que $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p) = \mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_t) \cap \mathcal{G}(\gamma_t, \gamma_p)$. Aplicando o Teorema 3 e o Teorema 1 temos que $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p)$ é a classe livre de $\{C_5, P_5, 2K_2, N\}$. Mas como $2K_2$ é um subgrafo induzido de P_5 , concluímos que $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p)$ é a classe livre de $\{C_5, 2K_2, N\}$.

Agora passamos a mostrar a afirmação. Se um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_t) \cap \mathcal{G}(\gamma_t, \gamma_p)$, seja $H \subseteq_{\text{ind}} G$ com $\delta(H) \geq 1$ e $\gamma(H) \geq 2$. Então $\gamma(H) = \gamma_t(H) = \gamma_p(H)$. Portanto G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p)$.

Finalmente, se um grafo G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_p)$, é claro que G pertence a $\mathcal{G}_2(\gamma, \gamma_t)$. Se $H \subseteq_{\text{ind}} G$ com $\delta(H) \geq 1$ temos dois casos a analisar. Se $\gamma(H) \geq 2$ é claro que $\gamma_t(H) = \gamma_p(H)$. Se $\gamma(H) = 1$, então $\gamma_t(H) = \gamma_p(H) = 2$. Isso prova a afirmação. \square

Com a finalidade de provar os Teoremas 6, 7, e 8 necessitaremos do Lema a seguir. Ele caracteriza as árvores K_2 e $T_0 \circ K_1$ através, essencialmente, de uma propriedade negativa de dominação relativa a seus subgrafos induzidos próprios.

Introduziremos dois conceitos importantes para a prova do Lema.

Uma *folha* de uma árvore T é simplesmente um vértice de T de grau 1. Representamos o conjunto de folhas de T por $\mathfrak{f}(T)$. Da Teoria dos Grafos sabemos que, se T é uma árvore não trivial (sem vértices isolados), então $|\mathfrak{f}(T)| \geq 2$.

Seja $S(T)$ o conjunto de vértices de T que é adjacente a uma folha. Os vértices em $S(T)$ são conhecidos como vértices *suporte* de T . É claro que, se T é uma árvore não trivial, então $S(T) \neq \emptyset$.

Os vértices restantes de T são chamados *especiais*. Representamos ao conjunto de vértices especiais de T por $\mathfrak{E}(T)$.

Para simplificar a prova do lema enunciaremos uma proposição previa.

Proposição 13. *Seja T uma árvore não trivial e $T \neq K_2$, então as seguintes propriedades são satisfeitas*

- $S(T)$, $\mathfrak{f}(T)$ e $\mathfrak{E}(T)$ formam uma partição de $V(T)$, onde $\mathfrak{E}(T)$ pode ser vazio.
- Existe um conjunto dominante mínimo D de T tal que $S(T) \subseteq D \subseteq V \setminus \mathfrak{f}(T)$.

Prova: Primeiramente mostraremos que $S(T)$, $\mathfrak{f}(T)$ e $\mathfrak{E}(T)$ formam uma partição de $V(T)$. Para isso, basta provar que $S(T)$ e $\mathfrak{f}(T)$ são disjuntos. Mas isso é evidente, pois se supusermos que existe um vértice em $S(T) \cap \mathfrak{f}(T)$, então necessariamente $T = K_2$.

Para a segunda parte daremos um algoritmo de construção. Seja f uma folha de T , denotaremos por s_f a seu vértice suporte. Pelo item anterior $s_f \in V \setminus \mathfrak{f}(T)$.

Se D é um conjunto dominante, necessariamente f ou s_f pertence a D , para cada folha f de T . Além disso, como $N_T[f] \subseteq N_T[s_f]$, se $f \in D$ então $D \cup \{s_f\} \setminus \{f\}$

também é um conjunto dominante de T com ordem não maior que D . Assim, como $S(T)$ e $f(T)$ são disjuntos, o número de folhas de D (se tiver) diminui em 1. Portanto, aplicando iterativamente o processo a um conjunto dominante mínimo, concluímos a prova. \square

Lema 14. *Seja T uma árvore com $\delta(T) \geq 1$.*

(i) *Se $\gamma_t(T) > \gamma(T)$ e T não tem um subgrafo induzido próprio T' com*

- $\delta(T') \geq 1$,
- $\gamma(T') \geq \gamma(T)$, e
- $\gamma_t(T') > \gamma(T')$

então $T = K_2$. A recíproca também é válida.

(ii) *Se T não tem um subgrafo induzido próprio T' com*

- $\delta(T') \geq 1$, e
- $\gamma(T') \geq \gamma(T)$,

então $T = T_0 \circ K_1$ para alguma árvore T_0 . A recíproca também é válida.

(iii) *Se $\gamma_p(T) > \gamma(T)$ e T não tem um subgrafo induzido próprio T' com*

- $\delta(T') \geq 1$,
- $\gamma(T') \geq \gamma(T)$, e
- $\gamma_p(T') > \gamma(T')$,

então $T = T_0 \circ K_1$ para alguma árvore T_0 que não tem um emparelhamento perfeito. A recíproca também é válida.

Prova: (i) Seja T uma árvore com as propriedades especificadas. Por contradição, suponhamos que $T \neq K_2$.

Primeiramente vamos mostrar que cada vértice suporte de T tem exatamente uma folha. Por absurdo, suponhamos que existam duas folhas diferentes f e g de um mesmo vértice suporte s . Seja $T' = T - f$ e D'_t um conjunto dominante total

mínimo de T' ($\delta(T') \geq 1$). Já que $\delta(T'[D'_t]) \geq 1$ necessariamente $s \in D'_t$. Assim D'_t é um conjunto dominante total de T . Daí inferimos que $\gamma_t(T') \geq \gamma_t(T)$.

Por outro lado, seja D um conjunto dominante mínimo de T como na Proposição 13, claramente D é um conjunto dominante de T' , daí inferimos que $\gamma(T) \geq \gamma(T')$. Mais ainda, $\gamma(T') = \gamma(T)$ pois é fácil construir um conjunto dominante (mínimo) de T' que contém s , como na Proposição 13. Logo $\gamma_t(T') \geq \gamma_t(T) > \gamma(T) = \gamma(T')$. Logo, existe um subgrafo induzido próprio de T que satisfaz os itens do Lema 14(i), uma contradição.

Agora analisaremos por casos a existência de vértices especiais. Veremos que sempre temos uma contradição. Seja $T_0 = T[S(T) \cup \mathfrak{E}(T)]$. Note que T_0 é uma árvore.

- (1) Seja $\mathfrak{E}(T)$ um conjunto vazio. Como cada vértice suporte tem exatamente uma folha, concluímos que $T = T_0 \circ K_1$. Mostraremos que $T = K_2$, uma contradição. Com esta finalidade olhamos para a cardinalidade de $V(T_0)$. Se $|V(T_0)| \geq 2$, temos que $\gamma(T) = \gamma_t(T)$ pois $V(T_0)$, que é um conjunto dominante mínimo de T , também seria um conjunto dominante total de T , mas isso é uma contradição. Logo $T_0 = K_1$, e portanto $T = K_2$.
- (2) Seja $\mathfrak{E}(T) \neq \emptyset$. Mostraremos a existência de um subgrafo induzido próprio de T que satisfaz os itens do Lema 14(i). Enraizamos T em algum vértice especial de T e consideramos um vértice especial \mathfrak{e} de T com a maior distância à raiz. Seja $T' = T - \mathfrak{e}$. Claramente $\delta(T') \geq 1$, caso contrário $\mathfrak{e} \in S(T)$.

Notar que todos os filhos de \mathfrak{e} pertencem a $S(T)$, caso contrário se um filho de \mathfrak{e} é uma folha, então \mathfrak{e} seria um vértice suporte; ou se um filho de \mathfrak{e} é um vértice especial, contradizemos a maximalidade de \mathfrak{e} .

Isso implica que T tem um conjunto dominante mínimo D que não contém \mathfrak{e} , já que no pior dos casos, se o conjunto dominante mínimo escolhido como na Proposição 13 contém \mathfrak{e} , basta trocar \mathfrak{e} pelo predecessor de \mathfrak{e} (neste caso existiria). Assim, como D é um conjunto dominante de T' , temos que $\gamma(T) \geq \gamma(T')$.

Reciprocamente, das propriedades de \mathfrak{e} , podemos construir um conjunto dominante mínimo D' e um conjunto dominante total mínimo D'_t de T' tal que

ambos contém todos os filhos de ϵ . Assim D' e D'_t são um conjunto dominante e um conjunto dominante total de T respectivamente, logo $\gamma(T) \leq \gamma(T')$ e $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T')$. Tudo isso implica que $\gamma(T) = \gamma(T')$ e $\gamma_t(T') \geq \gamma_t(T) > \gamma(T) = \gamma(T')$.

Finalmente a recíproca é trivial.

(ii) Seja T uma árvore com as propriedades especificadas. Por contradição, suponhamos que não existe uma árvore T_0 com $T = T_0 \circ K_1$. Em particular, $T \neq K_2$. Assim, como na prova de (i), obtemos que cada vértice suporte de T tem exatamente uma folha.

Agora analisaremos por casos a existência de vértices especiais. Veremos que sempre temos uma contradição.

- (1) Se $\mathfrak{E}(T)$ é um conjunto vazio e como cada vértice suporte tem exatamente uma folha, concluímos que $T = T_0 \circ K_1$, onde T_0 é como na prova de (i), uma contradição.
- (2) Se $\mathfrak{E}(T) \neq \emptyset$, escolhemos ϵ exatamente como na prova de (i), obtendo $\delta(T - \epsilon) \geq 1$ e $\gamma(T) = \gamma(T - \epsilon)$ como antes, uma contradição.

Finalmente mostraremos a recíproca. Se $T = K_2$, é trivial. Portanto assumiremos que $T \neq K_2$. Claramente $\delta(T) \geq 1$. Seja T' um subgrafo induzido próprio de T com $\delta(T') \geq 1$. Seja $X = V(T) \setminus V(T')$. Assim podemos escrever $T' = T - X$, interpretando o conjunto X como os vértices removidos de T para gerar T' .

Da Proposição 13, e do fato que $S(T) = V(T_0)$ e $\mathfrak{E}(T) = \emptyset$, temos que $X = \{f_1, \dots, f_m, s_1, \dots, s_r\}$, onde f_i são folhas de T para $i \in [m]$ e s_j são vértices suporte de T para $j \in [r]$. Como T' é um subgrafo induzido próprio de T , claramente $m + r > 0$. Mais ainda, de $\delta(T') \geq 1$ inferimos que $m \geq r$ pois, para cada vértice suporte que removemos de T , exatamente uma folha em T fica isolada, e assim essa folha tem que ser removida também. Reordenado se necessário, seja f_j a folha do vértice suporte s_j em T para $j \in [r]$.

Agora mostraremos que $\gamma(T') < \gamma(T)$. Para isso pegamos o conjunto dominante mínimo $D = S(T)$ de T e construímos, convenientemente, um conjunto dominante de T' .

Se $r > 0$, seja $D' = D \setminus \{s_1, \dots, s_r\}$. Assim, se v é um vértice de T' , ou v é um vértice suporte de T diferente de s_j para $j \in [r]$, e portanto pertence a D' , ou v é uma folha diferente de f_j para $j \in [r]$. Da correspondência biunívoca entre folhas e vértices suporte na classe $T_0 \circ K_1$, inferimos que o vértice suporte de v é diferente de s_j para $j \in [r]$, e portanto pertence a D' .

Se $r = 0$, então $m > 0$. Logo X não contém vértices suporte, e existe pelo menos uma folha $f \in X$. Seja $D' = D \setminus \{s_f\}$. Assim, se v é um vértice de T' , ou v é uma folha de T diferente de f (em cujo caso tem vértice suporte diferente de s_f , e portanto pertence a D'), ou v é um vértice suporte de T . Neste último caso se $v \neq s$ então $v \in D'$; caso contrário, como $S(T)$ tem ordem pelo menos 2 ($T \neq K_2$), $v = s$ é adjacente a um vértice suporte que pertence a D' .

Em qualquer caso, D' é um conjunto dominante de T' . Daí, $\gamma(T') \leq |D'| < |D| = \gamma(T)$.

(iii) Seja T uma árvore com as propriedades especificadas. Por contradição, suponhamos que não existe uma árvore T_0 com $T = T_0 \circ K_1$ tal que T_0 não tem um emparelhamento perfeito. Em particular, $T \neq K_2$. Assim, como na prova de (i), obtemos que cada vértice suporte de T tem exatamente uma folha.

Agora analisaremos por casos a existência de vértices especiais. Veremos que em qualquer caso temos uma contradição.

- (1) Se $\mathfrak{E}(T)$ é um conjunto vazio e como cada vértice suporte tem exatamente uma folha, concluimos que $T = T_0 \circ K_1$, onde T_0 é como na prova de (i). Logo, T_0 tem um emparelhamento perfeito. Isso implica que o conjunto $V(T_0)$ é um conjunto dominante mínimo que é um conjunto dominante emparelhado, daí $\gamma(T) = |V(T_0)| = \gamma_p(T)$, uma contradição.
- (2) Se $\mathfrak{E}(T) \neq \emptyset$, escolhemos ϵ exatamente como na prova de (i), obtendo $\delta(T - \epsilon) \geq 1$ e $\gamma(T) = \gamma(T - \epsilon)$ como antes. Além disso, o grafo $T' = T - \epsilon$ tem um conjunto dominante emparelhado (mínimo) D'_p que contém todos os filhos de ϵ . Logo D'_p é também um conjunto dominante emparelhado de T , isso implica que $\gamma_p(T') \geq \gamma_p(T) > \gamma(T) = \gamma(T')$, uma contradição.

Finalmente mostraremos a recíproca. Se $T = K_2$, é trivial. Logo assumiremos que $T \neq K_2$. Claramente $\delta(T) \geq 1$. Seja D_p um conjunto dominante emparelhado

mínimo de T . Se f é uma folha de T , necessariamente f ou s_f pertencem a D_p . Mas se f pertence a D_p , por ter $G[D_p]$ um emparelhamento perfeito, temos que s_f também pertence a D_p . Assim $V(T_0) \subseteq D_p$. Além disso, $V(T_0) \subsetneq D_p$ pois T_0 não tem um emparelhamento perfeito. Portanto $\gamma(T) < \gamma_p(T)$. A propriedade negativa de T é consequência imediata do caso (ii). Isso completa a prova. \square

Teorema 6 *Para cada inteiro positivo k , um grafo G de cintura pelo menos $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$ pertence a $\mathcal{G}_k(\gamma, \gamma_t)$ se e somente se G é livre de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$.*

Prova: Seja T uma floresta em $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$. Note que, por definição T é um grafo com componentes $T_{i,0} \circ K_1$ e $\sum_{i=1}^{\ell} n(T_{i,0}) = k$. Inferimos então que $\delta(T) \geq 1$, $\gamma(T) = k$ e, uma vez que T contém K_2 como uma componente, $\gamma_t(T) > \gamma(T)$.

Afirmamos que cada subgrafo induzido próprio T' de T satisfaz ou $\delta(T') = 0$ ou $\gamma(T') < k$. Isso implica que os grafos em $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$ são subgrafos induzidos proibidos minimais para $\mathcal{G}_k(\gamma, \gamma_t)$, o qual prova a necessidade. Para mostrar a afirmação, fazemos uso do Lema 14(ii). Lembrar que tecnicamente podemos considerar $\gamma(\emptyset) = 0$ (e $\delta(\emptyset) = +\infty$). Seja T' um subgrafo induzido próprio de T , assim T' tem a forma $\bigcup_{i=1}^{\ell} T'_i$, onde todo T'_i é um subgrafo induzido de $T_{i,0} \circ K_1$ (pode ser vazio), e existe $i \in [\ell]$ tal que T'_i é um subgrafo induzido próprio de $T_{i,0} \circ K_1$ (pode ser vazio). Reordenado se necessário, seja tal $i = 1$. Se $\delta(T') \geq 1$ então $\delta(T'_1) \geq 1$ ou $\gamma(T'_1) = 0$ (quando é vazio). Em qualquer caso $\gamma(T'_1) < \gamma(T_{1,0} \circ K_1)$. Similarmente, pelo Lema 14(ii) temos que $\gamma(T'_i) \leq \gamma(T_{i,0} \circ K_1)$. Portanto

$$\begin{aligned} \gamma(T') &= \gamma(T'_1) + \sum_{i=2}^{\ell} \gamma(T'_i) \\ &< \gamma(T_{1,0} \circ K_1) + \sum_{i=2}^{\ell} \gamma(T_{i,0} \circ K_1) \\ &= \gamma(T) = k \end{aligned}$$

Com o fim de provar a suficiência, suponhamos, por contradição, que G é um grafo livre de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$ e cintura pelo menos $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$ com $\delta(G) \geq 1$, $\gamma(G) \geq k$, e $\gamma_t(G) > \gamma(G)$ tal que G é de ordem mínima.

Afirmamos que G pertence à classe $\mathcal{T}_{k'}(\gamma, \gamma_t)$ para $k' = \gamma(G) \geq k$. Assumindo isso, inferimos que G contém um subgrafo induzido em $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$, uma contradição.

Para isso basta observar que, removendo uma folha de algum $T_{i,0}$ junto com seu vértice suporte ou removendo uma componente K_2 de G , mantendo sempre em G pelo menos uma componente K_2 , resulta um subgrafo induzido de G em $\mathcal{T}_{k'-1}(\gamma, \gamma_t)$. Realizando esse procedimento $k' - k$ vezes, concluímos a afirmação.

Agora apresentamos a afirmação. Dividiremos a prova em duas partes.

Primeiro mostraremos que G é uma floresta. Por absurdo, suponhamos que G tem uma cintura C . Pela condição de cintura $\ell(C) \geq \lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$. Se k é ímpar temos que $\ell(C) \geq 5(\frac{k-1}{2}) + 1 + 2$, onde $\frac{k-1}{2} \in \mathbb{N}_0$. Desta forma, é fácil ver que C contém o subgrafo induzido $K_2 \cup \frac{k-1}{2}(K_2 \circ K_1)$ (note que $P_4 = K_2 \circ K_1$), que pertence a $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$. Se k é par, sabemos que $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil = \frac{5k+2}{2}$, assim temos que $\ell(C) \geq 5(\frac{k-2}{2}) + 1 + 2 + 1 + 2$, onde $\frac{k-2}{2} \in \mathbb{N}_0$. Logo, é fácil ver que C contém o subgrafo induzido $2K_2 \cup \frac{k-2}{2}(K_2 \circ K_1)$, que pertence a $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$. Em qualquer caso G tem induzido um elemento de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$, uma contradição.

Finalmente mostraremos que cada componente de G é da forma $T_{i,0} \circ K_1$, e pelo menos uma componente é K_2 . Para isso nos apoiaremos na caracterizações do Lema 14. Seja T_1, \dots, T_ℓ as componentes de G . Já que $\gamma_t(G) > \gamma(G)$, existe algum inteiro positivo r tal que $\gamma_t(T_i) > \gamma(T_i)$ para $i \in [r]$ e $\gamma_t(T_i) = \gamma(T_i)$ para $i \in [\ell] \setminus [r]$. Agora analisamos as componentes por casos.

(1) $T_i = K_2$ para $i \in [r]$.

Por absurdo, suponhamos que $T_i \neq K_2$ para algum $i \in [r]$. Pelo Lema 14(i), existe um subgrafo induzido próprio T'_i com as seguintes propriedades:

- $\delta(T'_i) \geq 1$
- $\gamma(T'_i) \geq \gamma(T_i)$
- $\gamma_t(T'_i) > \gamma(T'_i)$

Seja G' o subgrafo induzido próprio de G obtido pela troca da componente T_i pelo seu subgrafo induzido próprio T'_i . Das propriedades de T'_i , é imediato concluir que G' é um grafo livre de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$ e cintura pelo menos $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$ com $\delta(G') \geq 1$, $\gamma(G') \geq k$, e $\gamma_t(G') > \gamma(G')$. Contradizendo a minimalidade de G .

(2) $T_i = T_{i,0} \circ K_1$ para alguma árvore $T_{i,0}$ para $i \in [\ell] \setminus [r]$.

Procedemos como no caso (1). Suponhamos que $T_i \neq T_{i,0} \circ K_1$ para algum $i \in [\ell] \setminus [r]$. Pelo Lema 14(ii), existe um subgrafo induzido próprio T'_i com as seguintes propriedades:

- $\delta(T'_i) \geq 1$
- $\gamma(T'_i) \geq \gamma(T_i)$

Seja G' o subgrafo induzido próprio de G obtido pela troca da componente T_i pelo seu subgrafo induzido próprio T'_i . Das propriedades de T'_i e lembrando que $r \in \mathbb{Z}^+$, é imediato concluir que G' é um grafo livre de $\mathcal{T}_k(\gamma, \gamma_t)$ e cintura pelo menos $\lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$ com $\delta(G') \geq 1$, $\gamma(G') \geq k$, e $\gamma_t(G') > \gamma(G')$. Contradizendo a minimalidade de G .

Portanto, como $\gamma(G) = k'$, resulta que $G \in \mathcal{T}_{k'}(\gamma, \gamma_t)$. Isso completa a prova. \square

Para $k \in \{3, 4\}$, O Teorema 6 implica os seguintes corolários onde a condição de cintura fica ligeiramente enfraquecida. Uma vez que os dois corolários podem ser provados de forma similar, somente apresentaremos os detalhes do primeiro.

Corolário 15. *Um grafo G de cintura pelo menos 7 pertence a $\mathcal{G}_3(\gamma, \gamma_t)$ se e somente se G é livre de $\{C_7, 3K_2, K_2 \cup P_4\}$.*

Prova: Como o número de dominação γ e o número de dominação total γ_t do grafo C_7 são 3 e 4 respectivamente, temos que C_7 é um subgrafo induzido proibido (minimal) para $\mathcal{G}_3(\gamma, \gamma_t)$. Além disso, $\mathcal{T}_3(\gamma, \gamma_t) = \{3K_2, K_2 \cup P_4\}$ também são subgrafos induzidos proibidos minimais, como foi mostrado na prova do Teorema 6 (notar que essa etapa da prova foi independente da condição de cintura), isso prova a necessidade.

Finalmente provamos a suficiência. Se um grafo de cintura pelo menos 7 é livre de C_7 , então ele tem cintura pelo menos $8 = \lceil \frac{5 \cdot 3 + 1}{2} \rceil$. Portanto, como $\mathcal{T}_3(\gamma, \gamma_t) = \{3K_2, K_2 \cup P_4\}$, o resultado se segue imediatamente do Teorema 6. \square

Corolário 16. *Um grafo G de cintura pelo menos 10 pertence a $\mathcal{G}_4(\gamma, \gamma_t)$ se e somente se G é livre de $\{C_{10}, 4K_2, 2K_2 \cup P_4, K_2 \cup (P_3 \circ K_1)\}$.*

Agora provaremos o Teorema 7, a qual é muito similar à prova do Teorema 6. Para isso necessitamos de uma proposição.

Proposição 17. *Toda árvore T sem vértices isolados satisfaz $d(T) = 2 > 1 = d_t(T)$. Além disso, o mesmo acontece se trocamos árvores por florestas.*

Prova: Primeiramente vamos mostrar que $d(T) = 2$. Seja D_1 um conjunto dominante mínimo de T . Como $\delta(T) \geq 1$, sabemos que $D_2 = V(T) \setminus D_1$ é um conjunto dominante de T , caso contrario contradizemos a minimalidade de D_1 . Logo $d(T) \geq 2$.

Por outro lado, como T não é trivial, seja f uma folha de T e s_f seu vértice suporte em T . Se D é um conjunto dominante de T , necessariamente f ou s_f pertence a D . Isso implica que toda partição em conjuntos dominantes de $V(T)$ tem no máximo dois elementos. Concluimos que $d(T) = 2$.

Finalmente se $D_{t,1}$ e $D_{t,2}$ são dois conjuntos dominantes totais disjuntos de T , necessariamente um contém f , digamos $D_{t,1}$, e o outro contém s_f , digamos $D_{t,2}$. Mas nesse caso f é um vértice isolado de $T[D_{t,1}]$, uma contradição. Portanto $d_t(T) = 1$.

No caso em que T é uma floresta, basta aplicar o resultado para árvores nas seguintes relações.

Seja G um grafo sem vértices isolados, então

$$d(G) = \min\{d(G_1), \dots, d(G_\ell)\}$$

$$d_t(G) = \min\{d_t(G_1), \dots, d_t(G_\ell)\}$$

onde G_1, \dots, G_ℓ são as componentes de G . \square

Teorema 7 *Para cada inteiro positivo k , um grafo G de cintura pelo menos $\lceil \frac{5k}{2} \rceil$ pertence a $\mathcal{G}_k(d, d_t)$ se e somente se G é livre de \mathcal{T}_k .*

Prova: Seja T uma floresta em \mathcal{T}_k . Note que, pela forma de T como um grafo com componentes $T_{i,0} \circ K_1$ e $\sum_{i=1}^{\ell} n(T_{i,0}) = k$, inferimos que $\delta(T) \geq 1$, $\gamma(T) = k$, e da Proposição 17, $d_t(T) > d(T)$. De novo cada subgrafo induzido próprio T' de T satisfaz ou $\delta(T') = 0$ ou $\gamma(T') < k$. Isso implica que os grafos em \mathcal{T}_k são subgrafos induzidos proibidos minimais para $\mathcal{G}_k(d, d_t)$, o qual prova a necessidade.

Com o finalidade de provar a suficiência, suponhamos, por contradição, que G é um grafo livre de \mathcal{T}_k e cintura pelo menos $\lceil \frac{5k}{2} \rceil$ com $\delta(G) \geq 1$, $\gamma(G) \geq k$, e $d(G) > d_t(G)$ tal que G é de ordem mínima.

Afirmamos que G pertence à classe $\mathcal{T}_{k'}$ para $k' = \gamma(G) \geq k$. Portanto, novamente, inferimos que G contém um subgrafo induzido em \mathcal{T}_k , uma contradição.

Agora apresentamos a afirmação. Dividimos a prova em duas partes.

Primeiro mostraremos que G é uma floresta. Por absurdo, suponhamos que G tem uma cintura C . Pela condição de cintura $\ell(C) \geq \lceil \frac{5k}{2} \rceil$. Se k é ímpar, sabemos que $\lceil \frac{5k}{2} \rceil = \lceil \frac{5k+1}{2} \rceil$. Logo, novamente, é fácil ver que C contém o subgrafo induzido $K_2 \cup \frac{k-1}{2}(K_2 \circ K_1)$, que pertence a \mathcal{T}_k . Se k é par, temos que $\ell(C) \geq 5(\frac{k}{2})$, onde $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}_0$. Consequentemente, é fácil ver que C contém o subgrafo induzido $\frac{k}{2}(K_2 \circ K_1)$, que pertence a \mathcal{T}_k . Em qualquer caso G tem induzido um elemento de \mathcal{T}_k , uma contradição.

Finalmente mostraremos que cada componente de G é da forma $T_{i,0} \circ K_1$ e nos apoiaremos nas caracterizações do Lema 14. Seja T_1, \dots, T_ℓ as componentes de G . Suponhamos, por contradição, que $T_i \neq T_{i,0} \circ K_1$ para algum $i \in [\ell]$. Pelo Lema 14(ii), existe um subgrafo induzido próprio T'_i com as seguintes propriedades:

- $\delta(T'_i) \geq 1$
- $\gamma(T'_i) \geq \gamma(T_i)$

Seja G' o subgrafo induzido próprio de G obtido de trocar a componente T_i por seu subgrafo induzido próprio T'_i . Das propriedades de T'_i é imediato concluir que G' é um grafo livre de \mathcal{T}_k e cintura pelo menos $\lceil \frac{5k}{2} \rceil$ com $\delta(G') \geq 1$, $\gamma(G') \geq k$ e, da Proposição 17, $d(G') > d_t(G')$. Contradizendo a minimalidade de G .

Portanto, como $\gamma(G) = k'$, resulta que $G \in \mathcal{T}_{k'}$. Isso completa a prova. \square

A prova do Teorema 8 é também muito similar à prova do Teorema 6 mas desta vez usamos o Lema 14(iii) e (ii) no lugar do Lema 14(i) e (ii).

Para terminar esta seção, mostraremos os resultados de complexidade. Antes apresentaremos algumas definições.

Dizemos que um conjunto C é um 3-elemento se $|C| = 3$. E a partir de agora, também definimos $C' = \{x' : x \in C\}$. Claramente a operação “*prima*” é bem comportada com a união, a interseção e a relação de pertence da Teoria de Conjuntos.

A seguinte prova de complexidade se sustenta em uma modificação de uma prova de complexidade devida a Pfaff [19] e McRae [24].

Teorema 9 *Dado um grafo split G com $\gamma(G) = \gamma_t(G) = \gamma_p(G)$ e um inteiro k , decidir se $\gamma(G) \leq k$, é NP-completo.*

Prova: Claramente, o problema de decisão considerado está em *NP*. Em seguida, descreveremos uma redução do conhecido problema NP-completo EXACT COVER BY 3-SETS. Assim, seja (X_0, \mathcal{C}_0) uma instância de EXACT COVER BY 3-SETS, isto é, X_0 é um conjunto divisível por 3 e \mathcal{C}_0 é uma família de subconjuntos 3-elemento de X_0 tal que \mathcal{C}_0 é uma cobertura de X_0 i.e., $X_0 = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_0} C$. A ideia é definir uma redução, construindo um grafo split apropriado.

Descreveremos o método de construção geral dada uma instância (X, \mathcal{C}) de EXACT COVER BY 3-SETS.

Grafo $S(X, \mathcal{C})$

- Para cada elemento de x_i de X , geramos um vértice x_i .
- Para cada elemento C_j de \mathcal{C} , geramos um vértice C_j .
- Adicionamos arestas tal que $\{C_1, \dots, C_m\}$ seja um clique.
- Para cada C em \mathcal{C} com elementos x, y e z , adicionamos as três arestas Cx, Cy e Cz .

Mas, se aplicamos diretamente a redução à instância (X_0, \mathcal{C}_0) , não temos necessariamente que $\gamma(G) = \gamma_t(G) = \gamma_p(G)$. Note que as igualdades são possíveis se existe um conjunto dominante mínimo emparelhado de G . Para isso podemos duplicar o grafo $S(X_0, \mathcal{C}_0)$, digamos adicionando o grafo $S(X'_0, \mathcal{C}'_0)$, e conectar todas as cláusulas para obter uma clique. Mantendo a notação, o grafo resultante é $S(X_0 \cup X'_0, \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}'_0)$.

Para simplificar a transformação atual, dividimos ela em duas transformações mais simples.

$$(*) (X_0, \mathcal{C}_0) \mapsto (X, \mathcal{C}) \mapsto (G, k)$$

onde $X = X_0 \cup X'_0$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}'_0$, $G = S(X, \mathcal{C})$ e $k = n$.

A primeira de EXACT COVER BY 3-SETS em EXACT COVER BY 3-SETS, e a segunda de EXACT COVER BY 3-SETS no problema atual. Portanto, basta mostrar que cada uma delas é uma redução, para concluir o pedido.

Mostrar que a primeira transformação de (*) é uma redução, fica mais claro com a operação “prima”. Se D_0 é uma solução de EXACT COVER BY 3-SETS para a instância (X_0, \mathcal{C}_0) , das propriedades da operação prima, resulta que $D = D_0 \cup D'_0$ é uma solução de EXACT COVER BY 3-SETS para a instância (X, \mathcal{C}) . Reciprocamente, se D é uma solução de EXACT COVER BY 3-SETS para a instância (X, \mathcal{C}) , então $D_0 = D \cap \mathcal{C}_0$ é uma solução de EXACT COVER BY 3-SETS para a instância (X_0, \mathcal{C}_0) . Claramente a transformação é polinomial limitada em termos de n e m .

Finalmente, mostraremos que a segunda transformação de (*) é uma redução de EXACT COVER BY 3-SETS no problema atual.

Primeiro mostraremos que (G, k) é uma instância do problema atual. Notar que $N_G[x_i] \subseteq N_G[C_j]$ sempre que $x_i \in C_j$, com isso é possível construir um conjunto dominante mínimo D de G tal que D é uma subfamília de \mathcal{C} .

Daí inferiremos que $G[D]$ tem um emparelhamento perfeito. Para isso é suficiente que $|D|$ seja par, pois $G[\mathcal{C}]$ é completo.

Então, suponhamos, por absurdo, que $|D|$ é ímpar. Seja $D_0 = D \cap \mathcal{C}_0$ e $D_0^* = D \cap \mathcal{C}'_0$. Claramente $\{D_0, D_0^*\}$ é uma partição de D . Da imparidade da ordem de D , as ordens de D_0 e D_0^* são necessariamente diferentes. Sem perder generalidade, seja $|D_0| < |D_0^*|$. Assim, pensando em $S(X'_0, \mathcal{C}'_0)$ como um duplicado de $S(X_0, \mathcal{C}_0)$, temos que $D_1 = D_0 \cup D'_0$ é um conjunto dominante de G com $|D_1| = |D_0| + |D'_0| < |D_0^*| + |D_0| = |D|$, uma contradição.

Agora mostraremos que a segunda transformação de (*) é de fato uma redução. A partir da construção feita e se D é o conjunto dominante mínimo de G construído, claramente $X = \bigcup_{C \in D} C$, logo temos que $3n \leq 3|D|$, portanto $n \leq |D|$.

Consequentemente, se $\gamma(G) \leq k = n$, resulta que $|D| = n$ e $X = \bigcup_{C \in D} C$. Reciprocamente, se um tal subconjunto D existe, então ele é certamente um conjunto dominante de G de ordem n , o qual implica $\gamma(G) \leq n = k$. Claramente a transformação é polinomial limitada em termos de n e m . Isso completa a prova. \square

Teorema 10 *Dado um grafo G , decidir se $\gamma(G) = \gamma_t(G)$, é NP-difícil.*

Prova: Descreveremos uma redução do conhecido problema NP-completo 3SAT. Assim, seja f uma instância de 3SAT com clausulas C_1, \dots, C_m sobre as variáveis booleanas x_1, \dots, x_n .

Agora passamos à construção do grafo G cuja ordem é polinomial limitada em termos de n e m tal que f é satisfatível se, e somente se, $\gamma(G) = \gamma_t(G)$.

Para cada variável x_i criamos uma copia $G(x_i)$ do grafo mostrado na Figura 3.7 e denotamos seus vértices como é indicado na figura.

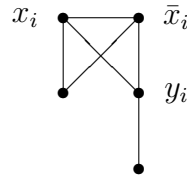


Figura 3.7: Grafo $G(x_i)$ criado para a variável x_i .

Para cada clausula C_j com literais x , y , e z , criamos uma copia $G(C_j)$ de K_2 e denotamos um de seus vértices por C_j .

Além disso, criamos as três arestas $C_j x$, $C_j y$, e $C_j z$. Se, por exemplo, $C_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$, então estes são as três arestas $C_1 x_1$, $C_1 \bar{x}_2$, e $C_1 \bar{x}_3$. Isso completa a construção de G .

Agora mostraremos que pela estrutura do grafo construído G , resulta que $\gamma(G) = 2n + m$. Uma vez que $\{x_i : i \in [n]\} \cup \{y_i : i \in [n]\} \cup \{C_j : j \in [m]\}$ é um conjunto dominante de G , temos que $\gamma(G) \leq 2n + m$. Mais ainda, já que cada conjunto dominante de G contém pelo menos dois vértices de cada $G(x_i)$ e pelo menos um vértice de cada $G(C_j)$, obtemos que $\gamma(G) = 2n + m$ (portanto $\gamma_t(G) \geq 2n + m$).

Por último, passamos a mostrar que a transformação definida é uma redução.

Se $\gamma_t(G) = \gamma(G) = 2n + m$, então pela observação anterior, G tem um conjunto dominante total (mínimo) D_t que contém exatamente dois vértices de cada $G(x_i)$ e exatamente um vértice de cada $G(C_j)$. Note que, pela definição de conjunto dominante total e pela estrutura de G , isso implica que $D_t \cap V(G(x_i)) \in \{\{x_i, y_i\}, \{\bar{x}_i, y_i\}\}$ e $D_t \cap V(G(C_j)) = \{C_j\}$. Portanto a interseção de um conjunto dominante total mínimo com os grafos $G(x_i)$ indica uma atribuição verdade satisfatível de f .

Reciprocamente, se f é satisfatível, consideremos uma atribuição verdade satisfatível de f . Agora $\{x_i : i \in [n] \text{ e } x_i \text{ é definida como verdadeira}\} \cup \{\bar{x}_i : i \in [n] \text{ e } x_i \text{ é definida como falsa}\} \cup \{y_i : i \in [n]\} \cup \{C_j : j \in [m]\}$ é um conjunto dominante total de G de ordem $2n + m$, o qual implica $\gamma_t(G) = 2n + m = \gamma(G)$.

Finalmente, é claro que a ordem de G é $5n + 2m$. Isso completa a prova. \square

Teorema 11 *Dado um grafo G , decidir se $2\gamma(G) = \gamma_p(G)$, é NP-difícil.*

Prova: Descreveremos uma redução do conhecido problema NP-completo 3SAT. Assim, seja f uma instância de 3SAT com clausulas C_1, \dots, C_m sobre as variáveis booleanas x_1, \dots, x_n .

Agora passamos à construção do grafo G cuja ordem é polinomial limitada em termos de n e m tal que f é satisfatível se, e somente se, $2\gamma(G) = \gamma_p(G)$.

Para cada variável x_i criamos uma copia $G(x_i)$ de K_3 e denotamos dois vértices de $G(x_i)$ por x_i e \bar{x}_i .

Para cada clausula C_j com literais x, y , e z , criamos um vértice C_j e as três arestas C_jx, C_jy , e C_jz . Isso completa a construção de G .

Agora mostraremos que pela estrutura do grafo construído G , resulta que $\gamma_p(G) = 2n$. Uma vez que $\{x_i : i \in [n]\} \cup \{\bar{x}_i : i \in [n]\}$ é um conjunto dominante emparelhado de G , temos que $\gamma_p(G) \leq 2n$. Mais ainda, já que cada conjunto dominante de G contém pelo menos um vértice de cada $G(x_i)$, para qualquer conjunto dominante emparelhado D_p de G obtemos que $|D_p| \geq 2n$. Logo $\gamma_p(G) = 2n$ (portanto $\gamma(G) \geq n$).

Por último, mostraremos que a transformação definida é uma redução.

Se $2\gamma(G) = \gamma_p(G) = 2n$ ($\gamma(G) = n$) então pela observação anterior, G tem um conjunto dominante (mínimo) D que contém exatamente um vértice de cada $G(x_i)$. Portanto um conjunto dominante mínimo de G indica uma atribuição verdade satisfável de f .

Reciprocamente, se f é satisfável, consideremos uma atribuição verdade satisfável de f . Agora $\{x_i : i \in [n] \text{ e } x_i \text{ é definida como verdadeira}\} \cup \{\bar{x}_i : i \in [n] \text{ e } x_i \text{ é definida como falsa}\}$ é um conjunto dominante de G de ordem n , o qual implica $2\gamma(G) = 2n = \gamma_p(G)$.

Finalmente, é claro que a ordem de G é $3n + m$. Isso completa a prova. \square

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho estudamos o conceito de grafos perfeitos com relação aos parâmetros de dominação clássicos. Para cada relação abordada caracterizamos as respectivas classes, mediante a apresentação de um conjunto finito de subgrafos proibidos minimais. Como consequência natural, introduzimos também a classe $\mathcal{G}_k(\nu, \tau)$, que representa a classe dos “grafos perfeitos” com relação aos parâmetros ν e τ . Para esta nova classe conseguimos obter uma caracterização adicionando uma condição de cintura, quando os parâmetros estão relacionados à dominação. Além disso, para valores concretos de k , é possível proceder como nos corolários, e obter uma caracterização mais fina das classes $\mathcal{G}_k(\nu, \tau)$, que incluem ciclos e uma condição de cintura menos restrita. Na parte final, mostramos resultados de complexidade, que nos sugerem que os grafos extremais de dominação possivelmente não tem uma caracterização tão simples como a dos grafos perfeitos estudados aqui.

Este trabalho foi apresentado no 9th International colloquium on graph theory and combinatorics (ICGT 2014). A versão completa foi aceita para publicação na revista *Discrete Mathematics* [4]. Nesta versão propusemos duas conjeturas de complexidade. No mesmo ano conseguimos apresentar uma resposta afirmativa para uma delas (junto com dois resultados de complexidade).

Teorema 18. *Dado um grafo G , decidir se $\gamma(G) = \gamma_p(G)$, é NP-difícil.*

Conjetura 19. *Dado um grafo G , decidir se $2\gamma(G) = \gamma_t(G)$, é NP-difícil.*

Esse trabalho, que tem por nome *Complexity between Domination, Independent, Connected and Paired Domination Numbers*, foi apresentado no Latin American

Workshop on Cliques in Graphs 2014 (LAWCG 2014) e submetido para Matemática Contemporânea [2]. Continuando com a linha de dominação em grafos, nos interessamos no conceito de *distance domination* restrito à classe dos maximal outerplanar graphs. O artigo *Distance Domination, Distance Guarding, and Distance Vertex Cover of Maximal Outerplanar Graphs* é o produto desse estudo, e foi submetido para a revista *Discrete Applied Mathematics* [3].

Como trabalho futuro, como já falamos, parece um problema desafiador provar variações dos Teoremas 6, 7, e 8 sem uma condição de cintura. Mais ainda, podemos estender nossas pesquisas a classes derivadas da desigualdade $d_t(G) \geq \left\lfloor \frac{d(G)}{2} \right\rfloor$, e também podemos considerar o número domático emparelhado [13] nesse contexto.

Referências Bibliográficas

- [1] R. B. Allan and R. Laskar. On domination and independent domination numbers of a graph. *Discrete Math.*, 23:73–76, 1978.
- [2] J. D. Alvarado, S. Dantas, and D. Rautenbach. Complexity between domination, independent, connected and paired domination numbers. *Submetido para Matemática Contemporânea*.
- [3] J. D. Alvarado, S. Dantas, and D. Rautenbach. Distance domination, distance guarding, and distance vertex cover of maximal outerplanar graphs. *Submetido para a revista Discrete Applied Mathematics*.
- [4] J. D. Alvarado, S. Dantas, and D. Rautenbach. Perfectly relating the domination, total domination, and paired domination numbers of a graph. *Aceita para publicação na revista Discrete Mathematics*.
- [5] B. Bollobás and E. Cockayne. Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *J. Graph Theory*, 3:241–249, 1979.
- [6] R. Brigham and R. Dutton. Domination in claw-free graphs. *Congr. Numer.*, 132:69–75, 1998.
- [7] E. Cockayne and S. Hedetniemi. Towards a theory of domination in graphs. *Networks*, 7:247–261, 1977.
- [8] S. Cook. The complexity of theorem proving procedures. pages 151–158. Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 1971.

- [9] S. Dantas, C. Löwenstein, F. Joos, D. Rautenbach, and D. Sousa. Relating ordinary and total domination in cubic graphs of large girth. *Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series*, 16:53–57, 2013.
- [10] G. Dirac. Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.*, 2:69–81, 1952.
- [11] L. K. E. Shan and M. Henning. A characterization of trees with equal total domination and paired-domination numbers. *Australas. J. Comb.*, 30:31–39, 2004.
- [12] R. D. E.J. Cockayne and S. Hedetniemi. Total domination in graphs. *Networks*, 10:211–219, 1980.
- [13] T. Haynes and P. Slater. Paired-domination and the paired-domatic number. *Congr. Numer.*, 109:65–72, 1995.
- [14] M. Henning. Graphs with large total domination number. *J. Graph Theory*, 35:21–45, 2000.
- [15] M. Henning. Trees with equal total domination and paired-domination numbers. *Util. Math.*, 69:207–218, 2006.
- [16] M. Henning and P. Vestergaard. Trees with paired-domination number twice their domination number. *Util. Math.*, 74:187–197, 2007.
- [17] M. Henning and A. Yeo. *Total domination in graphs*. Springer, 2013.
- [18] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors), 1972.
- [19] R. Laskar and J. Pfaff. *Domination and irredundance in split graphs*. Technical Report. Clemson University.
- [20] P. S. M. Chudnovsky, N. Robertson and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. *Ann. Math.*, 164:51–229, 2006.

- [21] M. H. M. Dorfling, W. Goddard and C. Mynhardt. Construction of trees and graphs with equal domination parameters. *Discrete Math.*, 306:2647–2654, 2006.
- [22] D. S. J. M. R. Garey. *Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company, 1979. New York.
- [23] J. McCoy. Paired-domination in graphs, 2013. University of Johannesburg, Ph. D. Thesis.
- [24] A. McRae. Np-completeness proofs for bipartite and chordal graphs, 1994. Clemson University, Ph. D. Thesis.
- [25] O. Schaudt. Paired- and induced paired-domination in $\{E, \text{net}\}$ -free graphs. *Discuss. Math., Graph Theory*, 32:473–485, 2012.
- [26] O. Schaudt. Total domination versus paired domination. *Discuss. Math., Graph Theory*, 32:435–447, 2012.
- [27] D. Sumner. Critical concepts in domination. *Discrete Math.*, 86:33–46, 1990.
- [28] D. Sumner and J. Moore. Domination perfect graphs. *Notices Am.Math. Soc.*, 26:A–569, 1979.
- [29] S. H. T.W. Haynes and P. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, 1998.
- [30] B. Zelinka. Domatic numbers of graphs and their variants. In *Domination in Graphs: Advanced Topics*, pages 351–377. Marcel Dekker, 1998.
- [31] I. Zverovich and V. Zverovich. An induced subgraph characterization of domination perfect graphs. *J. Graph Theory*, 20:375–395, 1995.